ABHANDLUGNEN ZUR THEORIE DER KONFORMEN ABBILDUNG.

(H. A. SCHWARZ zu seinem 50-jährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 zugeeignet.)

II. Die Fundamentalabbildung beliebiger mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche nebst einer Anwendung auf die Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche.

VON

PAUL KOEBE

in JENA.

Inhaltsübersicht.

A. Einleitung.

Nachdem ich in der Abhandlung I[1] dieser Serie mich lediglich mit der konformen Abbildung des einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs beschäftigt habe, lege ich der Untersuchung nunmehr einen beliebigen mehrfach [$(p+1)$-fach] zusammenhängenden schlichten Bereich B zu Grunde, ohne übrigens über die Natur seiner Begrenzung irgend welche spezialisierenden Voraussetzungen zu machen. Auch ist es für die Lösung des sogleich zu erwähnenden, in dieser Abhandlung in erster Linie behandelten Abbildungsproblems nicht von wesentlichem Belang, ob der Bereich von endlicher Ordnung des Zusammenhanges ist oder als der allgemeinste schlichte Bereich von unendlich hohem Zusammenhange vorgestellt wird.

Das Abbildungsproblem, das wir in § 1—4 (*erster u. zweiter Teil*) behandeln, ist eine Verallgemeinerung der in der Abhandlung I für einfach und zweifach zusammenhängende Bereiche behandelten Kreisabbildung (d. i. Abbildung auf eine Kreisfläche, zu unterscheiden von der Kreisring-Abbildung beim zweifach zusammenhängenden Bereiche). Im Bereiche B (exklusive dessen Grenze), welcher in der z-Ebene liegend vorgestellt wird, soll eine durchaus reguläre, grenzstellenfreie Funktion $f(z) = \zeta$ erklärt werden, welche ihn auf das vollständige schlichte Innere des Einheitskreises der ζ-Ebene in der Weise konform abbildet, dass jeder dem Innern des Einheitskreises der ζ-Ebene angehörende Wert von der Funktion $f(z)$ innerhalb B einmal und nur einmal angenommen wird. Diese Funktion stellt die zum Bereiche B im Sinne der »Grenzkreisuniformisierung» gehörende uniformisierende Variable dar. Sie liefert von der über B ausgebreitet zu denkenden

[1] »Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. I. Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung.» Journal f. Math. Bd 145 S. 177—223. Die ganze Serie ist auf ca. vier Abhandlungen berechnet.

einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche Φ dieses Bereichs eine eineindeutige, als die *Fundamentalabbildung* oder präziser *unverzweigte Fundamentalabbildung* zu bezeichnende konforme Abbildung auf das Innere des ζ-Einheitskreises[1] und ist, abgesehen von einer linearen Transformation, welche das Innere des Einheitskreises in sich transformiert, vollständig bestimmt. Die Existenz dieser Funktion wird hier durch ein rein funktionentheoretisches Verfahren bewiesen, bei welchem insbesondere die Lösung der Randwertaufgabe der Potentialtheorie nicht benötigt wird. Dieses von uns ebenfalls als *Schmiegungsverfahren* bezeichnete Verfahren ist die sinngemässe Ausdehnung des in der Abhandlung I von mir zur ausführlichen Entwickelung gebrachten, in einer Gött. Nachr.-Note (1912)[2] vorläufig mitgeteilten »Schmiegungsverfahrens», eine Ausdehnung, auf welche ich in jener Note ebenfalls hingewiesen habe.

Die Entwicklungen der vorliegenden Abhandlung können dabei doch wesentlich unabhängig von der Abhandlung I verstanden werden. Was insbesondere das Schmiegungsverfahren anbetrifft, so biete ich hier in dem allgemeineren Falle des *mehrfach* zusammenhängenden Bereichs eine Beweisform, welche gegenüber der in I gegebenen Beweisform wesentlich neues bietet und daher auch in Anwendung auf das in I behandelte speziellere Problem der Abbildung des *einfach* zusammenhängenden Bereichs gegenüber der dortigen Darstellung ein besonderes Interesse beanspruchen darf. Für beide Methoden charakterisch ist die Anwendung des sogenannten *Schwarzschen Lemmas*, welches besagt, dass jede für $|z| < 1$ reguläre, für $z = 0$ den Wert null annehmende analytische Funktion, welche dem absoluten Betrage ihrer Werte nach in dem genannten z-Gebiete unterhalb eins

---

[1] Für diese Überlagerungsfläche ist die der POINCARÉ'schen Majorantenmethode (Bull. Soc. Math. de France t. 11. 1883) zugrundeliegende Bedingung des Vorhandenseins von drei völlig unbedeckten Punkten der Ebene erfüllt. Diese POINCARÉ'sche Arbeit in Verbindung mit dem Aufsatze von OSGOOD (Am. Trans. 1900) liefert daher bereits eine Lösung der Abbildungsaufgabe, eine Lösung, welche indessen die von uns nicht benötigten SCHWARZ'schen Entwicklungen über die Integration der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ zur Voraussetzung hat. Auf unsere Problemstellung geht auch Herr F. SCHOTTKY ein in der Arbeit: »Über die Beziehung zwischen veränderlichen Grössen, die auf gegebene Gebiete beschränkt sind». (Sitzungsb. d. Kgl. Preuss. Ak. d. Wiss., 1907 S. 919 ff. und 1908, S. 117 ff). Die Problemstellung ist ein Spezialfall des allgemeinen von mir in den Gött. Nachr. (1907) zuerst behandelten Problems der Grenzkreis-Uniformisierung und findet sich auch unter den von mir ebenda (1907) behandelten spezielleren Problemen der »Uniformisierung reeller algebraischer Kurven» vor, insofern als nach SCHOTTKY (Dissertation, Journal f. Math. Bd. 83) jedem schlichten mehrfach zusammenhängenden Bereiche eine reelle algebraische Kurve zugeordnet werden kann. Vgl. auch FRICKE'S auf orthosymmetrische Riemannsche Flächen bezügliches Fundamentaltheorem II in FRICKE-KLEIN, »Automorphe Funktionen» Bd. II, S. 46.

[2] »Über eine neue Methode der konformen Abbildung und Uniformisierung.» Gött. Nachr. 1912 p. 844—848; siehe insbesondere Absatz 4. Absatz 2 und 3 derselben Note kommen im dritten und vierten Teile vorliegender Abhandlung zur ausführlichen Entwickelung.

bleibt, die Eigenschaft hat, im Gebiete $|z| \leq q$ ihrerseits dem absoluten Betrage der Werte nach unterhalb q zu bleiben. Ein Erreichen der Schranke q kann nur eintreten, wenn die Funktion die Gestalt $\alpha \cdot z$ hat, unter α eine Konstante vom absoluten Betrage 1 verstanden. Das vorstehend bezeichnete SCHWARZ'sche Lemma wird bei der Anwendung vielfach in transformierter Gestalt (»*erweitertes Schwarzsches Lemma*») zur Geltung kommen.

Um das Schmiegungsverfahren zur Anwendung bringen zu können, ist, wie in I, eine, im allgemeinen elementare *vorbereitende Abbildung* des Bereichs B auf einen Bereich B_1 innerhalb des Einheitskreises notwendig. Im Falle eines vollständig ausgearteten (d. i. nur von isolierten Punkten begrenzten) Bereichs wird dieselbe durch die Umkehrungsfunktion der elliptischen Modulfunktion geleistet, die ihrerseits hier als Abbildungsfunktion des Spitzendreiecks gewonnen wird.

Nachdem im ersten Teile die Abbildungsfunktion $f(z)$ gewonnen ist, wird im *zweiten Teile* das Verhalten der Abbildungsfunktion bei geschlossenen Umläufen und insbesondere auch das Verhalten derselben auf der Grenze des Bereichs B näher untersucht.

Im *dritten Teile* schliesslich wird die *verzweigte Fundamentalabbildung* (d. i. verzweigte Abbildung auf das Innere des Einheitskreises, in speziellen Fällen ganze Ebene exkl. bezw. inkl. des unendlich fernen Punktes) der schlichten Bereiche durchgeführt. Der allgemeinste Fall lässt sich auf den Fall der gewöhnlichen signierten Kreisscheibe zurückführen, wobei hier der Fall endlich vieler innerhalb der Kreisfläche gegebener relativer Verzweigungspunkte $a_\varkappa$ mit vorgegebenen Verzweigungszahlen $n_\varkappa$ und der von unendlich vielen solchen Verzweigungspunkten auf gleicher Linie mittels des Schmiegungsverfahrens zu behandeln sind, wobei namentlich die Feststellung des tatsächlichen Eintretens der erwarteten Schmiegungswirkung durch besondere Überlegungen geleistet werden muss.

Für den Reduktionsprozess dient als Grundlage die Kenntnis der SCHWARZ'schen *Dreiecksfunktionen* und des elliptischen Integrals erster Art, deren hier gegebene Behandlung ein gewisses Interesse für sich darbieten dürfte.

Der vierte Teil enthält eine Anwendung der verzweigten Fundamentalabbildung der schlichten Vollebene auf die Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche, jenes Riemannsche Problem, welches bekanntlich zuerst (1870) durch SCHWARZ eine in sich geschlossene potentialtheoretische Lösung von spezifischer methodischer Tragweite fand. Als eine Besonderheit unserer Lösung ist ihr rein funktionentheoretischer, im Geiste von WEIERSTRASS durchaus potenzreihentheoretisch bestimmter Charakter hervorzuheben.

Überhaupt ist die ganze Abhandlung II, wie auch die Abhandlung I von der Idee einer rein funktionentheoretischen, allein den Potenzreihenbegriff zugrundelegenden Behandlungsweise beherrscht.[1]

B. Erster Teil.

Existenzbeweis der unverzweigten Fundamentalabbildung: das Schmiegungsverfahren.

§ 1.

Problemstellung und Unitätssatz. Vorbereitende Abbildung des abzubildenden Bereichs auf einen Bereich innerhalb des Einheitskreises.

Es werde mit B ein schlichter $(p+1)$-fach zusammenhängender Bereich der z-Ebene bezeichnet, für welchen jedoch $p \geqq 2$ ist, aber auch $= \infty$ sein kann. Die Zahl $p+1$ heisst die Zusammenhangszahl des Bereichs B, die Zahl p das Geschlecht des Bereichs B. Über die Natur der Begrenzungslinien des Bereichs B werde keinerlei spezialisierende Voraussetzung gemacht. Überhaupt wird unter dem Bereich B lediglich das eigentliche Innere desselben verstanden, d. i. die Gesamtheit aller derjenigen Bereichpunkte, mit welchen zugleich eine vollständige Umgebung derselben zum Bereiche gehört. Wir unterscheiden, wie in der Abhandlung I, zwischen inneren Punkten, Grenzpunkten und äusseren Punkten des Bereichs. Von den $p+1$ Begrenzungslinien können sich einzelne oder auch alle

[1] Der Gedanke einer rein funktionentheoretischen Behandlung der Uniformisierungsprobleme, insbesondere der Grenzkreisuniformisierung ist, wie ich auch in der Abhandlung I erwähnte, in gewissem Umfange schon früher zur Geltung gekommen: so bei Gauss (Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels), bei Poincaré (Acta mathematica Bd. IV), Schlesinger [Crelles Journal Bd. 105 und 110 (V)]. Insbesondere haben Poincaré (l. c. § 17) und Schlesinger (l. c.) eine Darstellung der Uniformisierungstranszendenten für die schlichte Vollebene, unter der Voraussetzung lauter reeller Verzweigungsstellen unendlich hoher Ordnung, durch algebraische Näherungsfunktionen behandelt, die bei Poincaré durch sukzessive Quadratwurzelausziehungen gefunden werden. Diese Untersuchungen tragen jedoch in der dargebotenen Form nicht den Charakter selbständiger Existenzbeweise, vielmehr den hypothetischer Konstruktionen, insofern als ihre Gültigkeit den anderweitig (bei Poincaré durch die Kontinuitätsmethode) erbrachten Existenzbeweis voraussetzt.

Bezüglich der Frage einer rein funktionentheoretischen Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche ist hier noch eine Arbeit von Schlesinger in den Ann. de l'Ecole Norm. sup. t. 20, 1903 zu erwähnen. Schlesinger beschränkt sich dabei jedoch auf den allgemeinen Fall, indem er eine Vervollständigung in Aussicht stellt. Wesentlich früher (1873 und 1881) behandelte Thomae in Math. Ann. Bd. VI und XVIII den Fall drei- und vierblättriger Riemannscher Flächen von beliebigem Geschlecht. Schliesslich sei hier auch auf die Methode der Integralgleichungen in Anwendung auf das Riemannsche Problem der Bestimmung von linear polymorphen Funktionssystemen mit vorgeschriebener Monodromiegruppe (Hilbert, Plemelj) sowie auf die Kontinuitätsmethode in Anwendung auf dasselbe Problem (Schlesinger, Plemelj) hingewiesen.

auf Punkte reduzieren. Wir sprechen dann, wie in I, von einfach, zweifach, $\ldots(p+1)$-fach ausgearteten Bereichen. Der unendlich ferne Punkt der z-Ebene kann innerer Punkt, äusserer Punkt oder Grenzpunkt des Bereichs B sein.

Wir stellen uns nun folgendes Problem.

Problemstellung: Es soll in B eine durchweg reguläre analytische Funktion $\zeta = f(z)$ definiert werden, welche die Eigenschaft hat, eine konforme Abbildung des Bereichs B auf das Innere des Einheitskreises der ζ-Ebene zu vermitteln, so zwar, dass die Umkehrungsfunktion $z = \varphi(\zeta)$ für das ganze Innere des Einheitskreises $|\zeta| < 1$ mit dem Charakter einer rationalen Funktion überall hin fortgesetzt werden kann und dabei nur Werte annimmt, deren repräsentierende Punkte in B liegen.

Die geforderte Abbildung des Bereichs B werde als die *Fundamentalabbildung* dieses Bereichs bezeichnet.

Wird speziell angenommen, dass der Bereich B den unendlich fernen Punkt nicht in seinem Innern (höchstens auf seiner Grenze) enthalte, was immer durch eine lineare Transformation des Bereichs erreicht werden kann, so würde sowohl die Funktion $f(z)$ in B als auch die Funktion $\varphi(\zeta)$ im Einheitskreise überall regulär sein. Letztere Funktion würde ausserdem offenbar eine eindeutige Funktion sein, was man von der Funktion $f(z)$ jedoch nicht sagen kann. Diese wird sich vielmehr stets als eine unendlich-vieldeutige Funktion herausstellen. Man kann das formulierte Abbildungsproblem auch so formulieren:

Neue Formulierung des Abbildungsproblems: Es soll zwischen dem Bereiche B und der Fläche des Einheitskreises eine durchweg konforme, unverzweigte, im Innern der beiden genannten Gebiete grenzstellenfreie Abbildung gefunden werden.

Eine solche Abbildung haben wir in der Abhandlung I zwischen der Fläche des nichtausgearteten einfach zusammenhängenden Bereichs B und des nicht zweifachausgearteten zweifach zusammenhängenden Bereichs B herstellen können, indem wir insbesondere im letzteren Falle über dem Bereich B die zugehörende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche konstruierten und diese zunächst mittels logarithmischer Abbildung auf einen schlichten einfach zusammenhängenden Bereich brachten, sodann diesen vermöge des Schmiegungsverfahrens auf die Fläche des Einheitskreises.

Die zu bestimmende Funktion $f(z)$ ist sofort als eine *unendlich-vieldeutige analytische Funktion charakterisierbar*, nämlich als eine Funktion, welche bei Ausführung von Umläufen um die verschiedenen Begrenzungslinien des Bereichs B

und Wiederholung derselben in beliebiger Kombination immer neue Zweige darbietet. Nehmen wir zum Beweise das Gegenteil an, nämlich, dass sie nur endlich viele Zweige besitze. Alsdann gehört zu $f(z)$ eine gewisse, über B endlich-vielblättrig ausgebreitete Riemannsche Fläche F, deren Blätterzahl mit der Anzahl der verschiedenen Zweige der Funktion $f(z)$ genau übereinstimmt. Auf dieser Fläche F kann nun die Funktion $f(z)$ niemals an zwei von einander verschiedenen Stellen z_1 und z_2 einen und denselben Wert ζ^* annehmen, weil hieraus folgen würde, dass die Umkehrungsfunktion $\varphi(\zeta)$ an der Stelle ζ^* die beiden verschiedenen Werte z_1 und z_2 besitzt, welche aus einander durch eine gewisse analytische Fortsetzung innerhalb des Einheitskreises entstehen. Die Funktion $\varphi(\zeta)$ könnte dann aber nicht mehr innerhalb des Einheitskreises überall regulär sein, da eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiete überall regulär oder mit dem Charakter rationaler Funktionen fortsetzbare analytische Funktion in diesem Gebiete auch eindeutig sein muss. Wir konstatieren ferner, dass die Funktion $f(z)$ auch nicht an zwei koinzidierenden, jedoch verschiedenen Blättern angehörenden Punkten z^* der Fläche F einen und denselben Wert ζ^* haben kann. Denn in diesem Falle würde nun $f(z)$ in einer gewissen Nachbarschaft der erwähnten Stelle z^* in den erwähnten Blättern jedenfalls immer verschiedene Werte haben, weil sonst die betreffenden Zweige überhaupt übereinstimmen müssten. Wir würden demnach an der Stelle ζ^* jetzt zwei von einander verschiedene Elemente der Funktion $\varphi(\zeta)$ erhalten, welche allerdings an der Stelle ζ^* selbst einen und denselben Wert z^* aufweisen, was jedoch nicht hindert, die Funktion $\varphi(\zeta)$ nun als mehrdeutige analytische Funktion anzusprechen. Wir folgern jetzt, dass die Fläche F unter den bestehenden Annahmen eineindeutig und konform auf das Innere des Einheitskreises der ζ-Ebene abgebildet erscheint durch Vermittlung der Funktion $f(z)$. Das ist aber topologisch unmöglich, weil die Fläche F mindestens $p+1$ voneinander verschiedene getrennte Begrenzungslinien[1] hat, während die Fläche des Einheitskreises einfach zusammenhängend ist.

Die soeben angestellte Betrachtung lehrt uns nun aber nicht nur dieses, dass die zu $f(z)$ gehörende Riemannsche Fläche F unendlich-vielblättrig sein muss, sondern sie lehrt uns auch unmittelbar, eben wegen der gefundenen Eineindeutigkeit der Beziehung zwischen F und der Fläche des ζ-Einheitskreises die wichtige Tatsache, dass F seinerseits eine einfach zusammenhängende Fläche sein muss. Die Möglichkeit der Lösung unseres Abbildungsproblems involviert somit die Existenz einer über B ausgebreitet zu denkenden, relativ unverzweigten,

[1] Wir gebrauchen hier und im folgenden den Ausdruck Begrenzungslinien in dem weiteren Sinne, dass wir dabei zulassen, dass eine solche »Linie» den allgemeinsten Begrenzungstypus darbiete oder sich auch auf einen Punkt reduziert.

grenzstellenfreien, einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche F, welche nunmehr als die *zu B gehörende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche Φ* bezeichnet werde. Wir stellen zunächst den für das gestellte Abbildungsproblem geltenden Unitätssatz fest.

Unitätssatz: Das gestellte Abbildungsproblem kann, abgesehen von einer linearen Transformation, welche das Innere des ζ-Einheitskreises in sich transformiert, nur eine Lösung haben.

Der Beweis ergibt sich sofort aus folgenden Bemerkungen. Sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ zwei Funktionen von z, welche eine Lösung des gestellten Abbildungsproblems liefern, so stellt sich die damit gesetzte Abhängigkeit zwischen f_1 und f_2 als eine überall reguläre, grenzstellenfreie Beziehung des Innern des Einheitskreises auf sich selbst dar, welche Beziehung daher auch eineindeutig sein muss, also gemäss einem bekannten Satze in Gestalt einer ganzen oder gebrochenen linearen Funktion darstellbar.[1]

Es bietet keine Schwierigkeit dar, die erwähnte einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche Φ über B direkt nach topologischen Prinzipien zu konstruieren. Ebenfalls ergibt sich leicht, dass die Fläche Φ durch die Eigenschaft, eine einfach zusammenhängende, innerhalb B grenzstellenfreie, unverzweigte Überlagerungsfläche des Bereichs B zu sein, vollständig bestimmt ist. Wir begnügen uns in dieser Hinsicht auf andern Ortes von uns gegebene Ausführungen hinzuweisen. Insbesondere haben wir im Journ. f. Math. Bd. 139 bereits den allgemeinsten Fall unendlich-vielfach zusammenhängender Riemann'scher Flächen behandelt. Wir können uns mit diesem Hinweise umsomehr begnügen, als tatsächlich ein vorausgehender selbständiger topologischer Existenzbeweis der Fläche Φ für unsere unten gegebenen Entwicklungen zur Bestimmung der gesuchten Abbildungsfunktion nicht erfordert wird. Gleichwohl werden wir gelegentlich im folgenden auf die einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche Φ anspielen.

Der Nachweis der *Existenz der Abbildungsfunktion* $f(z)$ kommt hinaus auf die Ausführung der eineindeutigen konformen Abbildung der Fläche Φ auf das Innere des Einheitskreises. Wir wollen diesen Nachweis führen mittelst eines konvergenten Prozesses, bei welchem nur Quadratwurzeloperationen zur Anwendung gelangen, die übrigens auch durch $\sqrt[n]{}$-Operationen oder Log-Operationen ersetzt werden können ohne wesentliche Modifikation der Beweisführung. Das Verfahren bezeichnen wir, wie in Abhandlung I, als *Schmiegungsverfahren*, weil wieder als wesentliche Eigenschaft der einzelnen Operationen die durch dieselbe be-

[1] Vgl. meine Abhandlung I im Journal f. Math. Bd. 145.

wirkte immer stärkere Anschmiegung der Begrenzung des abzubildenden Bereichs an die Peripherie des Einheitskreises von innen her zu nennen ist.

Wie in Abhandlung I benötigen wir auch hier zunächst eine *vorbereitende Abbildung* des Bereichs B und damit zugleich des ihm übergelagerten einfach zusammenhängenden Bereichs Φ auf einen Bereich B_1, welcher ganz innerhalb des Einheitskreises liegt. Dieser Bereich B_1 wird, wenn B nicht ein vollständig, d. i. $(p+1)$-fach ausgearteter Bereich ist, dessen Begrenzung somit nur von Punkten gebildet wird, auf dieselbe Weise wie in I gefunden durch eine eineindeutige Transformation des Bereichs B, welche im Falle des Vorhandenseins äusserer Punkte durch eine lineare Transformation geliefert wird, im Falle des Fehlens von äusseren Punkten durch eine lineare Funktion in Verbindung mit einer Quadratwurzeloperation.

Liegt jedoch der Fall eines vollständig ausgearteten Bereichs B vor, so ist eine eineindeutige konforme Abbildung des Bereichs B auf einen schlichten ganz innerhalb des Einheitskreises liegenden Bereich B_1 nicht möglich.

Wir betrachten zunächst den Fall des *dreifach zusammenhängenden Bereichs* B, dessen vollständige Begrenzung von drei Punkten gebildet wird, die wir mit $0, 1, \infty$ zusammenfallend annehmen können. Wir überzeugen uns in folgender Weise von der Existenz der zu diesem Bereiche gehörenden gesuchten Abbildungsfunktion $f(z)$.

Wir gehen aus von einem von drei Orthogonalkreisbögen gebildeten Spitzendreieck S innerhalb des Einheitskreises der ζ-Ebene und bilden das Innere dieses Dreiecks konform auf die obere Halbebene ab auf Grund des Schmiegungsverfahrens der Abhandlung I, wobei nun zu zeigen ist, dass die so gefundene Abbildungsfunktion $z=\varphi(\zeta)$ sich auf den begrenzenden Kreisbögen des Spitzendreiecks regulär verhält und in den drei äussersten Punkten desselben sich bestimmt verhält. Beide Tatsachen gewinnen wir nach der Methode §§ 9 u. 10 Abhandlung I in folgender Weise. Wir bilden ein Kreisbogenzweieck, welches man erhält durch Erweiterung des Bereichs S über einen der begrenzenden Kreisbögen hinaus durch das Äussere des Einheitskreises hindurch bis zu dem, jenem überschrittenen Kreisbogen in S gegenüberliegenden Eckpunkte E von S, mittels der Exponentialfunktion konform auf die obere Halbebene ab, sodass dem Punkte E der Nullpunkt entspricht und den beiden andern Eckpunkten von S zwei Punkte a und $-a$ der Achse des Reellen entsprechen. Bei dieser Operation wird S auf einen Bereich S' abgebildet, welcher der erwähnten oberen Halbebene angehört. Nunmehr wird zu S' der zu ihm spiegelbildlich symmetrische Bereich in Bezug auf die Achse des Reellen hinzugenommen und der so erweiterte Bereich, S'', auf die Fläche des Einheitskreises abgebildet, wobei die Strecke $a \ldots (-a)$ nach dem Satze S. 207 unten der Abhandlung I in einen Orthogonalkreisbogen und folglich S' in ein Kreisbogenzweieck mit zwei rechten Winkeln übergeht, welches nun seinerseits elementar auf die Fläche einer z-Halbebene abgebildet wird. Das Resultat ist wieder die konforme Abbildung des Spitzendreiecks S auf die obere Halbebene. Hierdurch ist nicht nur festgestellt, dass die oben genannte Abbildungsfunktion $z = \varphi(\zeta)$ des Spitzendreicks S auf den begrenzenden Orthogonalkreisbögen von S sich regulär und in den Spitzen selbst sich bestimmt verhält, sondern es ist auch klar, dass der analytische Charakter der Funktion $f(z)$ in den Punkten $0, 1, \infty$ durch die Form der dort geltenden analytischen Entwicklung näher bestimmt ist. Es ergibt sich, dass eine gewisse lineare Funktion von $f(z)$ im Nullpunkte die Entwicklung $\log z + f(z)$ hat, unter $f(z)$ eine reguläre Potenzreihe von z verstanden, und dass Entsprechendes in den Punkten 1 und ∞ stattfindet.

Dass bei den nun in Betracht zu ziehenden symmetrischen Wiederholungen des Spitzendreiecks S sich tatsächlich eine vollständige Ausfüllung des Einheitskreises ergibt, ist bekannt und wird wohl am einfachsten so nachgewiesen. Man bringt die Fläche des Einheitskreises auf die Fläche der oberen Halbebene durch diejenige lineare Transformation, welche eine Spitze ins Unendliche bringt, die beiden andern nach 0 und 1, sodass das neue Spitzendreieck in bekannter Weise von zwei Halbgeraden und einem Halbkreise begrenzt erscheint. Nun spiegelt man an dem Halbkreise. Dadurch wird das Spitzendreieck erweitert zu einem Viereck, welches unten von zwei Halbkreisen mit einem Durchmesser der Länge $\frac{1}{2}$ begrenzt wird. Nunmehr spiegelt man das ganze Viereck an jedem dieser beiden Halbkreise. Dann wird das ganze jetzt erschlossene Gebiet nach unten von vier Halbkreisen begrenzt, deren einzelner, einen Durchmesser $\leqq \frac{1}{4}$ hat u. s. w. Hierdurch übersieht man unmittelbar die allmähliche vollständige Ausfüllung des von den beiden Halbgeraden und der Achse des Reellen begrenzten Parallelstreifens, ebenso die Ausfüllung der nach rechts und links benachbarten, sich sukzessive anschliessenden unendlich vielen Parallelstreifen und damit der ganzen oberen Halbebene. Die Übereinstimmung der als Umkehrungsfunktion von $\varphi(\zeta)$ nunmehr gewonnenen Funktion $f(z)$ mit der gesuchten Funktion $f(z)$ ist evident.

Nachdem wir in der angegebenen Weise in den Besitz der *elliptischen Modulfunktion* bezw. deren Umkehrungsfunktion gelangt sind, können wir diejenige Hilfsabbildung vornehmen, welche wir im Falle eines $(p+1)$-fach ausgearteten $(p+1)$-fach zusammenhängenden Bereichs B benötigen, bevor wir das eigentliche Schmiegungsverfahren zur Anwendung bringen können. Es sei B ein $(p+1)$-fach zusammenhängender schlichter Bereich in der z-Ebene, dessen vollständige Begrenzung von $p + 1$ getrennten Punkten gebildet wird. Alsdann können wir vermöge linearer Transformation annehmen, dass drei dieser Punkte mit den Punkten $0, 1, \infty$ der z-Ebene zusammenfallen. Wir bilden nunmehr, mit $I(z)$ die Umkehrungsfunktion der Modulfunktion bezeichnend, den Bereich B mittels der Funktion $I(z)$ konform ab, welche Funktion in B eine unendlich-vieldeutige Funktion ist, die jeden Wert der oberen Halbebene einmal und nur einmal annimmt mit Ausnahme derjenigen unendlich vielen Werte, die $I(z)$ in den von $0, 1, \infty$ verschiedenen Begrenzungspunkten von B annimmt. Es wird demnach der Bereich B unendlich-eindeutig auf einen Bereich B' abgebildet, welcher von der ganzen oberen Halbebene gebildet wird excl. der Achse des Reellen selbst und excl. unendlich vieler Punkte innerhalb der oberen Halbebene, welche sich nur gegen die Achse des Reellen hin häufen. Durch lineare Transformation können wir die genannte Halbebene in das Innere des Einheitskreises verwandeln und damit den Bereich B' in einen Bereich B_1, welcher auch den Nullpunkt in seinem Innern enthaltend angenommen werden kann.

Man bemerkt ohne weiteres, dass unsere vorbereitenden Hülfsabbildungen mittels linearer Funktionen, Quadratwurzelfunktionen, elliptischer Modulfunktion sich auch auf den Fall unendlich hohen Zusammenhanges des Bereichs B erstrecken. Hierdurch ist die von uns gestellte Abbildungsaufgabe reduziert auf die andere, *in B_1 eine unendlich-vieldeutige analytische, reguläre, unverzweigte, grenzstellenfreie Funktion $f(z_1)$ zu bestimmen, welche in B_1 jeden Wert, welcher dem absoluten Betrage nach < 1 ist, einmal und nur einmal annimmt.*

§ 2.

Das Schmiegungsverfahren.

Den Bereich B_1 haben wir im Folgenden als einen endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängenden Bereich aufzufassen, der vollständig innerhalb des Einheitskreises der z_1-Ebene liegt und den Nullpunkt in seinem Innern enthält. In der Tat wird auch unser Beweisverfahren keine grundsätzlich neue Betrachtung erforderlich machen, wenn wir diese Allgemeinheit zu Grunde legen. Die zu bestimmende Funktion heisse $f(z_1)$. Wir werden sie als Grenzfunktion einer Folge endlich-vieldeutiger Näherungsfunktionen $z_n = f_n(z_1)$ ermitteln, deren erste z_1 selbst ist, während die $(n+1)$-te aus der n-ten mittels einer bestimmten Quadratwurzeloperation entsteht, sodass die Funktion $f_n(z_1)$ eine 2^{n-1}-deutige Funktion von z_1 in dem Gebiete B_1 ist. Diese Funktion $f_n(z_1)$ nimmt in B_1 keinen Wert mehr als einmal an, sie wird im Punkte $z_1 = 0$ in einem und nur einem ihrer Zweige (dem *Hauptzweige*) null und leistet eine 2^{n-1}-deutige konforme Abbildung des Bereichs B_1 auf einen schlichten Bereich B_n, dessen Ordnungszahl des Zusammenhanges mit unbegrenzt wachsendem n unendlich gross wird, wenn nicht bereits der Zusammenhang von B_1 selbst unendlich gross war. Diese unendlich gross werdende Ordnung des Zusammenhanges wird jedoch in der Grenze selbst bedeutungslos werden auf Grund des folgenden wesentlichen Umstandes, der die Bezeichnung des Verfahrens als *Schmiegungsverfahren* rechtfertigt. Es werden, wenn mit α_n der dem Nullpunkte am nächsten liegende Punkt der Begrenzung des Bereichs B_n bezeichnet wird, wie in I, die Beziehungen gelten

$$(*) \qquad |\alpha_1| < |\alpha_2| < |\alpha_3| < \ldots; \ \lim_{n=\infty} |\alpha_n| = 1,$$

sodass als Grenze des Bereichs B_n die *einfach* zusammenhängende Fläche des Einheitskreises sich ergeben wird.

Die *Konstruktion der Funktion* $f_{n+1}(z_1) \equiv z_n$ geschieht, wie in I, unter Zuhilfenahme einer im Punkte α_n verzweigten Windungsfläche W_n erster Ordnung. Da jedoch jetzt die Funktionen $f_n(z_1)$ in B_1 sich nicht mehr, wie damals, als eindeutige Funktionen ergeben werden, so ist für die spätere Vergleichung der Funktionen $f_n(z_1)$ mit einander zum Zwecke des Konvergenzbeweises noch besonders hervorzuheben, dass jedenfalls in der Umgebung der Stelle $z_1 = 0$ für alle diese Funktionen $f_n(z_1)$ ein bestimmter *Hauptzweig* vorhanden ist, nämlich derjenige, in welchem die Funktionen für $z_1 = 0$ verschwinden.

Gehen wir zum *Konvergenzbeweise* selbst über, so können wir zunächst ohne weiteres, wie in der Abhandlung I, mittels des *Schwarzschen Lemmas*, in Anwendung desselben auf die Funktion $z_n(z_{n+1})$, d. i. z_n in Abhängigkeit von z_{n+1}, schliessen, dass die Beziehungen (*) bestehen. Wir können dies so aussprechen: Die Funktion $f_n(z_1)$ kommt dem von uns gewünschten Ziele mit wachsendem n insofern näher und näher, als sie tatsächlich in B_1 eine in einem ihrer Zweige im Nullpunkte verschwindende, in B_1 reguläre, unverzweigte und grenzstellenfreie analytische Funktion ist, die keinen Wert mehr als einmal annimmt und mit der Gesamtheit ihrer Werte zwar noch nicht die volle Fläche des Einheitskreises erfüllt, jedoch ein Gebiet B_n innerhalb des Einheitskreises, welches bereits eine Kreisfläche K_n mit dem Nullpunkte als Mittelpunkt und einem Radius $|\alpha_n|$ vollständig enthält, der seinerseits mit unbegrenzt wachsendem n gegen 1 konvergiert.

Wir wollen die Untersuchung zunächst für das Gebiet $|z_1| < q|\alpha_1|$ durchführen, indem wir unter q eine positive von null verschiedene reelle Grösse unterhalb 1 verstehen. Die durch die erwähnte Ungleichheitsbeziehung definierte Kreisfläche möge mit K_1' bezeichnet werden. Wir bemerken jetzt, dass nach dem SCHWARZ'schen Lemma, angewandt auf die im Kreise K_1 regulär und eindeutig erklärte Funktion $z_n \equiv f_n(z_1)$, die Werte z_n, bei Beschränkung der Grösse z_1 auf die Kreisfläche K'_1, ihrerseits auf die Kreisfläche $K^{(q)}$ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius q beschränkt bleiben. Um nun die gleichmässige Konvergenz der Funktionenfolge $f_n(z_1)$ in K'_1 zu beweisen, genügt es jetzt, die gleichmässige Konvergenz der Grösse $\frac{z_{n+m}}{z_n}$ gegen 1 innerhalb derselben Kreisfläche zu beweisen, woraus dann eben die gleichmässige Konvergenz der Grösse $(z_{n+m} - z_n)$ gegen 0 in demselben Gebiete folgen würde. Vgl. § 3 der Abhandlung I.

Wir betrachten zu dem Zwecke die Grösse $\frac{z_{n+m}}{z_n}$ als Funktion der Grösse z_n. Auf der Peripherie des Kreises K_n mit dem Radis $|\alpha_n|$ wird diese Grösse dem absoluten Betrage nach unterhalb $\frac{1}{|\alpha_n|}$ bleiben. Sie bleibt demnach, da sie inner-

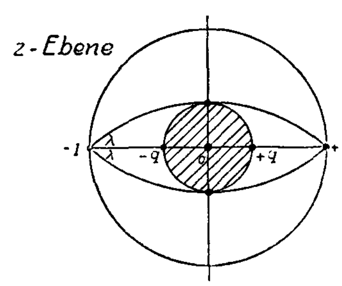

Fig. 1.

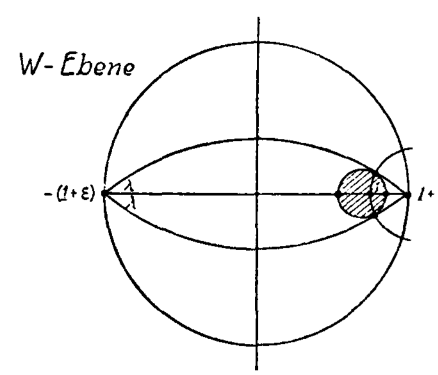

Fig. 2.

halb desselben Kreises regulär ist, innerhalb dieses Kreises dem absoluten Betrage nach unterhalb ebenderselben Grösse, welche Grösse ihrerseits oberhalb 1 liegt und mit wachsendem n gegen 1 konvergiert. Nun ist noch zu bemerken, dass die zu untersuchende Funktion $\frac{z_{n+m}}{z_n}$ für $z_n = 0$ einen positiv reellen Wert oberhalb 1 annimmt. Hieraus folgt für diese Funktion, dass sie im Kreise $|z_n| \leq q$ gleichmässig gegen 1 konvergiert und zwar auf Grund des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz: Ist $W = F(z)$ eine für $|z| < 1$ regulär und eindeutig erklärte, im Nullpunkte den Wert 1 annehmende analytische Funktion, deren Werte für alle genannten Werte z innerhalb des Kreises $K^{(1+\varepsilon)}$ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und $1+\varepsilon$ als Radius ($\varepsilon > 0$) bleiben, so bleibt dieselbe Funktion für $|z| < q < 1$ ihren Werten nach auf die Fläche eines den Einheitspunkt umschliessenden Kreises K beschränkt, welcher von der Wahl der Funktion unabhängig ist und dessen Durchmesser unendlich klein wird, wenn die positive Grösse ε unendlich klein wird.

Dieser Satz ist eine Folge des SCHWARZ'schen Lemmas. Er ergibt sich aus diesem durch eine lineare Transformation der Funktionsebene, welche den Einheitspunkt in den Nullpunkt überführt und die Punkte $1+\varepsilon$ und $1-\varepsilon$ in die Punkte $+1$ und -1. Man erkennt ohne weiteres aus den beigefügten Figuren, wie der Kreis K (in Figur 2 schraffiert) aus den Daten der z-Ebene als Bild der Kreisfläche $|z|<q$ gefunden wird. Der Winkel λ der W-Ebene ist aus der Figur der z-Ebene zu entnehmen.

Damit ist für die Kreisfläche K'_1 die gleichmässige Konvergenz der Funktionenfolge $f_n(z_1)$ in deren Hauptzweigen bewiesen.

Nunmehr werde irgend eine Linie L vom Nullpunkte der z_1-Ebene aus gezogen und ein dieselbe einbettender Flächenstreifen β betrachtet, der nicht bis an die Grenze des Bereichs B_1 heranreicht. Indem wir der Funktion $f_n(z_1)$ im Anfangspunkte der Linie L den Hauptwert o beilegen, ist damit der Verlauf der Funktion $f_n(z_1)$ längs L und damit in z_1 bestimmt. Der Nachweis der gleichmässigen Konvergenz der Funktionenfolge $f_n(z_1)$ für β ist unmittelbar durch den vorhergehenden Beweis mitgeliefert, sobald nachgewiesen ist, dass die Werte $f_n(z_1)$, wie sie in β erklärt sind, dem absoluten Betrage nach unterhalb einer Grösse $Q<1$ bleiben. Dass dies in der Tat der Fall ist, ist nun eine Folge des *erweiterten Schwarz'schen Lemmas*, welches wir jetzt kettenförmig längs der Linie L zur Anwendung zu bringen haben, auf dieser eine Folge hinreichend benachbarter Punkte P_1, $P_2, \ldots$ wählend und um dieselben als Mittelpunkte je zwei in B_1 verbleibende Kreisflächen mit einem Radienverhältnis q so bestimmend, dass jedesmal $P_{\nu+1}$ der inneren Kreisscheibe des ν-ten Kreisscheibenpaares angehört. Als erweitertes SCHWARZ'sches Lemma bezeichnen wir hierbei den folgenden Satz:

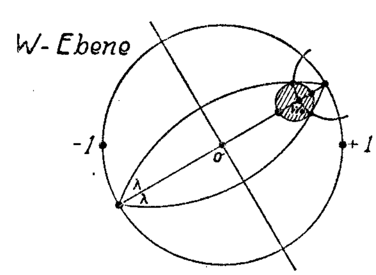

Fig. 3.

Erweitertes Schwarz'sches Lemma: Ist $W=F(z)$ eine für $|z|<1$ reguläre, im Nullpunkte den Wert W_0 annehmende, dem absoluten Betrage nach unterhalb 1 bleibende analytische Funktion, so bleiben für $|z|<q<1$ die Funktionswerte beschränkt auf die Fläche eines Kreises, der den Punkt W_0 umschliesst und dessen Konstruktion gemäss Figur 3 erfolgt. Diese Kreisfläche hat von der Peripherie des Einheitskreises einen endlichen, von null verschiedenen Abstand.

Aus dem Vorstehenden geht hervor, dass die Funktionenfolge $f_n(z_1)$ innerhalb B_1 gleichmässig konvergiert. Die Grenzfunktion $f_\infty(z_1)=z_\infty$ wird offenbar einen Hauptzweig besitzen, der im Punkte $z_1=0$ verschwindet. Im Übrigen ist die Funktion $f_\infty(z_1)$ innerhalb B_1 in allen ihren Zweigen regulär und bleibt dem absoluten Betrage der Werte nach unterhalb 1.

Wir wollen jetzt zeigen dass die Funktion $f_\infty(z_1)$ eine schlichte, unendlich-eindeutige Abbildung des Bereichs B_1 auf das vollständige Innere des Einheitskreises leistet.

Zu dem Zwecke machen wir zunächst die Bemerkung, dass die Funktion nicht identisch verschwinden kann. Denn sie verschwindet im Hauptzweige für $z_1 = 0$ und ferner ist im Hauptzweige für $0 < |z_1| < |\alpha_1|$ stets $|z_\infty| > |z_n| > |z_1|$.

Weiter bemerken wir, dass stets im Hauptzweige z'_∞ von z''_∞ verschieden ist, sofern z'_1 von z''_1 verschieden ist, unter z'_1 und z''_1 zwei verschiedene z_1-Werte verstanden. Diesen Nachweis führen wir in der Weise, dass wir für die Differenz $|z''_n - z'_n|$ eine von n unabhängige, von null verschiedene untere Schranke bestimmen mittels des SCHWARZ'schen Lemmas.

Nehmen wir in der Tat zunächst an, dass z'_1 und z''_1 innerhalb des Kreises K'_1 liegen, so bleiben die entsprechenden Grössen z'_n und z''_n in dem Bezirke $|z| < q < 1$, wie wir wissen. Diese beiden Grössen sind jedenfalls von einander verschieden. Stellen wir uns nun vor, dass durch hinreichend grosse Wahl von n die Entfernung der Punkte z'_n und z''_n beliebig klein werden könnte, so würde man um z'_n als Mittelpunkt einen ganz in K_n (d. i. $|z_n| \leq |\alpha_n|$) enthaltenen Kreis $\varkappa_n$ mit dem Radius $|\alpha_n| - q$ beschreiben können, wobei das Verhältnis $\frac{|z''_n - z'_n|}{|\alpha_n| - q}$ beliebig klein werden würde. Hieraus aber würde sich nun durch Anwendung des SCHWARZ'schen Lemmas auf die Umkehrungsfunktion der Funktion $f_n(z_1)$, d. i. die Funktion $z_1 = \varphi_n(z_n)$ für das Gebiet $\varkappa_n$, wobei der Punkt z'_n als Nullpunkt zu denken ist, sofort eine Abschätzung für die Differenz $|z''_1 - z'_1|$ ergeben, derzufolge dieser Abstand unterhalb einer beliebig kleinen Grösse liegen müsste, während er doch bestimmt und von null verschieden ist.

Betrachten wir nunmehr irgend zwei Werte $z'_\infty = f_\infty(z'_1)$ und $z''_\infty = f_\infty(z''_1)$, setzen dabei jedoch z'_1 von z''_1 zunächst verschieden voraus, im übrigen aber *beliebig* innerhalb B_1 liegend. Wir behaupten dann, dass die genannten beiden Werte z'_∞ und z''_∞ von einander verschieden sind. Zu dem Zwecke denken wir uns zwecks genauerer Definition der Zweige die Punkte z'_1 und z''_1 durch eine Linie L'_1 bezw. L''_1 mit dem Nullpunkte verbunden. Indem man von diesem Punkte ausgehend die Linie L'_1 bezw. L''_1 durchläuft, gelangt man, mit dem Hauptzweige der Funktion $f_\infty(z_1)$ beginnend, zu den Werten $f_\infty(z'_1)$ bezw. $f_\infty(z''_1)$. Wir können nun wie oben schliessen, dass alle $f_n(z'_1)$ und $f_n(z''_1)$, (diese Grössen auch in den durch die Linien L'_1 bezw. L''_1 festzulegenden Zweigen genommen), für $n = 1, 2, 3, \ldots$ unterhalb einer Grösse $q < 1$ bleiben, folglich innerhalb der Kreise K_n liegen von einem gewissen n ab, das mit N bezeichnet werde. Die Grössen

z'_n und z''_n sind nun aber offenbar von einander verschieden für jeden Wert des Index n. Folglich ergibt sich, indem man sich denkt, dass man etwa in der z_N-Ebene erst beginne mit dem Schmiegungsverfahren, genau wie vorher, die Ungleichheit der Grössen z'_∞ und z''_∞ und gleichzeitig erkennt man die Möglichkeit, eine untere Schranke für den Abstand der beiden Punkte z'_∞ und z''_∞ zu berechnen.

Nehmen wir jetzt an, dass z'_1 und z''_1 zusammenfallen. Alsdann ist Übereinstimmung der Werte z'_∞ und z''_∞ dann und nur dann vorhanden, wenn die aus L'_1 und L''_1 zusammengesetzte geschlossene Linie L als solche innerhalb B_1 auf einen Punkt zusammenziehbar ist. In der Tat wird man wieder sagen können, dass von einem gewissen n ab die Punkte z'_n und z''_n einschliesslich der Bildkurven L'_n und L''_n (Bilder von L'_1 bezw. L''_1 in der z_n-Ebene) auch in diesem Falle innerhalb K_n liegen und dass sie innerhalb eines Kreises mit einem Radius $q < 1$ bleiben, der von n unabhängig bestimmbar ist. Es ist nun auf Grund der vorstehenden Herleitungen klar, dass für das Zusammenfallen der Punkte z'_∞ und z''_∞ notwendig und hinreichend ist die Bedingung: $z'_n = z''_n$. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist offenbar die als Bild von L in der z_n-Ebene sich ergebende Linie L_n innerhalb der Kreisfläche K_n auf einen Punkt zusammenziehbar, was sich unmittelbar auf die Linie L mit Bezug auf den Bereich B_1 überträgt und das oben bezeichnete Resultat ergibt.

Es bleibt schliesslich noch die Frage der vollständigen Ausfüllung des Einheitskreises bei der durch die Funktion $f_\infty(z_1)$ vermittelten konformen Abbildung zu erledigen. Diese Frage aber ist leicht zu beantworten. Es sei $r < 1$. Um dann für die Fläche $K^{(r)}$ des Kreises mit dem Radius r um den Nullpunkt der z_1-Ebene als Mittelpunkt zu zeigen, dass dieselbe vollständig ausgefüllt wird, bestimmen wir eine Zahl N so, dass K_N den Kreis $K^{(r)}$ vollständig umschliesst. Der Kreisfläche $K^{(r)}$ der z_N-Ebene entspricht in der z_1-Ebene ein gewisses mehrblättriges windungspunktfreies Flächenstück H, dessen vollständige Begrenzung von der Begrenzung des Bereichs B_1 einen endlichen Abstand hat. Innerhalb H ist die Funktion $f_N(z_1)$ eindeutig erklärt und leistet eben die eineindeutige Abbildung dieses Flächenstücks auf die Kreisfläche $K^{(r)}$, wobei der Begrenzungslinie der Fläche H die Peripherie von $K^{(r)}$ entspricht. Ist $n > N$ so wird $f_n(z_1)$ in H ebenfalls eindeutig erklärt sein und eine Abbildung vermitteln, bei welcher die Begrenzungslinie des Bildbereichs offenbar eine geschlossene, die Kreislinie $K^{(r)}$ einfach umschliessende Linie l_n ist. Daraus ergibt sich, dass nun auch die Grenzkurve l_∞ ganz ausserhalb $K^{(r)}$ verläuft und dass mithin H durch die Funktion $f_\infty(z_1)$ auf ein die Kreisfläche $K^{(r)}$ vollständig enthaltendes schlichtes Flächenstücke ineindeutig und regulär abgebildet wird.

C. Zweiter Teil.

Nähere Untersuchung der Abbildung.

§ 3.

Parabolische und hyperbolische Umlaufssubstitutionen zu isolierten Begrenzungspunkten bezw. Begrenzungslinien.

Die Kenntnis der durch die Funktion $\zeta \equiv f(z)$ vermittelten konformen Abbildung führt dazu, eine *zum Bereiche B gehörende eigentlich diskontinuierliche Gruppe G* von linearen Substitutionen ins Auge zu fassen, bestehend aus lauter Substitutionen, welche die Fläche des ζ-Einheitskreises in sich transformieren. Betrachten wir nämlich irgend zwei Zweige der Funktion $f(z)$, etwa ζ_1 und ζ_2, so wird die zwischen ζ_1 und ζ_2 bestehende analytische Abhängigkeit eine solche sein, bei welcher sowohl die Funktion $\zeta_2(\zeta_1)$ als auch die Funktion $\zeta_1(\zeta_2)$ innerhalb des ζ-Einheitskreises eine reguläre und grenzstellenfreie analytische Funktion ist. D. h.: die Abhängigkeit zwischen ζ_1 und ζ_2 stellt sich dar als eine eineindeutige konforme Abbildung der Fläche des ζ-Einheitskreises auf sich selbst. Diese Abhängigkeit wird daher durch eine lineare Substitution vermittelt. Die Gesamtheit dieser Substitutionen bildet eine Gruppe G.

Wir beweisen folgenden Satz.

Satz: Die Funktion $f(z)$ erleidet bei einer einfachen vollständigen Umlaufung einer Begrenzungslinie des Bereichs B eine hyperbolische oder parabolische Substitution, jenachdem die betreffende Begrenzungslinie eine allgemeine Begrenzung oder eine ausgeartete Begrenzung ist, d. i. ein einzelner Punkt. —

Bekanntlich unterscheiden sich die hyperbolischen Substitutionen von den parabolischen dadurch, dass sie zwei getrennte Fixpunkte haben, die hier auf der Peripherie des Einheitskreises liegen müssen, während die parabolischen Substitutionen nur einen einzigen Fixpunkt haben, der hier ebenfalls auf der Peripherie des Einheitskreises liegen muss.

Betrachten wir etwa zunächst den Fall eines isolierten Begrenzungspunktes a des Bereichs B. Wir konstruieren um den Punkt a eine geschlossene Linie L, welche diesen Punkt in dessen unmittelbarer Umgebung einfach umschlingt. Wir wollen zeigen, dass der vollständigen Durchlaufung von L eine parabolische Substitution entspricht. Zunächst ist klar, dass die Funktion $f(z)$ sich nicht bei endlich vielen Umläufen um den Punkt a reproduzieren kann. Denn dies würde bedeuten, dass die zugehörende Substitution eine elliptische Substitution wäre, welche das Innere des Einheitskreises in sich transformiert und folglich einen Fixpunkt im Innern des Einheitskreises haben muss. Ein solcher innerer Fixpunkt kann aber offenbar für keine Substitution der Gruppe G vorhanden sein, weil dann die Funktion $f(z)$ in mehreren von einander verschiedenen Zweigen einen und denselben Wert annehmen würde (entsprechend dem Fixpunkte), während sie doch, wie wir wissen, keinen Wert mehr als einmal annimmt. Wir schliessen somit, dass sich als Bild der Linie L im ζ-Einheitskreise eine Linie $\varLambda$ ergibt, welche, wenn die zu untersuchende Substitution nicht parabolisch ist, zwei voneinander verschiedene Punkte der Peripherie des Einheitskreises miteinander verbindet. Durch $\varLambda$ wird das Innere des Einheitskreises in zwei Gebiete zerlegt, deren eines, γ, als das Bild der durch L abgegrenzten Umgebung des Punktes a zu gelten hat. Ist λ derjenige Teil der Peripherie des Einheitskreises, welcher an der Begrenzung des Gebietes γ teilnimmt, so stellt sich uns nunmehr die Umkehrungsfunktion $z(\zeta)$ der Funktion $f(z)$ als eine Funktion dar, welche längs λ stetig in den Wert a übergeht und sich folglich nach einem Schwarz'schen Satze (Abhandlung I S. 210) überhaupt auf eine Konstante reduzieren muss. Das ist aber unmöglich. Mithin ist die der Umlaufung eines isolierten Begrenzungspunktes entsprechende Substitution eine parabolische Substitution.

Die Untersuchung zeigt zugleich, dass der Wertevorrat der Funktion $f(z)$ in einem in sich zusammenhängenden, durch die Linie L abgegrenzten Gewinde von Zweigen bei Zusammenziehung der Linie L auf den Punkt a sich auf einen einzigen Wert reduziert, nämlich den dem Fixpunkte der Umlaufssubstitution entsprechenden Wert.

Lassen wir jetzt an Stelle des Punktes a eine allgemeine Begrenzungslinie A treten. Wir ziehen wieder eine Linie L, welche einen sich an A anschliessenden zweifach zusammenhängenden Streifen S vom Bereiche B abtrennt. Der Linie L entspricht im ζ-Einheitskreise eine Linie $\varLambda$, welche, wenn angenommen wird, die für L sich ergebende Substitution der Funktion $f(z)$ sei parabolisch, von einem Punkte ζ_0 der Peripherie des Einheitskreises ausgeht und in demselben Punkte ζ_0 auch endigt. Es sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das Bild des Bereichs S im Einheitskreise das Gebiet γ_1 oder γ_2 ist. Mit γ_1 bezeichnen wir nämlich dasjenige der beiden durch $\varLambda$ bestimmten Teilgebiete des ζ-Einheitskreises, welches ζ_0 als einzigen Peripheriepunkt auf seiner Begrenzung hat, mit γ_2 dasjenige, welches die ganze Peripherie des Einheitskreises als Begrenzungsstück aufweist.

Ist das Bild γ von S mit γ_1 identisch, so bilden wir eine lineare Funktion ζ' der Grösse ζ so, dass an Stelle des Einheitskreises die obere ζ Halbebene und an Stelle des Punktes ζ_0 der Punkt ∞ tritt, an Stelle der betrachteten parabolischen Substitution die parabolische Substitution $\bar{\zeta}' = \zeta' + 2\pi$. Ferner bilden wir nun $e^{i\zeta'} = \zeta''$ und erhalten auf diese Weise eine eineindeutige konforme Abbildung des Bereichs S auf einen schlichten zweifach zusammenhängenden Bereich

S'', dessen eine, der *Linie* A entsprechende Begrenzung von einem einzelnen *Punkte* gebildet wird, was nach einem Satze der Abhandlung I (S. 204) nicht möglich ist.

Ist zweitens das Bild γ von S mit γ_2 identisch, so gehen wir von der Bemerkung aus, dass die Funktion $f(z)$, wie aus dem Aufbau der Überlagerungsfläche Φ sich unmittelbar ergibt, unendlich viele von einander verschiedene Zweige besitzt, welche sogar in dem Sinne von einander verschieden sind, dass keine zwei derselben demselben Gewinde angehören, d. i. durch blosse Umlaufung der Linie A ineinander übergeführt werden können. Bilden wir mit einem solchen neuen Zweige und seinen bei Durchlaufung von L sich ergebenden weiteren Zweigen das Gebiet S ab, so wird das sich ergebende Bild $\bar{\gamma}$ vollständig in γ_1 enthalten sein müssen. Das ist aber im Widerspruch mit der Tatsache, dass zwischen dem jetzt betrachteten und dem ursprünglich betrachteten Zweige der Funktion $f(z)$ eine lineare Beziehung besteht, sodass auch für das Gebiet $\bar{\gamma}$ die für das Gebiet γ_2 geltende Bemerkung in Kraft bleibt, dass dieses Gebiet die vollständige Peripherie des Einheitskreises als Begrenzung besitzt.

Die Berufung auf den Aufbau der Fläche Φ kann übrigens vermieden werden. Man bilde den Bereich B, mit $z^{(1)}$ und $z^{(2)}$ zwei nicht auf der Linie A liegende, verschiedenen Begrenzungslinien von B angehörende Punkte bezeichnend, den Bereich B mittels der Funktion $z' = \log \dfrac{z - z^{(1)}}{z - z^{(2)}}$ auf einen Bereich B' ab, welcher nun unendlich viele diskrete Bilder der Linie A als Begrenzungslinien aufweist, deren jede mindestens ein neues Zweiggewinde liefert. Die Beweisführung gilt offenbar auch bei unendlich hohem Zusammenhange des Bereichs B.

§ 4.

Verhalten der Abbildungsfunktion $f(z)$ auf der Grenze (Grenzlinien und isolierte Grenzpunkte) des Bereichs B.

Nachdem wir uns über den Charakter der Substitutionen Rechenschaft gegeben haben, welche die Funktion $f(z)$ bei Umlaufung der einzelnen Begrenzungslinien erleidet, wollen wir nunmehr auf die *Frage des Verhaltens der Funktion* $f(z)$ selbst in den Begrenzungslinien näher eingehen. Insbesondere wollen wir folgende Sätze beweisen.

1. In einem isolierten Begrenzungspunkte a lässt sich von jedem Zweige der Funktion $f(z)$ eine lineare Funktion in der Weise bilden, dass die so entstehende neue Funktion von z nach Abzug der Funktion $\log(z-a)$ sich im Punkte a regulär verhält. Es gehört auf diese Weise zu jedem Zweige der Funktion $f(z)$ in einem solchen Punkte ein ganz bestimmter Wert der Funktion oder, besser gesagt, zu jedem einzelnen Gewinde von Zweigen.

1 a. Zu verschiedenen bei a betrachteten Gewinden gehören ferner stets verschiedene Werte, ebenso zu je zwei Gewinden, die verschiedenen isolierten Begrenzungspunkten entsprechen.

2. Ist L eine geschlossene reguläre analytische Begrenzungslinie des Bereichs B, so verhält sich die Funktion $f(z)$ in jedem ihrer Zweige längs L regulär und kann demgemäss über die Begrenzung von L hinaus analytisch fortgesetzt werden. Das Analoge gilt, wenn L analytische Kurvenstücke besitzt, für das Verhalten der Funktion $f(z)$ auf diesen Stücken.

3. Ist eine Begrenzungslinie L von B eine Jordan-Kurve, so verhält sich die Funktion $f(z)$ in allen ihren Zweigen längs dieser Linie stetig, und es entsprechen verschiedenen Punkten der Linie immer auch verschiedene Werte der Funktion, desgleichen einem und demselben Punkte immer verschiedene Werte, wenn verschiedene Zweige der Funktion in Betracht gezogen werden.

4. Ist eine Begrenzungslinie L des Bereichs B eine Begrenzung allgemeinster Art, so ist gemäss den Entwicklungen des § 11 der Abhandlung I die Begrenzung als eine zyklisch angeordnete Gesamtheit von lauter Begrenzungselementen aufzufassen und es gelten dann zu 3. analoge Bemerkungen, sofern man diese Randelemente an Stelle der einzelnen Punkte treten lässt. Der präzise Inhalt dieser Behauptung ergibt sich aus den folgenden Beweisführungen.

Der Beweis des Satzes 1. ergibt sich aus der Bemerkung, dass die S. 268 gebildete Exponentialgrösse ζ'' in Abhängigkeit von z uns eine Abbildung darbietet, welche der vollständigen Umgebung des isolierten Begrenzungspunktes die vollständige Umgebung des Nullpunktes entsprechen lässt, also nach dem Satze S. 204 der Abh. I durch eine im isolierten Begrenzungspunkte selbst reguläre analytische Funktion vermittelt wird, deren Ableitung in diesem Punkte von Null verschieden sein muss. Zugrunde liegt diesem Beweise der vorher gelieferte Nachweis, dass die zu einem isolierten Begrenzungspunkt gehörende Umlaufssubstitution parabolisch ist.

Die Richtigkeit von 1 a ergibt sich aus dem Umstande, dass zwei verschiedenen an der Überlagerungsfläche Φ beteiligten Gewinden unendlich hoher Ordnung lauter voneinander verschiedene Gebiete im Einheitskreise entsprechen, deren jedes einzelne eine ganze Kreisfläche enthalten muss, welche die Peripherie des Einheitskreises in einem Punkte, nämlich dem Fixpunkte der zu dem Gewinde gehörenden Umlaufssubstitution berührt.

Zum Beweise des Satzes 2. denken wir uns dem Bereich B längs der zu betrachtenden regulären analytischen Begrenzungslinie einen zweifach zusammenhängenden Flächenstreifen b angesetzt. Der Bereich $B + b$ werde mit B' bezeichnet. Nunmehr werde die zu B' gehörende Funktion $\bar{f}(z)$ gebildet, welche B' auf die

Fläche des Einheitskreises abbildet. Dieselbe lässt der Linie L eine bestimmte reguläre analytische Linie entsprechen, welche im Einheitskreise als Querschnitt erscheint. Das Bild, welches die Funktion $\bar{f}(z)$ von B entwirft, ist ein Teilbereich der Fläche des Einheitskreises, welcher, entsprechend der Linie L, unendlich viele reguläre analytische Begrenzungsstücke aufweist, im übrigen jedoch ebenfalls einfach zusammenhängend ist. Bilden wir nun diesen einfach zusammenhängenden Bereich auf die Fläche des Einheitskreises ab gemäss dem gewöhnlichen Schmiegungsverfahren der Abhandlung I, so ergibt sich bei dieser Abbildung gemäss den Entwicklungen des § 9 der Abhandlung I eine reguläre analytische Abbildung der erwähnten analytischen Begrenzungsteile auf Stücke der Peripherie des Einheitskreises. Die letztgenannte Abbildung führt uns nun aber zu der eigentlich betrachteten Abbildung des Bereichs B auf die volle Fläche des Einheitskreises.

Ein anderer Weg ist der folgende. Wir bilden zunächst den Bereich B auf einen Bereich B' ab, bei welchem der Linie L eine Gerade G entspricht. Wir erreichen dies durch konforme Abbildung des von L allein begrenzten, B enthaltenden einfach zusammenhängenden Bereichs auf eine Halbebene. Bei dieser Hilfsabbildung nun wird nach § 8 der Abh. I die Linie L regulär analytisch auf G abgebildet. Daher genügt es, für den Bereich B' nachzuweisen, dass die zugehörende Abbildungsfunktion $\bar{f}(z)$ auf der Geraden G regulär ist. Diese Abbildungsfunktion kann nun aber erhalten werden, indem man zunächst B' an G spiegelt und für den gewonnenen erweiterten Bereich, bezeichnet etwa mit B'', die Abbildung auf die Fläche des Einheitskreises ausführt, wobei der Geraden G, gleichgültig welchen Zweig der Funktion $\bar{f}(z)$ wir nehmen, ein vollständiger Orthogonalkreisbogen innerhalb des Einheitskreises entsprechen wird. Als Bild von B wird sich bei dieser Abbildung ein von unendlich vielen solchen vollständigen Orthogonalkreisbögen begrenztes Teilgebiet des Einheitskreises ergeben, welches einfach zusammenhängend ist und welches nun, um zu $f(z)$ zu gelangen, noch auf die volle Fläche des Einheitskreises abzubilden ist, wobei nun diesen Kreisbögen Teile der Peripherie des Einheitskreises regulär entsprechen werden, gemäss § 9 der Abhandlung I. Der Vorteil dieser Beweisführung gegenüber der ersten besteht darin, dass von den Entwicklungen des § 9 der Abh. I nur das auf kreisförmige Begrenzungsstücke Bezügliche benötigt wird.

Was nun den Inhalt der Sätze 3. und 4. anbetrifft, so bedarf derselbe kaum noch einer besonderen Begründung. Es genügt vielmehr, darauf hinzuweisen, dass wir vermöge der soeben eingeführten Hilfsabbildung des Bereichs B auf den Bereich B' mit einer begrenzenden Geraden (eine Hilfsabbildung, die uns ja auch dann zur Verfügung steht, wenn die Linie L eine Jordan-Kurve oder eine Begrenzung allgemeinster Art ist) in der Lage sind, die Frage auf den Fall einer begrenzenden Kreislinie oder Geraden zurückzuführen. Wir haben nur zu beachten, dass bei der genannten Hilfsabbildung betreffs der Ränderzuordnung die Sätze des § 11 der Abhandlung I massgebend sind.

Durch wiederholte Anwendung der soeben benützten Hilfsabbildung sind wir in der Lage, den Bereich B als einen solchen zu wählen, dessen *Begrenzung von lauter geschlossenen regulären analytischen Linien* gebildet wird, wobei jedoch für jede einzelne dieser Begrenzungslinien die *Möglichkeit einer Reduktion derselben auf einen Punkt* zugelassen werden muss, in welchem Falle wir von einem ausgearteten Bereich B sprechen.

D. Dritter Teil.

Existenzbeweis der verzweigten Fundamentalabbildung beliebiger schlichter Bereiche mittels des Schmiegungsverfahrens.

§ 5.

Abbildung der signierten gewöhnlichen Kreisscheibe: Das Schmiegungsverfahren.

Wir denken uns in der z-Ebene, die wir, um die Analogie mit früherem hervortreten zu lassen, als z_1-Ebene bezeichnen, die Fläche des Einheitskreises, d. i. die Gesamtheit aller durch die Ungleichheitsbeziehung $|z_1| < 1$ definierten Punkte, signiert. D. h. wir wählen irgendwie eine endliche oder unendlich grosse Anzahl von Punkten dieses Bereichs (»Verzweigungspunkte») aus, welche sich im letzteren Falle nur gegen die Peripherie des Einheitskreises hin häufen sollen, und ordnen jedem der Verzweigungspunkte eine positive ganze Zahl (»Verzweigungszahl») zu, welche grösser oder gleich 2 ist, aber auch gleich ∞ sein kann. Nunmehr stellen wir folgendes Problem:

Problem: Es soll im Gebiete $|z_1| < 1$ eine, abgesehen von den vorgegebenen Verzweigungspunkten, durchweg reguläre analytische Funktion $\zeta = f(z_1)$ definiert werden, welche an den Verzweigungspunkten selbst sich in jedem ihrer Zweige so verhält, dass sie an einem Verzweigungspunkte a mit zugeordneter endlicher Verzweigungszahl n in Bezug auf die Grösse $\sqrt[n]{z_1 - a}$ als Entwicklungsgrösse sich regulär verhält, an einem Verzweigungspunkte mit zugeordneter Verzweigungszahl ∞ sich nach endlich vielen Umläufen um diesen Punkt herum niemals reproduziert. Die Funktion $f(z_1)$ soll unter den angegebenen Verzweigungsnebenbedingungen eine konforme Abbildung der Fläche

$|z_1| < 1$ auf die Fläche $|\zeta| < 1$ vermitteln, so dass sie im Gebiete $|z_1| < 1$ jeden der Ungleichheitsbedingung $|\zeta| < 1$ genügenden Wert einmal und nur einmal annimmt, andere Werte ζ jedoch nicht annimmt.

Wir gehen jetzt die Entwicklungen der §§ 1 u. 2 durch und sehen zu, welche Modifikationen und Ergänzungen diese Entwicklungen erfahren müssen, um auch für das jetzt zu behandelnde Problem Gültigkeit zu erlangen.

Zunächst bemerken wir, dass der Nachweis der Gültigkeit des Unitätssatzes im vorliegenden Falle keine neuen Überlegungen erfordert. Wir finden vielmehr, dass die Funktion $f(z_1)$, sofern sie überhaupt existiert, abgesehen von einer linearen, das Innere des Einheitskreises in sich überführenden Transformation vollständig bestimmt ist. Durch dieselben Überlegungen wird auch festgestellt, dass je zwei Zweige der zu bestimmenden Funktion $f(z_1)$ durch eine derartige lineare Transformation zusammenhängen, welche sich nun an einem Verzweigungspunkte a von endlicher Ordnung als eine elliptische Substitution (die zu a gehörende Umlaufssubstitution) der betreffenden Ordnung n darstellen wird, an einem Verzweigungspunkte der Ordnung ∞ jedoch als eine parabolische Substitution. Insbesondere letztere Behauptung erhellt sofort aus Entwicklungen der §§ 3 u. 4. Im Zusammenhang hiermit wird auch der analytische Charakter der Funktion $f(z_1)$ an den Verzweigungsstellen näher bestimmt. Wir erkennen, dass es an einer Verzweigungsstelle a von der endlichen Ordnung n zu jedem Zweige eine lineare Funktion desselben gibt, welche im Punkte a verschwindet und sich beim einfachen Umlaufe um a mit $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ multipliziert und sich in der Gestalt $\sqrt[n]{z_1 - a}\,\{1 + [(0)]\}$ entwickeln lässt, unter $[(0)]$ eine im Punkte a reguläre und in diesem Punkte selbst den Wert 0 annehmende Funktion verstanden, in einem Punkte a mit ∞ als zugeordneter Verzweigungszahl hingegen beim einfachen Umlaufe um den Punkt a den Zuwachs $2\pi i$ erfährt und sich in der Gestalt $\log(z_1 - a) + [(0)]$ entwickeln lässt.

Der zu bestimmenden Funktion $f(z_1)$ entspricht eine über dem z_1-Einheitskreise ausgebreitet zu denkende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche Φ, welche in allen ihren Blättern an den Verzweigungsstellen a Windungspunkte der Ordnung n bezw. ∞ hat. Diese einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche ist durch ihre angegebenen Verzweigungseigenschaften vollständig bestimmt. In der Tat würde die Annahme zweier derartiger Flächen Φ_1 und Φ_2 sofort eine als Punkt-Koinzidenz sich darstellende eineindeutige Beziehung derselben aufeinander involvieren, d. i. Identität. Wir gehen indessen auf diese Frage sowie auf die Frage der direkten topologischen Konstruktion der Fläche Φ hier nicht weiter ein, verweisen diesbezüglich vielmehr wieder auf die allgemeinen andern Ortes gegebenen Ausführungen (Journal f. Math. Bd. 139). Es muss wiederum bemerkt werden, dass die Erledigung der genannten Fragen für unsere eigentlichen Entwicklungen nicht von wesentlichem Belang ist.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Funktion $f(z_1)$ selbst über. Das *Schmiegungsverfahren* nimmt jetzt folgende Gestalt an.[1] Zunächst werde der Einheitlichkeit halber angenommen, dass der Punkt $z_1 = 0$ nicht zu den vorgegebenen Verzweigungspunkten $a_k [k = 1, 2, 3, \ldots]$ gehört, eine Annahme, deren Zutreffen in jedem Falle durch eine evtl. vorzunehmende lineare Transformation erreicht wird. Wir bezeichnen jetzt, in Analogie zu dem oben § 2 gleich bezeichneten Punkte, mit α_1 den dem Nullpunkte am nächsten liegenden Verzweigungspunkt a_{k_1}. Wir konstruieren dann, mit n_k allgemein die zu a_k gehörende Verzweigungszahl bezeichnend, ein den Punkt α_1 als Windungspunkt $(n_{k_1} - 1)$-ter Ordnung besitzendes Windungsflächenstück und begrenzen dasselbe durch die n_{k_1}-mal zu durchlaufende Peripherie des Einheitskreises; in dieser Form bezeichnen wir das Windungsflächenstück mit W_1. Ist $n_{k_1} = \infty$, so ergibt sich ein Windungspunkt unendlich hoher Ordnung. Wir bezeichnen mit K_1 die Fläche des Kreises $|z_1| \leq |\alpha_1|$, mit R das im Nullpunkt befindliche, die Richtung der positiv reellen Halbaxe anzeigende Richtungselement. Die Fläche K_1 und das Element R gehört in unserer Auffassung nur einem Blatte der Fläche W_1 an. Nunmehr bilden wir durch eine elementare Funktion $z_2(z_1)$ die Fläche W_1 in der Weise eineindeutig konform auf die schlichte Fläche des z_2-Einheitskreises ab, dass das Richtungselement R dabei in sich übergeht. Die von α_1 verschiedenen Verzweigungsstellen denken wir uns in allen Blättern der Fläche W_1 mit der zugehörenden Verzweigungszahl markiert und bei der erwähnten Abbildung durch die Funktion $z_2(z_1)$ mitübertragen, während die zu α_1 gehörende Verzweigungszahl in der z_2-Ebene gelöscht wird, nämlich an der Stelle $z_2(\alpha_1)$.

Wir erhalten dadurch in der Fläche des z_2-Einheitskreises eine neue Signierung, bei welcher wiederum der Bedingung genügt ist, dass die an der Signierung beteiligten Punkte sich nur gegen die Peripherie des Einheitskreises häufen. Es ist die Bemerkung zu machen, dass der dem Nullpunkte am nächsten kommende Punkt α_2 in der Signatur des z_2-Einheitskreises der Bedingung

$$|\alpha_2| > |\alpha_1|$$

genügt, was ebenso wie die analoge Tatsache oben bewiesen wird. Nunmehr wird die elementare Funktion $z_3(z_2)$ in analoger Weise wie $z_2(z_1)$ gebildet als die Abbildungsfunktion einer im Punkte α_2 verzweigten Windungsfläche W_2, deren Blätterzahl gleich ist der zu α_2 gehörenden Verzweigungszahl. Auf W_2 hat man

[1] Vgl. meine Note in Gött. Nachr. 1912 S. 847.

sich in allen Blättern die Signatur des z_2-Einheitskreises markiert und sodann bei der Abbildung durch die Funktion $z_3(z_2)$ mitübertragen zu denken, während die bei α_2 vorliegende Signatur, als durch die Abbildung selbst bereits berücksichtigt, in der z_3-Ebene gelöscht wird, nämlich an der Stelle $z_3(\alpha_2)$.

Es ist klar, wie das Verfahren fortzusetzen ist.

Wir haben jetzt eine unendliche Folge von Funktionen

$$f_n(z_1) = z_n\{z_{n-1}[\ldots[z_2(z_1)]\ldots]\}$$

definiert, als deren Limes

$$f_\infty(z_1) = \lim_{n=\infty} f_n(z_1)$$

die zu bestimmende Funktion $f(z_1)$ sich ergeben wird.

Zum genauen Nachweise der Richtigkeit dieser Behauptung weisen wir zunächst auf das Bestehen der Relationen

$$|\alpha_1| < |\alpha_2| < \ldots < |\alpha_n| < |\alpha_{n+1}| < \ldots$$

hin. Der Nachweis, dass

(*) $$\lim_{\nu=\infty} |\alpha_\nu| = 1$$

ist, erfordert gegenüber dem entsprechenden Nachweise in § 2 noch eine besondere Überlegung. Die Notwendigkeit einer solchen besonderen Überlegung ergibt sich aus dem Umstande, dass wir im vorliegenden Falle nicht immer ein und dieselbe Ordnungszahl für die Verzweigungspunkte der Fläche W_1, W_2, $W_3, \ldots$ haben, sondern durcheinander Ordnungszahlen von 2 bis ∞. Für unseren obigen Beweis war das Vorhandensein einer festen Ordnungszahl wesentlich. Namentlich kam dies bei der Betrachtung der Funktion $\sigma(\varrho)$ (Abh. I S. 186) zur Geltung.

Zum Nachweise der Limesgleichung (*) dient folgender Hilfssatz, dessen wesentlicher Inhalt der ist, dass die bei Anwendung einer Windungsfläche höherer als erster Ordnung bewirkte Anschmiegung jedenfalls noch stärker ist, als die bei Anwendung einer Windungsfläche erster Ordnung zustande kommende.

Hilfssatz: Es sei ϱ eine den Bedingungen $0 < \varrho < 1$ genügende positive reelle Zahl. Es sei K_ϱ die Fläche des Kreises $|z| \leqq \varrho$. Ferner sei $W_\varrho^{(\nu)}$ die im Punkte ϱ verzweigte ν-blättrige Windungsfläche, welche durch die ν-fach zu durchlaufende Peripherie des Einheitskreises abgegrenzt wird. Die Kreisfläche K_ϱ werde in dem einen Blatte, dem Grundblatte der Fläche $W_\varrho^{(\nu)}$ besonders markiert und, diesem Blatte entsprechend, mit $\varkappa_\varrho$ bezeichnet. In demselben Blatte werde auch das positiv reelle Richtungselement R im Nullpunkte markiert. Nunmehr werde die Fläche $W_\varrho^{(\nu)}$, unter Festhaltung des Richtungselementes R in K_ϱ, in der bekannten elementaren Weise auf die schlichte Fläche des Einheitskreises abgebildet durch eine Funktion $Z^{(\nu)}(z)$.

Alsdann wird behauptet, dass für die ganze Fläche $\varkappa_\varrho$ einschliesslich der Begrenzung die Ungleichheit besteht $|Z^{(\nu)}| > |Z^{(2)}|$ für alle $\nu > 2$. Nur für $z = 0$ selbst ist $Z^{(\nu)}(0) = Z^{(2)}(0) = 0$.

Beweis: Zum Beweise betrachten wir die Funktion $\log \frac{1}{|Z^{(\nu)}|}$ und vergleichen sie mit $\log \frac{1}{|Z^{(2)}|}$. Um diese Vergleichung für das Gebiet $\varkappa_\varrho$ auszuführen, denken wir uns jetzt die Fläche $W_\varrho^{(2\nu)}$ herangezogen. Auf dieser Fläche ist sowohl $\log \frac{1}{|Z^{(\nu)}|}$ als auch $\log \frac{1}{|Z^{(2)}|}$ eine eindeutige Potentialfunktion, erstere mit zwei logarithmischen Unstetigkeitsstellen, letztere mit ν solchen. Die genannten beiden Funktionen sind durch ihre angegebenen logarithmischen Unstetigkeitsstellen in Verbindung mit der Bedingung ihres Verschwindens am ganzen Rande von $W_\varrho^{(2\nu)}$ vollständig bestimmt. Wir bilden nunmehr die Fläche $W_\varrho^{(2\nu)}$ durch eine Funktion $z'(z)$ eineindeutig und konform auf die schlichte Fläche des z'-Einheitskreises ab, sodass dabei der Windungspunkt in den Nullpunkt übergeht. Die Übertragung der genannten Potentialfunktionen auf die Fläche des Einheitskreises liefert uns zwei in dieser Fläche eindeutig erklärte positive Potentialfunktionen, die am ganzen Rande verschwinden, deren erste nur an zwei reellen Stellen $-A$ und $+A$ logarithmisch unendlich wird, während die zweite an allen Stellen $-A e^{\frac{2\pi i}{\nu}\cdot\lambda} [\lambda = 1, 2, \ldots (\nu - 1)]$ logarithmisch unendlich wird. Ist nun ν eine grade Zahl, so ist sofort evident, dass die Differenz $U(z')$ der beiden zu vergleichenden Potentialfunktionen im ganzen z'-Einheitskreise positiv ist, weil sie am ganzen Rande verschwindet und nur positiv logarithmische Unstetigkeiten besitzt, die an den Stellen $-A e^{\frac{2\pi i}{\nu}\lambda}$ exkl. $-A$ und $+A$ selbst liegen. Ist hingegen ν eine ungrade Zahl, so wird die Funktion $U(z')$ an den genannten $\nu - 2$ Stellen ebenfalls positiv logarithmisch unendlich werden, ausserdem aber an der Stelle A negativ logarithmisch unendlich.

Hieraus geht zunächst hervor, dass in diesem Falle die Funktion $U(z')$ nicht im ganzen z'-Einheitskreise positiv sein kann. Was wir brauchen, ist nur, dass sie in dem in der z'-Ebene liegenden Bildgebiete $\varkappa'_\varrho$ der Kreisfläche $\varkappa_\varrho$ positiv ist. Diese Fläche $\varkappa'_\varrho$ ist nun a beroffenbar als Teil enthalten in demjenigen Kreis-sektor der Winkelöffnung $\frac{2\pi}{\nu}$, dessen Winkelhalbierende von der Strecke $0\ldots(-1)$ gebildet wird. In diesem Sektor ist die Funktion $U(z')$ jedenfalls von Unstetigkeiten frei. Längs des begrenzenden Peripheriestückes nimmt sie den konstanten Wert 0 an. Längs jedes der beiden Radienvektoren aber ergibt sie sich als positiv auf Grund der Bemerkungen, dass die bei A liegende negativ logarithmische Unstetigkeit gerade durch die in Bezug auf den betreffenden Radiusvektor symmetrisch zu ihr auftretende positiv logarithmische Unstetigkeit aufgehoben wird. Man muss nämlich beachten, dass die Funktion $U(z')$ als eine Summe von Potentialfunktionen aufgefasst werden kann, deren einzelne immer nur eine Unstetigkeit besitzt, sodass nun jede der in Betracht kommenden Unstetigkeiten in der Tat ihren bestimmten Beitrag zur Funktion $U(z')$ liefert.

Der Fall $\nu = \infty$ wird zweckmässig auf anderem Wege erledigt. In diesem Falle liefert eine einfachere Betrachtung das Resultat

$$|Z^{(\infty)}| > |Z^{(2)}|.$$

Man kann nämlich die Fläche $W_\varrho^{(\infty)}$ in der Weise konstruieren, dass man zunächst $W_\varrho^{(2)}$ konstruiert und relativ zu dieser Fläche in deren Windungspunkt ϱ eine relative Windungsfläche der Ordnung ∞ konstruiert. Dementsprechend wird $Z^{(\infty)}$ gefunden, indem man zunächst $Z^{(2)}$ bildet und von der $Z^{(2)}$-Ebene aus noch eine logarithmische Abbildung vornimmt, deren logarithmischer Verzweigungspunkt im Punkte $Z^{(2)}(\varrho)$ liegt. Insofern nun gemäss dem Schwarzschen Lemma bei jeder der genannten beiden Abbildungen für den einzelnen Punkt eine Vergrösserung des Abstandes vom Nullpunkte eintritt, ergibt sich ohne weiteres: $|Z^{(\infty)}| > |Z^{(2)}|$.

Nach dem hiermit gelieferten Nachweise der Limesgleichung (*) ist weiter noch besonders zu zeigen, dass die Grenzfunktion $f_\infty(z_1)$ tatsächlich, wie es sein soll, in all den vorgegebenen Verzweigungspunkten a_k und zwar in allen ihren Zweigen die verlangte Verzweigungseigenschaft besitzt. Dieser Punkt ist deswegen nicht ohne weiteres einleuchtend, weil wir bei der Wahl der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ein Prinzip befolgt haben, welches von vornherein nicht erkennen lässt, dass jeder Punkt a_k wirklich einmal an die Reihe kommt und, wenn dies schon eintritt, ob dann alle Zweige der zu bestimmenden Funktion $f_\infty(z_1)$ zur Berücksichtigung kommen. Man muss ja bedenken, dass in der z_n-Ebene der einzelne Punkt a_k nicht mehr durch einen einzelnen Bildpunkt, sondern durch endlich viele oder gar unendlich viele solche Bildpunkte repräsentiert wird.

Die Beantwortung der gestellten Frage ergibt sich folgendermassen. Wir fassen irgend einen von den gegebenen Verzweigungspunkten ins Auge. Es sei dies der Punkt A und seine zugeordnete Verzweigungszahl sei N. Wir verbinden denselben mit dem Nullpunkt der z_1-Ebene durch eine Linie L, welche keinen der übrigen Verzweigungspunkte und auch den Nullpunkt nicht zum zweiten Male trifft, im übrigen aber eine beliebige, sich selbst auch beliebig oft schneidende Bahn innerhalb des z_1-Einheitskreises darstellt. Wir betten jetzt die Linie L in einen einfach zusammenhängenden begleitenden Flächenstreifen S ein, welcher nun nach Art einer Riemannschen Fläche an den Schnittpunkten der Linie L mit sich selbst mehrblättrig erscheinen wird. Betrachten wir nunmehr in S die Funktionen $f_n(z_1)$. Dieselben sind in diesem Gebiete offenbar alle eindeutig, und wir behaupten jetzt, dass von einem gewissen n ab die Funktion $f_n(z_1)$, wie sie in S erklärt ist, im Punkte A einen Verzweigungspunkt der Ordnung N besitzt. Zum Zwecke dieses Nachweises betrachten wir die bei den sukzessiven Schmiegungsoperationen in der z_2-Ebene, z_3-Ebene, ... zu Stande kommenden Bilder des Flächenstreifens S, welche Bilder wir mit $S_1, S_2, \ldots$ bezeichnen. Nehmen wir nun an, dass die Funktionen $f_n(z_1)$ in S für jedes n eindeutig seien, mithin $z_{n+1}(z_n)$ unverzweigt in $A^{(n)}$, d. i. dem in S_n enthaltenen Bildpunkte von A, so würde notendig $|A^{(n)}|$ mit unbegrenzt wachsendem n gegen 1 konvergieren müssen wegen der Relation $\lim |\alpha_\nu| = 1$. In der Tat würden ja sonst für ein gewisses n der Punkt $A^{(n)}$ als Punkt α_n zur Bildung der Riemannschen Fläche W_n und der Funktion $z_{n+1}(z_n)$ in Betracht kommen.

Nun ist aber andererseits wiederum unmöglich, dass $|A^{(n)}|$ sich 1 beliebig nähern kann; denn jedenfalls müsste die als Bild der Linie L in der z_n-Ebene sich ergebende Linie L^n mit $A^{(n)}$ als Endpunkt und dem Nullpunkte als Anfangspunkt in einem gewissen, von n unabhängig bestimmbaren Teilbezirke, $(|z| < q < 1)$, des Einheitskreises enthalten bleiben (vgl. hierzu S. 266 der vorliegenden Abhandlung).

Die somit bewiesenermassen bei einem gewissen Wert n' des n zum ersten Male auftretende Verzweigung der Ordnung N im Punkte A des Streifens S kann nun offenbar nicht durch spätere Operationen aufgehoben werden.

Wir bemerken noch folgendes. Wenn N die Ordnungszahl irgend einer von α_1 verschiedenen, an der Signatur des z_1-Einheitskreises beteiligten Stelle ist, so findet sich diese Ordnungszahl offenbar für jedes n auch in der Signatur des z_n-Einheitskreises und zwar mehrmals vor. Die unmittelbar voranstehende Entwicklung gestattet alsdann den Schluss, dass die Zahl N unendlich oft als Verzweigungszahl der Fläche W_n figurieren muss. Dieser Umstand aber gestattet uns, den Nachweis der Limesgleichung (*) ohne den Hilfssatz S. 275 zu erbringen, unter Einführung der in § 2 der Abhandlung I definierten Funktion $\sigma(\varrho)$, die jetzt unter Zugrundelegung der Ordnungszahl N statt 2 zu bilden wäre.

§ 6.

Abbildung der dreifach signierten Vollebene durch die Schwarzschen Dreiecksfunktionen und Abbildung der Vollebene durch das elliptische Integral erster Art.

Nachdem wir im Vorgehenden das Problem der Fundamentalabbildung der signierten gewöhnlichen endlichen Kreisscheibe vollständig erledigt haben, wollen wir nunmehr das entsprechende Problem für die signierte Vollebene behandeln und zwar speziell unter der Voraussetzung, dass die Anzahl der gegebenen Verzweigungspunkte a_k entweder kleiner oder gleich 3 ist oder schliesslich gleich 4, wobei dann noch alle vier Verzweigungszahlen gleich 2 angenommen werden. Diese Spezialfälle werden uns in § 7 die Lösung der schliesslich in Betracht zu ziehenden allgemeinsten Aufgabe (beliebig signierte Vollebene und beliebig signierter allgemeiner Bereich) vermitteln.

Die gestellte Aufgabe erweist sich in gewissen Fällen als von vornherein unmöglich, nämlich in den Fällen, in welchen eine Abbildung mit der vorgegebenen relativen Verzweigung entweder auf die Vollebene selbst oder auf die ganze Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes ausgeführt werden kann, Abbildungen, welche wir im weiteren Sinne auch als Fundamentalabbildung bezeichnen können. Es sind dies die bekannten Fälle mit zwei und diejenigen mit drei, vier Verzweigungspunkten, für welche die Summe $\sum\frac{1}{n_k}\geq 1$ ist.

Im Falle von nur zwei vorgegebenen Verzweigungspunkten ergibt sich ausserdem die Nebenbedingung, dass die beiden vorgegebenen Verzweigungspunkte dieselbe zugeordnete Verzweigungszahl besitzen müssen. Ist die Bedingung erfüllt, so leistet die Funktion $\sqrt[n]{\frac{z-a_1}{z-a_2}}$ bezw. $\log\frac{z-a_1}{z-a_2}$ die in Frage kommende Abbildung.

Im Falle von drei vorgegebenen Verzweigungspunkten haben wir für n_1, n_2, n_3 die Fälle $(2, 2, 2)$, $(2, 2, n > 2)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$ zuerst zu nennen, in welchen $\sum\frac{1}{n_k} > 1$ ist und eine Abbildung auf die Vollebene ausgeführt werden kann.

Diese Abbildung vollzieht sich in den erst genannten vier Fällen im Einklang mit dem Grundprinzip des Schmiegungsverfahrens durch Wurzeloperationen, im zweiten Falle speziell für $n = \infty$ unter Mitbenutzung einer log-Operation.

Wir nehmen etwa den Fall $(2, 3, 4)$ als Beispiel. Es seien a_1, a_2, a_3 die drei gegebenen Verzweigungspunkte. Zu der Funktion $z' = \sqrt{\frac{z-a_1}{z-a_3}}$ gehört eine zweiblättrige Riemannsche Fläche, auf welcher wir uns die Stelle a_2 in beiden Blättern markiert denken mit der Verzweigungszahl 3, ferner a_3 mit der Verzweigungszahl 2. In der z'-Ebene bekommen wir dann an den Stellen $a_2^{(1)}$ und $a_2^{(2)}$, d. i. den zwei Bildpunkten von a_2, je eine Verzweigungszahl 3, an der Stelle $a_3^{(1)}$, d. i. dem Bildpunkte von a_3, die Verzweigungszahl 2. D. h.: Wir sind beim Falle (2, 3, 3) angelangt. Dieser Fall, für den wir hier wieder die alte Bezeichnung a_1, a_2, a_3 der Verzweigungspunkte einführen, erledigt sich nun so. Wir bilden $z' = \sqrt[3]{\frac{z-a_2}{z-a_3}}$ und bekommen dann an den drei Bildpunkten $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$, $a_1^{(3)}$ des Punktes a_1 je eine Verzweigungszahl 2. Dadurch erhalten wir den Fall (2, 2, 2). Dieser erledigt sich, wenn wir hier wieder die Bezeichnung a_1, a_2, a_3 für die Verzweigungspunkte einführen, folgendermassen: Wir bilden $z' = \sqrt{\frac{z-a_1}{z-a_2}}$ und bekommen dann bei $a_3^{(1)}$ und $a_3^{(2)}$, d. i. den Bildpunkten von a_3, je eine Verzweigungszahl 2. Von da führt dann eine Quadratwurzeloperation zur schlichten unsignierten Vollebene.[1]

Der Fall (2, 3, 5) lässt sich nicht so behandeln.[2] Wir finden die gesuchte Abbildung auf eine schlichte Vollebene im vorliegenden Falle, als Umkehrungsfunktion einer rationalen Funktion. Diese rationale Funktion wird gefunden, indem wir zunächst das sphärische Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$ konstruieren, dessen bezügliche Eckpunkte mit A, B, C bezeichnet werden mögen. Die symmetrische Wiederholung des Dreiecks A, B, C um den Punkt B herum oder um den Punkt C herum führen uns auf das Grunddreieck des regulären Ikosaeders bezw. auf das Grundpentagon des regulären Dodekaeders, und von da aus in bekannter Weise zur vollständigen Ausfüllung der Vollkugel. Die 60 Deckbewegungen der Ikosaedergruppe liefern uns jetzt eine Gruppe von 60 linearen Substitutionen $S_\lambda(\zeta)$ in der ζ-Ebene. Bezeichnen wir mit ζ_0 einen beliebigen Punkt der ζ-Ebene, welcher jedoch mit keinen Eckpunkte der Dreiecksteilung der ζ-Ebene zusammenfallen soll, so wird $z = \sum_{\lambda=1}^{60} S_\lambda\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_0}\right)$ offenbar eine Abbildung der schlichten Ebene auf eine 60-blättrige, einfach zusammenhängende, geschlossene Riemannsche Fläche in der z-Ebene leisten, welche Fläche nur in drei Punkten verzweigt ist mit den Verzweigungszahlen 2, 3, 5.

[1] Wir haben hier in neuer Auffassung die Auflösung der von KLEIN als Oktaedergleichung bezeichneten Gleichung gegeben, indem wir so zu sagen den umgekehrten Ausgangspunkt nahmen. Vgl. KLEIN »Vorlesungen über das Ikosaeder» S. 96 ff. Vgl, auch VIVANTI »Les fonctions polyédriques et modulaires» S. 268—271. Paris, 1910.

[2] F. KLEIN: Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen». Math. Ann. Bd. 61. S. 369 ff.

Die Fälle mit drei gegebenen Verzweigungspunkten und Verzweigungszahlen n_1, n_2, n_3 mit der Nebenbedingung $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{n_k} = 1$, d. s. die Fälle $(2, 2, \infty)$, $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$, $(3, 3, 3)$ gestatten eine analoge Behandlung. Der erste Fall erledigt sich sofort durch Anwendung einer Quadratwurzel- und einer Logarithmus-Operation. Der zweite, dritte und vierte Fall erledigt sich durch Angabe derjenigen Funktion $z(\zeta)$, welche die konforme Abbildung des geradlinigen Dreiecks mit den Winkeln $\frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}, \frac{\pi}{n_3}$ auf die Halbebene leisten, d. i. bezüglich die Funktion $(\wp' u)^2 \sim \wp^3 u$, $\wp^2(u) \sim \wp'' u$, $\wp' u$ [1], mit quadratischem Periodenparallelogramm im mittleren Falle und einem aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzten rhombischen Periodenparallelogramm in den beiden andern Fällen.[2] Die Grösse $\zeta = u$ als Funktion von z kann ihrerseits nach SCHWARZ direkt als Integral dargestellt und auch auf diese Weise erklärt werden. Vgl. hierzu die nachfolgende Behandlung des elliptischen Integrals.

Der Fall $(2, 2, 2, 2)$ wird in bekannter Weise durch das elliptische Integral erster Art erledigt, welches die konforme Abbildung auf die ganze Ebene exkl. ∞ leistet. Wir werden dabei die Integralfunktion $u(z)$ im Sinne potenzreihentheoretischer Betrachtungsweise erklären, als die durch die Integration der für den Integranden geltenden Potenzreihenentwicklung entstehende, nach den Grundsätzen der Potenzreihentheorie analytisch fortzusetzende Funktion. Dass diese Funktion die gewünschte Abbildung leistet, ergibt sich nach diesen Grundsätzen am einfachsten wohl wie folgt. Die Funktion $u(z)$ lässt sich an jeder Stelle der zum Integranden $\frac{1}{\sqrt{Z}}$ gehörenden Riemannschen Fläche R eindeutig umkehren, und es gehört auf diese Weise zu jeder Stelle $(z_0, \sqrt{Z_0})$ der Riemannschen Fläche ein gewisser Radius ϱ, als Radius des grössten um die zugehörende Stelle u_0 als Mittelpunkt existierenden Kreises, innerhalb dessen die Funktion $z(u)$ noch den Charakter einer rationalen Funktion besitzt. Die Grösse ϱ ist auf der geschlossenen Riemannschen Fläche R eine stetige, eindeutige, überall positive Funktion des Ortes, deren Werte folglich oberhalb einer gewissen positiven von Null verschiedenen Schranke γ bleiben. Darin liegt aber, dass die Umkehrungsfunktion $z(u)$ im Endlichen überhaupt keine Grenzstellen darbieten kann, an welcher sie aufhört, den Charakter einer rationalen Funktion zu besitzen. Denn man kann

---

[1] Das Zeichen $\sim$ soll andeuten, dass die beiden durch dieses Zeichen verbundenen Funktionen ganze lineare Transformationen von einander sind. Es ist ferner statt ζ der in der Theorie der elliptischen Funktionen übliche Buchstabe u gebraucht.

[2] Vgl. meine Abhandlung Math. Ann. Bd. 67 S. 168.

ja nun von jeder Stelle aus in jeder Richtung mindestens noch um das Stück γ weitergehen, ohne den Charakter einer rationalen Funktion für die Funktion $z(u)$ aufzugeben.[1]

Wir betrachten nunmehr den allgemeinen Fall von drei relativen Verzweigungspunkten in der z-Vollebene, wobei die Summe $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{n_k} < 1$ vorausgesetzt wird.

Wir konstruieren dazu das Kreisbogendreieck $A\,B\,C$ mit den Winkeln $\frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}, \frac{\pi}{n_3}$ an den bezüglichen Ecken A, B, C. Wir wählen die Bezeichnung so, dass $n_1 \leqq n_2 \leqq n_3$ ist. Die Konstruktion des Kreisbogendreiecks selbst ist elementar. Wir denken es uns als Dreieck mit dem Einheitskreise der ζ-Ebene als Orthogonalkreis, und zwar innerhalb dieses Kreises liegend. Nunmehr bestimmen wir mittels des Schmiegungsverfahrens, wie wir dasselbe in der Abhandlung I zur Anwendung brachten, diejenige Funktion $z(\zeta)$, welche das Innere des Dreiecks $A\,B\,C$ auf die obere Halbebene abbildet und können nach derselben Methode, die wir bei der elliptischen Modulfunktion oben § 1 anwandten, den analytischen Charakter der Funktion $z(\zeta)$ längs der Begrenzung des Kreisbogendreiecks bestimmen und nun durch den Spiegelungsprozess die analytische Fortsetzung der Funktion $z(\zeta)$ innerhalb der ganzen Fläche des Einheitskreises vornehmen. Die Tatsache der zustandekommenden vollständigen Ausfüllung des Einheitskreises zeigt dann, dass wir in der Funktion $\zeta(z)$ die gesuchte Abbildungsfunktion $f(z)$ besitzen.

Es wird nicht überflüssig sein, an dieser Stelle einige, die *Topologie der Schwarzschen Dreiecksgruppen* betreffende Bemerkungen hinzuzufügen, welche in übersichtlicher Weise das topologische Gesetz erkennen lassen, nach welchem sich bei der symmetrischen Wiederholung des Dreiecks $A\,B\,C$ gemäss dem Symmetrieprinzip die vollständige Ausfüllung des Einheitskreises vollzieht. Wir bringen dabei das *Prinzip der kranzförmigen Erweiterung* zur Anwendung in einer Form, bei welcher wir stets die *Bedingung der Konvexität* der die Fläche des Einheitskreises nach und nach ausschöpfenden Näherungspolygone erfüllen werden. Die Bedingung der Konvexität eines Gebietes bezw. ist so zu verstehen, dass die als Orthogonalkreisbogen konstruierte Verbindung je zweier Punkte des Gebiets ganz in dem Gebiete selbst enthalten ist.

Erfüllen erstens alle drei n_k die Bedingung $n_k \geqq 3$, so findet das Prinzip der kranzförmigen Erweiterung bei vollständiger Aufrechterhaltung auch der Konvexität aller Näherungspolygone unmittelbar Anwendung. Wir gruppieren zu-

[1] Vgl. die Behandlung bei E. PICARD, »Traité d'analyse» Bd. II, pag. 336, 1893.

nächst um das Ausgangsdreieck alle mit einer Seite oder auch nur einer Ecke daran anstossenden. Wir fügen diesen ersten Kranz neuer Dreiecke hinzu und erhalten einen umschliessenden konvexen Linienzug, welcher das erste Näherungspolygon darstellt. Die Eckpunkte desselben sind sämtlich entweder zweizipfelig oder dreizipfelig, je nachdem in demselben zwei oder drei Dreiecke von innen her anstossen. Nunmehr werden längs der Begrenzungslinie des ersten Näherungspolygons alle mit einer Seite oder Ecke anstossenden weiteren Dreiecke hinzugefügt, welche zusammen den zweiten Kranz bilden. Die dadurch erweiterte Figur stellt das zweite Näherungspolygon dar. Dasselbe ist ebenfalls konvex und hat nur zweizipfelige oder dreizipfelige Eckpunkte. So geht es weiter von Kranz zu Kranz, ohne dass jemals eine Schwierigkeit auftritt.

Es ergibt sich auch eine Abschätzung der Anzahl der Kränze, welche ausreichen, um eine vollständige Bedeckung irgend eines mit dem Einheitskreise konzentrischen Kreises vom Radius $r < 1$ zu haben. Man muss dazu die durch den Logarithmus eines Doppelverhältnisses in bekannter Weise dargestellte nichteuklidische Entfernung zweier Punkte innerhalb des Einheitskreises in Betracht loge Weise wie vorher jetzt als neue Grundfigur ein Viereck mit lauter gleichen Winkeln $\frac{2\pi}{n_3}$ und B als Mittelpunkt.

Haben wir schliesslich $n_1 = 2$, $n_2 \geqq 5$, $n_3 \geqq n_2$, so ergibt dasselbe Verfahren als neue Grundfigur ein n_2-Eck mit lauter gleichen Winkeln $\frac{2\pi}{n_3}$ und B als Mittelpunkt. In allen Fällen liefert das Prinzip der kranzförmigen Erweiterung, auf die neuen Grundfiguren angewandt, nur konvexe Figuren mit lauter zweizipfeligen Eckpunkten als Näherungspolygone.

§ 7.

Abbildung der allgemeinsten signierten schlichten Bereiche.

Wir sind nunmehr in der Lage, die Fundamentalabbildung der signierten schlichten Bereiche im allgemeinsten Falle durchzuführen, nämlich durch Reduktion auf behandelte Fälle, insbesondere auf das in § 5 behandelte Problem der Abbildung der signierten gewöhnlichen Kreisscheibe.[1]

Wir denken uns einen beliebigen endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängenden schlichten Bereich B in der z-Ebene gegeben und statten denselben mit einer Signatur aus, indem wir endlich oder unendlich viele Punkte a_k im Innern desselben, die sich nur gegen die Grenze von B häufen sollen, markieren und denselben Verzweigungszahlen n_k zuordnen, die auch ∞ sein können. Der Sinn des zu stellenden Abbildungsproblems ist klar. Die zu bestimmende Funktion heisse $f(z)$. Wir können nun zunächst mit dem unsignierten Bereich B die Fundamentalabbildung ausführen, wobei wir im Falle, dass der Bereich B einfach oder zweifach zusammenhängend ist, eine Abbildung auf die ganze Ebene exkl. ∞ bekommen können, aber auch den Fall der Vollebene als des gegebenen Bereichs B von vornherein mit in Betracht ziehen müssen. Die Signatur haben wir uns bei der erwähnten Fundamentalabbildung mit übertragen zu denken, wobei jeder markierte Punkt im allgemeinen unendlich viele Bildpunkte für die neue Signatur liefern wird.

Wir sehen aus dem Vorstehenden, dass es genügt, das Problem für drei Fälle zu behandeln, nämlich für die *signierte gewöhnliche Kreisscheibe*, die *signierte unendliche Kreisscheibe* (ganze Ebene exkl. ∞) und für die *signierte Vollebene*. Dabei ist noch zu sagen, dass im letzteren Falle nur endlich viele Punkte in der

[1] Vgl. meine Note: »Zur Uniformisierung der algebraischen Kurven», Gött. Nachr. 1907, desgl. meine Abhandlung, »Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Zweiter Teil», Journal f. Math., Bd. 139, §§ 5 u. 6.

Signatur auftreten können, weil sonst Häufungspunkte vorhanden wären und alsdann das Problem zweckmässig als ein Abbildungsproblem für einen nicht geschlossenen Bereich, dessen Begrenzung von den Häufungspunkten gebildet wird, betrachtet werden würde.

Die Abbildung der signierten *unendlichen Kreisscheibe* (excl. ∞) reduziert sich folgendermassen auf die der signierten endlichen Kreisscheibe. Es sei λ die Anzahl der signierten Punkte a_k mit den Verzweigungszahlen n_k. λ kann auch unendlich sein, in welchem Falle auffassungsgemäss $\lim\limits_{k=\infty} |a_k| = \infty$ ist.

Der Fall $\lambda = 1$ erledigt sich sofort durch eine Wurzel- bezw. Logarithmus-Operation vollständig.

Der Fall $\lambda = 2$ erledigt sich vollständig, indem man den unendlich fernen Punkt mit der Verzweigungszahl ∞ behaftet und nunmehr die Ebene mit der durch die Verzweigungszahlen n_1, n_2, ∞ bestimmten Dreicksfunktion abbildet.

Im Falle $\lambda \geqq 3$ ist zu unterscheiden, ob alle n_k gleich 2 sind oder nicht. Im letzteren Falle nehmen wir einen Verzweigungspunkt, dessen Verzweigungszahl grösser als 2 ist, dazu irgend einen zweiten und schliesslich den Punkt ∞, indem wir diesem die Verzweigungszahl ∞ zuordnen. Nun wird die signierte Ebene mittelst der durch die drei genannten Punkte mit ihren zugeordneten Verzweigungszahlen bestimmten Dreiecksfunktion auf eine gewöhnliche signierte Kreisscheibe abgebildet. Wir gelangen so zum Falle des in § 5 behandelten Abbildungsproblems für die gewöhnliche signierte Kreisscheibe.

Sind im Falle $\lambda \geqq 3$ alle Verzweigungszahlen n_k gleich 2, so bilden wir die signierte z-Ebene mittels $z' = \sqrt{\frac{z-a_1}{z-a_2}}$ auf eine signierte zweifach punktierte Ebene ab. Nunmehr ordnen wir den beiden Punktierungsstellen je die Verzweigungszahl ∞ zu und nehmen noch irgend einen Punkt der Signatur der z'-Ebene mit seiner Verzweigungszahl hinzu. Durch die damit bestimmte Dreiecksfunktion erhalten wir eine Abbildung auf die gewöhnliche Kreisscheibe, deren Signatur aus der ursprünglich gegebenen durch die Abbildung bestimmt wird.

Es bleibt noch der *Fall der Vollebene* als des gegebenen Bereichs B zu behandeln. Die Anzahl λ ist dann endlich und kann $\geqq 3$ vorausgesetzt werden, da $\lambda = 3$ durch die Dreiecksfunktionen erledigt ist. Ebenso ist der Fall $\lambda = 4$, wenn alle Verzweigungszahlen gleich 2 sind, durch das elliptische Integral erster Art vorweg erledigt.

Es sind nun zwei Unterfälle zu unterscheiden.

Es kann nämlich erstens sein, dass sich unter den Verzweigungszahlen n_k drei solche befinden, für welche die Summe der reziproken Werte kleiner oder höchstens gleich 1 ist. Alsdann liefert die dadurch definierte Dreiecksabbildung der signierten z-Ebene sofort die Reduktion auf den Fall der signierten gewöhnlichen oder unendlichen Kreisscheibe. [1]

Ist zweitens für keine drei Verzweigungsstellen die erwähnte Bedingung erfüllt, so wählen wir irgend drei der Verzweigungsstellen und bilden für die zugehörenden Verzweigungszahlen die betreffende Dreiecksfunktion, welche mindestens vierdeutig ist. Wir bekommen vermöge derselben eine Abbildung wieder auf eine signierte Vollebene, wobei nun aber in der neuen Signatur *vier untereinander gleiche Verzweigungszahlen* auftreten werden. Von hier aus kommen wir, falls diese vier Verzweigungszahlen sämtlich gleich 2 sind, durch das elliptische Integral erster Art auf die signierte unendliche Kreisscheibe, desgleichen, wenn alle gleich 3 sind, mittels der durch drei derselben bestimmten Dreiecksfunktion auf die unendliche signierte Kreisscheibe, wenn alle vier grösser als 3 sind, mittels der durch drei derselben bestimmten Dreiecksfunktion auf die signierte gewöhnliche Kreisscheibe. [2]

Hiermit ist die Reduktion vollendet.

Zum Schluss bemerken wir noch, dass wir im Vorhergehenden das Problem der Abbildung allgemeinster signierter Bereiche in der Weise behandelt haben, dass wir zunächst die relativ unverzweigte Kreisabbildung des Bereichs vorgenommen haben. Wir hätten statt dessen auch den Bereich mit seiner Signatur direkt behandeln können, in der Weise, dass wir auf einen signierten Teilbereich innerhalb des Einheitskreises zu kommen suchen, der nicht mit der ganzen Fläche des Einheitskreises identisch zu sein braucht. Das Schmiegungsverfahren kann dann auf einen solchen Bereich mit Signatur in der Tat direkt angewandt werden. Man hat nur zu beachten, dass bei der Auswahl des jeweilig nächsten Punktes, der als Punkt a_n zur Bildung der Fläche W_n dient, nun auch die Grenzpunkte des jeweiligen Bereichs mit zur Konkurrenz kommen neben den markierten Verzweigungspunkten. Eine Erschwerung des Beweisverfahrens wird hierdurch nicht bedingt.

Wir erwähnen zum Schlusse auch noch, dass die Eigenschaft eines Punktes, isolierter Grenzpunkt des abzubildenden Bereichs B zu sein oder innerer Punkt des Bereichs B mit zugeordneter Verzweigungszahl ∞, als gleichwertig erscheinen, von dem trivialen Falle abgesehen, dass der Bereich B die einfach punktierte Vollebene ist und entweder kein oder nur ein Verzweigungspunkt und zwar dieser mit endlicher Verzweigungszahl gegeben ist.

---

[1] Vgl. hierzu S. Johansson's Anwendung dieser Dreiecksfunktion zur Majorantenbildung in Math. Ann. Bd. 62, S. 192.

[2] Vgl. meine S. 284 unten zitierten Abhandlungen.

E. Vierter Teil. (§ 8.)

Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche.

Nach Kenntnis der verzweigten Fundamentalabbildung der Vollebene, die wir in § 7 durchgeführt haben, gelingt jetzt verhältnismässig einfach die Lösung des Problems, zu einer vorgelegten geschlossenen Riemannschen Fläche eine dazu gehörende algebraische Funktion zu konstruieren. Abgesehen von der Einfachheit und Durchsichtigkeit des eingeschlagenen Weges ist besonders der durchaus funktionentheoretische Charakter der ganzen Beweisführung hervorzuheben, welche vollständig und allein auf den elementaren Grundlagen der Potenzreihentheorie beruht.

Es sei F irgend eine über der z-Ebene ausgebreitete geschlossene endlich-vielblättrige Riemannsche Fläche mit endlich vielen Windungspunkten. Es wird die Konstruktion einer auf der Fläche F eindeutigen analytischen Funktion $w(z)$ verlangt, welche überall auf der Fläche den Charakter einer algebraischen Funktion besitzt und ausserdem in zwei verschiedenen Blättern der Fläche F niemals identisch, d. h. für variables z dieselben Funktionswerte annimmt. Die letztere Bedingung kann auch in Form der Forderung formuliert werden, dass die Funktion $w(z)$ als Funktion von z n von einander verschiedene Zweige haben soll, wenn n die Anzahl der Blätter der Riemannschen Fläche F ist.

Wir markieren in der schlichten z-Ebene diejenigen Stellen, an welchen die Fläche F in irgend einem Blatte einen Windungspunkt hat. Es seien dies die Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$.

Im Falle $\nu = 2$ ist die Lösung der Aufgabe trivial. In diesem Falle kann nämlich die Riemannsche Fläche F offenbar nur die Gestalt einer bei a_1 und a_2 je einen und nur einen Windungspunkt $(n-1)$-ter Ordnung besitzenden Fläche haben, zu welcher als Funktion $w(z)$ unmittelbar die Funktion $\sqrt[n]{\dfrac{z-a_1}{z-a_2}}$ angegeben werden kann.

Ist $\nu \geqq 3$, so verfahren wir folgendermassen. Wir bestimmen jeder Stelle a_k entsprechend das kleinste gemeinschaftliche Vielfache n_k aller zu a_k gehörenden Windungszahlen, d. i. der um 1 vermehrten Ordnungszahlen der über a_k liegenden Windungspunkte. Nunmehr wird die zu $a_1, \ldots, a_\nu$ als Verzweigungspunkten und $n_1, \ldots n_\nu$ als Verzweigungszahlen gehörende Fundamentalabbildung bestimmt, deren Existenz oben bewiesen worden ist.

Die Abbildungsfunktion $\zeta(z)$ kann eine endlich- oder unendlich-vieldeutige Funktion von z sein. Wir betrachten jetzt diese Funktion als Funktion auf der Riemannschen Fläche F und bezeichnen sie als solche mit $\zeta(\bar{z})$. Die Funktion

$\zeta(\tilde{z})$ wird auf der Fläche F nur an den Stellen a_k relativ verzweigt sein können. Die relative Verzweigungszahl an einer solchen Stelle ist offenbar gleich $\frac{n_k}{N}$, wenn N die Windungszahl des betreffenden Punktes $\tilde{a}_k$ ist.

Die Funktion $\zeta(\tilde{z})$, wie sie sich gemäss den Prinzipien der analytischen Fortsetzung als Funktion auf F ergibt, kann weder an einer und derselben Stelle $\tilde{z}$ noch an zwei von einander verschiedenen Stellen $\tilde{z}$ denselben Wert annehmen. Diese Bemerkung versteht sich von selbst, sofern die beiden Punkte $\tilde{z}$ über verschiedenen Punkten der z-Ebene liegen, weil ja bekannt ist, dass die Funktion $\zeta(z)$ an zwei von einander verschiedenen Punkten der z-Ebene nur verschiedene Werte haben kann. Dass $\zeta(\tilde{z})$ an einer und derselben Stelle $\tilde{z}$ nicht in zwei verschiedenen ihrer Zweige einen und denselben Wert annimmt, ist ebenfalls klar, weil dies nach den Eigenschaften der Funktion $\zeta(\tilde{z})$ nur so möglich wäre, dass in den beiden betreffenden Zweigen der Funktion $\zeta(\tilde{z})$ Übereinstimmung der Werte nicht nur an der einen Stelle $\tilde{z}$, sondern für variabel gedachtes $\tilde{z}$ bestehen müsste. Alsdann würden wir aber nach dem Begriff der Funktion $\zeta(\tilde{z})$ die betreffenden beiden Zweige dieser Funktion nicht mehr als verschiedene Zweige betrachten.

Dass schliesslich die Funktion $\zeta(\tilde{z})$ auch nicht an zwei in der z-Ebene koinzidierenden, auf der Fläche F jedoch verschiedenen Punkten $\tilde{z}$, etwa $\tilde{z}^{(1)}$ und $\tilde{z}^{(2)}$, einen und denselben Wert ζ^* annehmen kann, ergibt sich daraus, dass andernfalls die Funktion $\tilde{z}(\zeta)$ eine mehrdeutige Funktion von ζ wäre, indem sie nämlich an der Stelle ζ^* sowohl den Wert $\tilde{z}^{(1)}$ als auch den Wert $\tilde{z}^{(2)}$ annähme, welche beiden Werte auf dem Wege einer gewissen analytischen Fortsetzung innerhalb des ζ-Gebietes (Einheitskreis, punktierte Ebene, Vollebene) in einander übergehen. Das ist nun aber andererseits unmöglich, weil die Funktion $\tilde{z}(\zeta)$ eine unverzweigte Funktion ist und weil das ζ-Gebiet einfach zusammenhängend ist.

Von der Funktion $\zeta(\tilde{z})$ ausgehend bilden wir nunmehr eine Funktion $w(\tilde{z})$ in folgender Weise.

Liegt erstens der Fall der Abbildung auf die Vollebene für $\zeta(z)$ vor, so ist die Funktion $\zeta(z)$, also auch die Funktion $\zeta(\tilde{z})$ endlich-vieldeutig. Es wird die Funktion $\zeta(\tilde{z})$ an einer und nur einer Stelle $\tilde{z}^{(0)}$ und zwar nur in einem ihrer Zweige von erster Ordnung unendlich. Wir können noch annehmen, dass der Punkt $\tilde{z}^{(0)}$ ein von allen Punkten a_k verschiedener Punkt sei. Wir bilden jetzt, mit $\zeta^{(1)}(\tilde{z})$, $\zeta^{(2)}(\tilde{z}), \ldots \zeta^{(N)}(\tilde{z})$ die verschiedenen Zweige der Funktion $\zeta(\tilde{z})$ bezeichnend die Summe

$$w(\tilde{z}) = \sum_{\lambda=1}^{N} \zeta^{(\lambda)}(\tilde{z}).$$

Alsdann ist $w(\tilde{z})$ offenbar eine Funktion der verlangten Art, die übrigens nur an einer Stelle, nämlich der Stelle $\tilde{z}^{(0)}$, unendlich wird und zwar erster Ordnung.

Liegt zweitens der Fall der Abbildung auf die ganze Ebene (excl. ∞) für $\zeta(z)$ vor, so denken wir uns die Fläche F, deren Geschlecht p grösser oder gleich o sein kann, mittels p Rückkehrschnittpaaren von einem gemeinschaftlichen, allgemein gehaltenen Kreuzungspunkte $\tilde{o}$ aus zu einer einfach zusammenhängenden Fläche aufgeschnitten, die so aufgeschnittene Fläche sodann noch weiter aufgeschnitten durch Einschnitte von $\tilde{o}$ nach allen Punkten $\tilde{a}_k\,[k=1,\ldots\nu]$ auf F, deren Windungszahl kleiner als n_k ist. Die so aus F entstandene einfach zusammenhängende Fläche werde mit F' bezeichnet. Die Funktion $\zeta(\tilde{z})$ nimmt auf Grund der vorangeschickten Untersuchung in F an zwei verschiedenen Stellen immer auch verschiedene Werte an. Ein Zweig derselben bildet die Fläche F' auf einen schlichten Fundamentalbereich in der ζ-Ebene ab, dessen, den verschiedenen Zweigen entsprechende euklidisch kongruente Wiederholungen die ganze ζ-Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes einfach bedecken. Nunmehr wird innerhalb F' ein gewöhnlicher Punkt $\tilde{z}^{(0)}$ beliebig gewählt. Ihm entsprechen unendlich viele Punkte $\zeta^{(\lambda)}_{(0)}$. Wir bilden die unendliche Reihe

$$W(\zeta)=\sum_{\lambda}\frac{1}{(\zeta^{(\lambda)}-\zeta^{(\lambda)}_{(0)})^3},$$

welche in der ganzen ζ-Ebene gleichmässig konvergent ist und eine analytische Funktion darstellt, die gegenüber den Substitutionen des Fundamentalbereichs ungeändert bleibt. Der Nachweis der gleichmässigen Konvergenz vollzieht sich, wie der entsprechende Beweis für die Reihe der Funktion $\wp'(u)$ in der Theorie der elliptischen Funktionen. Der Umstand, dass hier nicht nur Parallelverschiebungen, sondern auch Drehungen als Substitutionen in Frage kommen, verursacht keine neue Schwierigkeit, weil die Punkte $\zeta^{(\lambda)}$ und $\zeta^{(\lambda)}_{(0)}$ in einem quadratischen bezw. gleichseitig rhombischen Periodengitter so untergebracht sind, dass in keinem einzelnen Quadrat oder Rhombus des Gitters mehr als vier bezw. sechs der Punkte liegen können. Um zur Funktion $w(\tilde{z})$ zu gelangen, brauchen wir die Funktion $W(\zeta)$ nur auf die Fläche F zu übertragen.

Liegt schliesslich der allgemeine Fall vor, so verwandeln wir wieder die Fläche F in die einfach zusammenhängende Fläche F', die dann durch die Funktion $\zeta(z)$ auf einen Fundamentalbereich und dessen die Fläche des ζ-Einheitskreises ausfüllende Wiederholungen abgebildet wird. Nunmehr wird die Funktion

$$W(\zeta)=\frac{\Theta_1(\zeta)}{\Theta_2(\zeta)}=w(\tilde{z})$$

als Quotient zweier POINCARÉ'schen Reihen gleicher Dimension gebildet. Die Funktion $\Theta_2(\zeta)$ werde im Fundamentalbereich unendlich bei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h$, null bei $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$. Es sei M die Höchstordnung dieser Nullstellen. Alsdann werde die Funktion $\Theta_1(\zeta)$ so bestimmt, dass sie im Fundamentalbereich nur an einer von den α und β verschiedenen Stelle $\zeta_{(0)}$ unendlich der Ordnung $M + 1$ wird. Bei dieser Wahl wird $w(z)$ eine eindeutige Funktion auf F, welche nur an einer Stelle unendlich wird von der Ordnung $M + 1$, an anderen Stellen jedoch höchstens von M-ter Ordnung. Die Funktion $w(z)$ gehört demnach eigentlich zur Riemannschen Fläche F.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass man die beiden ersterwähnten Fälle mit unter den allgemeinen Fall subsumieren kann, indem man statt der n_k Multipla derselben als Verzweigungszahlen wählt. Auch kann man es immer so einrichten, dass diese Multipla für die verschiedenen a_k einander gleich sind, was für den Existenzbeweis der Funktion $\zeta(z)$ eine Erleichterung bietet, insofern als dann der Hilfssatz pag. 275 unmittelbar entbehrlich wird.