SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFERENCES FINIES À COEFFICIENTS RATIONNELS.[1]

PAR

N. E. NÖRLUND

à LUND.

Introduction.

Le premier jet d'une théorie des équations linéaires aux différences finies a été donné par POINCARÉ[2] en 1885. En désignant par $u(x)$ une solution de l'équation

$$\sum_{i=0}^{i=k} p_i(x)\, u(x+i) = 0, \tag{1}$$

POINCARÉ démontre que le quotient $u(x+1):u(x)$ tend, en certains cas, vers une limite quand x tend vers l'infini par des valeurs positives et il détermine cette limite.

L'objet principal du Mémoire de POINCARÉ était d'ailleurs l'étude des solutions des équations différentielles linéaires au voisinage du point à l'infini et il faisait ressortir l'analogie qu'il y a entre ces équations et celles aux différences finies. L'étude des valeurs asymptotiques des solutions $u(x)$ de l'équation (1) a

---

[1] L'impression de ce Mémoire, qui est arrivé à la Rédaction en octobre 1912, a été retardé par des circonstances imprévues. MITTAG-LEFFLER.

[2] Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies. American Journal of Mathematics t. 7, p. 203—258, 1885.

été poursuivie plus loin par MM. PINCHERLE,[1] HORN,[2] PERRON,[3] VAN VLECK[4] et par le présent auteur.

Soient $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_k(x)$ des fonctions rationelles de x. En m'inspirant des résultats de POINCARÉ relatifs aux équations différentielles j'ai démontré[5] l'existence d'un système fondamental de solutions de l'équation (1), holomorphes dans un certain demi-plan.

J'ai obtenu des expressions asymptotiques de ces solutions pour des valeurs réelles et très grandes de x en formant des développements en séries de facultés qui, en certains cas, sont convergentes et en tous cas représentent asymptotiquement les solutions. Dans le Mémoire cité j'ai insisté surtout sur l'existence de *deux* systèmes fondamentaux de solutions que j'appelle le premier et le second systèmes canoniques de solutions. Elles se distinguent nettement, par leurs propriétés analytiques, de toutes les autres solutions qu'on sait former, et j'ai fait voir quel est le rôle que jouent ces solutions dans la théorie des fractions continues. Le but du présent Mémoire est d'approfondir l'étude de ces deux systèmes de solutions.

Ce sont des fonctions analytiques et uniformes de la variable complexe x. Je détermine leurs points singuliers et je mettrai en évidence le caractère analytique des singularités. Les resultats auxquels je suis parvenu sont d'une grande simplicité. L'équation (1) définit une classe de transcendantes nouvelles fort remarquables.

Jusqu'à ces derniers temps la fonction $\Gamma(x)$ était la seule d'entre elles

---

[1] Sur la génération des systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle. Acta mathematica t. 16, p. 341—363, 1893; Sulla risoluzione approssimata delle equazioni alle differenze, Rom. Acc. L. Rend. sér. 5, t. 7, p. 230—234, 1898.

[2] Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. Math. Annalen t. 53, p. 177—192, 1900; Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzen- und Differentialgleichungen für grosse Werte der Veränderlichen. Journal für die reine und angewandte Mathematik t. 138, p. 159—191, 1910.

[3] Über einen Satz des Herrn POINCARÉ. Journal für die reine und angewandte Mathematik t. 136, p. 17—37, 1909; Über die POINCARÉ'sche lineare Differenzengleichung ibid. t. 137, p. 6—64, 1909; Über lineare Differenzengleichungen. Acta mathematica t. 34, p. 109—137, 1910. Voir aussi:

T. ERB: Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differenzen-Gleichungen durch Potenreihen. Diss. Pirmasens, 1913.

P. KREUSER: Über das Verhalten der Integrale homogener linearer Differenzengleichungen im Unendlichen. Diss. Borna-Leipzig, 1914.

[4] On the extension of a theorem of POINCARÉ for difference-equations. Transactions of the American Mathematical Society t. 13, p. 342—352, 1912.

[5] Fractions continues et différences réciproques. Acta mathematica t. 34, p. 1—108, 1910.

qu'on eût étudiée. Mais tout récemment MM. BIRKHOFF[1] et GALBRUN[2] ont publié des travaux remarquables concernant les équations aux différences. Je me suis rencontré avec ces auteurs sur plusieurs points. Mais nos recherches ont été poursuivies indépendamment les une des l'autres et par des voies différentes. Pour ce qui concerne la priorité des questions je fais remarquer que la partie essentielle de mes résultats a déjà été démontrée dans ma Thèse.[3]

M. HORN, dans les Mémoires cités, avait formé certaines séries de puissances qui satisfont formellement à l'équation aux différences et il avait démontré qu'elles représentent asymptotiquement les solutions pour des valeurs entières positives et très grandes de x. C'est sur la considération de ces séries de puissances que sont fondées les recherches de MM. BIRKHOFF et GALBRUN.

---

[1] General theory of linear difference equations. Transactions of the American Mathematical Society t. 12, p. 243—284, 1911. Plus récemment encore M. BIRKHOFF a publié un Mémoire très important qui va sans doute inspirer des recherches nouvelles sur le sujet mais que je dois me borner à citer ici. The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences p. 521—568, octobre 1913.

[2] Sur la représentation des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable. Thèse, Acta mathematica t. 36, p. 1—68, 1912. Voir aussi Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 5 avril 1909, 6 décembre 1909, 24 janvier 1910, 12 décembre 1910.

Parmi les travaux récents qui se rapportent plus ou moins directement à notre sujet je cite encore:

K. P. WILLIAMS: The solutions of non-homogenous linear difference equations and their asymptotic form. Transactions of the American Mathematical Society t. 14, p. 209—240, 1913.

T. BRODÉN: Bemerkungen über sogenannte finite Integration. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik t. 7, 1911; Einige Anwendungen diskontinuierlicher Integrale auf Fragen der Differenzenrechnung. Lunds Universitets Årsskrift. N. F. Afd. 2, Bd 8, N:r 7.

R. D. CARMICHAEL: Linear difference equations and their analytic solutions. Transactions of the American Mathematical Society t. 12, p. 99—134, 1911; On the theory of linear difference equations. American Journal of Mathematics t. 35, p. 163—182, 1913; Linear mixed equations and their analytic solutions. Ibid. t. 35, p. 151—162, 1913.

C. B. HENNEL: Transformations and invariants connected with linear homogenous difference equations and other functional equations. Ibid. t. 35, p. 431—452, 1913.

G. WALLENBERG und A. GULDBERG: Theorie der linearen Differenzengleichungen. Leipzig, 1911.

S. LATTÈS: Sur les suites récurrentes non linéaires et sur les fonctions génératrices de ces suites. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Sér. 3, t. 3, p. 73—124.

E. E. LEVI: Sopra una classe di trascendenti meromorfe. Annali di Matematica, sér. 3, t. 14, p. 93—113.

N. KUYLENSTIERNA: Études sur les équations aux différences finies. Thèse. Lund, 1912.

M. FUJIWARA: Ueber Zusammenhang zwischen den linearen adjungierten Differenzen- und Differentialgleichungen. The Tôhoku mathematical Journal t. 1, p. 195—200, 1912.

[3] Bidrag til de lineaere Differensligningers Theori. Copenhague 1910. J'ai donné un résumé des resultats dans les Notes suivantes: »Sur la convergence des fractions continues. Comptes rendus de l'Académie des Sciences 5 oct. 1908; Sur les équations aux différences finies, ibid. 15 nov. 1909, 23 décembre 1912, 6 janvier 1913; Ueber lineare Differenzengleichungen. Mémoires de l'Academie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague, sér. 7, t. VI, p. 309—326, 1911.

Mais d'une part ces séries sont très difficiles à former, d'autre part elles sont toujours divergentes.[1] *La série de puissance* qui a rendu si grands services dans la théorie des équations différentielles se prête mal à l'étude des solutions des équations aux différences finies. C'est, dans ce cas, à *la série de facultés* qu'il faut avoir recours.

Dans ce Mémoire je me suis constamment servi de ces séries, toute la théorie en gagne beaucoup, en clarté et en beauté, ce me semble. Comme l'a démontré récemment M. HORN[2] les séries de facultés peuvent d'ailleurs aussi rendre service dans l'étude des équations différentielles linéaires.

Les propriétés des séries de facultés ont été étudiées par MM. JENSEN, NIELSEN, PINCHERLE et LANDAU. J'ai dû approfondir sur plusieurs points la théorie de ces séries avant d'écrire ce Mémoire. Dans ce qui suit je m'appuyerai souvent sur cette étude préliminaire.[3]

Dans le chapitre II je considère des équations aux différences finies de la forme (1), les coefficients $p_i(x)$ étant des polynomes du degré p en x. Je forme un système fondamental de solutions $u_1(x), \ldots, u_k(x)$ qui se représentent sous la forme

$$u_i(x) = a_i^x \sum_{s=0}^{s=r} \Omega_s(x) \frac{\partial^s}{\partial \beta_i^s} \left[\frac{\Gamma\left(\dfrac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{x}{\omega} + \beta_i + 1\right)} \right]$$

ou, si l'on aime mieux, sous la forme

$$u_i(x) = a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_i + 1} \sum_{s=0}^{s=r} \Omega_s(x) \log^s \left(\frac{1}{x}\right);$$

les $\Omega_s(x)$ sont des fonctions qui se représentent par des séries de facultés convergentes de la forme

$$\Omega_s(x) = A_0^{(s)} + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{A_{\nu+1}^{(s)}}{x(x+\omega)\ldots(x+s\omega)};$$

ω est un nombre positif convenablement choisi. Les a_i et les β_i sont des nombres

---

[1] Il faut seulement excepter le cas trivial où la solution en question se réduit à une fonction rationnelle multipliée par une exponentielle.

[2] Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Mathematische Annalen t. 71, p. 510—532, 1911.

[3] Sur les séries de facultés. Acta mathematica t. 37, p. 327—387, 1914.

complexes indépendants de x. Ces solutions sont des fonctions méromorphes de x admettant pour pôles les points $\alpha_s, \alpha_s - 1, \alpha_s - 2, \alpha_s - 3, \ldots (s = 1, 2, \ldots, p)$, et étant d'ailleurs holomorphes. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont les zéros de $p_0(x)$. Quand x tend vers l'infini le long d'une droite qui forme avec l'axe des nombres positifs un angle qui est, en valeur absolue, inférieure ou égale à $\frac{\pi}{2}$ l'expression

$$\frac{u_i(x)}{a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_i+1} \log^n \left(\frac{1}{x}\right)}$$

tend uniformément vers une limite finie et non-nulle; n désigne un entier $\leq r$.

Je forme ensuite un second système fondamental de solutions $\bar{u}_1(x)$, $\bar{u}_2(x), \ldots, \bar{u}_k(x)$ qui sont des fonctions méromorphes admettant pour pôles les points $\gamma_s, \gamma_s + 1, \gamma_s + 2, \ldots, (s = 1, 2, \ldots, p)$; les nombres $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ sont les zéros de $p_k(x + k)$. Quand x tend vers l'infini le long d'une droite qui forme avec l'axe des nombres negatifs un angle qui est, en valeur absolue, inférieure ou égale à $\frac{\pi}{2}$ l'expression

$$\frac{\bar{u}_i(x)}{a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_i+1} \log^n \left(\frac{1}{x}\right)}$$

tend uniformément vers une limite. Entre ces deux systèmes de solutions il existe des relations linéaires à coefficients périodiques fort remarquables.

Dans les chapitres III et IV je démontre par deux voies différentes que ces coefficients périodiques sont des fonctions rationnelles de $e^{2\pi i x}$. Je détermine la forme de ces fonctions et les constantes qui y entrent. L'établissement de ces relations linéaires est le point capital dans notre étude. Elles permettent en particulier de se rendre compte comment se comportent les solutions $u_i(x)$ et les solutions $\bar{u}_i(x)$ quand x tend vers l'infini d'une manière quelconque.

Dans le chapitre V on traite ce problème.

On peut, comme on sait, considérer les équations différentielles comme un cas limite des équations aux différences finies. Les équations dont nous venons de parler contiennent comme cas limite des équations différentielles admettant le point à l'infini comme *point singulier irrégulier*. Mais il arrive dans un cas particulier que ce point devient un *point singulier régulier*. J'ai considéré ce cas à part dans le chapitre I. L'équation aux différences peut alors se mettre sous la forme

$$\sum_{s=0}^{s=k} Q_s(x) \Delta_{-1}^s u(x) = 0,$$

les coefficients $Q_k(x), Q_{k-1}(x), \ldots, Q_0(x)$ étant des polynomes dont les degrés vont en décroissant avec les indices. Ce cas se distingue nettement du cas général par la simplicité des résultats auxquels on arrive. Remarquons en particulier que les solutions méromorphes $u_i(x)$ dont on vient de parler sont telles qu'on ait uniformément dans l'angle $\pi - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\pi + \varepsilon$

$$\lim_{x=\infty} \frac{u_i(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_i+1} \log^n \left(\frac{1}{x}\right)} = \text{const.}$$

ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut.

CHAPITRE I.

Formation de deux systèmes fondamentaux de solutions.

§ 1. Les expressions analytiques qui conviennent le mieux pour représenter les solutions d'une équation linéaire aux différences finies à coefficients rationnels sont: La série de facultés, la série de fractions rationnelles, la fraction continue et certaines intégrales définies intimement liées à la théorie des séries de facultés. Quant à la représentation par des fractions continues j'ai déjà eu l'occasion de donner quelques indications sur ce sujet[1] et je pense y revenir dans un autre Mémoire.

Dans ce chapitre nous allons faire voir que la théorie classique des équations différentielles linéaires nous amène directement aux autres expressions analytiques énumérées plus haut.

Comme nous allons voir par la suite de ce Mémoire ces développements ont l'avantage de donner, sans aucun calcul, les positions des points singuliers de nos solutions et elles mettent en évidence la nature des singularités.

Soit x une variable complexe; soit $u(x)$ la solution à déterminer. Posons

$$\Delta_\omega^i u(x) = \frac{u(x+i\omega) - \binom{i}{1} u(x+(i-1)\omega) + \cdots + (-1)^i u(x)}{\omega^i},$$

[1] l. c. Acta mathematica t. 34, p. 33—38, 1910.

et considerons d'abord une équation aux différences finies de la forme

$$Q(x) \equiv \sum_{i=0}^{i=k} Q_i(x) \Delta_{-1}^{i} u(x) = 0, \tag{1}$$

les coefficients $Q_k(x), Q_{k-1}(x), \ldots, Q_0(x)$ étant des polynômes en x dont les degrés vont en décroissant avec les indices; plus précisement, si p désigne le degré de $Q_k(x)$, on suppose que le degré de $Q_{k-i}(x)$ soit inférieur ou égal à $p-i$; on a donc necessairement $p \geq k$, car le degré de $Q_0(x)$ serait sans cela négatif. Les polynômes $Q_i(x)$ peuvent toujours se mettre sous la forme[1]

$$Q_i(x) = \sum_{s=0}^{s=p-k+i} c_{i,s}(x-i)(x-i+1)\ldots(x-i+s-1), \tag{2}$$

les $c_{i,s}$ étant indépendants de x; on peut sans diminuer la généralité supposer que $c_{k,p}$ soit égal à 1. Appliquons la transformation de LAPLACE et essayons de déterminer une fonction $v(t)$ et une ligne d'intégration de sorte que l'intégrale

$$u(x) = \int t^{x-1} v(t)\, dt \tag{3}$$

est une solution de l'équation (1).

En intégrant par partie on trouve:

$$x(x+1)\ldots(x+s-1)\, u(x) = (-1)^s \int t^{x+s-1} \frac{d^s v(t)}{dt^s}\, dt \qquad (s = 0, 1, \ldots p)$$

pourvu que les limites d'intégration aient été choisies de telle sorte que les termes tout intégrés disparaissent pour ces valeurs de t. En appliquant à $u(x)$ les opérations Δ_{-1}^{i} $(i = 1, 2, \ldots, k)$ on trouve de même:

$$(x-i)(x-i+1)\ldots(x-i+s-1)\, \Delta_{-i}^{i} u(x) = (-1)^s \int t^{x-i+s-1} \frac{d^s[(t-1)^i v(t)]}{dt^s}\, dt$$

pourvu que les termes

$$t^{x+s-i-1} \frac{d^{s-1}[(t-1)^i v(t)]}{dt^{s-1}} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots, p \\ i = 0, 1, \ldots, k \end{pmatrix} \tag{4}$$

[1] Dans tout ce qui suit il faut remplacer le produit $x(x+1)\ldots(x+s-1)$ par 1, quand s est égal à zéro.

disparaissent dans les limites d'intégrations. Substituons ces intégrales dans l'équation (1) on voit que $v(t)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\sum_{i=0}^{i=k}\sum_{s=0}^{s=p}(-1)^s c_{i,s}\, t^{k+s-1}\frac{d^s[(t-1)^i v(t)]}{dt^s}=0, \tag{5}$$

où, par hypothèse, $c_{k-i,p-s}=0$, si $s<i$. Cette équation différentielle est d'ordre p, c'est à dire que l'ordre est égal au degré du coefficient de la plus haute différence de $u(x)$ dans l'équation (1).

Le coefficient de

$$\frac{d^p v(t)}{dt^p}$$

est égal à

$$(-t)^p (t-1)^k.$$

Les points singuliers de l'équation (5) sont $0, 1$ et ∞, et l'on voit sans peine que ce sont des points singuliers réguliers. L'équation déterminante relative au point $t=1$ est

$$\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-p+k+1)\sum_{i=0}^{i=k}(-1)^i c_{k-i,p-i}(\varrho+1)(\varrho+2)\ldots(\varrho+k-i)=0.$$

On remarque que les coefficients $c_{k,p}, c_{k-1,p-1}, \ldots, c_{0,p-k}$ qui entrent dans cette équation sont les coefficients des termes du degré maximal dans les polynomes $Q_k(x), Q_{k-1}(x), \ldots, Q_0(x)$.

Désignons les racines de cette équation par $0, 1, \ldots, p-k-1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$. Elles sont en nombre p, parce que par hypothèse $c_{k,p}=1$. L'équation différentielle (5) admet donc $p-k$ solutions holomorphes au voisinage de $t=1$ et k solutions, qui se représentent par des développements de la forme

$$v_s(t)=(t-1)^{\beta_s}\{A_0+A_1(1-t)+A_2(1-t)^2+\cdots\} \tag{6}$$

la série étant convergente pour $|t-1|<1$ et A_0 étant différent de zéro. A chaque nombre β_s il appartient ainsi une solution, déterminée à un facteur constant près, et en général non holomorphe au voisinage de $t=1$. On suppose pour le moment qu'aucune des différences entre les β_s ne soit égale à un entier. Le cas général où les recines β_s forment des groupes et où le développement correspondant (6) contient des logarithmes sera discuté plus loin.

§ 2. L'équation déterminante relative au point $t=0$ est $Q_k(k-\varrho)=0$, ϱ étant la variable, k étant l'ordre de l'équation aux différences et $Q_k(x)$ étant le coefficient de $\Delta_{-1}^k u(x)$. Désignons que $\alpha_1+k, \alpha_2+k, \ldots, \alpha_k+k$ les racines de $Q_k(x)=0$ et supposons, pour fixer les idées, qu'elles soient numérotées de sorte que

$$\Re(\alpha_1) \geqq \Re(\alpha_2) \geqq \cdots \geqq \Re(\alpha_p).$$

Toute solution de l'équation (5) se représente au voisinage de $t=0$ par une expression de la forme

$$v(t)=\sum_{i=1}^{i=p} c_i t^{-\alpha_i}\{\psi_{i,0}(t)+\psi_{i,1}(t)\log t+\cdots+\psi_{i,r}(t)\log^r t\}, \tag{8}$$

les $\psi_{i,s}(t)$ étant des fonctions holomorphes à l'intérieur du cercle $|t|=1$. L'équation déterminante relative au point $t=\infty$ est

$$\sum_{i=0}^{i=k} Q_i(-\varrho)=0.$$

Soit

$$\varrho=-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots, -\gamma_p$$

les racines de cette équation et supposons qu'elles soient numérotées de sorte que

$$\Re(\gamma_1) \geqq \Re(\gamma_2) \geqq \cdots \geqq \Re(\gamma_p).$$

Au voisinage du point à l'infini la solution générale de notre équation différentielle s'écrit

$$v(t)=\sum_{i=1}^{i=p} c_i\left(\frac{1}{t}\right)^{\gamma_i}\left\{\psi_{i,0}(t)+\psi_{i,1}(t)\log\left(\frac{1}{t}\right)+\cdots+\psi_{i,r}(t)\log^r\left(\frac{1}{t}\right)\right\} \tag{9}$$

les $\psi_{i,s}(t)$ étant des fonctions holomorphes à l'extérieur du cercle $|t|=1$.

§ 3. Nous allons voir plus loin que les quantités α_i, β_i et γ_i, qui sont en nombre $2p+k$, caractérisent entièrement les singularités des solutions de notre équation aux différences. Elles se déterminent facilement à l'aide des coefficients de l'équation aux différences. Relativement à cette détermination nous ajoutons encore la remarque suivante. En posant $U(x)=u(x-k)$ on peut donner à l'équation (1) la forme suivante

$$\sum_{i=0}^{i=k} P_i(x)\,\Delta^i_{+1}\,U(x)=0, \tag{10}$$

les coefficients $P_k(x),\ldots,P_0(x)$ étant des polynômes dont les degrés vont en décroissant avec les indices. *Les nombres γ_i sont les zéros du coefficient de la différence finie d'ordre le plus élevé dans l'équation* (10) *tandis que les α_i+k sont les zéros du coefficient de la différence d'ordre le plus élevé dans l'équation* (1). Il est souvent préferable d'écrire l'équation (1) sous la forme:

$$\sum_{i=0}^{i=k} p_i(x)\,u(x+i)=0. \tag{11}$$

Les coefficients de cette équation sont des polynômes du degré p et l'on a

$$p_k(x)=P_k(x+k),\ \ p_0(x)=(-1)^k Q_k(x+k);$$

on voit donc que *les γ_i-k sont les zéros du coefficient de $u(x+k)$, et les α_i sont les zéros du coefficient de $u(x)$ dans l'équation* (11).

§ 4. Cela posé, nous pouvons définir deux systèmes fondamentaux de solutions de l'équation (1). Soit l une ligne d'intégration partant du point $t=0$ le long de l'axe des nombres positifs et y revenant, après avoir entouré le point $t=1$ dans le sens direct, comme l'indique la fig. 1. Soit L une ligne d'intégration partant de l'infini positif et y revenant après avoir entouré le point $t=1$ dans le sens direct.

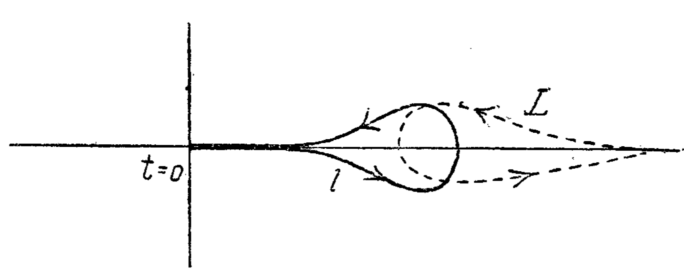

Fig. 1.

Posons

$$u_s(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_l t^{x-1} v_s(t)\,dt, \tag{12}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, k)$$

$$\bar{u}_s(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_L t^{x-1} v_s(t)\,dt, \tag{13}$$

$v_s(t)$ étant une solution de l'équation différentielle (5), définie par le développement (6) et appartenant au nombre β_s.

A chaque nombre β_s il appartient ainsi une intégrale $u_s(x)$ et une intégrale $\bar{u}_s(x)$.

Considérons les termes (4). Quand t tend vers zéro tous ces termes disparaissent pourvu que la partie réelle de x soit supérieure à $\Re(\alpha_1 + k)$. Cette condition étant satisfaite, les $u_s(x)$ représentent donc des solutions de l'équation (1). Mais ces intégrales sont absolument convergentes dans le demi-plan $\Re(x - \alpha_1) > 0$, car au voisinage de $t = 0$ $v_s(t)$ est de la forme (8). Des théorèmes bien connus relativement au prolongement analytique il résulte donc que les $u_s(x)$ satisfont à l'équation (1) dans ce demi-plan. Si par exception on a $c_1 = 0$ l'intégrale $u_s(x)$ peut même être convergente dans un domaine plus étendu.

De même on voit que les $\bar{u}_s(x)$ sont absolument convergentes pourvu que $\Re(x - \gamma_p) < 0$ et qu'elles représentent des solutions de l'équation (1) dans ce demi-plan.

Pour définir complètement ces deux systèmes de solutions nous allons convenir que l'argument de $t - 1$ croît de $-\pi$ à $+\pi$ quand t se meut le long du contour l et de 0 à 2π quand t se meut le long du contour L. Pour l'argument de t on adoptera la valeur qui est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

Nous nommerons les solutions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$, définies pour le moment dans le demi-plan $\Re(x - \alpha_1) > 0$, *le premier système canonique*. De même nous nommerons $\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x), \ldots, \bar{u}_k(x)$, définies pour le moment dans le demi-plan $\Re(x - \gamma_p) < 0$, *le second système canonique*.

Nous démontrerons plus loin qu'elles forment deux systèmes fondamentaux de solutions entre lesquels il existe des relations linéaires fort remarquables.

Développements en séries de facultés.

§ 5. De l'intégrale eulérienne de première espèce on déduit aisément les relations suivantes

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l} t^{x-1}(t-1)^{\beta}\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(-\beta)\,\Gamma(x+\beta+1)},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L} t^{x-1}(t-1)^{\beta}\,dt = e^{\pi i(\beta+1)}\frac{\Gamma(-x-\beta)}{\Gamma(-\beta)\,\Gamma(1-x)},$$

les arguments de t et de $t-1$ étant fixés comme il a été dit plus haut. Les deux intégrales sont convergentes respectivement pour $\Re(x)>0$ et pour $\Re(x+\beta)<0$.

Substituons dans l'intégrale (12) au lieu de $v_s(t)$ le développement (6); si l'on suppose que $\Re(x)>0$, $\Re(x-\alpha_1)>0$ il est permis d'intégrer terme par terme[1] et on trouve

$$u_s(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(-\beta_s)\,\Gamma(x+\beta_s+1)}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu \frac{(\beta_s+1)(\beta_s+2)\ldots(\beta_s+\nu)}{(x+\beta_s+1)(x+\beta_s+2)\ldots(x+\beta_s+\nu)}. \tag{14}$$

L'ordre de $v_s(t)(t-1)^{-\beta_s}$ dans le point $t=0$ est égal à la partie réelle de α_1. On sait donc trouver un nombre positif M tel qu'on ait pour $n=1, 2, 3, \ldots$

$$|A_n| < M\, n^{\Re(\alpha_1)-1}.$$

On en conclut immédiatement que la série de facultés converge absolument si $\Re(x-\alpha_1)>0$. On peut donc supprimer la condition $\Re(x)>0$, car la série (14) représente une fonction analytique holomorphe dans le demi-plan $\Re(x-\alpha_1)>0$. Il faut excepter pourtant les points $x=0, -1, -2, \ldots$ s'ils se trouvent dans le demi-plan de convergence. Le facteur $\Gamma(x)$ admet ces points comme des pôles simples; mais si $\Re(\alpha_1)<0$, on a

$$\lim_{t=0} v_s(t) = 0;$$

d'un théorème d'Abel il résulte donc que

$$0 = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots;$$

cette série représente la valeur de la série de facultés dans le point $x=0$. On voit donc que la série de facultés admet les points $x=0, -1, -2, \ldots$ comme des zéros. La fonction $u_s(x)$ est par conséquent holomorphe dans ceux de ces

[1] l. c. Sur les séries de facultés § 10, p. 361.

points qui se trouvent à l'intérieur du domaine de convergence; cela résulte d'ailleurs aussi de la convergence de l'intégrale (12).

Passons à l'intégrale (13). Le développement (6) n'étant pas convergent le long de la ligne d'intégration on ne peut pas intégrer terme par terme; on peut pourtant, en transformant convenablement ce développement en obtenir une série de facultés. Posons

$$v_s(t) = (t-1)^{\beta_s}\varphi(t)$$

la fonction $\varphi(t)$ est une branche d'une fonction analytique holomorphe au voisinage de $t=1$ et admettant comme points singuliers les points $t=0$ et $t=\infty$.

Posons $z=\frac{t-1}{t}$; la fonction

$$\varphi(t)=\varphi\left(\frac{1}{1-z}\right),$$

se représente au voisinage de $z=0$ par une série de la forme

$$\varphi(t) = B_0 - B_1 z + B_2 z^2 - B_3 z^3 + \cdots, \tag{15}$$

ayant le cercle de convergence $|z|=1$. L'unique point singulier sur ce cercle est $z=1$, et l'ordre dans ce point est égal à $-\Re(\gamma_p+\beta_s)$. Substituons la série (15) dans l'intégrale (13). On vérifie aisément que les conditions pour que l'intégration terme par terme soit légitime sont satisfaites. On trouve donc:

$$\bar{u}_s(x) = e^{\pi i(\beta_s+1)} \frac{\Gamma(-x-\beta_s)}{\Gamma(-\beta_s)\Gamma(1-x)} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} B_\nu \frac{(\beta_s+1)(\beta_s+2)\ldots(\beta_s+\nu)}{(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu)}, \tag{16}$$

et on voit comme plus haut que la série de facultés est absolument convergente si $\Re(x-\gamma_p)<0$; elle représente $\bar{u}_s(x)$ dans ce demi-plan en exceptant les points $x=-\beta_s, -\beta_s+1, -\beta_s+2, \ldots$ s'ils sont situés dans le demi-plan de convergence. La série de facultés admet ces points comme zéros et le facteur $\Gamma(-x-\beta_s)$ les admet comme des pôles simples. La fonction $\bar{u}_s(x)$ est donc holomorphe dans le demi-plan $\Re(x-\gamma_p)<0$.

Il est facile d'exprimer les coefficients B_ν, qui entrent dans le développement (16), par les coefficients A_ν, qui entrent dans le développement de $u_s(x)$.

On a en effet

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu (1-t)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} B_\nu \left(\frac{1-t}{t}\right);$$

la série au second membre se déduit en appliquant à la série au premier membre une transformation bien connue, due à EULER, et qui a fait l'objet d'étude de MM. E. LINDELÖF, FABRY et PRINGSHEIM. De la transformation d'EULER il résulte qu'on a

$$B_0 = A_0, \quad B_1 = A_1,$$

$$B_{\nu+1} = A_{\nu+1} - \binom{\nu}{1} A_\nu + \binom{\nu}{2} A_{\nu-1} + \cdots + (-1)^\nu A_1, \tag{17}$$

c'est à dire que $B_1, B_2, B_3, \ldots$ sont les différences successives des nombres $A_1, A_2, A_3, \ldots$.

Il est maintenant facile de voir comment se comportent nos solutions canoniques pour des valeurs très grandes de x situées dans l'un ou l'autre des deux demi-plans de convergence. En effet une fonction, représentée par une série de facultés, tend uniformément vers le terme constant de la série quand la variable x tend vers l'infini en restant dans le domaine de convergence de la série.[1] D'autre part on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Gamma(x)\, x^\beta}{\Gamma(x+\beta)} = 1, \quad \pi - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\pi + \varepsilon,$$

x tendant vers l'infini en s'éloignant infiniment de l'axe des nombres négatifs.

Les développements (14) et (16) nous permettent donc de conclure qu'on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} x^{\beta_s+1} u_s(x) = \frac{A_0}{\Gamma(-\beta_s)}, \qquad \frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{\pi}{2}, \tag{18}$$

$$\lim_{x=\infty} x^{\beta_s+1} \bar{u}_s(x) = \frac{A_0}{\Gamma(-\beta_s)}, \qquad -\frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{3\pi}{2}, \tag{19}$$

x tendant vers l'infini en restant respectivement dans le demi-plan $\Re(x-\alpha_1) > 0$ et dans le demi-plan $\Re(x-\gamma_p) < 0$.

§ 6. Examinons quelques cas d'exception. Supposons d'abord que β_s soit égal à un entier non-négatif et qu'aucun des autres nombres $\beta_1, \ldots, \beta_k$ ne soit égal à un entier. $v_s(t)$ est en ce cas de la forme

$$v_s(t) = (t-1)^{\beta_s} [\varphi_1(t) + \varphi(t) \log(t-1)].$$

[1] l. c. Sur les séries de facultés § 6, p. 347.

On trouve donc

$$u_s(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_l t^{x-1} v_s(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_l t^{x-1}(t-1)^{\beta_s}\log(t-1)\varphi(t)\,dt.$$

On peut remplacer le contour l par la droite de *zéro* à *un* parcourue deux fois et en sens inverse; les deux intégrales contenant le logarithme se détruisent et on trouve

$$u_s(x) = -\int\limits_0^1 t^{x-1}(t-1)^{\beta_s}\varphi(t)\,dt.$$

La forme de notre développement n'est donc pas altérée dans ce cas si la fonction $\varphi(t)$ est différente de zéro; mais si $\varphi(t)=0$ l'intégrale de contour est identiquement nulle. Comme on sait, ce cas d'exception ne peut arriver que si l'on a $\beta_s \geq p-k$; on peut alors remplacer la ligne l par la droite de *zéro* à *un*, car les termes tout intégrés (4) disparaissent pour $t=1$.

Si β_s est un entier négatif et si en même temps $\varphi(t)=0$,[1] la série de facultés ne contient qu'un nombre fini de termes. Le série (14) peut en ce cas s'écrire comme il suit:

$$u_s(x) = -\left\{A_0\binom{x-1}{-\beta_s-1} - A_1\binom{x-1}{-\beta_s-2} + A_2\binom{x-1}{-\beta_s-3}\cdots + (-1)^{\beta_s-1}A_{-\beta_s-1}\right\}. \quad (20)$$

Les autres cas d'exceptions qui se présentent seront discutés dans le chapitre suivant.

L'avantage des développements que nous venons d'étudier consiste surtout en ce qu'ils nous montrent comment se comportent les solutions au voisinage du point à l'infini qui, en général, est un point essentiel pour ces fonctions. Mais ils représentent les solutions seulement dans un certain demi-plan.

Nous allons maintenant faire voir comment on peut prolonger analytiquement les $u_s(x)$ dans toute partie finie du plan.

Développement en série de fractions rationnelles.

§ 7. Nous supprimons maintenant les conditions restrictives imposées plus haut aux nombres β_s. La solution $v_s(t)$ appartenant à β_s peut donc contenir

---

[1] Ces deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour que u_s $x)$ soit un polynome en x.

des logarithmes ou non. Prolongeons $v_s(t)$ analytiquement le long de l'axe des nombres positifs jusqu'au point $t = 0$; on trouve une expression de la forme (8), $c_1, c_2, \ldots, c_p$ étant des constantes qu'on sait déterminer. Les fonctions $\psi_{i,n}(t)$ se développent en séries de puissances de la forme

$$\psi_{i,n}(t) = A_{i,0}^{(n)} + A_{i,1}^{(n)} t + A_{i,2}^{(n)} t^2 + A_{i,3}^{(n)} t^3 + \cdots \quad (n = 0, 1, \ldots, r),$$

qui sont convergentes pour $|t| < 1$. L'un au moins des nombres $A_{i,0}^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots, r)$ est différent de zéro. En prolongeant $v_s(t)$ le long d'un contour qui arrive au point $t = 0$ après une rotation autour du point $t = 1$ dans le sens positif on trouve une expression de la même forme, seulement il faut remplacer les constantes c_i par d'autres constantes que nous désignerons par c'_i. Supposons d'abord que la partie réelle de β_s soit supérieure à -1. On peut dans l'intégrale (12) remplacer le contour l par la droite de 0 à 1 parcourue deux fois et en sens inverse. Substituons dans cette intégrale les développements (8) et intégrons terme par terme; on trouve la série de fractions rationnelles:

$$u_s(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=0}^{i=p} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (c_i - c'_i) \left\{ \frac{A_{i,\nu}^{(0)}}{x - \alpha_i + \nu} - \frac{A_{i,\nu}^{(1)}}{(x - \alpha_i + \nu)^2} + \cdots + (-1)^r \frac{r!\, A_{i,\nu}^{(r)}}{(x - \alpha_i + \nu)^{r+1}} \right\}. \tag{21}$$

Les coefficients dans le développement en série de puissances de $v_s(t)$ au voisinage de $t = 0$ nous donnent donc immédiatement les coefficients dans le développement de $u_s(x)$ en série de fractions rationnelles. Si $\Re(x - \alpha_1) > 0$, et si la série (21) est convergente, les conditions, pour-que l'intégration terme par terme soit légitime, sont satisfaites. L'ordre des fonctions $\psi_{i,n}(t)$ $(n = 0, 1, \ldots, r)$ sur le cercle de convergence $|t| = 1$ est égal à $-\Re(\beta_s)$; on sait donc trouver un nombre positif M tel qu'on ait pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$|A_{i,\nu}^{(n)}| < \frac{M}{(1 + \nu)^{\Re(\beta_s) + 1 - \varepsilon}} \qquad (n = 0, 1, \ldots, r)$$

quelque petit que soit le nombre positif ε. Soit Γ un domaine fini quelconque duquel on a exclu les points $\alpha_i, \alpha_i - 1, \alpha_i - 2, \ldots$ par des petits cercles; on sait trouver un nombre positif N tel qu'on ait pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left| \frac{\nu + 1}{x - \alpha_i + \nu} \right| < N$$

quel que soit x dans Γ.

En ramplaçant dans le développement (21) le module de chaque terme par les limites supérieures qu'on vient de donner on trouve l'inégalité

$$|u_s(x)| < \sum_{i=0}^{i=p} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (|c_i| + |c'_i|) \frac{MN}{(\nu+1)^{\Re(\beta_s)+2-\varepsilon}} \left\{ 1 + \frac{N}{\nu+1} + \cdots + \frac{r!\, N^r}{(\nu+1)^r} \right\}.$$

La série au second membre est convergente parce que par hypothèse $\Re(\beta_s) > -1$. La série (21) est par consequent absolument et uniformément convergente dans le domaine Γ. Cette série nous donne un prolongement anlytique de la solution $u_s(x)$ dans tout le plan et on voit que $u_s(x)$ est une fonction méromorphe de x.

Si la partie réelle de β_s est inférieure à -1, la série de fractions rationnelles, obtenue en intégrant formellement terme par terme, est divergente. Soit q un entier positif tel que $\Re(\beta_s + q) > -1$; on sait, dans ce cas, trouver deux polynômes $f_{q-1}(x)$ et $f_q(x)$ respectivement du degré $q-1$ et q et tels que la fonction

$$\frac{u_s(x) - f_{q-1}(x)}{f_q(x)},$$

admet un développement de la forme (21). Pour le détail de la démonstration je renverrai le lecteur aux pag. 27—28 de ma Thèse.

Les solutions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ dans notre premier système canonique de solutions sont donc, quelles que soient les valeurs des nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, des fonctions méromorphes de x, admettant une représentation de la forme du second membre de (21), *multiplié par un polynôme convenablement choisi. Les pôles de ces fonctions sont*

$$\alpha_i, \alpha_i - 1, \alpha_i - 2, \alpha_i - 3, \ldots, (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les $\alpha_i + k$ étant les zéros du coefficient de $\Delta^k_{-1} u(x)$ dans l'équation (1). *Si $\alpha_i + k$ est un zéro simple qui ne diffère par un entier d'aucun des autres zéros, les pôles $\alpha_i, \alpha_i - 1, \alpha_i - 2, \ldots$ sont tous simples. Si $\alpha_i + k$ est un zéro d'ordre n, les pôles $\alpha_i, \alpha_i - 1, \alpha_i - 2, \ldots$ sont d'ordre de multiplicité n au moins.*

§ 8. Considérons maintenant les solutions $\bar{u}(x)$. Les fonctions $\psi_{i,n}(t)$ dans l'expression (9) se développent en séries de puissances

$$\psi_{i,n}(t) = B^{(n)}_{i,0} + \frac{B^{(n)}_{i,1}}{t} + \frac{B^{(n)}_{i,2}}{t^2} + \cdots, \quad (n = 0, 1, \ldots, r),$$

convergentes pour $|t| > 1$. Substituons ces développements dans l'intégrale (13) et intégrons terme par terme; on trouve, si la partie réelle de β_s est supérieure à -1, une série de fractions rationnelles de la forme

$$\overline{u}_s(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=0}^{i=p} \sum_{n=0}^{n=r} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (c_i - c'_i) \frac{B_{i,\nu}^{(n)} n!}{(x-\gamma_i-\nu)^{n+1}}. \tag{22}$$

Si $\Re(\beta_s) < -1$ il faut diviser $\overline{u}_s(x)$ par un polynôme convenablement choisi et le quotient admet un développement de la même forme.

Les solutions $\overline{u}_1(x), \overline{u}_2(x), \ldots, \overline{u}_k(x)$ dans le second système canonique sont des fonctions méromorphes de x admettant pour pôles les points

$$\gamma_i, \gamma_i + 1, \gamma_i + 2, \gamma_i + 3, \ldots, (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les γ_i étant les zéros du coefficient de $\varDelta^k U(x)$ dans l'équation aux différences (10). Il est naturel de convenir de dire que les solutions $\overline{u}(x)$ appartiennent à l'équation (10) et que les solutions $u(x)$ appartiennent à l'équation (1).

Nous avons maintenant vu: d'une part, comment se comportent nos solutions canoniques dans toute partie finie du plan et d'autre part comment elles se comportent quand x tend vers l'infini en restant dans un certain angle d'ouverture π.

Pour compléter nos résultats il nous reste à faire voire comment elles se comportent asymptotiquement quand x sort de cet angle. Nous traiterons plus loin ce problème pour une classe plus générale d'équations aux différences dont nous allons maintenant aborder l'étude.

CHAPITRE II.

Formation de deux systèmes fondamentaux de solutions.

§ 9. Nous préferons écrire ces équations sous la forme

$$\sum_{i=0}^{i=k} p_i(x) u(x+i) = 0, \tag{1}$$

et nous ferons relativement aux coefficients $p_i(x)$ l'hypothèse suivante. Nous supposerons qu'ils sont des polynômes en x de degré p mais d'ailleurs quelconques.

Plus précisement nous supposerons que le degré de $p_0(x)$ et de $p_k(x)$ est égal à p et que les degrés des autres coefficients sont inférieurs ou égaux à p. L'entier positif p peut être $\gtreqless k$.

Cette classe d'équations embrasse comme cas particulier celle que nous venons d'étudier. En effet, en écrivant l'équation (1) (Chap. I) sous la forme précitée, on verra que les coefficients $p_i(x)$ sont des polynômes du degré p; mais ces polynômes ne sont pas indépendants l'un de l'autre, il existe entre leurs coefficients des relations particulières dont nous avons tiré partie dans le chapitre précédent.

Dans le cas actuel nous écrivons les coefficients $p_i(x)$ de l'équation aux différences sous la forme suivante

$$p_i(x) = \sum_{s=0}^{s=p} C_{i,s}(x+i)(x+i+1)\ldots(x+i+s-1) \qquad (i=0, 1, \ldots, k). \qquad (2)$$

On a, par hypothèse, $C_{0,p} \neq 0$, $C_{k,p} \neq 0$, mais les $C_{i,s}$ sont d'ailleurs des nombres complexes quelconques.

Posons

$$u(x) = \int t^{x-1} v(t)\, dt, \qquad (3)$$

$v(t)$ étant une fonction de t mais indépendante de x. Essayons, s'il est possible, de déterminer la fonction $v(t)$ et une ligne d'intégration de sorte que $u(x)$ soit une solution de l'équation (1). En intégrant par partie on trouve

$$x(x+1)\ldots(x+s)u(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=s} (-1)^\nu (x+\nu+1)(x+\nu+2)\ldots(x+s\, t^{x+\nu} \frac{d^\nu v(t)}{dt^\nu} +$$

$$+ (-1)^{s+1} \int t^{x+s} \frac{d^{s+1} v(t)}{dt^{s+1}}\, dt.$$

On a, par conséquent, l'identité suivante

$$\sum_{i=0}^{i=k} p_i(x) u(x+i) = V(x, t) + \int t^{x-1} \sum_{i=0}^{i=p} (-t)^i Q_i(t) \frac{d^i v(t)}{dt^i}\, dt, \qquad (4)$$

où nous avons posé

$$Q_i(t) = \sum_{s=0}^{s=k} C_{s,i} t^s, \qquad (i=0, 1, \ldots, p),$$

$$V(x, t) = \sum_{i=0}^{i=p-1} \sum_{s=0}^{s=p-i-1} (-1)^i \frac{d^i v(t)}{dt^i} \frac{d^s [t^{x+i+s} Q_{i+s+1}(t)]}{dt^s}. \tag{5}$$

En choisissant $v(t)$ comme une solution de l'équation différentielle

$$\sum_{i=0}^{i=p} (-t)^i Q_i(t) \frac{d^i v(t)}{dt^i} = 0, \tag{6}$$

on voit que $u(x)$ est une solution de l'équation (1), si l'on prend pour chemin d'intégration une ligne telle que $V(x, t)$ s'annule à ses deux extrémités ou un contour fermé tel que $V(x, t)$ reprenne sa valeur initiale quand on revient au point de départ. Nous appelerons $Q_p(t) = 0$ *l'équation caractéristique* de l'équation aux différences (1). On remarque que les coefficients de cette équation sont les coefficients des termes du degré maximal dans $p_0(x), \ldots, p_k(x)$. C'est une équation algébrique du degré k dont toutes les racines sont différentes de zéro, car on a $C_{0,p} \neq 0$, $C_{k,p} \neq 0$. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ces racines et posons

$$a_s = \varrho_s e^{i\zeta_s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, k).$$

Supposons que les a_s ont été numérotées de sorte qu'on ait

$$0 \leqq \zeta_1 \leqq \zeta_2 \leqq \cdots \leqq \zeta_k < 2\pi.$$

Si l'on a $\zeta_s = \zeta_{s+1}$, on suppose que $\varrho_s \leqq \varrho_{s+1}$.

§ 10. L'équation différentielle (6) admet les points singuliers $t = 0$ et $t = \infty$, qui sont des points singuliers réguliers, et les points $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Si a_i est une racine simple de l'équation caractéristique, a_i est un point singulier régulier de l'équation différentielle. Au voisinage de a_i il existe $(p-1)$ solutions holomorphes et une solution de la forme

$$(t - a_i)^{\beta_i} \varphi(t),$$

$\varphi(t)$ étant une fonction holomorphe au voisinage de $t = a_i$.

Si a_i est n fois racine de l'équation caractéristique deux cas essentiellement différents se présentent.

1°. a_i est $(n-s)$ fois racine dans l'équation $Q_{p-s}(t) = 0$ et cela est vrai pour $s = 0, 1, \ldots, n-1$; a_i est alors un point singulier régulier de notre équation différentielle.

2°. a_i est un point singulier irrégulier.

Nous réserverons l'étude de ce dernier cas pour le § 16; nous supposerons donc pour le moment que a_i soit un point singulier régulier[1] de l'équation différentielle.

L'équation déterminante relative au point a_i admet les racines

$$\beta_{1,i},\ \beta_{2,i},\ \ldots,\ \beta_{n,i},\ 0,\ 1,\ \ldots,\ p-n-1. \tag{7}$$

Il correspond à ces racines p solutions indépendantes de l'équation (6); nous les désignerons par $v_{1,i}, v_{2,i}, \ldots, v_{p,i}$. Les $(p-n)$ dernières de ces solutions sont holomorphes au voisinage de a_i; les n autres solutions sont en général non-holomorphes.

On peut les former par les méthodes de L. FUCHS et de M. FROBENIUS. Résumons brièvement les principaux résultats obtenus par M. FROBENIUS relativement à ces solutions.

Les racines $\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \ldots, \beta_{n,i}$ se répartissent en différents groupes de sorte que toutes les racines qui sont différentes l'une de l'autre par un entier, se trouvent dans un même groupe.

Supprimons pour un moment, pour abréger l'écriture, le second indice i et soit $\beta_s, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_{s+m-1}$ les membres d'un tel groupe. Supposons qu'on les affecte de numéros tels que l'on ait:

$$\Re(\beta_s) \geqq \Re(\beta_{s+1}) \geqq \Re(\beta_{s+2}) \geqq \cdots$$

Soit $\beta_s, \beta_{s+h}, \beta_{s+j}, \beta_{s+k}, \ldots, \beta_{s+l}$ celles de ces racines qui sont distinctes. Soit β_s h fois racine, soit β_{s+h} $(j-h)$ fois racine, soit β_{s+j} $(k-j)$ fois racine etc. On répartit les racines en sous-groupes de la manière suivante. Dans le premier sous-groupe on place $\beta_s = \beta_{s+1} = \cdots = \beta_{s+h-1}$; dans le deuxième sous-groupe on place $\beta_{s+h} = \beta_{s+h+1} = \cdots = \beta_{s+j-1}$; dans le troisième sous-groupe on place $\beta_{s+j} = \beta_{s+j+1} = \cdots = \beta_{s+k-1}$ etc.

A la plus grande[2] racine $\beta_s = \beta_{s,i}$ de notre groupe il appartient une solution de l'équation (6) de la forme

$$v_{s,i} = (t-a_i)^{\beta_{s,i}}\varphi(t), \tag{8}$$

$\varphi(t)$ étant holomorphe et différente de zéro dans le point $t = a_i$.

---

[1] L'équation caractéristique de l'équation aux différences étudiée dans le chapitre I est $(t-1)^k = 0$. Toutes les a_i coïncident dans le point $t = 1$ et ce point est un point singulier régulier de l'équation différentielle.

[2] C'est à dire à la racine dont la partie réelle est la plus grande.

A une racine quelconque $\beta_{s+r,i}$ de notre groupe il appartient une solution de la forme

$$v_{s+r,i} = \frac{\partial^r}{\partial \beta^r_{s+r,i}}[(t-a_i)^{\beta_{s+r,i}}\varphi(t)] =$$
$$= (t-a_i)^{\beta_{s+r,i}}\{\varphi_0(t) + \varphi_1(t)\log(t-a_i) + \cdots + \varphi_r(t)\log^r(t-a_i)\}, \tag{9}$$

$\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de a_i. A chaque racine de notre groupe il appartient ainsi une solution non-holomorphe de l'équation différentielle, et ces solutions se trouvent rangées en groupes et sous-groupes de la même manière que les racines.

Si $v_{s+r,i}$ appartient au premier sous-groupe on a $\varphi_r(a_i) \neq 0$. Si $v_{s+r,i}$ appartient au deuxième sous-groupe on a $\varphi_{r-h}(a_i) \neq 0$ et $\varphi_{r-h+1}(a_i) = \cdots = \varphi_r(a_i) = 0$. Si $v_{s+r,i}$ appartient au troisième sous-groupe on a $\varphi_{r-j}(a_i) \neq 0$ et $\varphi_{r-j+1}(a_i) = \cdots = \varphi_r(a_i) = 0$ etc.

Au voisinage de $t=0$ l'équation (6) admet p solutions $v_{1,0}, v_{2,0}, \ldots, v_{p,0}$ qui sont de la forme

$$v_{s,0} = \frac{\partial^r[t^{-\alpha_s}\psi(t)]}{\partial(-\alpha_s)^r} = t^{-\alpha_s}\{\psi_0(t) + \psi_1(t)\log t + \cdots + \psi_r(t)\log^r t\}, \tag{10}$$

$\psi_0(t), \ldots, \psi_r(t)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de $t=0$ et α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant les zéros de $p_0(x)$. Au voisinage de $t=\infty$ l'équation (6) admet p solutions $v_{1,\infty}, v_{2,\infty}, \ldots, v_{p,\infty}$ qui sont de la forme.

$$v_{s,\infty} = \frac{\partial^r[t^{-\gamma_s}\psi(t)]}{\partial\gamma^r} = t^{-\gamma_s}\left\{\psi_0(t) + \psi_1(t)\log\left(\frac{1}{t}\right) + \cdots + \psi_r(t)\log^r\left(\frac{1}{t}\right)\right\}. \tag{11}$$

$\psi_0(t), \ldots, \psi_r(t)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de $t=\infty$, et $\gamma_1 - k, \ldots, \gamma_p - k$ étant les zéros de $p_k(x)$. Nous supposerons que les α_s et les γ_s ont été répartis en groupes et qu'elles soient numérotées de la manière indiquée dans le § 2.

Il faut donner à l'entier non-négatif r une valeur égale au nombre des racines plus grandes que $-\alpha_s$ (γ_s) qui figurent dans le même groupe que $-\alpha_s$ (γ_s).

§ 11. Cela posé, nous pouvons fixer la ligne d'intégration dans l'intégrale (3). Dessinons des coupures rectilignes des points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ à l'infini dans le prolongement des rayons vecteurs respectives et une coupure rectiligne de zéro à a_i.

Soit $v_{q,i}$ une des solutions non-holomorphes au voisinage de a_i. Dans le plan ainsi découpé la fonction $t^{x-1} v_{q,i}$ est uniforme. J'appelle bord gauche d'une coupure celui qu'on a sur la main gauche quand on chemine sur la coupure dans la direction vers l'infini. Soit l_i une ligne d'intégration partant de l'origine le long du bord droit de la coupure $(0, a_i)$ et y revenant le long du bord gauche, après avoir entouré le point $t = a_i$ dans le sens direct et en laissant à son extérieur tous les autres points singuliers $a_1, \ldots, a_k$. Soit L_i une ligne d'intégration partant de l'infini le long du bord gauche de la coupure (a_i, ∞) et y revenant le long du bord droit, après avoir entouré le point $t = a_i$ dans le sens direct et en laissant à son extérieur tous les autres points singuliers. Posons

$$u_{q,i}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_i} t^{x-1} v_{q,i}\, dt, \tag{12}$$

$$\overline{u}_{q,i}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_i} t^{x-1} v_{q,i}\, dt. \tag{13}$$

La première intégrale est absolument convergente et la fonction $V(x, t)$, déterminée par l'expression (5), s'annule aux deux extrémités de la ligne d'intégration l_i, si $\Re(x - \alpha_1) > 0$. L'intégrale définit donc une solution de l'équation (1) dans ce domaine.

De même on voit que $V(x, t)$ s'annule aux deux extrémités de la ligne L_i, si $\Re(x - \gamma_p + k) < 0$; mais la seconde intégrale est absolument convergente dans le demi-plan $\Re(x - \gamma_p) < 0$, elle définit donc une solution de l'équation (1) dans ce domaine. Pour définir complètement ces deux solutions admettons que l'argument de $t - a_i$ augmente de $\zeta_i - \pi$ à $\zeta_i + \pi$ quand t se meut le long de la ligne l_i et de ζ_i à $\zeta_i + 2\pi$ quand t se meut le long de ligne L_i. Pour l'argument de t on adoptera la valeur qui est égale à ζ_i le long des parties rectilignes des chemins d'intégrations.

Convenons de dire que les deux solutions ainsi définies appartiennent au nombre $\beta_{q,i}$. En prenant pour $v_{q,i}$ successivement toutes les solutions non-holomorphes au voisinage des points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ on obtiendra k solutions $u(x)$, que nous nommerons *le premier système canonique de solutions*, et k solutions $\overline{u}(x)$, que nous nommerons *le second système canonique de solutions*, k étant l'ordre de l'équation aux différences. Ces solutions se trouvent rangées en différents groupes et sous-groupes de la même manière que les nombres $\beta_{q,i}$.

Développements en séries. Propriétés analytiques des solutions.

§ 12. Pour étudier comment se comportent ces solutions aux environs de leurs points singuliers nous allons former différents développements en séries. Les plus importants d'entre eux sont les développements en séries de facultés. Considérons l'intégrale (12) et supposons d'abord que $v_{q,i}$ soit de la forme (8). $\varphi(t)$ se développe en série de puissances aux environs de $t = a_i$; cette série n'étant pas, en général, convergente le long de la ligne l_i on ne peut pas intégrer terme par terme[1] comme dans le chapitre précédent. Mais effectuons le changement de variable $t = a_i z$; on trouve une intégrale relativement à laquelle j'ai demontré[2] qu'elle se représente par une série de la forme

$$u_{q,i}(x) = a_i^x \frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega} + \beta_{q,i} + 1\right)} \Omega(x, \beta_{q,i}), \tag{14}$$

où

$$\Omega(x, \beta) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu \frac{(\beta + 1)(\beta + 2)\dots(\beta + \nu)\omega^\nu}{(x + \omega\beta + \omega)(x + \omega\beta + 2\omega)\dots(x + \omega\beta + \nu\omega)}; \tag{15}$$

cette série de facultés est absolument convergente pour $\Re(x - \alpha_1) > 0$ et divergente pour $\Re(x - \alpha_1) < 0$. Les coefficients A_ν sont indépendants de x; A_ν se compose linéairement des $\nu + 1$ premiers coefficients du développement de $\varphi(t)$ en séries de puissances aux environs de $t = a_i$.

Les A_ν peuvent donc se tirer des coefficients de l'équation aux différences (1) par des *opérations algébriques*. Remarquons en particulier que A_0 est égal à $\varphi(a_i)$ multiplié par une constante non-nulle; A_0 est donc différent de zéro, parce que par hypothèse $\varphi(a_i) \neq 0$.

---

[1] Dans ma Thèse j'ai démontré que la série de facultés divergente, obtenue en intégrant formellement terme par terme, représente asymptotiquement $u_{q,i}(x)$ dans l'angle $\frac{\pi}{2} - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, ε étant > 0. Cette série peut donc rendre quelque service dans l'étude de la valeur asymptotique de $u_{q,i}(x)$; elle est plus facile à former que la série (14) mais elle lui est inférieure sur un point important. Dans ce qui va suivre il est très important de savoir qu'elle est la valeur asymptotique de $u_{q,i}(x)$ quand x tend vers l'infini le long d'une ligne perpendiculaire à l'axe des abscisses. Or la série divergente ne permet rien de conclure relativement à cette valeur. Le développement convergent (14), au contraire, donne cette valeur avec autant d'approximation que l'on veut.

[2] l. c. Sur les séries de facultés. § 11, p. 364.

ω est un nombre positif qu'il faut choisir suffissamment grand pour assurer la convergence de la série. Le second membre de (14) ne dépend qu'apparemment de ω, mais il a été nécessaire d'introduire ce paramètre pour faire converger la série (15).

En raisonnant exactement comme dans le § 5, et en appliquant la transformation d'EULER, on trouve pour l'intégrale (13) un développement de la forme

$$\bar{u}_{q,i}(x) = a_i^x \frac{\Gamma\left(-\frac{x}{\omega} - \beta_{q,i}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)} e^{\pi i(\beta_{q,i}+1)} \bar{\Omega}(x, \beta_{q,i}), \tag{16}$$

où

$$\bar{\Omega}(x, \beta) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} B_\nu \frac{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+\nu)\omega^\nu}{(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-\nu\omega)}, \tag{17}$$

la série de facultés étant absolument convergente, si $\Re(x-\gamma_p) < 0$. Il est supposé que ω ait été choisi suffisamment grand pour que les séries (15) et (17) soient toutes les deux convergentes dans les domaines indiqués. On voit, de la même manière que plus haut, que les coefficients B_ν et A_ν sont liés par les relations (17) Chapitre I, c'est à dire que $B_1, B_2, B_3, \ldots$ sont les différences successives de $A_1, A_2, A_3, \ldots$; en particulier on a $B_0 = A_0$.

Les développements (14) et (16) nous montrent que $u(x)$ et $\bar{u}(x)$ sont des fonctions analytiques, holomorphes respectivement dans le demi-plan $\Re(x-\alpha_1) > 0$ et dans le demi-plan $\Re(x-\gamma_p) < 0$.

A cause de la convergence uniforme[1] de la série de facultés ces développements nous permettent d'apprécier avec autant d'approximation que l'on veut comment se comportent $u(x)$ et $\bar{u}(x)$ pour des valeurs très grandes de x, situées dans les domaines de convergence. En se bornant au premier terme de l'expression asymptotique on voit qu'on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} a_i^{-x} x^{\beta_{q,i}+1} u_{q,i}(x) = k, \qquad \frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{\pi}{2}, \tag{18}$$

$$\lim_{x=\infty} a_i^{-x} x^{\beta_{q,i}+1} \bar{u}_{q,i}(x) = k, \quad -\frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{3\pi}{2}, \tag{19}$$

k étant une constante qui est différente de zéro, x tendant vers l'infini en restant respectivement dans le demi-plan $\Re(x-\alpha_1) > 0$ et dans le demi-plan $\Re(x-\gamma_p) < 0$.

---

[1] l. c. Sur les séries de facultés, p. 346.

§ 13. Considérons maintenant le cas où $v_{q,i}$ soit de la forme (9). Dans le Mémoire souvent cité on a démontré qu'en ce cas $u_{q,i}(x)$ se développe en série de la forme

$$u_{q,i}(x) = a_i^x \sum_{s=0}^{s=r} \Omega_s(x) \frac{\partial^s}{\partial \beta_{q,i}^s} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega} + \beta_{q,i} + 1\right)} \right], \tag{20}$$

où

$$\Omega_s(x) = A_0^{(s)} + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{A_{\nu+1}^{(s)}}{x(x+\omega)\ldots(x+\nu\omega)}, \qquad (s = 0, 1, \ldots, r) \tag{21}$$

ω étant convenablement choisi; les séries de facultés $\Omega_0(x), \ldots, \Omega_r(x)$ sont convergentes, pourvu que l'on ait:

$$\Re(x + \alpha_1) > 0, \ \Re(x) > 0, \ \Re\left(\frac{x}{\omega} + \beta_{q,i} + 1\right) > 0. \tag{22}$$

Soit dans l'expression (9) $\varphi_s(a_i) \neq 0$ et soit $0 = \varphi_{s+1}(a_i) = \varphi_{s+2}(a_i) = \cdots = \varphi_r(a_i)$. Il résulte de la démonstration à l'endroit cité qu'on a $A_0^{(s)} \neq 0$ et $0 = A_0^{(s+1)} = = A_0^{(s+2)} = \cdots = A_0^{(r)}$. Cela posé, le développement (20) permet de calculer la valeur asymptotique de $u_{q,i}(x)$; on a, en effet, uniformément[1]

$$\lim_{x=\infty} \frac{\frac{\partial^s}{\partial \beta^s} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta)}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\beta \log^s \left(\frac{1}{x}\right)} = 1. \tag{23}$$

Considérons le groupe de solutions $u_{s,i}(x), u_{s+1,i}(x), \ldots, u_{s+m-1,i}(x)$ qui appartiennent au groupe de racines dont a été question dans le § 10.

Supprimons, pour abréger l'écriture, le second indice i.

Pour les solutions $u_s(x), u_{s+1}(x), \ldots, u_{s+h-1}(x)$ dans le premier sous-groupe on a uniformément:

$$\lim_{x=\infty} \frac{u_{s+r}(x)}{a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_s+1} \log^r \left(\frac{1}{x}\right)} = k_1, \ (r = 0, 1, \ldots, h-1); \ \frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{\pi}{2}, \tag{24}$$

k_1 étant une constante qui est différente de zéro, x tendant vers l'infini en restant à l'intérieur du domaine de convergence des séries (21).

[1] l. c. Sur les séries de facultés, p. 368.

Pour les solutions $u_{s+h}(x), u_{s+h+1}(x), \ldots, u_{s+j-1}(x)$ dans le deuxième sous-groupe on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} \frac{u_{s+h+r}(x)}{a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_{s+h}+1} \log^r \left(\frac{1}{x}\right)} = k_2, \ (r=0, 1, \ldots, j-h-1); \ \frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{\pi}{2}, \tag{25}$$

k_2 étant une nouvelle constante, qui est différente de zéro, x tendant vers l'infini sous la même hypothèse que plus haut. Pour les solutions $u_{s+j}(x)$, $u_{s+j+1}(x), \ldots, u_{s+k-1}(x)$ dans le troisième sous-groupe on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} \frac{u_{s+j+r}(x)}{a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_{s+j}+1} \log^r \left(\frac{1}{x}\right)} = k_3, \ (r=0, 1, \ldots, k-j-1); \ \frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{\pi}{2}, \tag{26}$$

etc.

On a donc toujours pour deux solutions appartenant au même groupe

$$\lim_{x=\infty} \frac{u_n(x)}{u_{n+1}(x)} = 0.$$

Ce résultat nous permet de conclure à l'indépendance linéaire de nos solutions. On a, en effet, le théorème suivant:[1]

Soit une suite de fonctions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ finies et différentes de zéro pour toute valeur finie et positive de x qui surpasse une certaine valeur N. Supposons que le rapport $\eta_n(x) = u_n(x) : u_{n+1}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots, k-1)$, ou bien tend vers zéro quand x tend vers l'infini le long de l'axe des nombres positifs, ou bien reste compris entre des limites finies. Dans ce dernier cas on suppose que les nombres $\eta_n(\alpha), \eta_n(\alpha+1), \eta_n(\alpha+2), \ldots$ forment un ensemble dont la dérivée contient une infinité d'éléments, α étant un nombre quelconque supérieur à N. Cela étant, il n'existe aucune relation linéaire de la forme

$$\sum_{i=1}^{i=k} \pi_i(x) u_i(x) = 0,$$

les $\pi_i(x)$ étant des fonctions périodiques satisfaisant à la condition $\pi_i(x) = \pi_i(x+1)$.

De ce qui précède, il résulte que les k solutions formant notre pre-

[1] On trouve la démonstration de ce théorème dans mon Mémoire: Sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies par des séries de facultés. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo t. 35, p. 198, 1913.

mier système canonique peuvent être numérotées de sorte que le rapport $\eta_n(x) = u_n(x) : u_{n+1}(x)$, pour $n = 1, 2, \ldots, k-1$, tend vers zéro quand x tend vers l'infini. Il y a exception seulement, s'il y a deux nombres $\beta_{m,i}$ et $\beta_{n,j}$ qui ont la même partie réelle et si en même temps $|a_i| = |a_j|$.

En ce cas on a

$$\frac{u_{m,i}(x)}{u_{n,j}(x)} = e^{\sqrt{-1}\,(\gamma x + \delta \log x)}\,\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction qui tend vers une limite finie et non-nulle quand x tend vers $+\infty$ et γ et δ étant des nombres réels. Les conditions du théorème sont toujours satisfaites à moins que δ ne soit égal à zéro et que γ ne soit de la forme $\frac{2\pi}{p}$, p étant un entier; c'est ce qui arrive, si $\beta_{m,i} = \beta_{n,j}$ et si en même temps $a_i : a_j$ est une racine d'unité. On discutera sans aucune difficulté ce cas, et on verra que les $u_i(x)$ sont linéairement indépendantes même dans ce cas d'exception. *Notre premier système canonique de solutions forment donc un système fondamental de solutions.* Cela est vrai en particulier pour la classe de solutions étudiées dans le chapitre I.

§ 14. Pour les solutions $\bar{u}(x)$ on trouve des résultats du même ordre. En raisonnant comme plus haut on voit que, dans le cas où $v_{q,i}$ est de la forme (9), la solution $\bar{u}_{q,i}(x)$ se développe en série de la forme

$$\bar{u}_{q,i}(x) = a_i^x \sum_{s=0}^{s=r} \bar{\Omega}_s(x) \frac{\partial^s}{\partial \beta_{q,i}^s} \frac{\Gamma\left(-\frac{x}{\omega} - \beta_{q,i}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)}, \tag{27}$$

où

$$\bar{\Omega}_s(x) = B_0^{(s)} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{B_\nu^{(s)}}{(x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-\nu\omega)}; \tag{28}$$

ω étant convenablement choisi, les séries de facultés sont convergentes pourvu que l'on ait: $\Re(x-\gamma_p) < 0$, $\Re(x-\omega) < 0$. Quand x tend vers l'infini en restant dans le demi-plan de convergence on trouve pour les $\bar{u}(x)$ les mêmes expressions asymptotiques que pour les $u(x)$. Par exemple, pour les solutions appartenant au premier sous-groupe de racines $\beta_s, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_{s+h-1}$, on trouve

$$\lim_{x=\infty} \frac{\bar{u}_{s+r}(x)}{a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_s+1} \log^r \left(\frac{1}{x}\right)} = k_1, \quad (r = 0, 1, \ldots, h-1); \quad -\frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{3\pi}{2}, \tag{29}$$

k_1 étant la même constante que dans l'égalité (24).

Ces expressions asymptotiques permettent en particulier de conclure que *les k solutions $\bar{u}(x)$ dans notre second système canonique forment un système fondamental de solutions.*

§ 15. On peut, si l'on veut, donner à l'expression (20) une forme légèrement différente en introduisant, au lieu des fonctions gamma et leurs dérivées, des puissances et des logarithmes de x. On a en effet:[1]

$$\frac{\partial^n}{\partial \beta^n}\left[\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta+1)}\right] = \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta+1} \sum_{s=0}^{s=n} F_s(x) \log^s \left(\frac{1}{x}\right),$$

$F_0(x), \ldots, F_n(x)$ étant des fonctions développables en série de facultés. En introduisant ce développement dans l'expression (20) et en remarquant que le produit de deux séries de facultés se représente par une série de facultés, on trouve une expression de la forme

$$u_{q,i}(x) = a_i^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_{q,i}+1} \sum_{s=0}^{s=r} \Phi_s(x) \log^s \left(\frac{1}{x}\right), \tag{30}$$

$\Phi_0(x), \ldots, \Phi_r(x)$ étant des fonctions développables en séries de facultés de la forme (21) qui sont convergentes pourvu que x satisfasse aux trois inégalités (22). Mais il convient de remarquer que le calcul effectif des coefficients dans les séries $\Phi_s(x)$ est de beaucoup plus difficile que le calcul des coefficients dans les séries $\Omega_s(x)$.

§ 16. Considérons maintenant quelques cas d'exception. Admettons qu'il y ait deux racines distinctes dans l'équation caractéristique qui ont le même argument. Soit, pour fixer les idées, a_i et a_{i+1} ces racines. Déformons les contours l_{i+1} et L_i au moyen de petits arcs de cercle de manière à éviter respectivement les points a_i et a_{i+1}. Les expressions (12) et (13) des solutions canoniques correspondantes restent valables, mais les développements (20) et (27) ne sont convergents pour aucune valeur positive de ω. Il faut dans ce cas donner à ω

[1] l. c. Sur les séries de facultés, p. 368.

une valeur complexe d'argument très petit positif ou négatif et de module suffisamment grand. Nos développements deviennent alors convergents,[1] seulement il faut remplacer les conditions de convergence $\Re(x-\alpha_1)>0$, $\Re(x-\gamma_p)<0$ par les conditions

$$\left.\begin{aligned}&\Re\left(\frac{x-\alpha_i}{\omega}\right)>0,\\ &\Re\left(\frac{x-\gamma_i}{\omega}\right)<0.\end{aligned}\right\}\qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

Ce cas d'exception ne présente donc pas de difficultés.

Examinons ensuite le cas où l'équation caractéristique admet une racine multiple a qui est un point singulier irrégulier de l'équation différentielle (6).

Cette équation admet au voisinage de a une solution de la forme

$$v(t)=(t-a)^\beta\varphi(t),$$

$\varphi(t)$ étant une fonction uniforme aux environs de $t=a$, qui peut se décomposer en deux parties $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$:

$$\varphi(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t),$$

dont l'une est holomorphe au voisinage de a et l'autre se représente par un développement de la forme

$$\varphi_2(t)=\frac{B_1}{a-t}+\frac{B_2}{(a-t)^2}+\frac{B_3}{(a-t)^3}+\cdots.$$

La solution de notre équation aux différences

$$u(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l t^{x-1}v(t)\,dt,$$

se décompose donc en deux parties dont la première admet un développement de la forme de celles que nous venons d'étudier; pour la seconde intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l t^{x-1}(t-a)^\beta\varphi_2(t)\,dt,$$

[1] l. c. Sur les séries de facultés, p. 369.

on trouve en intégrant terme par terme le développement

$$a^{x+\beta}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(x+\beta+1)}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{B_{\nu+1}}{a^{\nu+1}}\frac{(x+\beta)(x+\beta-1)\ldots(x+\beta-\nu)}{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-\nu)},$$

qui est convergent dans tout le plan. La solution $u(x)$ se représente donc par un développement de la forme

$$u(x)=a^{x+\beta}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(x+\beta+1)}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}A_\nu\frac{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+\nu)\omega^\nu}{(x+\omega\beta+\omega)(x+\omega\beta+2\omega)\ldots(x+\omega\beta+\nu\omega)}+\\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{B_{\nu+1}}{a^{\nu+1}}\frac{(x+\beta)(x+\beta-1)\ldots(x+\beta-\nu)}{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-\nu)}\end{array}\right\}$$

la première série étant convergente sous les conditions indiquées plus haut, la dernière série étant convergente dans tout le plan. Ce développement joue pour nous un rôle semblable à celui que jouent dans la théorie des équations différentielles linéaires les séries de puissances contenant une infinité de puissances positives et négatives. Nous n'en ferons d'ailleurs aucun usage pour le moment; nous nous bornerons à une courte remarque relative à la manière dont se comporte $u(x)$ au voisinage de l'infini.

Traçons un cercle autour de l'origine avec le rayon $R>|a|$ et deux rayons vecteurs avec les arguments $\Theta-\varepsilon$ et $\Theta+\varepsilon$, où

$$a=|a|e^{i\Theta}.$$

Soit A et B les points d'intersection avec la circonférence

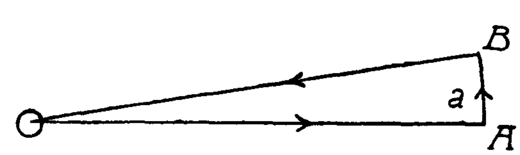

Fig. 2.

Remplaçons le lacet l par le contour $OABO$ et supposons que $v(t)$ soit holomorphe à l'intérieure et sur ce contour en exceptant le point $t=a$. Soit $t=\varrho e^{i\zeta}$, et posons

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi} R^x \int_{\Theta-\varepsilon}^{\Theta+\varepsilon} e^{i\zeta x} v(R e^{i\zeta}) d\zeta,$$

$$Q_2 = \frac{1}{2\pi i} e^{ix(\Theta-\varepsilon)} \int_0^R \varrho^{x-1} v[\varrho e^{i(\Theta-\varepsilon)}] d\varrho,$$

$$Q_3 = \frac{1}{2\pi i} e^{ix(\Theta+\varepsilon)} \int_0^R \varrho^{x-1} v[\varrho e^{i(\Theta+\varepsilon)}] d\varrho,$$

on a

$$u(x) = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

Soit $x = \sigma + i\tau$, et remarquons qu'on sait trouver un nombre positif M tel qu'on ait, le long de la ligne d'intégration, $|v(t)| < M$; on trouve les inégalités suivantes

$$|Q_1| < \frac{R^\sigma}{2\pi} M \int_{\Theta-\varepsilon}^{\Theta+\varepsilon} e^{-\zeta\tau} d\zeta = \frac{M}{2\pi} R^\sigma e^{-\Theta\tau} \frac{e^{\varepsilon\tau} - e^{-\varepsilon\tau}}{\tau},$$

$$|Q_2| < \frac{M}{2\pi} e^{-\tau(\Theta-\varepsilon)} \int_0^R \varrho^{\sigma-1} d\varrho = \frac{M}{2\pi\sigma} e^{\tau(\varepsilon-\Theta)} R^\sigma,$$

$$|Q_3| < \frac{M}{2\pi\sigma} e^{-(\Theta+\varepsilon)\tau} R^\sigma.$$

Soit μ un nombre dont le module est supérieur à R d'aussi peu qu'on veut et dont l'argument est égal à Θ

$$\mu = (R + \eta) e^{i\Theta}.$$

Faisons tendre x vers l'infini dans l'angle

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon' > \operatorname{Arg} x > -\frac{\pi}{2} + \varepsilon'.$$

Quelle que soit la valeur donnée de $\eta > 0$, on sait choisir ε suffisamment petit pour qu'on ait

$$\lim_{x=0} \mu^{-x} Q_1 = 0, \quad \lim_{x=\infty} \mu^{-x} Q_2 = 0, \quad \lim_{x=\infty} \mu^{-x} Q_3 = 0.$$

Il en résulte que l'on a

$$\lim_{x=\infty} u(x)\,\mu^{-x} = 0.$$

Cela posé, soit η' un nombre positif, on voit qu'on sait trouver un nombre positif N tel que l'inégalité

$$e^{-\eta'\sigma} < \left|\frac{u(x)}{a^x}\right| < e^{\eta'\sigma},$$

soit satisfaite, pourvu que $\sigma > N$. On peut donc, si non indiquer la valeur asymptotique de $u(x)$, du moins se faire une idée sur l'ordre de grandeur de cette fonction quand σ tend vers l'infini.

§ 17. Jusqu'ici les solutions $u(x)$ ont été définies seulement dans le demi-plan $\Re(x-\alpha_1) > 0$, mais il est facile de les prolonger analytiquement. Soit b un point, situé sur le contour l_i et plus rapproché de l'origine que l'un quelconque des points singuliers $a_1, \ldots, a_k$. Soit l'_i un lacet avec les extrémités dans le point b et entourant le point a_i dans le sens direct. L'intégrale (12) peut se décomposer en deux parties

$$u_{q,i}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l'_i} t^{x-1} v_{q,i}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\sum_{s=1}^{s=p}(c_s - c'_s)\int_0^b t^{x-1} v_{s,0}\,dt;$$

c_s et c'_s étant des constantes. La première intégrale est une fonction entière, la seconde intégrale peut se développer en une série de la forme (21) chapitre I, multipliée par b^x.

Les k solutions $u(x)$ dans notre premier système canonique de solutions sont donc des fonctions méromorphes admettant pour pôles les points

$$\alpha_s,\ \alpha_s - 1,\ \alpha_s - 2, \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

Les résidus dans les points $\alpha_s, \alpha_s - 1, \alpha_s - 2, \ldots$ sont les coefficients dans le développement de $v_{s,0}$ au voisinage de l'origine. Ils satisfont donc à des formules de récursions faciles à former. Supposons pour plus de simplicité que $-\alpha_s$ soit une racine simple et que $v_{s,0}$ ne contient pas de logarithme. Soit A_0, A_1, $A_2, \ldots$ les résidus dans les points $\alpha_s, \alpha_s - 1, \alpha_s - 2 \ldots.$ On voit que ces quantités satisfont aux relations suivantes

$$A_1 p_0(\alpha_s - 1) + A_0 p_1(\alpha_s - 1) = 0,$$

$$A_2 p_0(\alpha_s - 2) + A_1 p_1(\alpha_s - 2) + A_0 p_2(\alpha_s - 2) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_\nu p_0(\alpha_s - \nu) + A_{\nu-1} p_1(\alpha_s - \nu) + \cdots + A_{\nu-k} p_k(\alpha_s - \nu) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$p_0(x), \ldots, p_k(x)$ étant les coefficients dans l'équation aux différences (1).

De la même manière on voit que l'intégrale (13) peut se décomposer en deux parties dont l'une est une fonction entière pendant que l'autre se développe en une série de fractions rationnelles de la forme (22) chapitre I. *Les k solutions $\overline{u}(x)$ dans notre second système canonique de solutions sont donc des fonctions méromorphes admettant pour pôles les points*

$$\gamma_s, \gamma_s + 1, \gamma_s + 2, \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots, p).$$

Les résidus dans ces points sont les coefficients dans le développement de $v_{s,\infty}$ au voisinage du point à l'infini. Supposons que γ_s soit une racine dans l'équation déterminante telle que $v_{s,\infty}$ ne contienne pas de logarithme. Soit $B_0, B_1, B_2, \ldots$ les résidus dans les points $\gamma_s, \gamma_{s+1}, \gamma_{s+2}, \ldots$. Ces quantités satisfont aux relations suivantes

$$B_1 p_k(\gamma_s - k + 1) + B_0 p_{k-1}(\gamma_s - k + 1) = 0,$$

$$B_2 p_k(\gamma_s - k + 2) + B_1 p_{k-1}(\gamma_s - k + 2) + B_0 p_{k-2}(\gamma_s - k + 2) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_\nu p_k(\gamma_s - k + \nu) + B_{\nu-1} p_{k-1}(\gamma_s - k + \nu) + \cdots + B_{\nu-k} p_0(\gamma_s - k + \nu) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Entre les expressions analytiques qui conviennent pour représenter nos solutions $u(x)$ on peut mentionner encore les séries de la forme

$$u_{i,q}(x) = a_i^x \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-s)}{s!};$$

pour ce qui concerne ces développements je me borne à renvoyer à ma Thèse p. 50—51.

Les développements déjà considérés suffisent pour l'étude des solutions au voisinage de leurs points singuliers.[1] Avant d'aller plus loin dans cette étude nous allons chercher des relations linéaires à coefficients périodiques entre les $u(x)$ et les $\bar{u}(x)$.

CHAPITRE III.

Les relations linéaires entre les deux systèmes canoniques de solutions.

§ 18. On peut arriver à ces relations par deux voies différentes. La première consiste en une déformation de la ligne d'intégration dans l'intégrale (12) chapitre II. Dans cette intégrale on désigne par $v_{q,i}$ la branche de fonction avec laquelle on revient à l'origine après la rotation autour de a_i. Soit $v'_{q,i}$ $(v'_{q,0})$ ce que devient $v_{q,i}$ $(v_{q,0})$, après une rotation autour de a_i (o) dans le sens direct.

Soit $v''_{q,i}$ $(v''_{q,0})$ ce que devient $v_{q,i}$ $(v_{q,0})$ après une rotation autour de a_i (o) dans le sens indirect. Prolongeons analytiquement $v_{q,i}$, respectivement $v''_{q,i}$, le long du bord gauche de la coupure $(a_i, 0)$ jusqu'au point o; on trouve des relations de la forme:

$$v_{q,i} = \sum_{s=1}^{s=p} c_{q,s}\, v_{s,0}, \qquad v''_{q,i} = \sum_{s=1}^{s=p} c''_{q,s}\, v_{s,0}, \tag{1}$$

$c_{q,s}$ et $c''_{q,s}$ étant des constantes qu'on sait déterminer.

Et inversement en prolongeant analytiquement $v_{s,0}$ le long du bord gauche de la coupure $(0, a_i)$ on trouve:

$$v_{s,0} = \sum_{n=1}^{n=p} d_{s,n}\, v_{n,i}; \tag{2}$$

les fonctions $v'_{s,0}$ et $v''_{s,0}$ s'expriment par des relations linéaires de la même forme; désignons les coefficients de celles-ci respectivement par $d'_{s,n}$ et par $d''_{s,n}$.

---

[1] Les égalités asymptotiques, indiquées plus haut, se trouvent démontrées pourvu que x tende vers l'infini en restant dans un certain demi-plan $\Re(x) > k$. On peut, sans faire intervenir les relations linéaires à coefficients périodiques, généraliser un peu ce résultat. On a

$$u(x) = -\sum_{i=1}^{i=k} \frac{p_i(x)}{p_0(x)}\, u(x+i).$$

On sait comment la fonction au second membre se comporte asymptotiquement dans le demi-plan $\Re(x) > k - 1$. Notre expression asymptotique de $u(x)$ reste donc valable dans ce demi-plan. En reprenant ce raisonnement un nombre quelconque de fois on voit que les expressions asymptotiques, trouvées plus haut pour les solutions canoniques, restent vraies *quand x tend vers l'infini le long d'une droite quelconque parallèle à l'axe des nombres purement imaginaires.*

Cela posé, supposons pour un moment que tous les nombres $\beta_{1,i}, \ldots, \beta_{q,i}, \ldots, \beta_{p,i}$ ont la partie réelle supérieure à -1.

On peut remplacer le contour l_i par la droite de o à a_i parcourue deux fois et en sens inverse; on trouve

$$u_{q,i}(x) = \int_0^{a_i} t^{x-1} v''_{q,i}\,dt - \int_0^{a_i} t^{x-1} v_{q,i}\,dt = \sum_{s=1}^{s=p} (c''_{q,s} - c_{q,s}) \int_0^{a_i} t^{x-1} v_{s,0}\,dt, \tag{3}$$

les intégrations étant étendues le long du bord gauche de la coupure. Posons

$$\nu_{s,0} = \frac{\partial^r}{\partial(-\alpha_s)^r}\left[t^{-\alpha_s}\psi(t)\mu_s\right], \tag{4}$$

où

$$\mu_s = \frac{1}{e^{2\pi i(x-\alpha_s)} - 1},$$

et soit C_i le lacet $(a_i F G a_i)$ fig. 3.

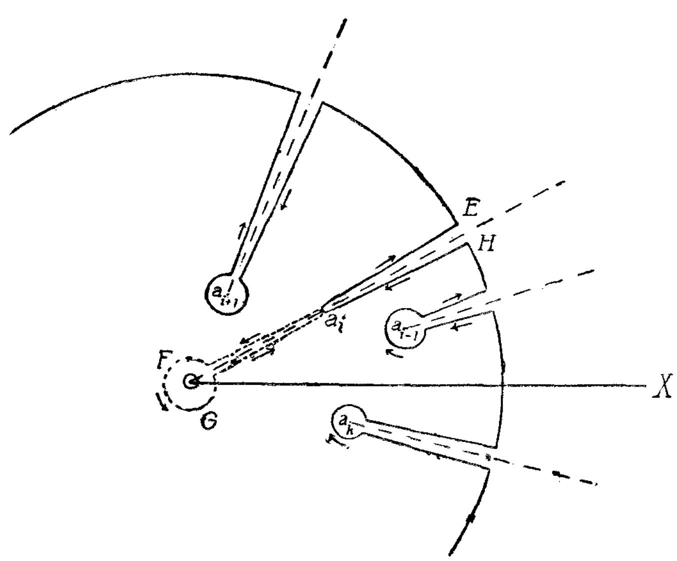

Fig. 3.

Remplaçons dans (3) le chemin d'intégration rectiligne par le lacet C_i; on trouve:

$$u_{q,i}(x) = \sum_{s=1}^{s=p}(c''_{q,s} - c_{q,s}) \int_{C_i} t^{x-1} \nu_{s,0}\,dt =$$

$$= \sum_{s=1}^{s=p}(c''_{q,s} - c_{q,s}) \int_{C_i} t^{x-1} \left\{ \mu_s v_{s,0} + \binom{r}{1} \frac{\partial \mu_s}{\partial(-\alpha_s)} v_{s-1,0} + \cdots + \frac{\partial^r \mu_s}{\partial(-\alpha_s)^r} v_{s-r,0} \right\} dt: \tag{5}$$

Je veux démontrer que le dernier membre est une fonction linéaire des solutions $\bar{u}_{q,i}(x)$. Je déforme la ligne d'intégration sans franchir aucune des coupures donc a été question dans le § 11. Comme l'indique la figure le contour C_i peut se remplacer par deux droites $a_i E$ et $a_i H$, une circonférence avec un rayon très grand et une suite de lacets $L_{i+1}, L_{i+2}, \ldots, L_1, \ldots, L_{i-1}$ autour des points $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_1, \ldots, a_{i-1}$.

Supposons que la partie réelle de $x-\gamma_p$ soit négative. Faisons tendre le rayon du cercle vers l'infini, les intégrales prises le long des arcs de cercle tendent vers zéro.

Il ne reste que les intégrales prises le long des lacets $L_{i+1}, L_{i+2}, \ldots$, ayant leurs extrémités à l'infini, et les intégrales prises le long des deux droites $(a_i E \infty)$ et $(a_i H \infty)$.

Désignons ces deux dernières intégrales par E et H respectivement.

On a:

$$E = \sum_{s=1}^{s=p} (c''_{q,s} - c_{q,s}) \int_{a_i}^{\infty} t^{x-1} \left\{ \mu_s \sum_{n=1}^{n=p} d_{s,n} v_{n,i} + \binom{r}{1} \frac{\partial \mu_s}{\partial(-\alpha_s)} \sum_{n=1}^{n=p} d_{s-1,n} v_{n,i} + \cdots + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^r \mu_s}{\partial(-\alpha_s)^r} \sum_{n=1}^{n=p} d_{s-r,n} v_{n,i} \right\} dt,$$

$$H = e^{2\pi i x} \sum_{s=1}^{s=p} (c''_{q,s} - c_{q,s}) \int_{\infty}^{a_i} t^{x-1} \left\{ \mu_s \sum_{n=1}^{n=p} d'_{s,n} v_{n,i} + \binom{r}{1} \frac{\partial \mu_s}{\partial(-\alpha_s)} \sum_{n=1}^{n=p} d'_{s-1,n} v_{n,i} + \cdots + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^r \mu_s}{\partial(-\alpha_s)^r} \sum_{n=1}^{n=p} d'_{s-r,n} v_{n,i} \right\} dt,$$

la première intégrale étant étendue le long du bord gauche, la dernière intégrale étant étendue le long du bord droit de la coupure (a_i, ∞).

Admettons que $-\alpha_{s-r}, \ldots, -\alpha_s, \ldots$ forment un groupe de racines. On voit sans peine qu'on a la relation

$$d'_{s,n} = e^{-2\pi i \alpha_s}\left[d_{s,n} + \binom{r}{1} 2\pi i\, d_{s-1,n} + \binom{r}{2} (2\pi i)^2 d_{s-2,n} + \cdots + (2\pi i)^r d_{s-r,n}\right);$$

correspondant aux autres groupes de racines (s'il y en a) on trouve des expressions semblables. Substituons ces expressions dans H. Soit H_1 la somme d'intégrales qu'on déduit de $H \cdot e^{-2\pi i x}$ en remplaçant partout d' par d. Par un calcul un peu long on démontre qu'on a

$$H - H_1 = \sum_{s=1}^{s=p} \sum_{n=1}^{n=p} (c''_{q,s} - c_{q,s})\, d_{s,n} \int_{\infty}^{a_i} t^{x-1} v_{n,i}\, dt;$$

mais cette somme peut se réduire encore.

Des équations (1) et (2) on déduit en effet les relations suivantes

$$\sum_{s=1}^{s=p} c_{q,s} d_{s,n} = \begin{cases} 0, & n \gtrless q \\ 1, & n = q \end{cases}$$

$$\sum_{s=1}^{s=p} c''_{q,s} d_{s,n} = \begin{cases} 0, & \text{si } n > q, \text{ et si } n < q - r \\ \binom{r}{m} (2\pi i)^m e^{-2\pi i \beta_{q,i}}, & \text{si } n = q - m, \end{cases}$$

m étant un entier tel que $r \geqq m \geqq 0$. On en conclut qu'on a

$$H - H_1 = \int_{L_i} t^{x-1} v_{q,i}\, dt = \bar{u}_{q,i}(x).$$

Pour la somme des deux intégrales E et H on trouve donc l'expression suivante:

$$E + H = (E + H_1) + (H - H_1) =$$

$$= \sum_{s=1}^{s=p} (c_{q,i} - c''_{q,s}) \int_{L_i} t^{x-1} \left\{ \mu_s \sum_{n=1}^{n=p} d_{s,n} v_{n,i} + \binom{r}{1} \frac{\partial \mu_s}{\partial(-\alpha_s)} \sum_{n=1}^{n=p} d_{s-1,n} v_{n,i} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^r \mu_s}{\partial(-\alpha_s)^r} \sum_{n=1}^{n=p} d_{s-r,n} v_{n,i} \right\} dt + \bar{u}_{q,i}(x),$$

les sommations étant cette fois étendues seulement sur les solutions $v_{n,i}$, non-holomorphes au voisinage de a_i, car les intégrales holomorphes, ayant la même valeur sur les deux bords de la coupure, se détruisent. Soit a_i n fois racine dans l'équation caractéristique. On voit que $E + H$ s'exprime linéairement par les solutions canoniques $\bar{u}_{1,i}(x), \bar{u}_{2,i}(x), \ldots, \bar{u}_{n,i}(x)$.

Les coefficients qui figurent dans cette expression sont des combinaisons linéaires des fonctions périodiques μ_s et de leurs dérivées par rapport à $-\alpha_s$.

Il reste à examiner les intégrales prises le long des contours $L_{i+1}, L_{i+2}, \ldots$ Prolongeons analytiquement $v_{s,0}$ jusqu'aux points singuliers $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots$ en suivant le contour déformé $o\,a_i\,E\,F\ldots$; $v_{s,0}$ s'exprime comme une fonction linéaire à coefficients constants des p solutions $v_{1,i+1},\ldots, v_{p,i+1}$; mais l'intégrale

$$\int\limits_{L_{i+1}} t^{x-1}\, v_{n,i+1}\, dt,$$

est égal à zéro, si $v_{n,i+1}$ est holomorphe au voisinage de a_{i+1}. Dans l'expression finale de $u_{q,i}(x)$ il ne figure donc que les k solutions canoniques $\bar{u}(x)$, tous les termes contenant des solutions $v_{n,s}$, holomorphes aux environs de a_s, étant égaux à zéro.

Nous pouvons dès maintenant simplifier les notations de manière à éviter les doubles indices. L'équation caractéristique admet k racines $a_1, a_2, \ldots, a_k$ distinctes ou non. Soit a_i une racine d'ordre de multiplicité $n\,(a_i = a_{i+1} = \cdots = a_{i+n-1})$.[1] L'équation déterminante relative au point a_i admet n racines auxquelles appartiennent n solutions non-holomorphes au voisinage. Nous désignons ces racines par $\beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_{i+n-1}$. Il correspond à ces racines n solutions canoniques $u_i(x), u_{i+1}(x), \ldots, u_{i+n-1}(x)$, et n solutions canoniques $\bar{u}_i(x), \bar{u}_{i+1}(x), \ldots, \bar{u}_{i+n-1}(x)$.

Soit a_j une des racines $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+n-1}$, nous sommes arrivés à l'équation suivante

$$u_j(x) = \bar{u}_j(x) + \sum_{\nu=i}^{\nu=k} \pi_{j,\nu}(x)\, \bar{u}_\nu(x) + e^{2\pi i x} \sum_{\nu=1}^{\nu=i-1} \pi_{j,\nu}(x)\, \bar{u}_\nu(x), \tag{6}$$

où

$$\pi_{j,\nu}(x) = \sum_{s=1}^{s=p} \left\{ \frac{A_{j,s}^{(\nu)}}{e^{2\pi i(x-\alpha_s)} - 1} + \frac{B_{j,s}^{(\nu)}}{[e^{2\pi i(x-\alpha_s)} - 1]^2} + \cdots + \frac{M_{j,s}^{(\nu)}}{[e^{2\pi i(x-\alpha_s)} - 1]^{m_s}} \right\}; \tag{7}$$

m_s est égal au nombre des racines de $p_0(x)$ appartenant au même groupe que α_s et non-supérieures à α_s, chaque racine comptée avec son ordre de multiplicité. Le facteur $e^{2\pi i x}$, qui figure dans le dernier terme au second membre de (6), provient de ce qu'en suivant le contour déformé on arrive au point a_s avec l'argument ζ_s, si $s > i$ mais avec l'argument $\zeta_s + 2\pi$, si $s < i$.

Dans la démonstration de la relation (6) nous avons supposé que $\Re(x-\gamma_p) < 0$ et que $\Re(\beta_s) > -1$ $(s = i, i+1, \ldots, i+n-1)$. Mais les solutions sont des fonctions analytiques de x et de β_s; la relation subsiste donc quelle que soit la valeur de β_s et pour toutes valeurs non-singulières de x.

---

[1] On suppose que a_i soit un point singulier régulier de l'équation différentielle.

Le calcul explicite des constantes $A, B, \ldots, M$ par la méthode précédente est quelquefois assez facile; j'en donnerai un exemple dans le § 25. Mais le plus souvent il est préferable d'appliquer la méthode plus directe que je vais maintenant exposer.

CHAPITRE IV.

Méthode directe pour former les relations linéaires entre les solutions canoniques.

§ 19. Démontrons d'abord un lemme relatif au déterminant $D(x)$

$$D(x) = \begin{vmatrix} u_1(x), & u_2(x), \ldots, & u_k(x) \\ u_1(x+1), & u_2(x+1, \ldots, & u_k(x+1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_1(x+k-1), & u_2(x+k-1), \ldots, & u_k(x+k-1) \end{vmatrix}, \tag{1}$$

formé des solutions du premier système canonique. Écrivons dans ce déterminant $x+1$ au lieu de x, et joignons aux éléments de la dernière ligne ceux des lignes précédentes multipliés respectivement par $p_{k-1}(x), p_{k-2}(x), \ldots, p_0(x)$

En remarquant qu'on a

$$p_k(x)\,u(x+k) + \cdots + p_i(x)\,u(x+i) + \cdots + p_0(x)\,u(x) = 0, \tag{2}$$

on trouve le relation suivante

$$D(x+1) = (-1)^k \frac{p_0(x)}{p_k(x)} D(x). \tag{3}$$

Mais on a

$$(-1)^k \frac{p_0(x)}{p_k(x)} = a\,\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_p)}{(x-\gamma_1+k)\ldots(x-\gamma_p+k)}, \tag{4}$$

a étant égal au produit des racines de l'équation caractéristique

$$a = a_1\,a_2\ldots a_k,$$

et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ étant les nombres dont il a été question plus haut. De la relation (3) on conclut que $D(x)$ est égal à

$$D(x) = a^x \frac{\Gamma(x-\alpha_1)\Gamma(x-\alpha_2)\dots\Gamma(x-\alpha_p)}{\Gamma(x-\gamma_1+k)\Gamma(x-\gamma_2+k)\dots\Gamma(x-\gamma_p+k)}\pi(x), \tag{5}$$

π étant une fonction périodique $(\pi(x) = \pi(x+1))$ dont nous allons déterminer la valeur. Dans cette expression le facteur $\Gamma(x-\alpha_i)$ figure n fois, si α_i est une racine d'ordre de multiplicité n. On peut trouver une autre expression du même déterminant en substituant à chaque élément son développement en série de facultés. Pour abréger, je discuterai seulement les deux cas extrêmes suivants:

1°. Les racines de l'équation caractéristique sont distinctes.

2°. Toutes les racines de l'équation caractéristique sont égales à 1 et le point $t=1$ est un point singulier régulier de l'équation différentielle. C'est le cas étudié dans le chapitre I.

Dans le premier cas nous avons vu que $u_s(x)$ $(s = 1, 2, \dots, k)$ est de la forme

$$u_s(x) = a_s^x \frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}+\beta_s+1\right)}[A_0^{(s)}+\varepsilon(x)], \tag{6}$$

$A_0^{(s)}$ étant une constante arbitraire qui est, par hypothèse, différente de zéro, $\varepsilon(x)$ étant une fonction qui tend uniformément vers zéro quand x tend vers l'infini le long d'une droite qui forme avec l'axe des nombres positifs un angle qui est en valeur absolue inférieur ou égal à $\frac{\pi}{2}\cdot$

Divisons la première, la deuxième etc.... colonne du déterminant respectivement par $a_1^x x^{-\beta_1-1} A_0^{(1)}$, $a_2^x x^{-\beta_2-1} A_0^{(2)}$, ... Il vient

$$D(x) = a^x x^{-\beta_1-\beta_2\dots-\beta_k-k} A_0^{(1)} A_0^{(2)} \dots A_0^{(k)} \varphi(x), \tag{7}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction qui tend vers

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ a_1 & a_2 & \dots a_k \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots a_k^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \dots a_k^{k-1} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

quand x tend vers l'infini par des valeurs positives. Ce déterminant est égal au produit des différences deux à deux des racines a_i.

$$\Pi(a_i - a_s), \qquad (i, s = 1, 2, \ldots, k;\ i > s);$$

il est donc différent de zéro.

Soit une équation différentielle d'ordre p de la classe de Fuchs. Supposons qu'elle admette, outre le point à l'infini, $k+1$ points singuliers réguliers à distance finie. Soit

$$\varrho_{\infty,1},\ \varrho_{\infty,2},\ \ldots,\ \varrho_{\infty,p};\ \ldots;\ \varrho_{i,1},\ \varrho_{i,2},\ \ldots,\ \varrho_{i,p},\ \ldots$$

les racines des équations déterminantes relatives à ces points. On sait que L. Fuchs a démontré qu'il existe entre ces nombres la relation suivante

$$\sum_{i=0}^{i=k} \sum_{s=1}^{s=p} \varrho_{i,s} - \sum_{s=1}^{s=p} \varrho_{\infty,s} = k\,\frac{p(p-1)}{2}.$$

Dans notre cas cette relation s'écrit:

$$\sum_{s=1}^{s=p} (\gamma_s - \alpha_s) + \sum_{s=1}^{s=k} \beta_s = k\,\frac{p(p-1)}{2} - k\,\frac{(p-1)(p-2)}{2} = k(p-1). \tag{9}$$

Cela posé, en égalant les secondes membres de (5) et de (7), on trouve

$$\pi(x) = F(x)\, A_0^{(1)} A_0^{(2)} \ldots A_0^{(k)} \varphi(x),$$

où

$$F(x) = \frac{\Gamma(x-\gamma_1+k)\ldots\Gamma(x-\gamma_p+k)}{\Gamma(x-\alpha_1)\ldots\Gamma(x-\alpha_p)} \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_k+k};$$

mais en vertu de la relation (9):

$$\lim_{x=\infty} F(x) = 1.$$

La fonction périodique $\pi(x)$ est donc égale à une fonction qui tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Elle est par conséquent elle-même une constante.

On a

$$\pi(x) = A_0^{(1)} A_0^{(2)} \ldots A_0^{(k)}\, \Pi(a_i - a_s).$$

Considérons maintenant l'autre cas extrême, où $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$. Nous écrivons le déterminant $D(x)$ sous la forme

$$D(x)=\begin{vmatrix} u_1(x), & u_2(x),\ldots, & u_k(x) \\ \varDelta_1 u_1(x), & \varDelta_1 u_2(x),\ldots, & \varDelta_1 u_k(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varDelta_1^{k-1} u_1(x), & \varDelta_1^{k-1} u_2(x),\ldots, & \varDelta_1^{k-1} u_k(x) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Je suppose qu'aucune des différences entre les racines $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ de l'équation déterminante relative au point $t=1$ ne soit égale à un entier. Nos solutions canoniques se représentent par des développements de la forme

$$u_s(x)=\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta_s+1)}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(s)}\frac{(\beta_s+1)\ldots(\beta_s+\nu)}{(x+\beta_s+1)\ldots(x+\beta_s+\nu)}, \tag{11}$$

$A_0^{(s)}$ étant différent de zéro. On en déduit aisément

$$(-1)^n \varDelta_1^n u_s(x)=$$
$$=(\beta_s+1)\ldots(\beta_s+n)\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta_s+n+1)}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(s)}\frac{(\beta_s+n+1)\ldots(\beta_s+n+\nu)}{(x+\beta_s+n+1)\ldots(x+\beta_s+n+\nu)}. \tag{12}$$

Substituons ces développements dans le déterminant (10); divisons la $s^{\text{ième}}$ colonne $(s=1,2,\ldots,k)$ par $A_0^{(s)}\dfrac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta_s+1)}$; multiplions enfin la deuxième, la troisième etc.... ligne respectivement par $(-x)$, $(-x)^2$, etc.... Il vient

$$D(x)=\left(\frac{-1}{x}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{[\Gamma(x)]^k A_0^{(1)}\ldots A_0^{(k)}}{\Gamma(x+\beta_1+1)\ldots\Gamma(x+\beta_k+1)}\varphi(x), \tag{13}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction qui tend vers

$$\begin{vmatrix} 1 & ,\ 1 & ,\ldots,\ 1 \\ \beta_1+1 & ,\ \beta_2+1 & ,\ldots,\ \beta_k+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\beta_1+1)(\beta_1+2)\ldots(\beta_1+k-1), & (\beta_2+1)\ldots(\beta_2+k-1), & \ldots,(\beta_k+1)\ldots(\beta_k+k-1) \end{vmatrix} \tag{14}$$

car la série de facultés qui figure dans un élément quelconque tend vers son terme constant $A_0^{(s)}$ quand x tend vers $+\infty$. Or ce déterminant est égal au produit des différences deux à deux des racines β_s:

$$\Pi(\beta_i-\beta_s), \qquad (i,s=1,2,\ldots,k;\ i>s).$$

La relation de FUCHS entre les racines des équations déterminantes est dans le cas actuel

$$\sum_{s=1}^{s=p}(\gamma_s-\alpha_s)+\sum_{s=1}^{s=k}\beta_s=pk-\frac{k(k+1)}{2}. \tag{15}$$

En égalant les seconds membres de (5) et de (13) on trouve

$$\pi(x)=F(x)(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}A_0^{(1)}\dots A_0^{(k)}\varphi(x),$$

où

$$F(x)=\frac{\Gamma(x-\gamma_1+k)\dots\Gamma(x-\gamma_p+k)}{\Gamma(x-\alpha_1)\dots\Gamma(x-\alpha_p)}\,\frac{[\Gamma(x)]^k x^{-\frac{k(k-1)}{2}}}{\Gamma(x+\beta_1+1)\dots\Gamma(x+\beta_k+1)}.$$

Mais on a, en vertu de la relation (15)

$$\lim_{x=\infty}F(x)=1.$$

On en conclut que $\pi(x)$ est une constante et égale à:

$$\pi(x)=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}A_0^{(1)}\dots A_0^{(k)}\Pi(\beta_i-\beta_s);$$

elle est donc différente de zéro parce que, par hypothèse, les racines β_s sont distinctes.

On voit de la même manière que le déterminant $D(x)$ formé des solutions $\bar u_1(x), \bar u_2(x), \dots, \bar u_k(x)$ dans notre second système canonique est égal à l'expression

$$\frac{\Gamma(1-x-\gamma_1-k)\dots\Gamma(1-x-\gamma_p-k)}{\Gamma(1+\alpha_1-x)\dots\Gamma(1+\alpha_p-x)},$$

multipliée par une constante qui est la même que celle qui figure plus haut.

§ 20. Entre ces deux systèmes de solutions il existe nécessairement des relations[1] linéaires de la forme

$$\bar u_j(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu=k}\pi_{j,\nu}(x)\,u_\nu(x)\qquad (j=1,2,\dots,k) \tag{16}$$

[1] Voir mon Mémoire: Sur l'existence de solutions d'une équation linéaire aux différences finies. Annales de l'École Normale supérieure, sér. 3, t. 31, 1914, p. 205.

où

$$\pi_{j,\nu}(x) = \pi_{j,\nu}(x+1).$$

Il s'agit maintenant de calculer ces fonctions périodiques.

En écrivant dans les équations (16) au lieu de x successivement $x+1$, $x+2, \ldots, x+k-1$ on trouve k^2 équations à l'aide desquelles on sait déterminer les $\pi_{j,\nu}(x)$. Soit $D_{j,\nu}(x)$ ce que devient $D(x)$ quand on remplace $u_\nu(x)$ par $\bar{u}_j(x)$; on trouve

$$\pi_{j,\nu}(x) = \frac{D_{j,\nu}(x)}{D(x)}. \tag{17}$$

De cette expression on conclut que $\pi_{j,\nu}(x)$ est une fonction méromorphe de x admettant les points

$$\ldots, \gamma_s - 2, \gamma_s - 1, \gamma_s, \gamma_s + 1, \gamma_s + 2, \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

pour pôles et étant d'ailleurs holomorphe. Le numérateur admet en effet les points $\gamma_s - k + 1 + n$ et les points $\alpha_s - n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots,)$ pour pôles. Le dénominateur admet les points $\alpha_s - n$ pour pôles du même ordre que le numérateur; il admet enfin les points $\gamma_s - k - n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ pour zéros.

Posons $x = \sigma + i\tau$. Pour déterminer la forme des fonctions périodiques il suffit d'étudier comment elles se comportent pour des valeurs très grandes positives et négatives de τ. On y arrive à l'aide de la formule (17) et des expressions asymptotiques des solutions canoniques indiquées dans le chapitre II.[1] Considérons d'abord le cas où toutes les racines de l'équation caractéristique sont égales à 1. On se rappelle qu'on a

$$\bar{u}_s(x) = \frac{\Gamma(-x-\beta_s)}{\Gamma(1-x)} e^{\pi i(\beta_s+1)} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} B_\nu^{(s)} \frac{(\beta_s+1)\ldots(\beta_s+\nu)}{(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu)}. \tag{18}$$

On en déduit:

$$\varDelta_1^n \bar{u}_s(x) = e^{\pi i(\beta_s+1)} \frac{\Gamma(-x-\beta_s-n)}{\Gamma(1-x)} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} B_\nu^{(s)} \frac{(\beta_s+1)(\beta_s+2)\ldots(\beta_s+\nu+n)}{(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu)}.$$

Substituons ces développements dans le déterminant $D_{j,\nu}(x)$ et appliquons à $D_{j,\nu}(x)$ les mêmes opérations qu'on vient d'appliquer à $D(x)$. On voit que $\pi_{j,\nu}(x)$ est égal à l'expression

$$e^{\pi i(\beta_j+1)} \frac{\Gamma(-x-\beta_j)}{\Gamma(1-x)} \frac{\Gamma(x+\beta_\nu+1)}{\Gamma(x)},$$

[1] Voir en particulier la note à la page 225.

multipliée par un quotient de deux déterminants dans lesquels chaque élément tend vers une limite finie quand τ tend vers $+\infty$. Le dénominateur tend vers le déterminant (14) et le numérateur tend vers ce que devient ce déterminant quand on remplace β_ν par β_j. Le numérateur tend donc vers zéro, si $\nu \gtrless j$; mais si $\nu = j$ il tend vers la même limite que le dénominateur. On a par conséquent

$$\lim_{\tau=\pm\infty} x^{\beta_j-\beta_\nu}\pi_{j,\nu}(x) = 0, \qquad j \gtrless \nu,$$

$$\lim_{\tau=-\infty} \pi_{j,j}(x) = 1, \tag{19}$$

$$\lim_{\tau=+\infty} \pi_{j,j}(x) = e^{2\pi i\beta_j}. \tag{20}$$

Si la partie réelle de $(\beta_j - \beta_\nu)$ est positive ce résultat nous suffit; sinon, il faut aller un peu plus loin. En faisant usage des relations linéaires qui existent entre les nombres $A_0, A_1, A_2, \ldots$ et entre les nombres $B_0, B_1, B_2, \ldots$ on voit qu'on peut dans le déterminant $D_{j,\nu}(x)$ faire disparaître un nombre quelconque des premiers termes dans les développements qui figurent dans la $j^{\text{ième}}$ et dans la $\nu^{\text{ième}}$ colonne. Notre raisonnement permet donc de conclure qu'on a

$$\lim_{\tau=\pm\infty} x^{\mu}\pi_{j,\nu}(x) = 0, \qquad j \gtrless \nu, \tag{21}$$

μ étant un nombre positif quelconque. Ce résultat nous permet de déterminer la forme des fonctions $\pi_{j,\nu}(x)$. On sait[1] en effet qu'une fonction uniforme et périodique avec la période 1 qui est méromorphe dans tout domaine fini, et qui tend vers une limite quand x tend vers l'infini en restant dans la bande $a \leqq \sigma \leqq a+1$, est nécessairement une fonction rationnelle de $e^{2\pi i x}$. De ce qui précède il résulte donc qu'on a

$$\pi_{j,\nu}(x) = \varepsilon_{j,\nu} + \sum_{s=1}^{s=p}\left[\frac{A_{j,s}^{(\nu)}}{e^{2\pi i(x-\gamma_s)}-1} + \frac{B_{j,s}^{(\nu)}}{(e^{2\pi i(x-\gamma_s)}-1)^2} + \cdots + \frac{M_{j,s}^{(\nu)}}{(e^{2\pi i(x-\gamma_s)}-1)^{m_s}}\right], \tag{22}$$

m_s étant l'ordre de multiplicité du pôle γ_s et $\varepsilon_{j,\nu}$:

$$\varepsilon_{j,\nu} = \begin{cases} 1, & \nu = j, \\ 0, & \nu \gtrless j. \end{cases}$$

[1] Voir par exemple, Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. I, p. 404—405, Leipzig 1907.

Des égalités (20) et (21) on conclut que les constantes $A, B, \ldots, M$ satisfont aux relations suivantes

$$\sum_{s=1}^{s=p} [-A_{j,s}^{(\nu)} + B_{j,s}^{(\nu)} + \cdots + (-1)^{m_s} M_{j,s}^{(\nu)}] = \begin{cases} e^{2\pi i \beta_j} - 1, & \nu = j, \\ 0, & \nu \gtrless j. \end{cases} \tag{23}$$

Nous avons supposé dans ce chapitre qu'aucune des différences entre les β_j n'est égale à un entier (y compris zéro). La discussion se fera de la même manière dans le cas général où les racines β_j forment des groupes et des sous-groupes. Je me borne à renvoyer le lecteur à mon Mémoire[1] cité plus haut, où l'on a discuté avec détail comment se modifient les déterminants en ce cas. Les relations (16) et (22) restent vraies dans ce cas mais les relations (23) prennent une forme un peu plus compliquée. On vérifie d'ailleurs que ce résultat est en accord avec celui trouvé dans le chapitre III.

§ 21. Considérons ensuite le cas où toutes les racines de l'équation caractéristique sont distinctes. Changeons légèrement les notations dans la relation fondamentale (16) et écrivons

$$\bar{u}_j(x) = e^{2\pi i x} \sum_{\nu=1}^{\nu=j-1} \pi_{j,\nu}(x)\, u_\nu(x) + \sum_{\nu=j}^{\nu=k} \pi_{j,\nu}(x)\, u_\nu(x). \tag{24}$$

Rappelons qu'on a

$$\bar{u}_j(x) = a_j^x \frac{\Gamma\left(-\frac{x}{\omega} - \beta_j\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)} e^{\pi i(\beta_j + 1)} [A_0^{(j)} + \varepsilon_1(x)],$$

$\varepsilon_1(x)$ étant une fonction qui, dans tout intervalle fini de σ tend uniformément vers zéro quand τ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Substituons cette expression dans le déterminant $D_{j,\nu}(x)$.

En raisonnant exactement comme plus haut on démontre les égalités

$$\lim_{\tau=-\infty} \pi_{j,j}(x) = 1, \quad \lim_{\tau=+\infty} \pi_{j,j}(x) = e^{2\pi i \beta_j}, \tag{25}$$

$$\lim_{\tau=-\infty} \pi_{j,\nu}(x) = 0, \quad \lim_{\tau=+\infty} e^{2\pi i x} \pi_{j,\nu}(x) = 0, \qquad \nu \gtrless j, \tag{26}$$

car on se rappelle que les nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ont été numérotés de sorte qu'on ait $0 \leq \operatorname{Arg} a_1 \leq \operatorname{Arg} a_2 \leq \operatorname{Arg} a_3 < \cdots$. De ces égalités on conclut que $\pi_{j,\nu}(x)$ est

[1] l. c. Sur l'intégration des équations etc., chapitre III.

de la forme (22) et que la relation (23) subsiste dans le cas où $\nu = j$, mais non si l'on a $\nu \lesseqgtr j$, car on n'a pas en général $\lim\limits_{x = +\infty} \pi_{j,\nu}(x) = 0$.

Pour abréger j'ai discuté seulement les deux cas extrêmes susmentionnés. Dans le cas général où l'équation caractéristique admet plusieurs racines multiples on peut appliquer un raisonnement qui est intermédiaire entre ceux qui conviennent dans les cas extrêmes.

Soit a_i une des racines multiples, soit n son ordre de multiplicité $(a_i = a_{i+1} = \cdots = a_{i+n-1})$. L'équation déterminante relative au point a_i admet les racines $\beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_{i+n-1}$ non-entières en général. Soit β_j une de ces racines. Supposons enfin qu'aucun des points $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ne soit un point singulier irrégulier de l'équation différentielle. Le lecteur verra sans peine qu'on trouve la relation

$$\bar{u}_j(x) = e^{2\pi i x} \sum_{\nu=1}^{\nu=i-1} \pi_{j,\nu}(x)\, u_\nu(x) + \sum_{\nu=i}^{i=k} \pi_{j,\nu}(x)\, u_\nu(x) \tag{27}$$

où $\pi_{j,\nu}(x)$ est de la forme (22). L'exactitude de cette relation a d'ailleurs été démontrée dans toute sa généralité dans le chapitre III. Si la solution appartenant à β_j ne contient pas de logarithme, la relation (23) est vraie pour $\nu = i, i+1, \ldots, i+n-1$, mais non pour les autres valeurs de ν. Elle est donc vraie en particulier pour $\nu = j$.

§ 22. Pour compléter cette étude il nous reste à déterminer les constantes $A, B, \ldots, M$. Supposons pour plus de simplicité que les pôles γ_s soient simples, mais restons d'ailleurs dans le cas général où nous venons de nous placer. On a donc

$$0 = B_{j,s}^{(\nu)} = \cdots = M_{j,s}^{(\nu)}.$$

Soit m un des nombres $0, 1, \ldots, k-1$. Multiplions les deux membres de (27) par $(x - \gamma_s + m)$ et faisons tendre x vers $\gamma_s - m$.

Il vient

$$e^{2\pi i \gamma_s} \sum_{\nu=1}^{\nu=i-1} A_{j,s}^{(\nu)} u_\nu(\gamma_s - m) + \sum_{\nu=i}^{\nu=k} A_{j,s}^{(\nu)} u_\nu(\gamma_s - m) = \begin{cases} R_{j,s}, & m = 0 \\ 0, & m = 1, 2, \ldots, k-1 \end{cases}, \tag{28}$$

$2\pi i R_{j,s}$ étant le résidu de $\bar{u}_j(x)$ dans le point γ_s. Ces k équations suffisent pour déterminer les nombres $A_{j,s}^{(1)}, \ldots, A_{j,s}^{(k)}$. Leur déterminant est en effet égal à

$$e^{2\pi\sqrt{-1}\,\gamma_s (i-1)} D(\gamma_s - k + 1)$$

il est donc différent de zéro. Je veux démontrer que les $A_{j,s}^{(\nu)}$ s'expriment par les multiplicateurs de l'équation aux différences (2). Divisons celle-ci par $p_k(x)$; il vient

$$P[u(x)] \equiv u(x+k) + P_{k-1}(x)\, u(x+k+1) + \cdots + P_0(x)\, u(x) = 0.$$

On entend[1] par un multiplicateur de cette équation une fonction $\mu_i(x)$ telle que le produit $\mu_i(x)\, P[u(x)]$ soit la différence finie d'une fonction linéaire en $u(x)$, $u(x+1), \ldots, u(x+k-1)$:

$$\mu_i(x)\, P[u(x)] = \Delta \sum_{i=0}^{i=k-1} Q_i(x)\, u(x+i).$$

On sait qu'il existe k multiplicateurs linéairement indépendants qui sont des solutions de l'équation adjointe

$$\mu(x) + P_{k-1}(x)\, \mu(x+1) + P_{k-2}(x+1)\, \mu(x+2) + \cdots + P_0(x+k-1)\, \mu(x+k) = 0,$$

et qui satisfont aux relations suivantes

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=k} \mu_\nu(x)\, u_\nu(x+m) = \begin{cases} 0, & m = 1, 2, \ldots, k-1, \\ 1, & m = k. \end{cases}$$

En comparant ces équations avec les équations (28) on trouve

$$A_{j,s}^{(\nu)} = R_{j,s} \,.\, \mu_\nu(\gamma_s - k) \,.\, e^{-2\pi i \gamma_s \varepsilon_\nu},$$

où

$$\varepsilon_\nu = \begin{cases} 0, & \text{si } \nu \geqq i, \\ 1, & \text{si } \nu < i. \end{cases}$$

Théorème. *Entre les deux systèmes canoniques de solutions il existe des relations linéaires à coefficients périodiques. Ces coefficients périodiques sont des fonctions rationnelles de* $e^{2\pi i x}$. *Les seules constantes qui entrent dans ces fonctions sont:*

1°. *Les nombres* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, *racines de l'équation* $p_k(x) = 0$.

2°. *Les résidus des solutions canoniques* $\bar{u}_j(x)$ *dans les points* γ_s.

3°. *Les valeurs des multiplicateurs de l'équation aux différences dans les points* $\gamma_s - k$.

---

[1] S. Pincherle & U. Amaldi: Le Operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi. Bologna 1901, p. 242—246.

E. Bortolotti: Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**, (1896).

G. Wallenberg und A. Guldberg: Theorie der linearen Differenzengleichungen. Leipzig 1911, p. 78—86.

CHAPITRE V.

Étude des solutions au voisinage du point à l'infini.

§ 23. Nous sommes maintenant en mesure de voir comment se comportent nos solutions canoniques quand x, en suivant *une droite quelconque*, tend vers le point à l'infini qui est le seul point essentiel de ces fonctions. Considérons par exemple la solution $\overline{u}_j(x)$. Nous avons déjà vu comment se comporte asymptotiquement cette solution quand x tend vers l'infini de sorte que la partie réelle de x reste inférieure à un nombre positif. La relation (27) chapitre IV montre immédiatement comment elle se comporte quand x tend vers l'infini en suivant un rayon vecteur formant avec l'axe des nombres positifs un angle non-nul et inférieur à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue. Il suffit en effet d'introduire dans le second membre de cette relation les développements convergents obtenus pour les solutions $u_1(x), u_2(x) \ldots$. Remarquons que, si l'argument de x est compris entre 0 et $-\pi$, les produits $e^{2\pi i x}\pi_{j,\nu}(x)$ $(\nu \gtreqless j)$ tendent vers une limite finie et non-nulle en général; mais si $\nu = j$ la fonction $\pi_{j,j}(x)$ tend vers la limite 1. Si l'argument de x est compris entre zéro et π les fonctions $\pi_{j,\nu}(x)$ tendent vers une limite finie et non-nulle en général, si $\nu = 1, 2, \ldots, i-1, i+n, i+n+1, \ldots, k$. Mais les fonctions $\pi_{j,\nu}(x)$ décroissent plus vite qu'une puissance quelconque de x, si $\nu = i, i+1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, i+n-1$. On a, en effet, en vertu des relations (23) chapitre IV, pour ces valeurs de ν

$$\lim_{x=\infty} e^{-2\pi i x}\pi_{j,\nu}(x) = \text{const.},$$

et enfin

$$\lim_{x=\infty} \pi_{j,j}(x) = e^{2\pi i \beta_j}.$$

Les termes contenant $u_i(x), u_{i+1}(x), \ldots, u_{j-1}(x), u_{j+1}(x), \ldots, u_{i+n-1}(x)$ *sont donc sans influence sur la valeur asymptotique de* $\overline{u}_j(x)$, car ils décroissent beaucoup plus vite que le terme contenant $u_j(x)$, le facteur exponentiel a_i^x étant le même en tous ces termes.

Cette remarque est très importante. On en conclut par exemple que dans le cas étudié dans le chapitre I, où toutes les racines de l'équation caractéristique sont égales à 1, on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\overline{u}_j(x)}{u_j(x)} = 1,$$

si l'argument de x est compris entre o est $-\pi$ et

$$\lim_{x=\infty} \frac{\overline{u}_j(x)}{u_j(x)} = e^{2\pi i \beta_j},$$

si l'argument de x est compris entre o et π les limites exclues. Les égalités (18) et (19) (chapitre I) sont donc vraies, non seulement dans les angles indiqués, mais respectivement pour $\pi - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\pi + \varepsilon$ et pour $-\varepsilon > \operatorname{Arg} x > -2\pi + \varepsilon$, ε étant un nombre positif. Plus généralement, si β_j appartient à un groupe de racines et n est un entier convenablement choisi, on a uniformément dans l'angle $\pi - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\pi + \varepsilon$:

$$\lim_{x=\infty} \frac{u_j(x)\, x^{\beta_j + 1}}{\log^n \left(\frac{1}{x}\right)} = \text{const.}$$

Ce résultat est, ce nous semble, très remarquable. Les fonctions méromorphes $u_j(x)$ se montrent par là comme les plus simples en leur genre.

§ 24. Retournons au cas général où les racines de l'équation caractéristique sont des nombres quelconques. Faisons tendre x vers l'infini le long d'un rayon vecteur fixe différent de l'axe des nombres positifs. On voit qu'on sait former une expression $\eta_s(x)$,

$$\eta_s(x) = a_s^x \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta_s + 1} \log^n \left(\frac{1}{x}\right),$$

telle que $\overline{u}_j(x) : \eta_s(x)$ tend vers une limite finie. n désigne un entier et on suppose que l'argument de a_s soit convenablement choisi. Cette limite existe à l'intérieur d'un certain angle facile à déterminer. Quand l'argument de x varie, les différents expressions $\eta_s(x)$ se permutent entre elles. Pour un rayon vecteur qui sépare deux de ces angles il arrive que l'expression asymptotique de $\overline{u}_j(x)$ soit de la forme

$$\sum_s k_s \eta_s,$$

les k_s étant des constantes.

On sait donc former une somme $\sum\limits_s k_s \eta_s$ qui représente asymptotiquement $\overline{u}_j(x)$ dans l'angle $\frac{\pi}{2} > \operatorname{Arg} x > \varepsilon$ et une autre somme $\sum\limits_s k_s \eta_s$ qui représente asymptotiquement $\bar{u}_j(x)$ dans l'angle $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} x < -\varepsilon$. Les arguments des nombres a_s doivent être choisis d'une manière différente dans les deux cas. *La direction de l'axe des nombres positifs est une direction singulière. Il n'existe aucune fonction $\eta_s(x)$ qui représente $\bar{u}_j(x)$ asymptotiquement quand x tend vers l'infini le long d'une droite parallèle à l'axe des nombres positifs.* Mais la relation (27) permet toutefois de se rendre compte de la manière dont varient les valeurs de $\bar{u}_j(x)$ le long d'une telle droite.

Pour les solutions $u_j(x)$ on trouve des résultats du même ordre. C'est la direction de l'axe des nombres négatifs qui est singulière pour ces fonctions.

CHAPITRE VI.

Exemples particuliers.

§ 25. Je veux maintenant appliquer ce qui précède à l'étude de deux équations particuliers. A l'équation différentielle de Laplace

$$\sum (c_i + b_i x) \frac{d^i y}{dx^i} = 0,$$

il correspond l'équation aux différences finies suivante

$$P[u(x)] \equiv \sum_{i=0}^{i=k} [c_i + b_i(x+i)]\, u(x+i) = 0, \tag{1}$$

les c_i et les b_i étant indépendants de x. Supposons que $b_k = 1$ et que $b_0 \neq 0$.

Posons

$$u(x) = \int t^{x-1} v(t)\, dt. \tag{2}$$

En substituant cette intégrale dans l'équation (1) il viendra

$$P[u(x)] = t^x v(t) \sum_{i=0}^{i=k} b_i t^i + \int t^{x-1} Q[v(t)]\, dt, \tag{3}$$

où

$$Q[v(t)] = t \frac{dv(t)}{dt} \sum_{i=0}^{i=k} b_i t^i - v(t) \sum_{i=0}^{i=k} c_i t^i. \tag{4}$$

Déterminons $v(t)$ comme une solution de l'équation différentielle $Q = 0$. On a

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\beta_0}{t} + \frac{\beta_1}{t-a_1} + \frac{\beta_2}{t-a_2} + \cdots + \frac{\beta_k}{t-a_k}.$$

Supposons d'abord que les racines $a_1, \ldots, a_k$ de l'équation caractéristique soient distinctes et que les nombres $\beta_1, \ldots, \beta_k$ ne soient pas des entiers non-négatifs. Prenons pour $v(t)$ la solution suivante

$$v(t) = t^{\beta_0}(t-a_1)^{\beta_1}(t-a_2)^{\beta_2}\ldots(t-a_k)^{\beta_k}. \tag{5}$$

Les solutions canoniques se déterminent par les équations

$$u_s(x) = \int_{l_s} t^{x-1} v(t)\,dt, \qquad \bar{u}_s(x) = \int_{L_s} t^{x-1} v(t)\,dt. \tag{6}$$

Pour les définir complètement convenons que l'argument de $t - a_n$ tend vers $\zeta_n + \pi$ quand t revient à l'origine le long de la dernière partie de la ligne l_s et vers

$$\begin{cases} \zeta_s, & \text{si } n < s, \\ \zeta_s + 2\pi, & \text{si } n \geqq s, \end{cases}$$

quand t revient à l'infini le long de la dernière partie de la ligne L_s. Pour l'argument de t on prend la valeur qui est égale à ζ_s le long de la partie rectiligne du chemin d'intégration. Les $u(x)$ et les $\bar{u}(x)$ se trouvent ainsi définies respectivement pour $\Re(x + \beta_0) > 0$ et pour $\Re(x + \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k) < 0$.

Quand x tend vers l'infini de sorte que la partie réelle de x tend vers $+\infty$, ou reste finie, on a

$$\lim_{x=\infty} a_s^{-x} x^{\beta_s+1} u_s(x) = k, \qquad \frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{\pi}{2}, \tag{7}$$

k étant une constante.

Mais si la partie réelle de x tend vers $-\infty$, ou reste finie, on a

$$\lim_{x=\infty} a_s^{-x} x^{\beta_s+1} \bar{u}_s(x) = k, \qquad -\frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg} x \geqq -\frac{3\pi}{2}, \tag{8}$$

k étant la même constante.

La solution $u_s(x)$ peut s'exprimer par l'intégrale

$$u_s(x) = \frac{e^{-2\pi i \beta_s} - 1}{e^{2\pi i (x+\beta_0)} - 1} \int_{C_s} t^{x-1} v(t)\, dt, \tag{9}$$

C_s étant un contour partant du point a_s et y revenant après avoir entouré l'origine dans le sens direct et en laissant à son extérieur tous les autres points singuliers. En déformant le contour C_s de la manière indiquée dans le § 18 on trouve la relation suivante

$$\begin{aligned} u_s(x) = \bar{u}_s(x) &+ \frac{\sin \pi \beta_s}{\sin \pi (x+\beta_0)} e^{-\pi i (x+\beta_0+\beta_s)} \{\bar{u}_s(x) + \bar{u}_{s+1}(x) + \cdots + \bar{u}_k(x)\} \\ &+ \frac{\sin \pi \beta_s}{\sin \pi (x+\beta_0)} e^{\pi i (x+\beta_0-\beta_s)} \{\bar{u}_1(x) + \bar{u}_2(x) + \cdots + \bar{u}_{s-1}(x)\}. \end{aligned} \tag{10}$$

A l'aide de cette relation et des égalités (7) et (8) on peut voir comment se comporte $u_s(x)$ quand x tend vers l'infini d'une manière quelconque.

L'intégrale qui figure au second membre de (9) est une fonction entière de x. Elle s'évanouit si $x + \beta_0$ est un entier positif. Les solutions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ sont donc des fonctions méromorphes de x admettant les points $-\beta_0$, $-\beta_0 - 1$, $-\beta_0 - 2, \ldots$ pour pôles simples. De même on voit que les solutions $\bar{u}_1(x), \bar{u}_2(x), \ldots, \bar{u}_k(x)$ sont des fonctions méromorphes de x admettant les points

$$\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k + p \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

pour pôles simples et étant d'ailleurs holomorphes.

Si $\beta_n (n \gtreqless s)$ est un entier non-négatif il faut dans l'équation (10) remplacer $\bar{u}_n(x)$ par zéro. L'intégrale de contour $u_n(x)$ s'évanouit en ce cas; mais pour obtenir une solution appartenant à β_n il suffit de remplacer le contour l_n par la droite de zéro à a_n. Le premier terme au second membre de (3) est en effet égal à zéro pour $t = a_n$.

§ 26. On a supposé jusqu'ici que les racines a_s étaient distinctes. Si a_s est n fois racine dans l'équation $\sum_{i=0}^{i=k} b_i t^i = 0$, deux cas essentiellement différents se présentent

1°. a_s est $(n-1)$ fois racine dans l'équation $\sum_{i=0}^{i=k} c_i t_i = 0$. On vérifie aisément que l'équation aux différences finies admet les solutions suivantes

$$a_s^x,\ a_s^x x,\ a_s^x x^2, \ldots,\ a_s^x x^{n-2},$$

qui, joignées aux solutions définies ci-dessus, forment un système fondamental de solutions.

2°. L'équation $\sum_{i=0}^{i=k} c_i t^i = 0$ n'admet pas a_s comme racine d'ordre de multiplicité $(n-1)$. Supposons pour abréger que a_s n'est point du tout racine dans cette équation. $v(t)$ est en ce cas de la forme

$$v(t) = t^{\beta_0}(t-a_1)^{\beta_1}\ldots(t-a_s)^{\beta_s} e^{\frac{\beta_s^{(1)}}{t-a_s} + \cdots + \frac{\beta_s^{(n-1)}}{(t-a_s)^{n-1}}} \ldots (t-a_k)^{\beta_k}.$$

Les lacets $l_1, l_2, \ldots$ nous donneront seulement un nombre de solutions indépendantes qui est égal au nombre de racines distinctes dans l'équation caractéristique. On peut former des nouvelles solutions de la manière suivante. Le voisinage de a_s se partage en $2(n-1)$ secteurs

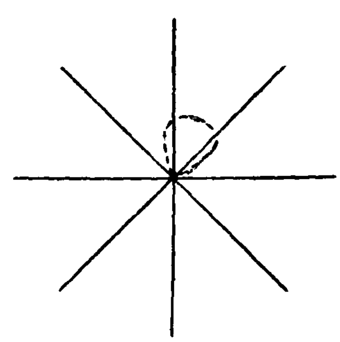

Fig. 4.

tels que lorsque t tend vers a_s, $v(t)$ tend vers 0, si t se meut dans un des secteurs de rang impair et vers ∞ s'il reste dans un secteur de rang pair. Prenons pour ligne d'intégration une ligne qui part du point a_s, et s'en éloigne suivant le premier secteur, traverse le second et revienne en a_s par le troisième; $v(t)$ s'annule aux deux extrémités de ce contour, on obtient donc une solution de l'équation (1). Cette solution est une fonction entière de x. En intégrant suivant une ligne qui s'éloigne de a_s suivant le troisième secteur et y revient par le cinquième secteur on obtient une nouvelle solution. On peut former en tout $(n-1)$ solutions semblables qui sont linéairement indépendantes.

§ 27. Outre les solutions canoniques il y a un certain nombre d'autres solutions qui, pour la raison suivante, méritent l'attention. Pour les solutions canoniques $u_s(x)$ la direction de l'axe des nombres négatifs est une direction singulière et pour les solutions canoniques $\overline{u}_s(x)$ c'est la direction de l'axe des nombres positifs qui est singulière. Mais les nouvelles solutions que nous allons former n'admettent pas de direction singulière. Supposons que les racines $a_1, \ldots, a_k$ de l'équation caractéristique soient distinctes. Soit C un point quelconque du plan. Joignons-le aux points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ par les lacets $A_1, A_2, \ldots, A_k$ entourant ces points dans le sens direct. Désignons par A_s^{-1} le lacet A_s parcouru dans le sens indirect. Soit $[s]$ la valeur de l'intégrale $\int t^{x-1} v(t)\,dt$ prise le long du contour A_s et avec une détermination initiale convenable de la fonction à intégrer. Soit $[s-1, s]$ la valeur de la même intégrale prise le long du contour $A_{s-1} A_s A_{s-1}^{-1} A_s^{-1}$. L'intégrale $[s-1, s]$ est une solution de l'équation (1). En effet, $t^x v(t)$ se reproduira après les deux rotations successives autour des points a_{s-1} et a_s. Le premier terme au second membre de (3) est donc nul. La solution $[s-1, s]$ est une fonction entière de x. Il est facile de l'exprimer par les solutions canoniques. En ayant égard aux changements que subira $v(t)$ par les rotations autour des points singuliers on trouve la relation suivante

$$[s-1, s] = (1 - e^{2\pi i \beta_s})[s-1] - (1 - e^{2\pi i \beta_{s-1}})[s].$$

Mais la valeur de l'intégrale $[s-1, s]$ est indépendante du choix qu'on a fait du point C. On peut donc faire tendre C vers l'origine. Quand on se rappelle le choix qu'on a fait des arguments de $t-a_1, t-a_2, \ldots$ dans les solutions canoniques on voit qu'il existe la relation suivante

$$[s-1, s] = e^{2\pi i \beta_{s-1}}(1 - e^{2\pi i \beta_s})\, u_{s-1}(x) - e^{2\pi i \beta_s}(1 - e^{2\pi i \beta_{s-1}})\, u_s(x).$$

De même en faisant tendre C vers l'infini d'une manière convenable il vient

$$[s-1, s] = (1 - e^{2\pi i \beta_s})\, \overline{u}_{s-1}(x) - e^{2\pi i \beta_s}(1 - e^{2\pi i \beta_{s-1}})\, \overline{u}_s(x).$$

Ces relations font voir comment se comporte la fonction entière $[s-1, s]$ quand x tend vers l'infini *le long d'un rayon vecteur quelconque.* Les coefficients dans ces relations ne sont plus des fonctions périodiques mais des constantes; on voit donc *qu'il n'y a pas de direction singulière pour ces solutions.*

Il y a en tout $k-1$ solutions[1] de ce genre $[1, 2]$, $[2, 3]$, ..., $[k-1, k]$ qui sont linéairement indépendantes.

§ 28. Considérons en dernier lieu l'équation aux différences finies

$$(x-\alpha)(x-\beta)\Delta_1^2 u(x) + \{\alpha\beta-\gamma-\alpha-\beta-1+(\gamma-\alpha-\beta+3)x\}\Delta_1 u(x) + (\gamma-\alpha-\beta+1)u(x) = 0,$$

qui rentre dans la classe de celles étudiées dans le chapitre I. En écrivant $x+2$ au lieu de x elle peut se mettre sous la forme

$$(x-\alpha+2)(x-\beta+2)u(x+2)$$
$$-\{\alpha\beta-(\alpha+\beta+\gamma+1)(x+1)+2(x+1)(x+2)\}u(x+1)+x(x-\gamma+1)u(x)=0.$$

En posant

$$u(x)=\int t^{x-1}v(t)\,dt,$$

on voit que $v(t)$ doit satisfaire à l'équation différentielle de Gauss

$$t(1-t)\frac{d^2v(t)}{dt^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)t]\frac{dv(t)}{dt}-\alpha\beta v(t)=0.$$

Cette équation admet aux environs de $t=1$ les deux solutions

$$F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1, 1-t),$$

$$(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-t);$$

les solutions canoniques $u_1(x)$ et $u_2(x)$ se représentent donc par les séries de facultés

[1] Plus généralement on sait démontrer qu'une équation aux différences d'ordre k, ayant pour coefficients des polynômes du degré $p\,(p<k)$, possède $k-p$ solutions entières qui n'admettent pas de direction singulière.

$$u_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta-\gamma+1)\,x(x+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{(\alpha+\beta-\gamma+1)(\alpha+\beta-\gamma+2)x(x+1)(x+2)} + \cdots$$

$$u_2(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-\alpha-\beta+\gamma+1)}\left\{1 + \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{1\,.\,(x+\gamma-\alpha-\beta+1)}\right.$$

$$\left. + \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,(x+\gamma-\alpha-\beta+1)(x+\gamma-\alpha-\beta+2)} + \cdots\right\},$$

convergentes pouvu que

$$\Re(x-\gamma+1) > 0.$$

Quand on se rappelle la formule

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)},$$

on voit que $u_2(x)$ est égal à

$$u_2(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(x-\gamma+1)}{\Gamma(x-\beta+1)\Gamma(x-\alpha+1)}.$$

Les solutions canoniques $\bar{u}_1(x)$ et $\bar{u}_2(x)$ sont

$$\bar{u}_1(x) = \frac{1}{x-\alpha} + \frac{\alpha(\alpha-\gamma+1)}{(\alpha+\beta-\gamma+1)(x-\alpha)(x-\alpha-1)}$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)}{(\alpha+\beta-\gamma+1)(\alpha+\beta-\gamma+2)(x-\alpha)(x-\alpha-1)(x-\alpha-2)} + \cdots$$

$$\bar{u}_2(x) = \frac{\Gamma(\alpha-x)\Gamma(\beta-x)}{\Gamma(1-x)\Gamma(\gamma-x)}.$$

On trouve entre ces solutions les relations linéaires

$$\bar{u}_2(x) = \frac{\sin\pi x \sin\pi(x+1-\gamma)}{\sin\pi(x-\alpha)\sin\pi(x-\beta)}\,u_2(x),$$

$$\bar{u}_1(x) = u_1(x) - \frac{\pi^2\Gamma(1+\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1+\beta-\gamma)\Gamma(1+\alpha-\gamma)}\,\frac{u_2(x)}{\sin\pi(x-\alpha)\sin\pi(x-\beta)}.$$

$u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont des fonctions méromorphes admettant pour pôles simples les points $0, -1, -2, \ldots; \gamma-1, \gamma-2, \gamma-3, \ldots,$ et on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} x u_1(x) = 1,$$

$$\pi - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\pi + \varepsilon.$$

$$\lim x^{\alpha+\beta-\gamma-1} u_2(x) = 1.$$

$\bar{u}_1(x)$ et $\bar{u}_2(x)$ sont des fonctions méromorphes admettant pour pôles simples les points $\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots; \beta, \beta + 1, \beta + 2, \ldots$

Goettingue, octobre 1912.