ZWEI BEWEISE EINES VON HERRN FATOU VERMUTETEN SATZES.

Aus einem Briefwechsel zwischen

A. HURWITZ und G. PÓLYA
in ZÜRICH.

Herr FATOU[1] vermutete, dass sich der Konvergenzkreis für eine beliebige Potenzreihe zur natürlichen Grenze machen lässt, bloss durch geeignete Änderung der *Vorzeichen* der Koeffizienten. Genauer gesagt handelt es sich um folgenden Satz:

Es sei der Einheitskreis der wahre Konvergenzkreis der Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots;$$

dann lässt sich eine unendliche Folge

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots,$$

wo die ε_n nur der beiden Werte $+1$ und -1 fähig sind, derart bestimmen, dass die Reihe

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 x + \varepsilon_2 a_2 x^2 + \cdots + \varepsilon_n a_n x^n + \cdots$$

den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat.

Das Paradoxe, wovon dieser hübsche Satz zweifellos etwas an sich hat, tritt vielleicht durch folgenden Umstand am besten hervor: es gibt Bedingungen, die sich *nur auf die absoluten Beträge* der Koeffizienten beziehen, und die zur Folge haben, dass die Potenzreihe nicht über ihren Konvergenzkreis hinaus

[1] Acta Mathematica, Bd. 30, S. 335 ff. (vgl. S. 400).

fortsetzbar ist; so fordert der von Herrn HADAMARD entdeckte, seitdem sehr vervollkommnete »Lückensatz», dass gewisse, unendlich viele dieser absoluten Beträge $= 0$ sein sollen. Aus dem obigen Satz folgt nun, dass es *keine* Bedingung gibt, die sich nur auf die absoluten Beträge der Koeffizienten bezieht, und die zur Folge hat, dass die Potenzreihe über ihren Konvergenzkreis hinaus fortsetzbar ist.

Herr FATOU bewies den Satz für eine spezielle Klasse von Reihen $\left(\lim a_n = 0,\ \sum |a_n| \text{ divergent}\right)$. Nun ergibt sich der volle Satz sozusagen unmittelbar aus den wichtigen Untersuchungen des Herrn FABRY[1] über die Taylorsche Reihe.

Ganz am Anfang seiner Untersuchungen gelangt Herr FABRY zu einem Satze, den ich, meinen Zwecken gemäss etwas spezialisiert, so aussprechen will:

Der Punkt $e^{i\psi}$ ist für die im Einheitskreise konvergierende Potenzreihe

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots,$$

gewiss singulär, wenn eine unendliche Folge von Indices $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ existiert, die der doppelten Bedingung genügt:

1) $$\lim_{n=\infty} |b_{\mu_n}|^{\frac{1}{\mu_n}} = 1,$$

2) *die reellen Teile der Grössen*

$$\frac{b_{\mu_n+\nu} e^{i\nu\psi}}{b_{\mu_n}}$$

sind für $\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \left[\frac{\mu_n}{2}\right]$ nicht negativ.

Im Besitze dieses Satzes kommt man mit der gewöhnlichen »Häufungsmethode» so zum Ziel: die abzählbare Punktmenge

(1) $$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \ldots, \psi_n, \ldots,$$

sei im Intervalle $(0, 2\pi)$ überall dicht. Man konstruiere eine unendliche Folge

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots,$$

die jede Zahl der Menge (1), und zwar jede unendlich oft enthält. Man setzt zu diesem Zweck etwa

[1] Annales scient. de l'École Normale supérieure, 3te Folge, Bd. 18 (1896) 367—399. Acta Mathematica, Bd. 22, S. 65—88.

$$\varphi_0 = \psi_1,$$

$$\varphi_1 = \psi_1,\ \varphi_2 = \psi_2,$$

$$\varphi_3 = \psi_1,\ \varphi_4 = \psi_2,\ \varphi_5 = \psi_3,$$

$$\varphi_6 = \psi_1,\ \varphi_7 = \psi_2,\ \varphi_8 = \psi_3,\ \varphi_9 = \psi_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Es sei

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \ldots,$$

eine unendliche Folge von Indices, die der doppelten Bedingung genügt:

$$1)\ \lim_{n=\infty} |a_{\lambda_n}|^{\frac{1}{\lambda_n}} = 1, \qquad 2)\ \lambda_{n+1} > 3\lambda_n.$$

Es sei

$$\varepsilon_{\lambda_n} = +1,$$

und wenn

$$-\frac{\lambda_n}{2} \leqq \nu \leqq +\frac{\lambda_n}{2},$$

so sei $\varepsilon_{\lambda_n+\nu}$ derart gewählt, dass der reelle Teil der Grösse

$$\frac{\varepsilon_{\lambda_n+\nu}\, a_{\lambda_n+\nu}\, e^{i\nu\varphi_n}}{a_{\lambda_n}},$$

nicht negativ wird. Da

$$\frac{3}{2}\lambda_n < \frac{1}{2}\lambda_{n+1},$$

enthalten diese Bestimmungen keinen Widerspruch. Wenn über ε_m bisher nicht verfügt wurde, so sei etwa

$$\varepsilon_m = +1$$

gesetzt.

Durch eine unmittelbare Anwendung des zitierten FABRY'schen Satzes ist ersichtlich, dass alle Punkte

$$e^{i\psi_1},\ e^{i\psi_2},\ e^{i\psi_3}, \ldots,\ e^{i\psi_n}, \ldots,$$

und folglich auch der Einheitskreis, singulär werden für die Reihe

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 x + \varepsilon_2 a_2 x^2 + \cdots + \varepsilon_n a_n x^n + \cdots.$$

G. Pólya.

Für den Satz von Herrn Fatou, den Sie zum ersten Male bewiesen haben, fand ich einen zweiten Beweis, den ich Ihnen im Folgenden mitteilen möchte. Aus der Potenzreihe

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

mit dem Konvergenzradius 1 bilde ich zunächst die neue Reihe

$$Q(x) = a_{n_1} x^{n_1} + a_{n_2} x^{n_2} + \cdots + a_{n_\varkappa} x^{n_\varkappa} + \cdots,$$

in der Weise, dass die Koeffizienten $a_{n_\varkappa}$ sämtlich von Null verschieden sind und der Bedingung

$$\lim \sqrt[n_\varkappa]{|a_{n_\varkappa}|} = 1,$$

genügen, und dass die Reihe $Q(x)$, bloss infolge genügend starken Anwachsens der Exponenten $n_1, n_2, \ldots, n_\varkappa, \ldots$, den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat. Die bei der Bildung von $Q(x)$ nicht benutzten Glieder von $P(x)$ fügen sich zu einer Reihe $P_0(x)$ zusammen, so dass

$$P(x) = P_0(x) + Q(x)$$

wird. Nun zerlege ich weiter $Q(x)$ in folgender Art:

$$Q(x) = P_1(x) + P_2(x) + \cdots + P_\varkappa(x) + \cdots,$$

wo die unendlichen Reihen $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_\varkappa(x), \ldots$, so aus den Gliedern von $Q(x)$ aufgebaut sind, dass jedes Glied $a_{n_\varkappa} x^{n_\varkappa}$ in einer und nur einer der Reihen $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_\varkappa(x), \ldots$, auftritt. Jetzt endlich bilde ich die sämtlichen Potenzreihen

$$P_\varepsilon(x) = P_0(x) + \varepsilon_1 P_1(x) + \varepsilon_2 P_2(x) + \cdots + \varepsilon_\varkappa P_\varkappa(x) + \cdots,$$

wobei jeder der Faktoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\varkappa, \ldots$ einen der beiden Werte $+1$ und -1 erhalten darf. Jede Reihe $P_\varepsilon(x)$ entsteht aus $P(x)$ dadurch, dass die einzelnen Glieder von $P(x)$ mit einem der beiden Faktoren $+1$ und -1 multipliziert werden.

Ich behaupte nun, dass unter den Reihen $P_\varepsilon(x)$ mindestens eine vorhanden ist, die den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat. Die gegenteilige Annahme führt nämlich durch folgende Schlüsse auf einen Widerspruch.

Zunächst würde jede einzelne Reihe $P_\varepsilon(x)$ auf der Peripherie des Einheitskreises reguläre Punkte besitzen, die sich auf ein System B_ε von Bögen der Kreisperipherie verteilen. Es würde ferner sicher zwei verschiedene Reihen $P_\varepsilon(x)$ und $P_{\varepsilon'}(x)$ geben, so beschaffen, dass die Bogen B_ε, die zu der Reihe $P_\varepsilon(x)$ gehören, in die zu $P_{\varepsilon'}(x)$ gehörenden Bogen $B_{\varepsilon'}$ übergreifen.

Denn andernfalls würden die Systeme B_ε, welche der Gesamtheit der Reihen $P_\varepsilon(x)$ entsprechen, eine abzählbare Menge bilden, während doch die Reihen $P_\varepsilon(x)$ eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums ausmachen.

Zwei solche Reihen

$$P_\varepsilon(x) = P_0(x) + \varepsilon_1 P_1(x) + \varepsilon_2 P_2(x) + \cdots + \varepsilon_\varkappa P_\varkappa(x) + \cdots,$$

$$P_{\varepsilon'}(x) = P_0(x) + \varepsilon'_1 P_1(x) + \varepsilon'_2 P_2(x) + \cdots + \varepsilon'_\varkappa P_\varkappa(x) + \cdots,$$

hätten nun auf der Peripherie des Einheitskreises gemeinsame reguläre Punkte, und dies steht im Widerspruch damit, dass die Reihe

$$P_\varepsilon(x) - P_{\varepsilon'}(x) = (\varepsilon_1 - \varepsilon'_1) P_1(x) + (\varepsilon_2 - \varepsilon'_2) P_2(x) + \cdots + (\varepsilon_\varkappa - \varepsilon'_\varkappa) P_\varkappa(x) + \cdots,$$

den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat, also keinen regulären Punkt auf der Kreisperipherie aufweist.

A. Hurwitz.