ZUR THEORIE DER RIEMANN'SCHEN ZETAFUNKTION IM KRITISCHEN STREIFEN.

Von

HARALD BOHR

in Kopenhagen.

Einleitung.

Die Riemann'sche Zetafunktion $\zeta(s)$ der komplexen unabhängigen Variablen $s=\sigma+it$ ist bekanntlich eine in der ganzen Ebene, bis auf den einzigen Pol $s=1$, reguläre analytische Funktion, welche der Funktionalgleichung

$$\zeta(1-s)=\frac{2}{(2\pi)^s}\cos\frac{s\pi}{2}\Gamma(s)\zeta(s)$$

genügt. Diese Funktionalgleichung erlaubt die Untersuchung der Zetafunktion auf die Halbebene $\sigma>\frac{1}{2}$ zu beschränken; in der Tat, wenn man die Zetafunktion für $\sigma>\frac{1}{2}$ beherrscht, lässt sie sich mittels der Funktionalgleichung, welche ja die Werte von Zeta in den beiden Punkten s und $1-s$ verbindet, in der übriggebliebenen Halbebene $\sigma<\frac{1}{2}$ studieren.

In der Halbebene $\sigma>1$ ist $\zeta(s)$ durch das Euler'sche Produkt

$$\zeta(s)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_n^{-s}}$$

dargestellt, wo p_n die n^{te} Primzahl bedeutet; es ist also speziell $\zeta(s)\neq 0$ für $\sigma>1$. Von dieser Produktdarstellung ausgehend habe ich in einigen früheren Abhandlungen durch eine arithmetisch-analytische Methode, welche auf die Theorie der

Diophantischen Approximationen basiert ist, das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ studiert und u. a. den folgenden Satz bewiesen:[1] *Es nimmt* $\zeta(s)$, *bei jedem* $\delta > 0$, *im Streifen* $1 < \sigma < 1 + \delta$ *jeden Wert ausser Null an, sogar unendlich oft.*

Es war schon seit langem ein Problem in der Theorie der RIEMANN'schen Zetafunktion die Bedeutung des EULER'schen Produktes für das analytische Studium von $\zeta(s)$, und speziell zur Untersuchung des Wertevorrates von $\zeta(s)$, auch für solche Gebiete der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ zu erkennen, welche *links* von der Geraden $\sigma = 1$ gelegen sind — obwohl das Produkt in keinem Punkte $s = \sigma + it$ mit $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ konvergiert.

In zwei Abhandlungen der neuesten Zeit[2] ist es gelungen, dies Problem anzugreifen, und zwar mit wesentlichem Erfolg. Ein weiteres Beitrag wird in der vorliegenden Abhandlung gegeben. Die Möglichkeit sowohl in den beiden zitierten wie auch in der vorliegenden Arbeit, die EULER'sche Produktformel zur Untersuchung von $\zeta(s)$ im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ verwenden zu können, beruht auf einer recht bemerkenswerten Tatsache, die übrigens leicht aus einem von Herrn SCHNEE herrührenden Mittelwertsatz in der Theorie der DIRICHLET'schen Reihen abgeleitet werden kann, und die, allgemein gesprochen, folgendermassen ausgedrückt werden kann: Das EULER'sche Produkt konvergiert wohl in keinem Punkte s des Streifens $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, d. h. bei festem in diesem Streifen gelegenem s strebt $\prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-s})^{-1}$ mit wachsendem N keinem bestimmten endlichen von Null verschiedenen Grenzwerte zu; trotzdem konvergiert aber das Produkt $\prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-s})^{-1}$, wenn mann kein festes s sondern das ganze unendliche Gebiet $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ ins Auge fasst, im Grossen und Ganzen gegen die Grenzfunktion $\zeta(s)$; genau ausgedrückt (in der Form, in welcher diese Tatsache in der letzten der beiden zitierten Abhandlungen benutzt wird, welche das Verhalten auf einer festen Geraden $\sigma = \sigma_0$ des Streifens $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ behandelt): Es sei σ_0 eine Zahl im Intervalle $\frac{1}{2} < \sigma < 1$

[1] H. BOHR: *Über das Verhalten von* $\zeta(s)$ *in der Halbebene* $\sigma > 1$. (Göttinger Nachrichten 1911). Der Leser braucht übrigens für das Verständnis der vorliegenden Abhandlung weder die hier zitierte, noch die späterhin zu zitierenden Arbeiten über die Zetafunktion zu kennen.

[2] H. BOHR und E. LANDAU: *Sur les zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *de* RIEMANN (C. R. Paris. 1914). H. BOHR und R. COURANT: *Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die* RIEMANN'*sche Zetafunktion* (Crelles Journal, 1914).

und $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ beliebig gegeben; dann gibt es dazu ein $N_0 = N_0(\sigma_0, \varepsilon, \delta)$ mit folgender Eigenschaft: bei jedem festen $N \geqq N_0$ ist für alle hinreichend grosse T die Summe der Längen der Intervallen der reellen Variablen t zwischen $-T$ und $+T$, für die

$$\left| \frac{\zeta(\sigma_0 + it)}{\prod\limits_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-(\sigma_0 + it)})^{-1}} - 1 \right| < \varepsilon$$

ist, dividiert mit der Gesamtlänge $2T$, grösser als $1 - \delta$.

Bevor ich dazu übergehe, das Ergebnis der vorliegenden Abhandlung kurz auseinanderzusetzen, werde ich zunächst zu Orientierung die Resultate der beiden oben zitierten Abhandlungen kurz erwähnen.

Die erste Abhandlung, welche von Herrn LANDAU und mir herrührt, behandelt das Problem der Nullstellen der Zetafunktion. In einer früher verfassten gemeinsamen Arbeit[1] hatten wir den Satz bewiesen: *Es bezeichne, bei festem* $\delta > 0$, $N(T)$ *die Anzahl der Nullstellen von* $\zeta(s)$ *im Gebiete* $\sigma > \frac{1}{2} + \delta$, $-T < t < T$; *dann ist für unendlich wachsendes* T

$$N(T) = O(T).\text{[2]} \tag{1}$$

Nur wegen der besonderen Wichtigkeit der Nullstellen von $\zeta(s)$ hatten wir in dieser Abhandlung unsere Methode auf die Abschätzung der Anzahl der Wurzeln von $\zeta(s) = 0$ beschränkt und sie nicht allgemein zur Abschätzung der An-

---

[1] H. BOHR und E. LANDAU: *Ein Satz über* DIRICHLET'*sche Reihen mit Anwendung auf die ζ-Funktion und die L-Funktionen* (Palermo Rendiconti, 1914).

[2] Damit hatten wir, unter Berücksichtigung bekannter Tatsachen, speziell gezeigt: *Die dem Streifen* $0 < \sigma < 1$ *gehörigen Nullstellen von* $\zeta(s)$ *liegen meist in nächster Nähe der Geraden* $\sigma = \frac{1}{2}$; d. h. wenn $\varphi(T)$ bezw. $\psi(T)$ die Anzahl derjenigen Nullstellen von $\zeta(s)$ im Rechtecke $0 < \sigma < 1$, $-T < t < T$ bezeichnet, welche dem schmalen Streifen $\frac{1}{2} - \delta < \sigma < \frac{1}{2} + \delta$ angehören bezw. nicht angehören, so gilt bei jedem $\delta > 0$ die Gleichung

$$\lim_{T=\infty} \frac{\psi(T)}{\varphi(T)} = 0.$$

Dieser letzte Satz ist das eine zweier Resultaten, durch welche es in der neuesten Zeit gelungen ist, dem RIEMANN'schen Problem der Nullstellen der Zetafunktion im kritischen Streifen $0 < \sigma < 1$ wesentlich näher heranzurücken. Das andere Resultat ist die von Herrn HARDY (*Sur les zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *de* RIEMANN, C. R. Paris 1914) gemachte Entdeckung, *dass auf der Geraden* $\sigma = \frac{1}{2}$ *unendlich viele Nullstellen von* $\zeta(s)$ *gelegen sind.*

zahl $N_a(T)$ der Wurzeln von $\zeta(s) = a$ in demselben Gebiete $\sigma > \frac{1}{2} + \delta$, $-T < t < T$ verwendet; wörtlich dieselbe Methode ergibt *bei jedem komplexen a das entsprechende Resultat:*

$$N_a(T) = O(T). \tag{2}$$

In der später verfassten Note in den Comptes rendus konnten wir, für die Anzahl der Nullstellen, unser früheres Ergebnis $N(T) = O(T)$ durch das weitergehende Resultat $N(T) = o(T)$ ersetzen, d. h. die Relation

$$\limsup_{T=\infty} \frac{N(T)}{T} < \infty$$

dahin verschärfen, *dass sogar*

$$\lim_{T=\infty} \frac{N(T)}{T} = 0 \tag{3}$$

ist. Die Methode, welche uns dieses letzte Resultat ergibt, beruht, wie oben erwähnt, auf die Idee der Verwendung des divergenten EULER'schen Produktes für den Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$; sie ist prinzipiell nur zur Abschätzung der Anzahl der Nullstellen — und nicht wie die frühere Methode auch zur Abschätzung der Anzahl der a-Stellen — verwendbar.

In der zweiten der oben zitierten Abhandlungen, welche von Herrn COURANT und mir herrührt, untersuchen wir die Werte, welche $\zeta(s)$ auf vertikalen im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ gelegenen Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt. Wir beweisen durch eine Generalisation meiner früheren für die Halbebene $\sigma > 1$ ausgearbeiteten arithmetischen Methode den Satz:

Satz I: Es liegen bei jedem festen σ_0 des Intervalles $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$ die Werte, welche $\zeta(s)$ auf der vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0$ annimmt, in der ganzen ζ-Ebene überall dicht.

Dieser Satz, welcher das intrikate Verhalten von $\zeta(s)$ im kritischen Streifen in prägnanter Weise zum Ausdruck bringt, enthält speziell, das $\zeta(s)$ im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ jeden komplexen Wert beliebig nahe kommt; er liefert aber keine bestimmte Aufklärung über die Werte, welche $\zeta(s)$ in diesem Streifen tatsächlich annimmt, d. h. der Satz erlaubt für keinen einzigen Wert zu entscheiden, ob er im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ angenommen wird oder nicht. Über die Frage der Werte von $\zeta(s)$ im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ war es vor einigen Jahren Herrn LANDAU und mir gelungen, unter Annahme der Richtigkeit der RIEMANN'schen Vermutung über die Nullstellen von $\zeta(s)$, *d. h. unter der Annahme* $\zeta(s) \neq 0$ *für* $\sigma > \frac{1}{2}$, das recht bemerkenswerte Resultat zu erschliessen,[1] dass $\zeta(s)$ in jedem vertikalen Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ mit $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$ sämtliche von Null verschiedenen Werte annimmt. Auf sicherem Boden, d. h. ohne Annahme der RIEMANN'schen Hypothese, war aber bis jetzt über den Wertevorrat von $\zeta(s)$ im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ sehr wenig bekannt.

Ich beweise nunmehr in der vorliegenden Abhandlung, von der EULER'schen Produktformel ausgehend und in wesentlicher Anknüpfung an die von Herrn COURANT und mir ausgearbeiteten arithmetischen Methode, dass die obige Aussage über die Werte von $\zeta(s)$, welche von Herrn LANDAU und mir als eine Folgerung der RIEMANN'schen Hypothese gewonnen wurde, unabhängig von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieser Hypothese wahr ist, d. h. ich beweise den Satz:

Satz II: Es sei $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$. *Dann nimmt* $\zeta(s)$ *im Streifen* $\alpha < \sigma < \beta$ *jeden von Null verschiedenen Wert an, sogar unendlich oft.*

Es ist zu beachten, dass während dieser Satz über den Wertevorrat $W_{\alpha,\beta}$ von $\zeta(s)$ im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ unter Annahme der Richtigkeit der RIEMANN'schen Hypothese ein endgültiges Resultat liefert, nämlich: es wird jeden Wert $a \neq 0$ unendlich oft, den Wert 0 dagegen gar nicht angenommen, erlaubt der Satz, wenn keine Hypothese über die Nullstellen hineingezogen wird, nicht den Wertevorrat $W_{\alpha,\beta}$ vollständig zu bestimmen; er besagt nur: $W_{\alpha,\beta}$ enthält gewiss jeden von Null verschiedenen Wert, lässt aber die Frage offen, ob die Menge $W_{\alpha,\beta}$ aus den sämtlichen Werten überhaupt, oder aber aus den sämtlichen Werten mit Ausnahme von Null besteht. Es scheint vorläufig, als ob die Untersuchungsmethode bei der Entscheidung dieser letzten Frage, d. h. bei der Entscheidung des fundamentalen RIEMANN'schen Problems, ob $\zeta(s)$ im Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ tatsächlich Nullstellen besitzt oder nicht, prinzipiell versagt.

Über das Problem der a-Stellen bei von Null verschiedenem a erlaubt aber die Methode der vorliegenden Abhandlung nicht nur den Existenzsatz II auf sicherem Boden zu stellen, sondern auch den folgenden viel weitergehenden Satz zu beweisen:

Satz III: Es sei $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$ *und* $a \neq 0$; *es bezeichne* $M_{a,\alpha,\beta}(T)$ *die Anzahl der a-Stellen von* $\zeta(s)$ *im Rechteck* $\alpha < \sigma < \beta$, $-T < t < T$. *Dann ist*

[1] H. BOHR und E. LANDAU: *Beiträge zur Theorie der* RIEMANN'*schen Zetafunktion* (Math. Annalen, 1913).

$$\liminf_{T=\infty} \frac{M_{a,\alpha,\beta}(T)}{T} > 0,$$

d. h. es gibt eine positive Konstante $k = k(a, \alpha, \beta)$ *derart, dass für alle hinreichend grosse* T

$$M_{a,\alpha,\beta}(T) > k\,T \tag{4}$$

ist.

Durch diesen Satz ist es gelungen, die »wahre Grössenordnung» der Funktion $M_{a,\alpha,\beta}(T)$ festzustellen; denn, wie aus der von Herrn LANDAU und mir bewiesenen Relation (2) unmittelbar folgt, gibt es andererseits eine positive Konstante $K = K(a, \alpha, \beta)$ derart, *dass für alle hinreichend grosse* T

$$M_{a,\alpha,\beta}(T) < K\,T$$

ist.

Es bezeichne, stets für $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$, $M_{0,\alpha,\beta}(T)$ die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ im Rechteck $\alpha < \sigma < \beta$, $-T < t < T$; dann ist nach der Relation (3)

$$\lim_{T=\infty} \frac{M_{0,\alpha,\beta}(T)}{T} = 0.$$

Unter Berücksichtigung dieser letzten Gleichung ergibt sich aus (4) das sehr bemerkenswerte Resultat: *Es ist bei jedem* $a \neq 0$

$$\lim_{T=\infty} \frac{M_{0,\alpha,\beta}(T)}{M_{a,\alpha,\beta}(T)} = 0;$$

d. h. ungenau ausgedrückt: die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$, wenn es überhaupt solche gibt, ist jedenfalls von kleinerer Grössenordnung als die Anzahl der a-Stellen bei beliebig gegebenem $a \neq 0$. Es ist hiermit zum ersten Male festgestellt, *dass für die Werte von* $\zeta(s)$ *im Streifen* $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ *die Zahl Null, mag sie in der Wertmenge enthalten sein oder nicht, eine allen übrigen Zahlen gegenüber besondere Rolle spielt.*

Bei den folgenden Untersuchungen werde ich mich nicht auf den Beweis der soeben erwähnten Resultate über $\zeta(s)$ beschränken, sondern dieselbe sogleich in einer etwas allgemeineren Form beweisen, die ich erhalte, indem ich einerseits die Resultate für den Halbstreifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, $t > 0$ statt für den ganzen Streifen $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ ableite, und andererseits — was wesentlicher ist — die Funktion $\log \zeta(s)$

statt $\zeta(s)$ selbst studiere. Bevor ich die somit erhaltenen verallgemeinerten Resultate kurz angebe, ist zunächst zu erklären, was dabei unter $\log \zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ zu verstehen ist: Es bezeichne, wie durchweg im folgenden, G dasjenige einfach zusammenhängende Gebiet, das aus der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ entsteht, wenn erstens das reelle im Punkte $s = 1$ ausmündenden Intervall $\frac{1}{2} < s \leqq 1$ und zweitens, bei jeder eventuellen der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ angehörigen Nullstelle $\sigma_0 + it_0$ von $\zeta(s)$, die horizontale Strecke $\frac{1}{2} < \sigma \leqq \sigma_0$, $t = t_0$ entfernt wird. In diesem Gebiete G zerfällt der Logarithmus von $\zeta(s)$ in unendlich vielen eindeutigen regulären Zweigen; unter $\log \zeta(s)$ soll derjenige in G reguläre Zweig verstanden werden, welcher für reelle $s > 1$ reell ist. Für die somit in G definierte Funktion $\log \zeta(s)$ werde ich alsdann die beiden folgenden Sätze A und B beweisen, von denen der erste eine Generalisation des von Herrn Courant und mir bewiesenen Satzes I bildet, während der zweite den Satz III und somit à fortiori den Satz II als speziellen Fall enthält.

Satz A: *Es sei σ_0 eine feste Zahl des Intervalles $\frac{1}{2} < \sigma \leqq 1$; dann liegen die Werte, welche $\log \zeta(s)$ in denjenigen Punkten der Halbgeraden $\sigma = \sigma_0$, $t > 0$ annimmt, die dem Gebiete G angehören, in der ganzen Ebene überall dicht.*

Satz B: *Es sei $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$ und a eine beliebige komplexe Zahl* (Null nicht ausgeschlossen). *Es bezeichne $L_{a,\alpha,\beta}(T)$ die Anzahl der Wurzeln von $\log \zeta(s) = a$ in demjenigen Teil des Gebietes G, der dem Rechtecke $\alpha < \sigma < \beta$, $0 < t < T$ angehört. Dann ist*

$$\liminf_{T=\infty} \frac{L_{a,\alpha,\beta}(T)}{T} > 0,$$

d. h. es gibt eine positive Konstante $C = C(a, \alpha, \beta)$ derart, dass für alle hinreichend grosse T

$$L_{a,\alpha,\beta}(T) > CT$$

ist.

In diesem letzten Satze ist speziell enthalten, *dass $\log \zeta(s)$ in jedem Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ mit $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$ jeden komplexen Wert unendlich oft annimmt.* Dies Resultat ist, selbst unter Annahme der Richtigkeit der Riemann'schen Hypothese ein neues; in der Tat, die funktionentheoretische Methode von Herrn Landau und mir, durch welche wir unter Benutzung der Riemann'schen Hypothese bewiesen haben, dass $\zeta(s)$ im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ jeden Wert ausser Null annimmt, ist unfähig, das schärfere Resultat: es nimmt $\log \zeta(s)$ im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ jeden Wert an, zu ergeben.

Die obige im Gebiete G definierte reguläre Funktion $\log \zeta(s)$ ist, wie aus der EULER'schen Produktformel unmittelbar folgt, in der Halbebene $\sigma > 1$ durch die Reihe

$$\log \zeta(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 - p_n^{-s})$$

dargestellt, wo für einen x mit positivem reellem Teil $\operatorname{Log} x$ stets den Hauptwert bezeichnen soll, d. h. denjenigen Wert, dessen imaginäre Teil zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegen ist. Ich schreibe nun, bei festem $N \geqq 1$, nicht nur in der Halbebene $\sigma > 1$, sondern im ganzen Gebiete G

$$\log \zeta(s) = -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}(1 - p_n^{-s}) + R_N(s);$$

hierbei bedeutet also $R_N(s)$ diejenige in G reguläre Funktion, welche in der Halbebene $\sigma > 1$ durch die Reihe

$$R_N(s) = -\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 - p_n^{-s})$$

definiert ist.

Die folgende Untersuchung von $\log \zeta(s)$ zerfällt nunmehr in drei Paragraphen.

In § 1 wird das Verhalten des »Restes» $R_N(s)$ mit Hilfe der SCHNEE'schen Mittelwertsatzes untersucht; es wird hierbei nicht etwa der Rest $R_N(s)$ bei fest gehaltenem s für unendlich wachsendes N abgeschätzt, sondern es wird gezeigt (vergl. die obigen Bemerkungen über den »Rest» des EULER'schen Produktes), dass bei festem sehr grossem N der Rest $R_N(s)$ in den meisten Gebieten des unendlichen Streifens $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ sehr klein ist.

In § 2 bezw. § 3 wird zunächst mit Hinblick auf den Beweis des Satzes A bezw. B, der »Anfang»

$$F_N(s) = -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}(1 - p_n^{-s})$$

durch die arithmetische Methode, in der generalisierten, sich auf die Idee der geometrischen Wahrscheinlichkeit stützenden Form untersucht. Schliesslich werden, in denselben Paragraphen 2 und 3, unter Heranziehung des Resultates von § 1, die Beweise der beiden Hauptsätze A und B vollendet.

---

§ 1.

Abschätzung des Restes.

Der Ausgangspunkt der Untersuchungen dieses Paragraphen bildet der folgende Satz, welcher einen Spezialfall des sogenannten SCHNEE'schen Mittelwertsatzes in der Theorie der DIRICHLET'schen Reihen, in einer von Herrn LANDAU und mir unerheblich verallgemeinerten Form darstellt.[1]

Hilfssatz 1. Es sei die Dirichletsche Reihe $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ *für* $\sigma>0$ *konvergent,* $\frac{1}{2}<\sigma_1<1$ *und* $\sigma_2>1$. *Dann ist gleichmässig für* $\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$

$$\lim_{T=\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(\sigma+it)|^2\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}.$$

Aus diesem Satze folgt sofort das

Corollar: Es ist

$$\lim_{T=\infty}\frac{1}{2T}\iint\limits_{\substack{\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2\\ -T\leqq t\leqq T}}|f(\sigma+it)|^2\,d\sigma\,dt=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma}}\,d\sigma\leqq(\sigma_2-\sigma_1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma_1}}. \tag{5}$$

Durch Anwendung dieser letzten Ungleichung auf die Zetafunktion werde ich zunächst den folgenden Satz beweisen, welcher implizit schon in der in der Einleitung zitierten C. R.-Note von Herrn LANDAU und mir enthalten ist, und dessen Beweis ich dieser Note entnehme.

Hilfssatz 2. Es sei $\frac{1}{2}<\sigma_1<\frac{3}{4}$, $\sigma_2>2$ *und* $\varepsilon>0$. *Dann gibt es dazu eine Zahl* $N_0=N_0(\sigma_1,\sigma_2,\varepsilon)$ *mit folgender Eigenschaft: Bei jedem* $N\geqq N_0$ *gilt für alle hinreichend grosse* T, *d. h. für* $T\geqq T_0=T_0(N)$ *die Ungleichung*

---

[1] H. BOHR und E. LANDAU: *Ein Satz über Dirichletsche Reihen ... l. c.*

$$\int\int_{\substack{\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \\ 1 \leqq t \leqq T}} |\zeta_N(s) - 1|^2 d\sigma dt < \varepsilon T,$$

wobei $\zeta_N(s)$ *die Funktion*

$$\zeta_N(s) = \zeta(s) \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-s})$$

bezeichnet.

Beweis: Es ist bei festem N die Funktion $\zeta_N(s)$ eine in der ganzen Ebene bis auf den einzigen Pol $s = 1$ $\left(\text{mit dem Residuum } \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-1})\right)$ reguläre Funktion, welche für $\sigma > 1$ durch das Restprodukt

$$\zeta_N(s) = \zeta(s) \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-s}) = \prod_{n=N+1}^{\infty} (1 - p_n^{-s})^{-1}$$

dargestellt wird. Um den SCHNEE'schen Mittelwertsatz zur Abschätzung von $\zeta_N(s) - 1$ zu verwenden, betrachte ich zunächst, statt der Funktion $\zeta_N(s) - 1$ selbst, die ganze transzendente Funktion $(\zeta_N(s) - 1)(1 - 2^{1-s})$, welche für $\sigma > 0$ durch eine konvergente DIRICHLET'sche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ darstellbar ist. (Dies folgt z. B. unmittelbar daraus, dass die Funktion $(\zeta_N(s) - 1)(1 - 2^{1-s})$ gleich

$$\left\{\zeta(s) \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-s}) - 1\right\} (1 - 2^{1-s}) = \{\zeta(s)(1 - 2^{1-s})\} \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-s}) - (1 - 2^{1-s})$$

ist, also bis auf zwei Gliedern als das Produkt einer für $\sigma > 0$ konvergenten DIRICHLET'schen Reihe $\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} \cdots$ und einer aus nur endlich vielen Gliedern bestehenden DIRICHLET'schen Reihe erscheint.) Aus der Definition von $\zeta_N(s)$ folgt sofort, dass die Koeffizienten a_n der Reihe $(\zeta_N(s) - 1)(1 - 2^{1-s}) = \sum^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ den Bedingungen

$$\begin{cases} a_n = 0 & \text{für } n < p_{N+1} \\ |a_n| \leqq 2 & \text{für } n \geqq p_{N+1} \end{cases}$$

genügen. Angewandt auf die Funktion $(\zeta_N(s) - 1)(1 - 2^{1-s})$ ergibt die Ungleichung (5) die Relation

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\iint\limits_{\substack{\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2\\ -T\leqq t\leqq T}}|(\zeta_N(s)-1)(1-2^{1-s})|^2\,d\sigma\,dt\leqq(\sigma_2-\sigma_1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n^{2\sigma_1}}\leqq(\sigma_2-\sigma_1)\sum_{n=p_{N+1}}^{\infty}\frac{4}{n^{2\sigma_1}}=\varepsilon_N,$$

wo (bei festen σ_1,σ_2) $\varepsilon_N\to 0$ für $N\to\infty$.

Es ist also für alle hinreichend grosse T, d. h. für $T\geqq T_0=T_0(N)(>1)$

$$\iint\limits_{\substack{\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2\\ -T\leqq t\leqq T}}|(\zeta_N(s)-1)(1-2^{1-s})|^2\,d\sigma\,dt<3\,\varepsilon_N T.$$

Nunmehr soll unter dem Integralzeichen der hineingebrachte Hilfsfaktor $(1-2^{1-s})$ wieder weggeschafft werden. Zu diesem Zwecke konstruiere ich zunächst die Kreisen Γ_ν $(\nu=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ mit dem Radius $\frac{1}{9}$ um die Nullstellen von $1-2^{1-s}$, d. h. um die Zahlen

$$z_\nu=1+\frac{2\pi\nu i}{\operatorname{Log}2}\qquad(\nu=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

In der ganzen Ebene ausserhalb dieser Kreisen ist offenbar

$$|1-2^{1-s}|>c,$$

wo c eine positive absolute Konstante bedeutet. Hieraus folgt für $T\geqq T_0$, wenn nur über dasjenige Gebiet $H(T)$ integriert wird, welches aus dem ausserhalb der Kreisen Γ_ν gelegenen Teil des Rechteckes $\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$, $-T\leqq t\leqq T$ besteht, die Ungleichung

$$\iint\limits_{H(T)}|\zeta_N(s)-1|^2\,d\sigma\,dt<\frac{3\varepsilon_N}{c^2}T. \tag{6}$$

Es handelt sich jetz darum, die kleinen ausgeschnittenen Kreise Γ_ν (mit $\nu\neq 0$) dem Integrationsgebiet wieder hinzuzufügen. Um die hierzu nötige Abschätzung des Doppelintegrals über den Kreis Γ_ν vorzunehmen, kann man sich des folgenden kleinen Kunstgriffes bedienen. Da $\zeta_N(s)$ in den Kreisen $|s-z_\nu|<1$ $(\nu\neq 0)$ regulär ist, gilt bei jedem $\nu\neq 0$ die Ungleichung

$$\iint\limits_{|s-z_\nu|\leqq\frac{1}{9}}|\zeta_N(s)-1|^2\,d\sigma\,dt<\iint\limits_{\frac{1}{9}\leqq|s-z_\nu|\leqq\frac{2}{9}}|\zeta_N(s)-1|^2\,d\sigma\,dt.$$

(Denn wenn die nicht konstante Funktion $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ für $|s| < R$ regulär ist, gilt bekanntlich für $0 < r < R$ die Relation

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},$$

also für $0 < r_1 < r_2 < R$ die Ungleichung

$$\int_0^{2\pi} |f(r_1 e^{i\theta})|^2 \, d\theta < \int_0^{2\pi} |f(r_2 e^{i\theta})|^2 \, d\theta.)$$

Durch Summation Σ' über diejenigen $\nu \neq 0$, für welche der Kreis Γ_ν dem Rechteck $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $-T \leqq t \leqq T$ ganz oder teilweise angehört, folgt für $T \geqq T_0$

$$(7) \qquad \sum{}' \iint\limits_{|s - z_\nu| \leqq \frac{1}{9}} |\zeta_N(s) - 1|^2 \, d\sigma \, dt < \sum{}' \iint\limits_{\frac{1}{9} \leqq |s - z_\nu| \leqq \frac{2}{9}} |\zeta_N(s) - 1|^2 \, d\sigma \, dt$$

$$< \iint\limits_{H(T+1)} |\zeta_N(s) - 1|^2 \, d\sigma \, dt < \frac{3\varepsilon_N}{c^2}(T + 1).$$

Es ergibt sich somit für $T \geqq T_0$ durch Addition der beiden Ungleichungen (6) und (7), dass das Doppelintegral von $|\zeta_N(s) - 1|^2$ erstreckt über das ganze Rechteck $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $-T \leqq t \leqq T$ nur mit Ausnahme des kleinen Kreises $|s - 1| \leqq \frac{1}{9}$ um den Pol $s = 1$ kleiner ist als

$$\frac{3\varepsilon_N}{c^2} T + \frac{3\varepsilon_N}{c^2}(T + 1) = \frac{3\varepsilon_N}{c^2}(2T + 1) < \frac{9\varepsilon_N}{c^2} T;$$

also gilt à fortiori, für $T \geqq T_0$, die Ungleichung

$$\iint\limits_{\substack{\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \\ 1 \leqq t \leqq T}} |\zeta_N(s) - 1|^2 \, d\sigma \, dt < \frac{9\varepsilon_N}{c^2} T.$$

Ich wähle nun, wegen $\varepsilon_N \to 0$, die Zahl N_0 so gross, dass für $N \geqq N_0$ die Ungleichung $\frac{9\varepsilon_N}{c^2} < \varepsilon$ besteht. Dann ist für dieses N_0 (nebst den obigen Zahlen $T_0(N)$ für $N \geqq N_0$) die Bedingungen des Hilfssatzes offenbar erfüllt.

Es sei wie oben $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \frac{3}{4}$, $\sigma_2 > 2$ feste Zahlen, und es sei $N \geqq 1$ eine beliebige ganze Zahl; dann definiere ich für $\tau \geqq 2$ eine stetige Funktion $\varphi_N(\tau)$ der reellen Variablen τ durch die Gleichung

$$\varphi_N(\tau) = \iint\limits_{\substack{\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \\ \tau - 1 \leqq t \leqq \tau + 1}} |\zeta_N(s) - 1|^2 \, d\sigma \, dt.$$

Wegen der für $T > 2$ giltigen Ungleichung

$$\int_2^T \varphi_N(\tau) \, d\tau < 2 \iint\limits_{\substack{\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \\ 1 \leqq t \leqq T + 1}} |\zeta_N(s) - 1|^2 \, d\sigma \, dt$$

folgt sofort aus dem Hilfssatze 2 das

Corollar: Es sei $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \frac{3}{4}$, $\sigma_2 > 2$ *und* $\varepsilon > 0$. *Dann gibt es dazu eine Zahl* $N_1 = N_1(\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon)$ *mit folgender Eigenschaft: Bei jedem* $N \geqq N_1$ *ist für alle hinreichend grosse* T, *d. h. für* $T \geqq T_1 = T_1(N)$

$$\int_2^T \varphi_N(\tau) \, d\tau < \varepsilon T. \tag{8}$$

Für das folgende wird es von Bedeutung sein nicht nur das Integral von $\varphi_N(\tau)$ sondern auch die Funktion $\varphi_N(\tau)$ selbst abzuschätzen. Dies geschieht durch den folgenden, aus der obigen Ungleichung (8) fast unmittelbar abzuleitenden Hilfssatz 3, welcher in unpräziser Formulierung aussagt: bei sehr grossen N ist für unendlich wachsendes τ die Funktion $\varphi_N(\tau)$ fast immer sehr klein. In diesem Hilfssatze tritt, obwohl nur in impliziter Form, der Begriff der *Wahrscheinlichkeit* auf, welcher für die ganze Untersuchungsmethode der vorliegenden Abhandlung (sowie schon der mit Herrn Courant gemeinsam verfassten Abhandlung) eine wesentliche Rolle spielt, und dessen Einführung in den Kreis der Betrachtungen es zuerst ermöglicht, bei den Beweisen der Sätze A und B die Untersuchung des »Restes» $R_N(s)$ einerseits und die des »Anfanges» $F_N(s)$ andererseits aneinander zu knüpfen, d. h. diese beiden zunächst getrennten Untersuchungen zu einer gemeinsamen Untersuchung der Funktion $\log \zeta(s) = F_N(s) + R_N(s)$ zu vereinigen.

Hilfssatz 3: Es habe bei festen $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \frac{3}{4}$, $\sigma_2 > 2$ *und einem* $N \geqq 1$ *die Funktion* $\varphi_N(\tau)$ *die obige Bedeutung, d. h. es sei für* $\tau \geqq 2$

$$\varphi_N(\tau) = \iint\limits_{\substack{\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \\ \tau - 1 \leqq t \leqq \tau + 1}} |\zeta_N(s) - 1|^2 \, d\sigma \, dt$$

gesetzt. Es seien ferner $0 < \varepsilon_1 < 1$ *und* $0 < \varepsilon_2 < 1$ *beliebig gegeben. Dann gibt es ein* $N = N'(\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *derart, dass bei jedem* $N \geqq N'$ *für alle hinreichend grosse* T, *d. h. für* $T \geqq T' = T'(N)$ *die Strecke* $2 \leqq \tau \leqq T$ *eine endliche Anzahl von Intervallen enthält, von denen keine zwei einen inneren Punkt gemeinsam haben, und welche die beiden folgenden Eigenschaften besitzen: Es ist die Summe der Längen der Intervallen* $> (1 - \varepsilon_2) T$ *und für jeden inneren Punkt* τ *einer dieser Intervallen gilt die Ungleichung*

$$\varphi_N(\tau) < \varepsilon_1 .$$

Beweis: Ich bestimme nach dem obigen Corollar ein N' derart, dass bei jedem $N \geqq N'$ für $T \geqq T' = T'(N)$ die Ungleichung

$$\int_2^T \varphi_N(\tau)\, d\tau < \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4}(T - 2) \tag{9}$$

besteht; hierbei soll ausserdem, für alle $N \geqq N'$, die Zahl $T' = T'(N)$ so gross gewählt sein, dass sie der Ungleichung $\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{2}\right)(T' - 2) > (1 - \varepsilon_2) T'$ genügt. Dieses N' und diese Zahlen $T'(N)$ $(N \geqq N')$ werden alsdann die Bedingungen des Hilfssatzes erfüllen. In der Tat, es sei $N \geqq N'$, $T \geqq T'(N)$ und, auf Grund der Definition des bestimmten Integrals, die Zahlen $2 = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_m < x_{m+1} = T$ so gewählt, dass

$$\sum_{\nu=0}^{m} (x_{\nu+1} - x_\nu) \underset{x_\nu \leqq \tau \leqq x_{\nu+1}}{\operatorname{Max}} \varphi_N(\tau) - \int_2^T \varphi_N(\tau) d\tau < \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4}(T - 2)$$

ist, also wegen (9)

$$\sum_{\nu=0}^{m} (x_{\nu+1} - x_\nu) \underset{x_\nu \leqq \tau \leqq x_{\nu+1}}{\operatorname{Max}} \varphi_N(\tau) < \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2}(T - 2)$$

ist. Da auf der ganzen Strecke $2 \leqq \tau \leqq T$ die Funktion $\varphi_N(\tau)$ positiv ist, muss hierbei die Summe der Längen derjenigen Intervallen $(x_\nu, x_{\nu+1})$, für welche

$\underset{x_\nu \leq \tau \leq x_{\nu+1}}{\text{Max}} \varphi_N(\tau) \geq \varepsilon_1$ ist, kleiner sein als $\frac{\varepsilon_2}{2}(T-2)$. Es erfüllt somit die Menge aller übrigen Intervallen $(x_\nu, x_{\nu+1})$ die Bedingungen des Satzes; denn sie haben eine Gesamtlänge $> \left(1-\frac{\varepsilon_2}{2}\right)(T-2) > (1-\varepsilon_2)T$, und es gilt für jedes in diesen Intervallen gelegene τ die Ungleichung

$$\varphi_N(\tau) < \varepsilon_1.$$

Damit ist der Hilfssatz 3 bewiesen.

Um späterhin (d. h. beim Beweise des Hilfssatzes 5) von der gefundenen Abschätzung des Integrals $\varphi_N(\tau) = \int\int |\zeta_N(s) - 1|^2 d\sigma dt$ zu einer Abschätzung der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion $|\zeta_N(s) - 1|$ selbst zu gelangen, bediene ich mich einer einfachen funktionentheoretischen Bemerkung, die ich aber wegen eines späteren Gebrauchs (in § 3) als besonderen Hilfssatz formuliere.

Hilfssatz 4: Es seien in der s-Ebene C und C' zwei geschlossene Kurven (bei den Anwendungen stets Kreise oder Rechtecke), *von denen C ganz innerhalb C' gelegen ist. Es sei ferner $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann gibt es eine, nur von C, C' und ε abhängige Zahl $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Jede innerhalb C' reguläre Funktion $f(s)$, welche die Bedingung*

$$\int\int_{C'} |f(s)|^2 d\sigma dt < \delta$$

erfüllt, genügt für alle s innerhalb oder auf der Kurve C der Ungleichung

$$|f(s)| < \varepsilon.$$

Bemerkung: Wenn bei festem $\varepsilon > 0$ die Existenz eines solchen $\delta = \delta(C, C')$ nachgewiesen ist, wird dies δ offenbar von einer Translation der Figur C, C' nicht abhängen.

Beweis: Es sei $2\varrho > 0$ die kürzeste Entfernung eines Punktes auf C zu einem Punkte auf C', also für jedes innerhalb oder auf C gelegenen s_1 der Kreis $|s - s_1| \leq \varrho$ ganz im Inneren von C' enthalten; dann behaupte ich: die Zahl $\delta = \pi \varrho^2 \varepsilon^2$ hat die verlangte Eigenschaft. In der Tat, es sei $f(s)$ regulär innerhalb C', die Ungleichung

$$\int\int_{C'} |f(s)|^2 d\sigma dt < \delta$$

erfüllt, und s_1 ein beliebiger Punkt innerhalb oder auf C. Dann folgt, nach einer schon oben verwendeten Schlussweise

$$|f(s_1)|^2 \leqq \frac{1}{\pi\varrho^2}\int\int\limits_{|s-s_1|\leqq\rho}|f(s)|^2 d\sigma dt \leqq \frac{1}{\pi\varrho^2}\int\int\limits_{C'}|f(s)|^2 d\sigma dt < \frac{1}{\pi\varrho^2}\cdot\delta = \varepsilon^2$$

also

$$|f(s_1)| < \varepsilon \qquad \text{q. e. d.}$$

Nach diesen Vorbereitungen gehe ich nunmehr zur Abschätzung des Restgliedes in der Formel für $\log\zeta(s)$ über, d. h. zur Abschätzung der im Gebiete G (vergl. S. 73) regulären Funktion $R_N(s)$, welche für $\sigma > 1$ durch die Reihe

$$(10) \qquad R_N(s) = -\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 - p_n^{-s})$$

dargestellt wird. Ich beweise diesbezüglich den folgenden, für den späteren Gebrauch angepassten Satz, welcher das Ziel dieses Paragraphen bildet.

Hilfssatz 5: Es sei $\frac{1}{2} < \sigma' < 1$, $0 < \varepsilon' < 1$, $0 < \varepsilon'' < 1$. *Dann gibt es eine Zahl* $N^* = N^*(\sigma', \varepsilon', \varepsilon'')$ *mit folgender Eigenschaft: Bei jedem* $N \geqq N^*$ *enthält für alle hinreichend grosse* T, *d. h. für* $T \geqq T^* = T^*(N)$ *die Strecke* $2 \leqq \tau \leqq T$ *eine endliche Anzahl Intervallen, von denen keine zwei einen inneren Punkt gemeinsam haben, deren Gesamtlänge* $> (1 - \varepsilon'')T$ *ist, und so, dass bei jedem im Inneren einer dieser Intervallen gelegenen* τ *erstens der horizontale Halbstreifen* $\sigma \geqq \sigma'$, $\tau - \frac{1}{2} \leqq t \leqq \tau + \frac{1}{2}$ *ganz dem Gebiete* G *angehört, und zweitens für alle in diesem Halbstreifen gelegenen* s *die Ungleichung*

$$|R_N(s)| < \varepsilon'$$

besteht.

Beweis: Aus (10) folgt sofort, dass gleichmässig für alle $N \geqq 1$ und alle $-\infty < t < \infty$

$$\lim_{\sigma = +\infty} R_N(s) = 0$$

ist; es sei auf Grund dieser Bemerkung $\sigma'' > 1$ so gewählt, dass bei jedem $N \geqq 1$ in der ganzen Halbebene $\sigma \geqq \sigma''$

$$|R_N(s)| < \varepsilon'$$

ist. Es ist hernach der Nachweis (für ein $N \geqq 1$ und ein $\tau \geqq 2$), dass der Halbstreifen $\sigma \geqq \sigma'$, $\tau - \frac{1}{2} \leqq t \leqq \tau + \frac{1}{2}$ dem Gebiete G angehört, und dass in diesem Halbstreifen $|R_N(s)| < \varepsilon'$ ist, damit gleichbedeutend zu zeigen: Es gehört das Rechteck R: $\left(\sigma' \leq \sigma \leq \sigma'', \tau - \frac{1}{2} \leq t \leq \tau + \frac{1}{2}\right)$ dem Gebiete G an, und es besteht im ganzen Rechtecke R die Ungleichung $|R_N(s)| < \varepsilon'$.

Ich werde nunmehr zeigen, dass diese beiden letzten Bedingungen für das Rechteck R erfüllt sind, wenn im ganzen Rechtecke R (inkl. Rand) die Ungleichung

$$|\zeta_N(s) - 1| < \frac{\varepsilon'}{2} \left(< \frac{1}{2}\right) \tag{11}$$

besteht, wobei $\zeta_N(s)$ die obige Funktion $\zeta_N(s) = \zeta(s) \prod_{n=1}^{N} (1 - p_n^{-s})$ bedeutet. In der Tat, aus (11) folgt zunächst, dass $\zeta_N(s) \neq 0$, d. h. $\zeta(s) \neq 0$, im Rechtecke R, also dass das Rechteck R dem Gebiete G angehört. Ferner ergibt sich aus (11), als eine leicht zu ziehende Folgerung, dass im Rechtecke R der imaginäre Teil von $R_N(s)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegen ist, also dass in R die Relation

$$R_N(s) = \operatorname{Log} \zeta_N(s)$$

besteht, wo $\operatorname{Log} x$ wie immer den Hauptwert bedeutet; denn auf der rechten Seite des Rechteckes (wo $\sigma = \sigma''$ ist) gilt, nach der Bestimmung von σ'', die Ungleichung $|R_N(s)| < \varepsilon' < 1$; also ist dort gewiss der imaginäre Teil von $R_N(s)$ absolut genommen $< \frac{\pi}{2}$, und da, nach (11), die Funktion $\zeta_N(s) = e^{R_N(s)}$ im ganzen Rechteck R einen positiven reellen Teil besitzt, muss der imaginäre Teil der in R regulären Funktion $R_N(s)$ im ganzen Rechtecke R zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ bleiben. Aus der somit in R bewiesenen Relation

$$R_N(s) = \operatorname{Log} \zeta_N(s) = \operatorname{Log}(1 + (\zeta_N(s) - 1))$$

folgt aber sofort, durch nochmaligen Gebrauch von (11), die Ungleichung

$$|R_N(s)| < 2\,|\zeta_N(s) - 1| < \varepsilon'.$$

Es darf folglich beim Beweise des Hilfssatzes (5) die beiden an einem Intervallpunkt $\tau > 2$ gestellten Bedingungen durch die eine Forderung ersetzt werden: Es soll $\zeta_N(s)$ im Rechtecke $\sigma' \leq \sigma \leq \sigma''$, $\tau - \frac{1}{2} \leq t \leq \tau + \frac{1}{2}$ der Ungleichung

$$|\zeta_N(s) - 1| < \frac{\varepsilon'}{2}$$

genügen.

Es sei nunmehr $\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma' + \frac{1}{2}\right)$, $\sigma_2 = 2\sigma''$ gesetzt, also $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \frac{3}{4}$, $\sigma_2 > 2$ und das obige Rechteck $R: \left(\sigma' \leqq \sigma \leqq \sigma'', \ \tau - \frac{1}{2} \leqq t \leqq \tau + \frac{1}{2}\right)$ ganz im Inneren des Rechteckes $R': (\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2, \ \tau - 1 \leqq t \leqq \tau + 1)$ enthalten. Da, für $\tau \geqq 2$, die Funktion $\zeta_N(s) - 1$ im Rechtecke R' regulär ist, so ergibt der Hilfssatz 4 die Existenz eines $\delta = \delta(\varepsilon', R, R') = \delta(\varepsilon', \sigma', \sigma'')$ mit folgender Eigenschaft: „Wenn

$$\iint\limits_{R'} |\zeta_N(s) - 1|^2 \, d\sigma \, dt < \delta$$

ist, so gilt im ganzen Rechtecke R (inkl. Rand) die Ungleichung

$$|\zeta_N(s) - 1| < \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Es ist somit der Beweis des Hilfssatzes 5 darauf zurückgeführt zu zeigen: Bei hinreichend grossen N (d. h. für $N \geqq N^*$) und für alle hinreichend grosse T (d. h. für $T \geqq T^*(N)$) liegt auf der Strecke $2 \leqq \tau \leqq T$ eine endliche Anzahl Intervallen, von denen keine zwei einen gemeinsamen inneren Punkt besitzen, deren Gesamtlänge $> (1 - \varepsilon'')T$ ist und deren innere Punkte τ die Bedingung

$$\varphi_N(\tau) = \iint\limits_{\substack{\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 \\ \tau - 1 \leqq t \leqq \tau + 1}} |\zeta_N(s) - 1|^2 \, d\sigma \, dt < \delta$$

erfüllen. Die Existenz eines solchen N^* nebst Zahlen $T^* = T^*(N)$ $(N \geqq N^*)$ ist aber gerade, was im Hilfssatze 3 bewiesen wurde.

Der Hilfssatz 5 wird erst in § 3 beim Beweise des Satzes B in vollem Umfange verwendet. Für den Beweis des Satzes A in § 2, welcher das Verhalten von $\log \zeta(s)$ auf einer festen Geraden $\sigma = \sigma_0$ behandelt, wird das folgende Corollar genügen.

Corollar: Es sei σ_0 *eine feste Zahl im Intervalle* $\frac{1}{2} < \sigma \leqq 1$ *und* $0 < \varepsilon' < 1$, $0 < \varepsilon'' < 1$. *Dann gibt es eine Zahl* N^* *mit folgender Eigenschaft: Bei jedem* $N \geqq N^*$ *enthält für alle hinreichend grosse* T, *d. h. für* $T \geqq T^* = T^*(N)$, *die Strecke* $2 \leqq \tau \leqq T$ *eine endliche Anzahl von Intervallen, von denen keine zwei einen inneren Punkt gemeinsam haben, deren Gesamtlänge* $> (1 - \varepsilon'')\,T$ *ist und so dass bei jedem im Inneren einer dieser Intervallen gelegenen* τ *der Punkt* $\sigma_0 + i\tau$ *dem Gebiete* G *angehört und die Ungleichung*

$$|R_N(\sigma_0 + i\tau)| < \varepsilon'$$

befriedigt.

§ 2.

Beweis des Satzes A.

Im vorliegenden Paragraph wird das Verhalten von log $\zeta(s)$ auf einer vertikalen Geraden $\sigma = \sigma_0$ untersucht, wobei σ_0, wie durchweg im ganzen Paragraphen, eine beliebige, fest gewählte Zahl des Intervalles $\frac{1}{2} < \sigma \leqq 1$ bezeichnet.

Ich studiere zunächst mittels der arithmetischen Methode den »Anfang« von log $\zeta(\sigma_0 + it)$

$$F_N(\sigma_0 + it) = -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 - p_n^{-(\sigma_0 + it)}\right)$$

d. h., wenn zur Abkürzung

$$\begin{cases} r_n = p_n^{-\sigma_0} \\ \lambda_n = -\dfrac{\operatorname{Log} p_n}{2\pi} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

gesetzt wird, die Funktion

$$F_N(\sigma_0 + it) = -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 - r_n e^{2\pi i(t\lambda_n)}\right). \tag{12}$$

Hierbei ist, wie ich für die folgenden Anwendungen sogleich hervorhebe, die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n$$

divergent, die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2$$

dagegen konvergent.

Den Ausgangspunkt der folgenden arithmetischen Untersuchung des Anfanges $F_N(\sigma_0 + it)$ bildet die Theorie der Diophantischen Approximationen, vor allem der folgende von Kronecker herrührende Satz:

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_N$ linear unabhängige Zahlen, d. h. es bestehe keine Relation $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_N\lambda_N = 0$ mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden c_n; es seien ferner $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_N$ beliebige reelle Zahlen. Dann gibt es zu jedem positiven ε ein positives t und dazu gehörige ganze Zahlen $g_1, g_2, \cdots g_N$, so dass die N Ungleichungen

$$|t\lambda_n - \varphi_n - g_n| < \varepsilon \quad (n = 1, 2, \cdots N)$$

sämtlich erfüllt sind.

Geometrisch sagt dieser Satz aus, dass im N-dimensionalen Einheitswürfel Q die Menge A aller Punkte P_t $(0 < t < \infty)$, die aus den Punkten $(t\lambda_1, t\lambda_2, \cdots t\lambda_N)$ durch Reduktion der Koordinaten modulo 1 entstehen, *überall dicht liegt.*

Der KRONECKER'sche Satz lässt sich dahin verallgemeinern — und diese Verallgemeinerung, deren prinzipielle Bedeutung für das Studium der Zetafunktion zum ersten Mal in der oben zitierten, mit Herrn COURANT gemeinsam verfassten Abhandlung erkannt ist, hat auch für die vorliegende Abhandlung eine ausschlaggebende Bedeutung — dass die Punktmenge A aller Punkte P_t im Einheitswürfel Q nicht nur überall dicht liegt, sondern auch, dass sie dort »*überall gleich dicht*» liegt; d. h. es gilt der folgende

Hilfssatz 6:[1] *Es seien die reelle Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_N$ *linear unabhängig. Es sei im N-dimensionalen Einheitswürfel* Q $(0 \leq y_n < 1)$ $(n = 1, 2, \cdots N)$ *ein parallel den Achsen orientiertes Parallelepipedon* $\Omega : \bar{y}_n < y_n < \bar{y}_n + d_n$ *mit dem Rauminhalt* $d_1 d_2 \cdots d_N$ *gegeben. Es bedeute* $E = E(\Omega, T)$ *die Menge aller Werte* t *im Intervalle* $0 < t < T$, *für die der aus* $(t\lambda_1, t\lambda_2, \cdots t\lambda_N)$ *durch Reduktion der Koordinaten modulo* 1 *entstehende Punkt* P_t *dem Parallelepipedon* Ω *angehört. Dann besteht bei jedem* $T > 0$ *die Menge* E *aus den inneren Punkten einer endlichen Anzahl von Intervallen. Bezeichnet* $L(T)$ *die Summe der Längen dieser Intervalle, so ist*

$$\lim_{T=\infty} \frac{L(T)}{T} = d_1 d_2 \cdots d_N,$$

d. h. der Quotient $\frac{L(T)}{T}$ *strebt für unendlich wachsendes* T *gegen den Rauminhalt des Parallelepipedon* Ω.

In der vorliegenden, sowie in den früheren arithmetischen Untersuchungen der Zetafunktion wird der KRONECKER'sche Satz auf die Amplituden der Zahlen p_n^{-s} $(n = 1, 2, \cdots N)$, d. h. (wenn durch 2π dividiert wird) auf die in dem Ausdrucke (12) vorkommenden Grössen

[1] Die in diesem Satze enthaltene Gleichmässigkeitseigenschaft der Punktmenge A ist für beliebiges N zum ersten Mal von Herrn H. WEYL in einem Vortrage in der Math. Gesellsch. in Göttingen (Juli 1913) explizit ausgesprochen. Herr WEYL gab dort einen neuen Beweis des KRONECKER'schen Satzes, der gleichzeitig die überall gleichmässige Dichte der Punktmenge A in Evidenz setzte. Die WEYL'sche Beweismethode (veröffentlicht in der Abhandlung: *Über ein Problem aus dem Gebiet der Diophantischen Approximationen*, Göttinger Nachrichten, 1914) hat sich für die Behandlung anderer Probleme in der Theorie der Diophantischen Approximationen von Wichtigkeit gezeigt. Wenn es sich aber nur um den verallgemeinerten KRONECKER'schen Satz des Textes handelt, kann man, wie ich nach dem WEYL'schen Vortrage bemerkt habe, den Beweis mit Hilfe des KRONECKER'schen Satzes selbst leicht erbringen (vergl. BOHR-COURANT, l. c.)

$$t\lambda_n = t\left(-\frac{\operatorname{Log} p_n}{2\pi}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots N)$$

angewendet. Die Möglichkeit dieser Verwendung des KRONECKER'schen Satzes beruht darauf, *dass die Zahlen* Log p_n $(n = 1, 2, \cdots N)$, auf Grund der eindeutigen Zerlegbarkeit einer ganzen positiven Zahl in Primfaktoren *linear unabhängig sind.*

Der KRONECKER'sche Satz ergibt, allgemein gesprochen, dass die obigen Zahlen $t\lambda_n$ $(n = 1, 2, \cdots N)$, obwohl sie ja in Wirklichkeit Funktionen nur des einen Parameters t sind, sich (modulo 1) fast ganz benehmen, als wären sie *von einander unabhängige* Variable.

Betrachten wir daher zunächst, statt der Funktion

$$F_N(\sigma_0 + it) = -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 - r_n e^{2\pi i(t\lambda_n)}\right),$$

die Funktion der N reellen *unabhängigen* Variablen $y_1, y_2, \cdots y_N$

$$S_N(y_1, y_2, \cdots y_N) = -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 - r_n e^{2\pi i y_n}\right).$$

Nach dem Studium dieser Funktion werden wir alsdann mit Hilfe des KRONECKER'schen Satzes auf die Eigenschaften der Funktion $F_N(\sigma_0 + it)$ zurückschliessen können.

Es bezeichne in der komplexen S_N-Ebene Σ_N die Menge aller Werte, welche $S_N(y_1, y_2, \cdots y_N)$ annimmt, wenn die Variablen $y_1, y_2, \cdots y_N$ unabhängig von einander sämtliche reelle Werte, oder was auf dasselbe herauskommt, sämtliche Werte $0 \leqq y_n < 1$ durchlaufen. Hierbei durchläuft $r_n e^{2\pi i y_n}$ einen Kreis mit dem Mittelpunkte Null und dem Radius $r_n < 1$. Wenn aber eine komplexe Zahl x_n einen Kreis $|x_n| = r_n < 1$ durchläuft, so durchläuft $-\operatorname{Log}(1 - x_n)$ eine geschlossene konvexe Kurve Γ_n, die den Nullpunkt im Inneren enthält.[1] Es ist somit Σ_N einfach die Punktmenge, welche durch »Addition» der N konvexen Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots \Gamma_N$ entsteht, d. h. es ist Σ_N die Menge aller Punkte $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_N$, wo γ_n $(n = 1, 2, \cdots N)$

[1] Die einfachste Weise, um die Konvexität dieser Kurve Γ_n einzusehen, darf wohl die folgende sein (vergl. BOHR-COURANT, l. c. pag 264, Note): Es genügt zu zeigen, dass der Winkel, den die Tangente an die Bildkurve $y = -\operatorname{Log}(1 - x)$ mit der Abszissenachse der y-Ebene bildet, sich monoton ändert, wenn x den Kreis $x = re^{i\theta}$ $(r < 1)$ im positiven Sinne durchläuft. Dieser Winkel ist aber gleich der Amplitude von $\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{1-x} re^{i\theta} i = \frac{ix}{1-x}$, und es ist also nur zu zeigen, dass die Amplitude von $\frac{ix}{1-x}$ sich monoton ändert; das aber folgt unmittelbar daraus, dass, wenn x den Kreis $|x| = r$ durchläuft, $\frac{ix}{1-x}$ ebenfalls einen Kreis durchläuft, und zwar einen solchen, der den Nullpunkt im Inneren enthält.

einen beliebigen Punkt auf Γ_n bedeutet. Für eine solche geometrische Addition konvexer Kurven (auf die ich schon bei der Untersuchung von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ geführt wurde) gilt, wie ich an anderem Orte[1] bewiesen habe, der folgende Satz:

Es sei Γ_n $(n = 1, 2, \cdots N)$ eine geschlossene konvexe Kurve, die den Nullpunkt im Inneren enthält, und es bezeichne Σ_N die durch geometrische Addition entstehende Punktmenge $\Sigma_N = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots \Gamma_N$. Dann ist Σ_N ein Gebiet (inkl. Rand), welches entweder von einer einzelnen geschlossenen konvexen Kurve Y begrenzt wird, oder aber von zwei geschlossenen konvexen Kurven Y und I, von denen I ganz im Inneren von Y verläuft.

Es bezeichne ferner E_n bezw. e_n den grössten bezw. kleinsten Abstand vom Nullpunkte zur Kurve Γ_n, und es seien die Kurven so numeriert, dass das von der Kurve Γ_1 begrenzte Areal $\geqq$ das von der Kurve Γ_n $(n = 2, \cdots N)$ begrenzte Areal ist; dann tritt im Falle

$$E_1 \leqq \sum_{n=2}^{N} e_n$$

der erste der beiden obigen Fällen ein, d. h. es wird das Gebiet Σ_N von nur einer konvexen Kurve Y begrenzt, und es ist diese Kurve Y ganz im Kreisringe (inkl. Rand)

$$\sum_{n=1}^{N} e_n \leqq |z| \leqq \sum_{n=1}^{N} E_n$$

gelegen.

Ich habe hier diesen Satz in seiner allgemeinen Form nur zu Orientierung über den Charakter der Punktmenge Σ_N angeführt. Für den Gebrauch der vorliegenden Untersuchung wird der folgende Satz über die Punktmenge Σ_N reichlich genügen, welcher sofort aus dem obigen allgemeinen Satze abgeleitet werden kann.

Hilfssatz 7: Es sei ϱ eine beliebige positive Zahl; dann gibt es ein $M_1 = M_1(\varrho)$ derart, dass bei jedem $M \geqq M_1$ die Menge Σ_M aller Werte $S_M(y_1, y_2, \cdots y_M)$ sämtliche Zahlen z mit $|z| \leqq \varrho$ enthält.

Beweis: Wegen $r_1 > r_2 > r_3 \ldots$ ist für $n \geqq 2$ die Kurve Γ_n ganz innerhalb der Kurve Γ_1 gelegen. Ferner ist

$$E_n = \underset{0 \leqq y_n < 1}{\operatorname{Max}} \left| -\operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i y_n}) \right| = -\operatorname{Log}(1 - r_n),$$

$$e_n = \underset{0 \leqq y_n < 1}{\operatorname{Min}} \left| -\operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i y_n}) \right| = \operatorname{Log}(1 + r_n).$$

[1] H. Bohr, *Om Addition af uendelig mange konvekse Kurver,* Oversigt over det Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger. 1913.

Es ist folglich $\lim\limits_{n=\infty}\frac{e_n}{r_n}=1$, also, wegen der Divergenz von Σr_n, die Reihe Σe_n divergent. Es sei nunmehr M_1 so gross gewählt, dass die beiden Ungleichungen

$$E_1<\sum_{n=2}^{M_1}e_n,\qquad \varrho<\sum_{n=1}^{M_1}e_n$$

erfüllt sind. Dann ist für dieses M_1 die Bedingung des Hilfssatzes offenbar erfüllt; in der Tat bei jedem $M\geqq M_1$ wird, nach dem letzten Teil des obigen Satzes, das Gebiet Σ_M nur von einer einzelnen Kurve begrenzt, welche den ganzen Kreis $|z|\leqq\varrho$ in seinem Innern enthält.

Während dieser letzte Hilfssatz, welcher in unpräziser Formulierung aussagt: mit unendlich wachsendem M breitet das Gebiet Σ_M sich nach und nach über die ganze Ebene aus, offenbar auf die Divergenz der Reihe Σr_n beruht, wird der Beweis des folgenden Hilfssatzes, welcher die Funktion

$$S_{M,N}(y_{M+1},y_{M+2},\cdots y_N)=-\sum_{n=M+1}^{N}\operatorname{Log}(1-r_ne^{2\pi i y_n})$$

bei sehr grossen M und $N>M$ behandelt, im Gegenteil auf die Konvergenz der Reihe Σr_n^2 bauen.

Hilfssatz 8: Es sei $\varepsilon>0$; dann gibt es ein $M'=M'(\varepsilon)$ mit folgender Eigenschaft: Bei jeden $N>M\geqq M'$ gibt es in $N-M$-dimensionalen Einheitswürfel $0\leqq y_n<1$ $(n=M+1, M+2,\cdots N)$ eine endliche Anzahl parallel den Achsen orientierter Würfelchen $\alpha_n<y_n<\alpha_n+d$ $(n=M+1,\cdots N)$ von denen keine zwei einen gemeinsamen inneren Punkt besitzen, deren Gesamtinhalt $>\frac{1}{2}$ ist, und so dass für jeden Punkt $(y_{M+1},\cdots y_N)$ einer dieser Würfelchen die Ungleichung

$$|S_{M,N}(y_{M+1},y_{M+2},\cdots y_N)|=\left|-\sum_{n=M+1}^{N}\operatorname{Log}(1-r_ne^{2\pi i y_n})\right|<\varepsilon$$

besteht.

Beweis: Ich betrachte das über den $N-M$-dimensionalen Einheitswürfel Q erstreckte Integral

$$I_{M,N}=\iint_Q\cdots\int|S_{M,N}(y_{M+1},y_{M+2},\cdots y_N)|^2dy_{M+1}dy_{M+2}\cdots dy_N$$
$$=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1|S_{M,N}(y_{M+1},\cdots y_N)|^2dy_{M+1}\cdots dy_N.$$

Wegen

$$|S_{M,N}(y_{M+1},\cdots y_N)|^2=\left(-\sum_{n=M+1}^{N}\operatorname{Log}\,(1-r_n e^{2\pi i y_n})\right)\left(-\sum_{n=M+1}^{N}\operatorname{Log}\,(1-r_n e^{-2\pi i y_n})\right)=$$

$$=\left(\sum_{n=M+1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_n^m e^{2\pi i m y_n}}{m}\right)\left(\sum_{n=M+1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_n^m e^{-2\pi i m y_n}}{m}\right)$$

folgt in bekannter Weise (durch Ausmultiplizieren und Integrieren)

$$I_{M,N}=\sum_{n=M+1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_n^{2m}}{m^2}<\sum_{n=M+1}^{\infty}r_n^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}\sum_{n=M+1}^{\infty}r_n^2.$$

Es sei M' so gewählt, dass

$$\frac{\pi^2}{6}\sum_{n=M'+1}^{\infty}\frac{1}{r_n^2}<\frac{\varepsilon^2}{2}$$

ist. Dann gilt bei jeden $N>M\geqq M'$ die Ungleichung

$$I_{M,N}<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Hieraus folgt aber unmittelbar, nach der Definition des bestimmten $N-M$-dimensionalen Integrals einer stetigen Funktion, die Möglichheit den $N-M$-dimensionalen Einheitswürfel Q so in einer endlichen Anzahl parallel den Achsen orientierter Würfelchen q_ν mit den Inhalten i_ν einzuteilen, dass die Summe über diese Teilwürfel erstreckt

$$\sum_{(\nu)}\operatorname*{Max}_{(\text{in } q_\nu)}|S_{M,N}(y_{M+1},\cdots y_N)|^2\,i_\nu<\frac{\varepsilon^2}{2}$$

ist. In dieser Summe ist aber jedes Glied $\geqq 0$; also muss der Gesamtinhalt derjenigen dieser Würfelchen, für welche $\operatorname{Max}|S_{M,N}|<\varepsilon$ ist, grösser sein als $\frac{1}{2}$. Diese letzten Würfelchen genügen somit den sämtlichen Bedingungen des Hilfssatzes.

Nach diesen Vorbereitungen gehe ich nunmehr zum Beweise des Hauptsatzes dieses Paragraphen über.

Satz A: *Bei festem σ_0 des Intervalles $\frac{1}{2}<\sigma\leqq 1$ liegen die Werte, welche $\log\zeta(s)$ in denjenigen Punkten der Halbgeraden $\sigma=\sigma_0, t>0$ annimmt, die zum Gebiete*

G gehören, in der ganzen Ebene überall dicht, d. h. bei gegebenem komplexem a und einem $\varepsilon > 0$ *hat die Ungleichung*

$$|\log \zeta(s) - a| < \varepsilon$$

eine in G gelegene Lösung $s = \sigma_0 + it$ *mit* $t > 0$.

Beweis: Ich bestimme zunächst, auf Grund der beiden Hilfssätze 7 und 8, eine ganze Zahl M_0 so gross, dass sie die beiden folgenden Eigenschaften besitzt.

1) Es gibt im M_0-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leqq y_n < 1$ $(n = 1, 2, \cdots M_0)$ einen Punkt $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots \bar{y}_{M_0})$, für welchen

$$(13) \qquad -\sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i \bar{y}_n}) = a$$

ist.

2) Bei jedem festen $N > M_0$ gibt es im $N - M_0$-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leqq y_n < 1$ $(n = M_0 + 1, M_0 + 2, \cdots N)$ eine endliche Anzahl parallel den Achsen orientierter Würfelchen q_ν $(\nu = 1, 2, \cdots \nu_0)$ von denen keine zwei einen gemeinsamen inneren Punkt besitzen, deren Gesamtinhalt $> \frac{1}{2}$ ist, und so dass in allen inneren Punkten $(y_{M_0+1}, y_{M_0+2}, \cdots y_N)$ dieser Würfelchen

$$(14) \qquad \left| -\sum_{n=M_0+1}^{N} \operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i y_n}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist.

Nachdem M_0 festgelegt ist, bestimme ich, was unter Berücksichtigung von (13) offenbar aus Stetigkeitsgründen möglich ist, im M_0-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leqq y_n < 1$ $(n = 1, 2, \cdots M_0)$ einen kleinen parallel den Achsen orientierten Würfel q mit der Seitenlänge d, dessen Inhalt d^{M_0} ich mit i bezeichne, so dass im ganzen Würfel q die Ungleichung

$$(15) \qquad \left| -\sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}(1 - r_n e^{2\pi i y_n}) - a \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

besteht.

Ich betrachte nunmehr, bei einem festen $N > M_0$, diejenige Punkte P des N-dimensionalen Einheitswürfels $0 \leqq y_n < 1$ $(n = 1, 2, \cdots M_0, M_0 + 1, \cdots N)$, deren M_0 erste Koordinaten im M_0-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leqq y_n < 1$ $(n = 1, 2, \cdots M_0)$ einen Punkt im Innern der obigen Würfel q bestimmen, während der zu den $N - M_0$ letzten Koordinaten gehörige Punkt des $N - M_0$-dimensionalen Einheitswürfels $0 \leqq y_n < 1$ $(n = M_0 + 1, \cdots N)$ im Innern eines der obigen in endlicher Anzahl $\nu_0 = \nu_0(N)$ vorhandenen kleinen Würfeln q_ν mit Gesamtinhalt $> \frac{1}{2}$ gelegen ist. Die Menge dieser Punkte P besteht offenbar im N-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leqq y_n < 1\,(n = 1, 2, \cdots N)$ aus ν_0 Parallelepipeden $y'_n < y_n < y'_n + d_n$ (wo $d_1 = d_2 = \cdots = d_{M_0} = d$; $d_{M_0+1} = d_{M_0+2} = \cdots = d_N$ ist), deren Gesamtinhalt $> i \cdot \frac{1}{2}$ ist, also *grösser als eine feste, d. h. nicht von N* (wohl aber von M_0) *abhängige Zahl.*

Ich wende nun den verallgemeinerten KRONECKER'schen Satz (Hilfssatz 6) an auf die Zahlen $\lambda_n = -\frac{\operatorname{Log} p_n}{2\pi}$ $(n = 1, 2, \cdots N)$ und die soeben besprochenen ν_0 Parallelepipeden des N-dimensionalen Einheitswürfels, deren Gesamtinhalt $> \frac{i}{2}$ ist. Dieser Satz ergibt sofort, stets bei einem festen $N > M_0$, die Existenz eines $T' = T'(N)$, so dass für alle $T \geqq T'$ die Strecke $0 < t < T$ eine endliche Anzahl nicht übereinandergreifender Intervallen mit Gesamtlänge $> \frac{i}{2} T$ derart enthält, dass für jedes τ im Innern eines dieser Intervallen der Punkt $(\tau\lambda_1, \tau\lambda_2, \cdots \tau\lambda_N)$, jede Koordinate modulo 1 reduziert, in einem der obigen ν_0 Parallelepipeden gelegen ist; für jedes solche τ gilt daher, wegen (15) und (14), die Ungleichung

$$|F_N(\sigma_0 + i\tau) - a| = \left| -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 - r_n e^{2\pi i (\tau \lambda_n)}\right) - a \right|$$

$$\leqq \left| -\sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}\left(1 - r_n e^{2\pi i (\lambda \tau_n)}\right) - a \right| + \left| -\sum_{n=M_0+1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 - r_n e^{2\pi i (\tau \lambda_n)}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Bisher war N eine beliebig gewählte Zahl $> M_0$. Ich bestimme nun schliesslich, auf Grund des Ergebnisses von § 1 über den Rest $R_N(\sigma_0 + it)$ (vergl. das Corollar des Hilfssatzes 5), ein festes $N_0 > M_0$ so, dass für alle hinreichend grosse T, d. h. für $T \geqq T_1$, das Intervall $0 < t < T$ (sogar das Intervall $2 < t < T$) eine endliche Anzahl nicht übereinandergreifender Intervallen mit Gesamtlänge $> \left(1 - \frac{i}{2}\right) T$ enthält, mit folgender Eigenschaft: Für jedes τ im Innern eines dieser Intervallen gehört $\sigma_0 + i\tau$ dem Gebiete G an, und es ist

$$|R_{N_0}(\sigma_0 + i\tau)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es ist nunmehr leicht den Beweis des Satzes A zu Ende zu führen. In der Tat, es sei $T > \operatorname{Max}(T_1, T'(N_0))$; dann gibt es (da ja die Summe der beiden obigen

Gesamtintervallängen, von denen die eine $> \frac{i}{2} T$, die andere $> \left(1 - \frac{i}{2}\right) T$ ist, grösser ist als die ganze Länge T der Strecke $0 < t < T$) einen Punkt t im Intervalle $0 < t < T$, welcher *gleichzeitig* die beiden Bedingungen erfüllen:

$$|F_{N_0}(\sigma_0 + it) - a| < \frac{2\varepsilon}{3}$$

$$|R_{N_0}(\sigma_0 + it)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für dieses $t > 0$ gilt also die Ungleichung

$$|\log \zeta(\sigma_0 + it) - a| < \varepsilon.$$

Damit ist der Satz A bewiesen.

---

§ 3.

Beweis des Satzes B.

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des folgenden Satzes, in welchem, sowie durchweg im folgenden, α und β feste Zahlen bezeichnen, die den Bedingungen $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$ genügen, während a eine beliebige fest gewählte komplexe Zahl bedeutet.

Satz B: *Es bezeichne $L_{a,\alpha,\beta}(T)$ die Anzahl der Wurzeln von log $\zeta(s) = a$ in demjenigen Teil des Gebietes G, der dem Rechtecke $\alpha < \sigma < \beta$, $0 < t < T$ angehört. Dann ist*

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{T=\infty} \frac{L_{a,\alpha,\beta}(T)}{T} > 0.$$

Im vorhergehenden Paragraphen war die Aufgabe zu zeigen, dass log $\zeta(s)$, wenn s eine gewisse Wertmenge durchläuft (die Punkte der Halbgeraden $\sigma = \sigma_0$, $t > 0$), einer gegebenen Zahl *a beliebig nahe kommt.* Im vorliegenden Paragraphen dagegen handelt es sich um den Nachweis, dass log $\zeta(s)$ in gewissen Gebieten den Wert *a tatsächlich annimmt.* Um diesen Nachweis zu führen, muss mit der in § 2 verwendeten arithmetischen Methode noch eine andere, schon in früheren Abhandlungen von mir über Dirichlet'sche Reihen angewandte Methode verknüpft werden, die allgemein gesprochen darin besteht, dass zunächst eine analytische Hilfsfunktion $H(s)$ konstruiert wird, welche mit der zu untersuchenden Funktion (hier $\log \zeta(s)$) in engem Zusammenhange steht, und die in einem vorgegebenen Punkt s_0 den gegebenen Wert a tatsächlich annimmt; mit dieser Hilfsfunktion wird danach die gegebene Funktion verglichen.

Diese Hilfsfunktion $H(s)$ wird durch den folgenden Satz eingeführt.

Hilfssatz 9: Es sei $\sigma_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$, *also* $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$. *Dann gibt es eine reelle Zahlenfolge* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n, \cdots$ *mit den beiden folgenden Eigenschaften:*

1) *Es konvergiert für* $\sigma > \frac{1}{2}$ *die Reihe*

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 - e^{2\pi i \varphi_n} p_n^{-s}\right),$$

sogar bei jedem $\varepsilon > 0$, $E > 0$ *im Gebiete* $\sigma > \frac{1}{2} + \varepsilon$, $|s| < E$ *gleichmässig, und stellt also für* $\sigma > \frac{1}{2}$ *eine reguläre analytische Funktion* $H(s)$ *dar.*

2) *Es ist*

$$H(\sigma_0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 - e^{2\pi i \varphi_n} p_n^{-\sigma_0}\right) = a.$$

Beweis: Es ist die erste Bedingung offenbar erfüllt, wenn für alle n von einer gewissen Stelle an, d. h. für $n > N$, die Zahl $\varphi_n = \frac{n}{2}$ (also $e^{2\pi i \varphi_n} = (-1)^n$) gewählt wird; denn es ist ja die Reihe $\Sigma \operatorname{Log}(1 - (-1)^n p_n^{-s})$ im Gebiete $\sigma > \frac{1}{2} + \varepsilon$, $|s| < E$ gleichmässig konvergent, da die beiden Reihen $\Sigma(-1)^n p_n^{-s}$ und $\Sigma |(-1)^n p_n^{-s}|^2 = \Sigma p_n^{-2\sigma}$ in diesem Gebiete gleichmässig konvergieren. Ich wähle die ganze Zahl N so (d. h. so gross) dass einerseits

$$\left| -\sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 - (-1)^n p_n^{-\sigma_0}\right) \right| < 1$$

ist, während andererseits die aus den Werten

$$S_N(y_1, y_2, \cdots y_N) = -\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{2\pi i y_n}\right)$$

bestehende Punktmenge Σ_N die sämtlichen Zahlen z im Kreise $|z - a| < 1$ enthält, was auf Grund des Hilfssatzes 7 möglich ist. Dann enthält die Menge Σ_N speziell die Zahl

$$z = a + \sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}\,(1 - (-1)^n p_n^{-\sigma_0}),$$

d. h. es gibt N reelle Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_N$ derart, dass

$$-\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\,(1 - e^{2\pi i \varphi_n} p_n^{-\sigma_0}) = a + \sum_{n=N+1}^{\infty} \operatorname{Log}\,(1 - (-1)^n p_n^{-\sigma_0})$$

ist, also, wenn für $n > N$ die Zahl $\varphi_n = \frac{n}{2}$ gewählt wird, dass die Identität

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\,(1 - e^{2\pi i \varphi_n} p_n^{-\sigma_0}) = a$$

besteht. Die somit bestimmten Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ erfüllen somit die beiden Bedingungen des Hilfssatzes. Damit ist dieser Satz bewiesen.

Es sei um den Punkt $\sigma_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ein Kreis mit dem Radius $r < \frac{\beta - \alpha}{4}$ so gezogen, dass die obige Funktion $H(s)$ des Hilfssatzes 9 (welche im Mittelpunkte σ_0 den Wert a annimmt, und die, wie z. B. aus dem Verhalten für $\sigma \to +\infty$ unmittelbar hervorgeht, keine Konstante ist) auf dem ganzen Rande des Kreises, d. h. für $|s - \sigma_0| = r$, von a verschieden ist, und es bezeichne μ das Minimum von $|H(s) - a|$ für $|s - \sigma_0| = r$. Dann genügt es offenbar, *damit* $\log \zeta(s)$ *innerhalb eines im Gebiete* G *gelegenen Kreises* $|s - (\sigma_0 + i\tau)| \leqq r$ *den Wert* a *annimmt, dass für* $|s - \sigma_0| \leqq r$ *die Ungleichung*

$$|\log \zeta(s + i\tau) - H(s)| < \mu$$

besteht; denn dann haben ja die beiden Funktionen $\log \zeta(s + i\tau)$ und $H(s)$, nach einem bekannten funktionentheoretischen Satze, im Kreise $|s - \sigma_0| < r$ dieselbe Anzahl a-Stellen, d. h. wenigstens eine.

Ich beweise nunmehr den folgenden Hilfssatz 10, welcher beim Beweise des Satzes B die entsprechende Rolle spielt, wie der Hilfssatz 8 in § 2 beim Beweise des Satzes A.

Hilfssatz 10: Es sei $\varepsilon > 0$. *Dann gibt es ein* $M' = M'(\varepsilon)$ *mit folgender Eigenschaft: Bei jeden* $N > M \geqq M'$ *gibt es in* $N - M$*-dimensionalen Einheitswürfel* $0 \leqq y_n < 1$ $(n = M + 1, M + 2, \cdots N)$ *eine endliche Anzahl parallel den Achsen orientierter Würfelchen (ohne gemeinsame innere Punkte) mit Gesamtinhalt* $> \frac{1}{2}$ *derart dass für jeden festen Punkt* $(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N)$ *im Innern eines dieser Würfelchen die Funktion*

$$S_{M,N}(s;\, y_{M+1},\, y_{M+2},\, \cdots y_N) = -\sum_{n=M+1}^{N} \operatorname{Log}\,(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i y_n}) \tag{16}$$

im ganzen Kreise $|s - \sigma_0| \leqq r$ *absolut genommen kleiner ist als* ε.

Beweis: Es ist offenbar erlaubt, auf Grund des Hilfssatzes 4 in § 1, beim Beweise die Ungleichung

$$|S_{M,N}(s;\, y_{M+1},\, y_{M+2},\, \cdots y_N)| < \varepsilon \qquad (\text{für } |s - \sigma_0| \leqq r) \tag{17}$$

durch die Ungleichung

$$\iint\limits_{|s-\sigma_0| \leqq 2r} |S_{M,N}(s;\, y_{M+1},\, y_{M+2},\, \cdots y_N)|^2\, d\sigma\, dt < \varepsilon' \tag{18}$$

zu ersetzen, wo ε' eine passend gewählte positive Zahl ist; denn nach dem Hilfssatze 4 gibt es zu dem gegebenen ε und den beiden Kreisradien r und $2r$ ein ε', so dass aus der Ungleichung (18) die Ungleichung (17) folgt.

Ich betrachte nun für einen beliebigen festen Punkt $(y_{M+1},\, y_{M+2},\, \cdots y_N)$ des $N-M$-dimensionalen Einheitswürfels Q das Integral

$$\iint\limits_{|s-\sigma_0| \leqq 2r} |S_{M,N}(s;\, y_{M+1},\, y_{M+2},\, \cdots y_N)|^2\, d\sigma\, dt = g(y_{M+1},\, y_{M+2},\, \cdots y_N)$$

und integriere diese letzte in Q stetige Funktion $g(y_{M+1},\, y_{M+2},\, \cdots y_N)$ über den ganzen Einheitswürfel Q; dabei erhalte ich

$$\begin{aligned} J_{M,N} &= \iint\limits_{(Q)} \cdots \int g(y_{M+1},\, y_{M+2},\, \cdots y_N)\, dy_{M+1}\, dy_{M+2} \cdots dy_N \\ &= \iint\limits_{|s-\sigma_0| \leqq 2r} d\sigma\, dt \iint\limits_{(Q)} \cdots \int |S_{M,N}(s;\, y_{M+1},\, y_{M+2},\, \cdots y_N)|^2\, dy_{M+1}\, dy_{M+2} \cdots dy_N \\ &= \iint\limits_{|s-\sigma_0| \leqq 2r} h(s)\, d\sigma\, dt, \end{aligned}$$

wo

$$h(s) = \iint\limits_{(Q)} \cdots \int |S_{M,N}(s;\, y_{M+1},\, y_{M+2},\, \cdots y_N)|^2\, dy_{M+1}\, dy_{M+2} \cdots dy_N$$

ist. Nun ist aber nach (16)

$$S_{M,N}(\sigma + it; y_{M+1}, \cdots y_N) = S_{M,N}(\sigma; y_{M+1} + k_{M+1}, \cdots y_N + k_N),$$

wo

$$k_n = -\frac{t \operatorname{Log} p_n}{2\pi} \quad (n = M + 1, \cdots N)$$

ist. Daraus folgt — wie durch die Transformation $y'_n = y_n + k_n (n = M + 1, \cdots N)$ unmittelbar zu ersehen ist, welche ja den Einheitswürfel Q in einen äquivalenten (d. h. nach Reduktion der Koordinaten modulo 1 mit Q zusammenfallenden) Bereich überführt — dass das Integral $h(s) = h(\sigma + it)$ nur von σ, d. h. nicht von der Ordinate t abhängt. Da nun (wörtlich wie beim Beweise des Hilfssatzes 8) für $\sigma > \frac{1}{2}$

$$h(\sigma) = \int\int_{(Q)}\cdots\int |S_{M,N}(\sigma; y_{M+1}, \cdots y_N)|^2 dy_{M+1} \cdots dy_N < \frac{\pi^2}{6} \sum_{n=M+1}^{\infty} p_n^{-2\sigma}$$

ist, so folgt, wegen $\sigma_0 - 2r > \alpha$

$$J_{M,N} = \int\int_{|s-\sigma_0| \leqq 2r} h(\sigma) d\sigma dt < 4\pi r^2 \left(\frac{\pi^2}{6} \sum_{n=M+1}^{\infty} p_n^{-2\alpha}\right) = \varepsilon_M,$$

wo $\varepsilon_M \to 0$ für $M \to \infty$. Also gibt es ein M', so dass für $N > M \geqq M'$ das Integral

$$J_{M,N} = \int\int_{(Q)}\cdots\int g(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N) dy_{M+1} dy_{M+2} \cdots dy_N < \frac{\varepsilon'}{2}$$

ist. Aus dieser letzten Ungleichung ergibt sich aber sofort nach einer schon früher verwendeten Schlussweise (vergl. den Beweis des Hilfssatzes 8) die Existenz einer endlichen Anzahl in Q gelegener Würfelchen mit Gesamtinhalt $> \frac{1}{2}$, so dass im Innern aller dieser Würfelchen die zu beweisende Ungleichung

$$g(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots y_N) < \varepsilon' \tag{18}$$

erfüllt ist. Damit ist der Hilfssatz 10 bewiesen.

Nach diesen Vorbereitungen gehe ich nunmehr zum *Beweise des Satzes B* über:

Es sei zunächst die Zahl M_0 so (d. h. so gross) gewählt, dass einerseits, auf Grund der gleichmässigen Konvergenz der Reihe $H(s) = -\Sigma \operatorname{Log}(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i \varphi_n})$, wo $H(s)$ die durch den Hilfssatz 9 eingeführte Hilfsfunktion bedeutet, die Ungleichung

$$\left| H(s) + \sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}\left(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i \varphi_n}\right) \right| < \frac{\mu}{4} \tag{19}$$

für $|s - \sigma_0| \leqq r$ besteht, wo μ die auf Seite 95 definierte Zahl ist, während andererseits, auf Grund des Hilfssatzes 10, bei jedem $N > M_0$ im $N - M_0$-dimensionalen Einheitswürfel $Q: 0 \leqq y_n < 1$ $(n = M_0 + 1, \cdots N)$ eine endliche Anzahl parallel den Achsen orientierter Würfelchen mit Gesamtinhalt $> \frac{1}{2}$ derart existieren, dass für jeden inneren Punkt $(y_{M_0+1}, \cdots y_N)$ einer dieser Würfelchen die Ungleichung

$$\left| - \sum_{n=M_0+1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i y_n}\right) \right| < \frac{\mu}{4}$$

für $|s - \sigma_0| \leqq r$ erfüllt ist.

Nachdem M_0 festgelegt ist, bestimme ich, aus Stetigkeitsgründen, im M_0-dimensionalen Einheitwürfel $0 \leqq y_n < 1$ $(n = 1, 2, \cdots M_0)$ einen kleinen Würfel q mit dem Inhalte i derart, dass für jeden inneren Punkt $(y_1, y_2, \cdots y_{M_0})$ dieses Würfelchens q die Ungleichung

$$\left| - \sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}\left(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i y_n}\right) + \sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}\left(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i \varphi_n}\right) \right| < \frac{\mu}{4}$$

im Kreise $|s - \sigma_0| \leqq r$ besteht.

Folglich existiert, bei jedem festen $N > M_0$ im N-dimensionalen Einheitswürfel $0 \leqq y_n < 1$ $(n = 1, 2 \cdots M_0, M_0 + 1 \cdots N)$ eine endliche Anzahl von kleinen Parallelepipeden mit Gesamtinhalt $> \frac{1}{2} i$ derart, dass für jedem im Innern dieser Parallelepipeden gelegenen Punkt $(y_1, y_2, \cdots y_{M_0}, \cdots y_N)$ die beiden Ungleichungen

$$\left| - \sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}\left(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i y_n}\right) + \sum_{n=1}^{M_0} \operatorname{Log}\left(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i \varphi_n}\right) \right| < \frac{\mu}{4}$$

und

$$\left| - \sum_{n=M_0+1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i y_n}\right) \right| < \frac{\mu}{4}$$

im Kreise $|s - \sigma_0| \leqq r$ bestehen. Für jeden solchen Punkt $(y_1, y_2, \cdots y_N)$ gilt daher, unter Berücksichtigung von (19), die Ungleichung

$$\left| H(s) + \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log}\left(1 - p_n^{-s} e^{2\pi i y_n}\right) \right| < \frac{3\mu}{4}.$$

Ich wende nunmehr den verallgemeinerten KRONECKER'schen Satz an auf die Zahlen $\lambda_n = -\frac{\text{Log}\, p_n}{2\pi}$ $(n = 1, 2, \cdots N)$ und die obigen Parallelepipeden des N-dimensionalen Einheitswürfels mit Gesamtinhalt $> \frac{i}{2}$. Dieser Satz ergibt für alle hinreichend grosse T, d. h. für $T \geqq T' = T'(N)$ die Existenz einer endlichen Anzahl auf der Strecke $0 < t < T$ gelegenen Intervallen (I'), von denen keine zwei einen inneren Punkt gemeinsam haben, deren Gesamtlänge $> \frac{i}{2} T$ ist, und derart, dass für jeden inneren Punkt τ einer dieser Intervallen die Ungleichung

$$\left| H(s) + \sum_{n=1}^{N} \text{Log}\, (1 - p_n^{-s} e^{2\pi i (\tau \lambda_n)}) \right| < \frac{3\mu}{4}$$

d. h. die Ungleichung

$$|H(s) - F_N(s + i\tau)| < \frac{3\mu}{4}$$

im Kreise $|s - \sigma_0| \leqq r$ besteht.

Es war bisher N eine beliebige ganze Zahl $> M_0$. Ich wähle nunmehr, auf Grund des Hilfssatzes 5 in § 1, ein festes $N_0 > M_0$ derart, dass für alle hinreichend grosse T, d. h. für $T \geqq T_1$, auf der Strecke $0 < t < T$ eine endliche Anzahl nicht übereinandergreifender Intervallen (I'') liegen, deren Gesamtlänge $> \left(1 - \frac{i}{3}\right) T$ ist, und so dass für jeden inneren Punkt τ einer dieser Intervallen der ganze Streifen $\sigma \geqq \alpha$, $\tau - \frac{1}{2} \leqq t \leqq \tau + \frac{1}{2}$ im Gebiete G liegt und dass jedes s dieses Streifens der Bedingung

$$|R_N(s)| < \frac{\mu}{4}$$

genügt. Da der Kreis $|s - (\sigma_0 + i\tau)| \leqq r$ ganz innerhalb des Streifens $\sigma \geqq \alpha$, $\tau - \frac{1}{2} \leqq t \leqq \tau + \frac{1}{2}$ gelegen ist, gilt a fortiori für jedes solche τ die Ungleichung

$$|R_N(s + i\tau)| < \frac{\mu}{4}$$

im Kreise $|s - \sigma_0| \leqq r$.

Ich betrachte nun schliesslich für ein $T > T_0 = \text{Max}\, (T'(N_0), T_1)$ diejenige endliche Anzahl Intervallen (I''') von Gesamtlänge $> \left(\frac{i}{2} T - \frac{i}{3} T\right) = \frac{i}{6} T$, deren innere Punkte diejenige Punkte der Strecke $0 < t < T$ sind, welche den beiden obigen

Intervallmengen (I') (für $N = N_0$) und (I'') gemeinsam sind. Für jedes τ eines dieser Intervallen (I''') gelten im Kreise $|s - \sigma_0| \leqq r$ *gleichzeitig* die beiden Ungleichungen

$$|H(s) - F_N(s + i\tau)| < \frac{3\mu}{4}$$

und

$$|R_N(s + i\tau)| < \frac{\mu}{4},$$

also die Ungleichung

$$|\log \zeta(s + i\tau) - H(s)| < \mu.$$

Hieraus folgt aber (vergl. Seite 95) nach der Definition von μ, *dass* $\log \zeta(s)$ *im Kreise* $|s - (\sigma_0 + i\tau)| < r$ *mindestens eine a-Stelle besitzt.*

Es ist nunmehr leicht, den Beweis des Satzes B zu vollenden. In der Tat, da einerseits eine endliche Anzahl auf der Strecke $0 < t < T$ gelegenen Intervallen mit Gesamtlänge $> \frac{1}{6} T$ offenbar mindestens $\left(\frac{1}{6} T - 1\right)$ Werte τ enthalten, von denen je zwei einen Differenz $\geqq 1$ haben, während andererseits zwei Kreise $|s - (\sigma_0 + i\tau_1)| < r$ und $|s - (\sigma_0 + i\tau_2)| < r$, wo $|\tau_1 - \tau_2| \geqq 1$ ist, gewiss keinen gemeinsamen Punkt besitzen, so folgt für jedes $T > T_0$ die Existenz von mindestens $\left(\frac{1}{6} T - 1\right)$ *verschiedenen* a-Stellen im Streifen $\sigma_0 - r < \sigma < \sigma_0 + r, -r < t < T + r$, also a fortiori im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$, $-1 < t < T + 1$.

Hieraus folgt aber unmittelbar, wenn $L_{a,\alpha,\beta}(T)$ die Anzahl der a-Stellen von $\log \zeta(s)$ im Rechtecke $\alpha < \sigma < \beta$, $0 < t < T$ bezeichnet, die Ungleichung

$$\liminf_{T = \infty} \frac{L_{a,\alpha,\beta}(T)}{T} > 0.$$

Damit ist der Satz B bewiesen.