

INTEGRATION DER DIFFERENTIALGLEICHUNG

$$\mathcal{A}_2 u = k e^u$$

AUF GESCHLOSSENEN FLÄCHEN.

Methode der unendlichvielen Variablen.

VON

LEON LICHTENSTEIN

in BERLIN.

Es sei T eine beliebige geschlossene, singularitätenfreie, analytische Fläche. In der Theorie der automorphen Funktionen spielt bekanntlich die folgende Aufgabe eine Rolle. Es ist eine auf T , ausser in einer endlichen Anzahl vorgegebener Punkte, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung $\mathcal{A}_2 u = k e^u$ zu bestimmen, die in jenen Ausnahmepunkten vorgeschriebene logarithmische Unstetigkeiten hat. Unter $\mathcal{A}_2 u$ wird der zweite BELTRAMI'sche Differentialparameter der Fläche, unter k eine auf T erklärte positive, nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion verstanden. Man kann übrigens der Betrachtung eine zu einer beliebigen algebraischen Funktion gehörige RIEMANN'sche Fläche zugrunde legen. Alsdann lautet die Differentialgleichung einfacher $\mathcal{A} u = k e^u$; der gesuchten Lösung sind dann auch in den unendlich fernen Punkten bestimmte logarithmische Unstetigkeiten vorzuschreiben. In der zuletzt genannten Form ist denn auch diese Aufgabe im Jahre 1890 von Herrn H. A. SCHWARZ gestellt worden.¹

In seinen berühmten Abhandlungen über die Methode der successiven Approximationen hat sich Herr PICARD als erster mit diesem Gegenstande be-

¹ Göttinger Nachrichten, 1890, S. 216.

schäftigt.¹ Herr PICARD löst das erste Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta u = k e^u$ für hinreichend kleine Gebiete durch sukzessive Approximationen, geht dann zu beliebigen Gebieten nach dem alternierenden Verfahren über, um endlich durch gürtelförmige Verschmelzung zu geschlossenen Flächen zu gelangen. Die Verhältnisse liegen hierbei wesentlich anders als in den klassischen Fällen des Herrn H. A. SCHWARZ, so dass bei der Durchführung der Methode besondere Hilfsmittel angewandt werden mussten.

Es seien $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ beliebige im Endlichen gelegene Punkte der m_2 -blättrigen RIEMANN'schen Fläche F . Es wird der Einfachheit halber vorausgesetzt, dass weder die Punkte (x_i, y_i) , noch die unendlich fernen Punkte von F zugleich Windungspunkte sind.

Herr PICARD bestimmt diejenige in F , ausser in den Punkten (x_i, y_i) und den unendlich fernen Punkten, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = k e^u$, die sich in (x_i, y_i) wie

$$\alpha_i \log R_i + \text{beschränkte Funktion, } R_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2, \alpha_i > -2,$$

in den unendlich fernen Punkten wie

$$-\delta_i \log R + \text{beschränkte Funktion, } R^2 = x^2 + y^2, \delta_i > 2$$

verhält. Es wird dabei

$$\sum \alpha_i + \sum \delta_i < 0$$

vorausgesetzt.

Ein anderes, von den alternierenden Methoden unabhängiges Verfahren ist später von POINCARÉ unter Zugrundelegung einer geschlossenen Fläche im Raume angegeben worden.² POINCARÉ führt überdies singuläre Punkte (p'_i, q'_i) ein, in deren Umgebung die gesuchte Lösung sich wie

$$-2 \log r'_i - 2 \log |\log r'_i| + \text{beschränkte Funktion, } r'_i{}^2 = (p - p'_i)^2 + (q - q'_i)^2$$

¹ Vgl. E. PICARD, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*, Journal de Math. 1890, S. 145—210, *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles*, Journal de Math. 1893, S. 217—271 sowie namentlich die beiden Arbeiten, *Sur l'équation $\Delta u = e^u$* , Journal de Math. 1898, S. 313—316, *De l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface de RIEMANN fermée*, Journal für Math. 1905, S. 243—258.

² Vgl. H. POINCARÉ, *Les fonctions fuchsienues et l'équation $\Delta u = e^u$* , Journal de Math. 1898, S. 137—230.

verhält. Diesen singulären Punkten kommt bei der Anwendung auf automorphe Funktionen eine besondere Bedeutung zu. Sie sind, wie es scheint, der PICARD'schen Methode nicht zugänglich.

In der vorliegenden Abhandlung wird die Aufgabe auf ein Problem der Variationsrechnung zurückgeführt und unter Benutzung des in einer vor kurzem erschienenen Arbeit¹ dargelegten, auf dem Gebrauch der unendlichvielen Variablen beruhenden Gedankenganges erledigt. Wir legen unseren Betrachtungen eine geschlossene Fläche im Raume und logarithmische Unstetigkeiten sowohl des PICARD'schen als auch des POINCARÉ'schen Typus zugrunde. Am Schluss werden die Modifikationen, welche die Benutzung einer ebenen RIEMANN'schen Fläche bedingt, kurz besprochen. Der Existenzbeweis gelingt, was an dieser Stelle besonders hervorgehoben werden mag, ohne dass man genötigt ist, zu den schärferen Hilfsmitteln der neueren Analysis, wie dem LEBESGUE'schen Integralbegriff, dem FISCHER—RIESZ'schen Satze u. s. w. Zuflucht zu nehmen. Auch von dem Auswahlprinzip wird kein Gebrauch gemacht.²

§ 1. Problemstellung.

Es sei T eine beliebige analytische, singularitätenfreie, geschlossene Fläche, deren Punkte auf irgendein System isothermischer GAUSS'scher Parameter p und q bezogen sind.³ Das Linienelement der Fläche sei

$$(1) \quad ds^2 = \varrho(dp^2 + dq^2).$$

Die beiden BELTRAMI'schen Differentialparameter der Fläche sind alsdann

$$(2) \quad \Delta_1 u = \frac{1}{\varrho} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial q} \right)^2 \right], \quad \Delta_2 u = \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} \right].$$

¹ Vgl. L. LICHTENSTEIN, *Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung. Methode der unendlichvielen Variablen*, Journal für Math., B. 145, 1914, S. 24–85.

² Die Ergebnisse dieser Arbeit habe ich in der Note, *Intégration de l'équation $\Delta_2 u = ke^u$ sur une surface fermée*, Comptes rendus, B. 157, 1913, S. 1508–1511 zusammengefasst.

³ In bekannter Weise hat man sich hierbei die Fläche T in eine endliche Anzahl übereinandergreifender, einfach zusammenhängender Flächenstücke T_1, T_2, \dots, T_l geteilt zu denken. Bildet man T_i ($i = 1, \dots, l$) einzeln auf einen Teil einer Ebene konform ab, so erhält man l Systeme isothermischer Parameter, die zusammengenommen unser System (p, q) darstellen. Den Punkten, die mehreren Teilgebieten zugleich angehören, entsprechen mehrere Wertepaare (p, q) . Welcher dieser Wertepaare der Betrachtung zugrunde gelegt wird, ist wegen der bekannten Invarianzeigenschaften der BELTRAMI'schen Differentialparameter gleichgültig.

Es seien (p_i, q_i) ($i = 1, \dots, m$), (p'_i, q'_i) ($i = 1, \dots, m'$) beliebig vorgegebene Punkte der Fläche, $k(p, q)$ eine positive, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion:

$$(3) \quad k(p, q) \geq k_0 > 0.$$

Wir stellen uns die Aufgabe, *diejenige auf T , ausser in den Punkten (p_i, q_i) , (p'_i, q'_i) , nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung $u(p, q)$ der Differentialgleichung*

$$(4) \quad \Delta_2 u = k e^u$$

zu bestimmen, die sich in der Umgebung jener Punkte entsprechend wie

$$(5) \quad \alpha_i \log r_i, \quad r_i^2 = (p - p_i)^2 + (q - q_i)^2, \quad \alpha_i > -2,$$

$$(6) \quad -2 \log r'_i - 2 \log |\log r'_i|, \quad r_i'^2 = (p - p'_i)^2 + (q - q'_i)^2$$

verhält. Die entsprechend in der Umgebung der Punkte (p_i, q_i) , (p'_i, q'_i) erklärten Ausdrücke

$$(7) \quad u - \alpha_i \log r_i, \quad u + 2 \log r'_i + 2 \log |\log r'_i|$$

sollen beschränkt sein. Es wird endlich

$$(8) \quad \sum_i^{1 \dots m} \alpha_i - 2m' < 0$$

vorausgesetzt.

§ 2. Hilfssätze und vorbereitende Betrachtungen.

Es sei τ der Flächeninhalt des Gebietes T und $G(p_0, q_0; p, q)$ diejenige, ausser im Punkte (p_0, q_0) , nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung

$$(9) \quad \Delta_2 G = \frac{2\pi}{\tau},$$

die sich in der Umgebung des Punktes (p_0, q_0) wie

$$(10) \quad -\frac{1}{2} \log [(p - p_0)^2 + (q - q_0)^2] + \text{stetige Funktion}$$

verhält und überdies der Beziehung

$$(11) \quad \iint_T G(p_0, q_0; p, q) d\omega = 0$$

genügt, unter $d\omega$ das Flächenelement verstanden.

Bekanntlich ist

$$(12) \quad G(p', q'; p'', q'') = G(p'', q''; p', q').$$

Es sei $h(p, q)$ eine auf T , ausser in den Punkten (p_i, q_i) , (p'_i, q'_i) , nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion, die sich in der Umgebung jener Punkte entsprechend wie

$$r_i^{\alpha_i} \gamma_i(p, q), \quad r_i'^{-2} |\log r_i'|^{-2} \gamma_i'(p, q),$$

unter γ_i, γ_i' beschränkte Funktionen verstanden, verhält. Betrachten wir das Doppelintegral

$$(13) \quad \bar{u}(p_0, q_0) = -\frac{1}{2\pi i} \iint_T G(p_0, q_0; p, q) h(p, q) d\omega.$$

Nach bekannten Sätzen ist $\bar{u}(p_0, q_0)$ eine auf T , ausser höchstens in den Punkten (p'_i, q'_i) , stetige Funktion. Ausser höchstens in den Punkten (p_i, q_i) und (p'_i, q'_i) , hat $\bar{u}(p_0, q_0)$ auf T stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Es sei (p_0, q_0) irgendein von diesen Punkten verschiedener Punkt der Fläche. Wir beschreiben auf T eine geschlossene, doppel punktlose, stetig gekrümmte Kurve C_* , so dass durch diese (p_0, q_0) von den vorhin ausgeschlossenen Punkten getrennt wird. Dasjenige der beiden Gebiete, in die T durch C_* geteilt wird, welches (p_0, q_0) enthält, sei mit T_* bezeichnet. In T_* kann man, sofern, was wir voraussetzen wollen, C_* hinreichend nahe an (p_0, q_0) liegt,

$$G(p_0, q_0; p, q) = G(p, q; p_0, q_0) = \log \frac{1}{r_0} + G'(p, q; p_0, q_0), \quad r_0^2 = (p-p_0)^2 + (q-q_0)^2$$

setzen. $G'(p, q; p_0, q_0)$ verhält sich, als Funktion von (p_0, q_0) betrachtet, für alle (p, q) , (p_0, q_0) in T_* und auf C_* regulär und genügt der Differentialgleichung

$$\mathcal{A}_2 G' = \frac{2\pi}{r}.$$

Es ist nun

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_0, q_0) = & -\frac{1}{2\pi} \iint_{T_*} h(p, q) \log \frac{1}{r_0} d\omega - \frac{1}{2\pi} \iint_{I_*} G'(p_0, q_0; p, q) h(p, q) d\omega - \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint_{T-T_*} G(p_0, q_0; p, q) h(p, q) d\omega = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3. \end{aligned}$$

Nach bekannten Sätzen der Theorie des logarithmischen Potentials ist im Punkte (p_0, q_0) zunächst

$$\mathcal{A}_2 \bar{u}_1 = h(p_0, q_0).$$

Man findet ferner

$$\mathcal{A}_2 \bar{u}_2 = -\frac{1}{v} \iint_{T_*} h(p, q) d\omega$$

und den bekannten Sätzen der Theorie uneigentlicher Integrale gemäss

$$\mathcal{A}_2 \bar{u}_3 = -\frac{1}{v} \iint_{T-T_*} h(p, q) d\omega,$$

somit

$$(14) \quad \mathcal{A}_2 \bar{u} = h(p_0, q_0) - \frac{1}{v} \iint_T h(p, q) d\omega.$$

Ist insbesondere

$$\iint_T h(p, q) d\omega = 0,$$

so erhält man einfacher

$$\mathcal{A}_2 \bar{u} = h(p_0, q_0).$$

Es sei $\varphi_i(p, q)$ ($i = 1, 2, \dots$) das normierte, orthogonale System derjenigen Lösungen der Differentialgleichung

$$(15) \quad \mathcal{A}_2 u + \lambda u = 0,$$

die auf T sich nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung

stetig verhalten und von einer Konstanten verschieden sind; λ_i sei der zu $\varphi_i(p, q)$ gehörige Wert des Parameters λ . Es ist, wie man leicht findet,

$$(16) \quad \varphi_i(p_0, q_0) = \frac{\lambda_i}{2\pi} \iint_T G(p_0, q_0; p, q) \varphi_i(p, q) d\omega, \quad \iint_T \varphi_i(p, q) d\omega = 0.$$

Nach bekannten Sätzen sind alle λ_i positiv. Die unendliche Reihe

$$(17) \quad \sum_i^{1..∞} \frac{1}{\lambda_i^2}$$

konvergiert. Die unendliche Reihe

$$(18) \quad \sum_i^{1..∞} \frac{[\varphi_i(p, q)]^2}{\lambda_i^2}$$

konvergiert unbedingt und gleichmässig. Jede in der Form

$$(19) \quad \iint_T G(p_0, q_0; p, q) g(p, q) d\omega = f(p, q),$$

unter $g(p, q)$ eine auf T stetige Funktion verstanden, darstellbare Funktion $f(p, q)$ lässt sich in eine unbedingt und gleichmässig konvergierende Reihe

$$(20) \quad f(p_0, q_0) = \sum_i^{1..∞} \varphi_i(p_0, q_0) \iint_T f(p, q) \varphi_i(p, q) d\omega$$

entwickeln. Diese Entwicklung gilt wie die Darstellung (19) für alle nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung auf T stetigen, der Beziehung

$$(21) \quad \iint_T f(p, q) d\omega = 0$$

genügenden Funktionen. Ist die Beziehung (21) nicht erfüllt, so ist

$$(22) \quad f(p_0, q_0) = \frac{1}{r} \iint_T f(p, q) d\omega + \sum_i^{1..∞} \varphi_i(p_0, q_0) \iint_T f(p, q) \varphi_i(p, q) d\omega$$

oder,

$$(23) \quad \varphi_0(p, q) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

gesetzt,

$$(24) \quad f(p_0, q_0) = \sum_i^{0..∞} \varphi_i(p_0, q_0) \iint_T f(p, q) \varphi_i(p, q) d\omega.$$

Endlich ist

$$(25) \quad \iint_T \mathcal{A}_1 f d\omega = \sum_i^{1..∞} \lambda_i \left[\iint_T f(p, q) \varphi_i(p, q) d\omega \right]^2.$$

Die Formel (25) lässt sich leicht aus der für jedes Paar auf T stetiger Funktionen \bar{f} und \bar{g} gültigen Beziehung

$$(26) \quad \iint_T \bar{f} \bar{g} d\omega = \frac{1}{\tau^2} \iint_T \bar{f} d\omega \iint_T \bar{g} d\omega + \sum_i^{1..∞} \iint_T \bar{f} \varphi_i d\omega \iint_T \bar{g} \varphi_i d\omega$$

ableiten. In der Tat ist nach (26)

$$\iint_T \mathcal{A}_1 f d\omega = - \iint_T f \mathcal{A}_2 f d\omega = - \frac{1}{\tau^2} \iint_T f d\omega \iint_T \mathcal{A}_2 f d\omega - \sum_i^{1..∞} \iint_T f \varphi_i d\omega \iint_T \mathcal{A}_2 f \varphi_i d\omega.$$

Nun ist aber

$$\iint_T \mathcal{A}_2 f d\omega = 0, \quad \iint_T \mathcal{A}_2 f \varphi_i d\omega = \iint_T f \mathcal{A}_2 \varphi_i d\omega = -\lambda_i \iint_T f \varphi_i d\omega,$$

daher wie behauptet

$$\iint_T \mathcal{A}_1 f d\omega = \sum_i^{1..∞} \lambda_i \left(\iint_T f \varphi_i d\omega \right)^2.$$

Die Gleichung (26) gilt noch, wenn \bar{f} und \bar{g} in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig sind, sofern nur die Doppelintegrale $\iint_T \bar{f}^2 d\omega$, $\iint_T \bar{g}^2 d\omega$ existieren. Desgleichen gilt (25), wenn f auf T stetig ist, während die partiellen

Ableitungen erster und zweiter Ordnung von f in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig sind, sofern $\iint_T \Delta_1 f d\omega$ existiert.

Der Beweis lässt sich ohne Schwierigkeit erbringen, indem man \bar{f}, \bar{g}, f durch geeignete singularitätenfreie Funktionen approximiert und die Formeln (25), (26) anwendet. Diese Formeln gelten übrigens unter beträchtlich allgemeineren Voraussetzungen. Doch genügen für unsere Zwecke die soeben betrachteten Spezialfälle vollständig.

§ 3. **Hilfssätze und vorbereitende Betrachtungen (Fortsetzung).**

Es sei $\gamma_0 > 1$ so gross gewählt, dass den Kreisen in der Ebene (p, q)

$$(p - p'_i)^2 + (q - q'_i)^2 = \frac{1}{\gamma_0^2} \quad (i = 1, \dots, m')$$

auf T geschlossene, einander nicht treffende Kurven Γ_i entsprechen. Die von diesen begrenzten kreisförmigen Gebiete mögen Θ_i ($i = 1, \dots, m'$) heissen. Es sei $w_0(p, q)$ irgendeine auf T , ausser in den Punkten (p'_i, q'_i) , nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion, die in Θ_i ($i = 1, \dots, m'$) den Wert

$$(27) \quad w_0 = -\log \log \frac{1}{r'_i}$$

hat. Wie die unmittelbare Ausrechnung zeigt, ist in Θ_i

$$(28) \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial q^2} = \frac{1}{r'^2_i (\log r'_i)^2}, \quad \Delta_2 w_0 = \frac{1}{q r'^2_i (\log r'_i)^2}.$$

Man findet ferner

$$(29) \quad \iint_T \Delta_2 w_0 d\omega = 0.$$

Es ist nämlich

$$(30) \quad \iint_T \Delta_2 w_0 d\omega = \sum_i \iint_{\Theta_i} + \iint_{T - \sum_i \Theta_i}.$$

Nach (27) ist

$$(31) \quad \iint_{T-\sum_i \Theta_i} \mathcal{A}_2 w_0 d\omega = \sum_i \int_{\Gamma_i} \frac{\partial w_0}{\partial n} ds = - \sum_i \int_0^{2\pi} \frac{\gamma_0}{\log \gamma_0} \cdot \frac{1}{\gamma_0} d\theta = - \frac{2\pi m'}{\log \gamma_0}.$$

Aus (28) folgt ferner

$$(32) \quad \iint_{\Theta_i} \mathcal{A}_2 w_0 d\omega = \int_0^{\frac{1}{\gamma_0}} \int_0^{2\pi} \frac{r'_i dr'_i d\varphi}{r'^2_i (\log r'_i)^2} = -2\pi \left[\frac{1}{\log r'_i} \right]_0^{\frac{1}{\gamma_0}} = -2\pi \frac{1}{\log \frac{1}{\gamma_0}}.$$

Aus (30), (31) und (32) folgt endlich in der Tat die Beziehung (29). Es sei $\beta(p, q)$ eine auf T , ausser in den Punkten (p_i, q_i) , (p'_i, q'_i) , nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige positive Funktion. In den Gebieten Θ_i setzen wir

$$(33) \quad \beta(p, q) = \frac{2}{\rho r'^2_i (\log r'_i)^2}.$$

In der Umgebung der übrigen singulären Punkte sollen die Ungleichheitsbeziehungen

$$(34) \quad 0 < \lambda' < \beta r'^{-a_i} < \lambda'',$$

unter λ' und λ'' im übrigen beliebige feste Zahlwerte verstanden, bestehen.

Endlich soll

$$(35) \quad \iint_T \beta d\omega = 2\pi \left[- \sum_i^{1..m} \alpha_i + 2m' \right]$$

sein.

Es sei

$$(36) \quad \beta_1(p, q) = \beta(p, q) - 2\mathcal{A}_2 w_0.$$

In Θ_i ($i = 1, \dots, m'$) ist offenbar

$$(37) \quad \beta_1(p, q) = 0.$$

Sodann ist

$$(38) \quad \iint_T \beta_1 d\omega = \iint_T \beta d\omega - 2 \iint_T \mathcal{A}_2 w_0 d\omega = \iint_T \beta d\omega = 2\pi \left[- \sum_i^{1..m} \alpha_i + 2m' \right].$$

Wir setzen jetzt

$$(39) \quad v(p, q) = - \sum_i^{1..m} \alpha_i G(p_i, q_i; p, q) + 2 \sum_i^{1..m'} G(p'_i, q'_i; p, q) + \\ + 2 w_0(p, q) - \frac{1}{2\pi} \iint_T G(p, q; \bar{p}, \bar{q}) \beta_1(\bar{p}, \bar{q}) d\bar{\omega}.$$

Das Doppelintegral

$$(40) \quad I_0 = - \frac{1}{2\pi} \iint_T G(p, q; \bar{p}, \bar{q}) \beta_1(\bar{p}, \bar{q}) d\bar{\omega}$$

ist auf T stetig und hat, ausser etwa in den Punkten (p_i, q_i) , stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung. In den ausgeschlossenen Punkten werden $\frac{\partial I_0}{\partial p}, \frac{\partial I_0}{\partial q}$ höchstens wie $\frac{1}{r_i^{1-\varepsilon}}$ ($0 < \varepsilon < 1$) unendlich. Den Betrachtungen des § 2 zufolge ist

$$(41) \quad \mathcal{A}_2 I_0 = \beta_1 - \frac{1}{\tau} \iint_T \beta_1 d\omega = \beta_1 - \frac{2\pi}{\tau} \left[- \sum_i^{1..m} \alpha_i + 2 m' \right].$$

Die Funktion $v(p, q)$ ist in T , ausser in den Punkten (p_i, q_i) , (p'_i, q'_i) , nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig.

In diesen Punkten verhält sich $v(p, q)$ wie die gesuchte Lösung $u(p, q)$. Endlich ist

$$(42) \quad \mathcal{A}_2 v = - \frac{2\pi}{\tau} \sum_i^{1..m} \alpha_i + \frac{4\pi m'}{\tau} + 2 \mathcal{A}_2 w_0 + \beta_1 - \frac{2\pi}{\tau} \left[- \sum_i^{1..m} \alpha_i + 2 m' \right] = \beta.$$

§ 4. Zurückführung auf ein Problem der Variationsrechnung und Bestimmung einer ausgezeichneten Folge von Vergleichsfunktionen.

Wir setzen, unter $u(p, q)$ wie in § 1 die gesuchte Lösung der Differentialgleichung (4) verstanden,

$$(43) \quad u = v + U$$

und erhalten

$$(44) \quad \mathcal{A}_2 U + \beta = k e^v e^U = K e^U.$$

Die Funktion K ist auf T , ausser etwa in den Punkten (p_i, q_i) , (p'_i, q'_i) , positiv und nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetig.

In diesen Punkten verhält sich K entsprechend wie

$$r_i^{\alpha_i} \bar{\gamma}_i(p, q), \quad r_i'^{-2} (\log r_i')^{-2} \bar{\gamma}'_i(p, q),$$

unter $\bar{\gamma}_i$ und $\bar{\gamma}'_i$ positive beschränkte Funktionen verstanden.

In einer gewissen Umgebung eines jeden der Punkte (p_i, q_i) , (p'_i, q'_i) gelten mithin die Ungleichheitsbeziehungen

$$(45) \quad \begin{aligned} 0 < \lambda^{(3)} < K(p, q) r_i^{-\alpha_i} < \lambda^{(4)} & \quad (i = 1, \dots, m), \\ 0 < \lambda^{(3)} < K(p, q) r_i'^2 (\log r_i')^2 < \lambda^{(4)} & \quad (i = 1, \dots, m'), \end{aligned}$$

unter $\lambda^{(3)}$, $\lambda^{(4)}$ positive Konstante verstanden.

Aus (33), (34), (35) und (45) ergibt sich die für das folgende wesentliche Ungleichheit

$$(46) \quad 0 < \lambda^{(5)} < \frac{\beta}{K} < \lambda^{(6)}.$$

Sie gilt für alle nicht singulären Punkte auf T ; $\lambda^{(5)}$ und $\lambda^{(6)}$ sind positive Konstante.

Auf dieselbe Differentialgleichung (44) führt, zunächst rein formell betrachtet, das folgende Variationsproblem. *Unter allen auf T beschränkten, mit etwaiger Ausnahme der Punkte (p_i, q_i) , (p'_i, q'_i) , nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen Funktionen $U(p, q)$, deren DIRICHLET'sches Integral $\iint_T A_1 U d\omega$ existiert, diejenige zu bestimmen, die das Integral*

$$(47) \quad I = \iint_T [A_1 U - 2\beta U + 2K e^U] d\omega$$

zum Minimum macht.

Man überzeugt sich zunächst leicht, dass die Werte des Integrals I , wenn wir für U alle möglichen auf T nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen Funktionen einsetzen, eine endliche untere Grenze d haben. In der Tat ist, unter a einen positiven Zahlwert verstanden, wie eine elementare Minimumbetrachtung lehrt,

$$(48) \quad \text{Min} [e^U - aU] = a(1 - \log a),$$

daher, ausser in den Punkten $(p_i, q_i), (p'_i, q'_i)$,

$$(49) \quad 2 K e^U - 2 \beta U = 2 K \left(e^U - \frac{\beta}{K} U \right) \geq 2 \beta \left(1 - \log \frac{\beta}{K} \right) > 2 \beta (1 - \log \lambda^{(6)})$$

und

$$(50) \quad \iint_T [\mathcal{A}_1 U - 2 \beta U + 2 K e^U] d\omega > 2 (1 - \log \lambda^{(6)}) \iint_T \beta d\omega = d'.$$

Zur wirklichen Bestimmung der unteren Grenze d kann man wie folgt vorgehen. Wir setzen

$$(51) \quad t_n(p, q) = \frac{c_0}{\sqrt{r}} + \sum_i^{1..n} \frac{c_i \varphi_i(p, q)}{\sqrt{\lambda_i}},$$

unter c_0, c_1, \dots, c_n zunächst noch unbestimmte Parameter verstanden. Es sei

$$(52) \quad \iint_T [\mathcal{A}_1 t_n - 2 \beta t_n + 2 K e^{t_n}] d\omega = Q(c_0, c_1, \dots, c_n) > d'.$$

Die Funktion $Q(c_0, c_1, \dots, c_n)$ ist stetig und hat nach (52) eine endliche untere Grenze d'_n . Da alle $Q(c_0, c_1, \dots, c_n)$ in $Q(c_0, c_1, \dots, c_{n+1})$ enthalten sind, ist gewiss

$$(53) \quad d'_{n+1} \leq d'_n.$$

Die Folge $d'_1 > d'_2 > d'_3 > \dots$ hat (52) zufolge eine endliche untere Grenze d . Diese ist zugleich die untere Grenze des Integrals I .¹ Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es eine auf T nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion

$$(54) \quad t_*(p, q) = \frac{b_0}{\sqrt{r}} + \sum_i^{1..n} b_i \frac{\varphi_i(p, q)}{\sqrt{\lambda_i}},$$

so dass

$$(55) \quad \iint_T [\mathcal{A}_1 t_* - 2 \beta t_* + 2 K e^{t_*}] d\omega = \sum_i^{1..n} b_i^2 + \iint_T [2 K e^{t_*} - 2 \beta t_*] d\omega < d$$

¹ Die im obigen zur Bestimmung von d benutzte Methode ist einem bekannten Verfahren von W. RITZ nachgebildet. Vgl. W. RITZ, »Über eine neue Methode in der Variationsrechnung«, Journal für Mathematik, B. 135, 1909, S. 1 u. ff.

wäre. Da die unendliche Reihe (54) gleichmässig konvergiert, könnte man μ so gross annehmen, dass

$$t_*^{(\mu)}(p, q) = \frac{b_0}{V\tau} + \sum_i^{1.. \mu} b_i \frac{\varphi_i(p, q)}{V\lambda_i}$$

gesetzt, immer noch

$$\iint_T [\mathcal{A}_1 t_*^{(\mu)} - 2\beta t_*^{(\mu)} + 2K e^{t_*^{(\mu)}}] d\omega < d < d'_\mu$$

ausfiele. Dies wäre aber im Widerspruch mit der Tatsache, dass d'_μ die untere Grenze aller Werte $Q(c_0, \dots, c_\mu)$ ist.

Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ eine Folge positiver, gegen Null konvergierender Zahlen. Wir nehmen $(n+1)$ Zahlen $z_{0n}, z_{1n}, \dots, z_{nn}$ der Ungleichheit

$$(56) \quad Q(z_{0n}, z_{1n}, \dots, z_{nn}) < d'_n + \varepsilon_n$$

gemäss, sonst aber willkürlich an und setzen

$$(57) \quad Q(z_{0n}, z_{1n}, \dots, z_{nn}) = d_n,$$

$$(58) \quad \frac{z_{0n}}{V\tau} + \sum_i^{1..n} \frac{z_{in}}{V\lambda_i} \varphi_i(p, q) = Z_n(p, q).$$

Offenbar ist

$$(59) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T [\mathcal{A}_1 Z_n - 2\beta Z_n + 2K e^{Z_n}] d\omega = d.$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass man von der Folge $Z_n(p, q)$ zu einer anderen Folge von Vergleichsfunktionen $U_n(p, q)$ übergehen kann, die eine zu (59) analoge Beziehung erfüllen und *in ihrer Gesamtheit dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke liegen.*

Betrachten wir den Ausdruck

$$K e^Z - \beta Z = K \left(e^Z - \frac{\beta}{K} Z \right) = KF(Z).$$

Es ist

$$\frac{dF}{dZ} = e^Z - \frac{\beta}{K},$$

daher

$$\frac{dF}{dZ} > 0 \text{ für } Z > \log \frac{\beta}{K},$$

$$\frac{dF}{dZ} < 0 \text{ für } Z < \log \frac{\beta}{K}.$$

Es sei H die grössere der beiden Zahlen

$$|\log \lambda^{(5)}|, \quad |\log \lambda^{(6)}|.$$

Dann ist gewiss

$$(60) \quad \frac{dF}{dZ} > 0 \text{ für } Z > H,$$

$$\frac{dF}{dZ} < 0 \text{ für } Z < -H,$$

daher

$$(61) \quad K e^Z - \beta Z > K e^H - \beta H \text{ für } Z > H,$$

$$(62) \quad K e^Z - \beta Z > K e^{-H} + \beta H \text{ für } Z < -H.$$

Betrachten wir jetzt die Vergleichsfunktion $Z_n(p, q)$. Ist auf T durchweg $Z_n(p, q) > H$, so setzen wir $U_n(p, q) = H$. Es ist dann

$$(63) \quad \iint_T \Delta_1 U_n d\omega = 0$$

sowie nach (61)

$$(64) \quad \iint_T (2 K e^{U_n} - 2 \beta U_n) d\omega = \iint_T 2 (K e^H - \beta H) d\omega < \iint_T 2 (K e^{Z_n} - \beta Z_n) d\omega,$$

somit

$$(65) \quad \iint_T [\Delta_1 U_n + 2 K e^{U_n} - 2 \beta U_n] d\omega < d_n.$$

Es sei zweitens $Z_n(p, q)$ nicht durchweg $> H$. Ist dann etwa im Punkte (p', q')

$$Z_n(p, q) > H,$$

so gibt es gewiss ein von einer geschlossenen analytischen Kurve begrenztes, den Punkt (p', q') in seinem Innern enthaltendes Flächenstück T^0 , so dass in T^0

$$Z_n(p, q) > H,$$

auf seinem Rande

$$Z_n(p, q) = H$$

ist. Ersetzt man in T^0 die Funktion $Z_n(p, q)$ durch H , so wird wie vorhin das Integral I verkleinert. Wäre $Z_n(p', q') < -H$, so hätte man in T^0 für $Z_n(p, q)$ den Wert $-H$ zu substituieren. Da Z_n regulär analytisch ist, ist die Anzahl der Gebiete T^0 jedenfalls endlich. In allen diesen Gebieten können wir Z_n durch H oder $-H$ ersetzen und erhalten eine stetige, abteilungsweise analytische Vergleichsfunktion, deren partielle Ableitungen erster Ordnung abteilungsweise stetig sind. Durch den bekannten Prozess der »Abrundung der Ecken« gelangt man sodann zu einer auf T regulär analytischen Funktion $U_n(p, q)$, die so beschaffen ist, dass

$$(66) \quad |U_n(p, q)| \leq H,$$

$$(67) \quad \iint_T [\mathcal{A}_1 U_n - 2\beta U_n + 2Ke^{U_n}] d\omega < d_n$$

ist.

§ 5. Bestimmung einer speziellen Grenzfunktion.

Wir setzen

$$(68) \quad U_n(p, q) = \frac{u_{0n}}{\sqrt{r}} + \sum_i^{1..n} \frac{u_{in}}{\sqrt{\lambda_i}} \varphi_i(p, q),$$

$$(69) \quad \iint_T [\mathcal{A}_1 U_n - 2\beta U_n + 2Ke^{U_n}] d\omega = \delta_n.$$

Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = d,$$

ferner für alle n nach (66)

$$(70) \quad \iint_T \mathcal{A}_1 U_n d\omega \leq \delta_n + 2H \iint_T \beta d\omega + 2e^H \iint_T K d\omega < d^* \quad (d^* = \text{Konstante}),$$

somit nach (25) und (68)

$$(71) \quad \sum_i^{1..n} u_{in}^2 < d^*,$$

$$(72) \quad |u_{in}| < \sqrt{d^*} \quad (i, n = 1, 2, \dots).$$

Andererseits ist nach (66)

$$(73) \quad |u_{0n}| = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left| \iint_T U_n(p, q) d\omega \right| \leq H \sqrt{\tau} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Mit Hilfe des bekannten Diagonalverfahrens kann man aus $U_n(p, q)$ eine Teilfolge $V_n(p, q)$ ($n = 1, 2, \dots$):

$$(74) \quad V_n(p, q) = \frac{v_{0n}}{\sqrt{\tau}} + \sum_i^{1..n} \frac{v_{in}}{\sqrt{\lambda_i}} \varphi_i(p, q)$$

aussondern, so dass

$$(75) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_{in} = v_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

existiert. Offenbar ist

$$(76) \quad |V_n(p, q)| \leq H, \quad \sum_i^{1..n} v_{in}^2 < d^*, \quad |v_0| \leq H \sqrt{\tau}.$$

Es ist ferner für alle m

$$\sum_i^{1..m} v_{in}^2 < d^* \quad (n = 1, 2, \dots),$$

daher

$$\sum_i^{1..m} v_i^2 \leq d^*$$

und

$$(77) \quad \sum_i^{1..n} v_i^2 \leq d^*.$$

Wir setzen

$$(78) \quad \iint_T [\mathcal{A}_1 V_n - 2\beta V_n + 2K e^{V_n}] d\omega = \delta'_n.$$

Dann ist

$$(79) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta'_n = d.$$

Betrachten wir jetzt das Doppelintegral

$$(80) \quad I_1^{(n)} = \iint_T G(p_0, q_0; p, q) K(p, q) e^{V_n(p, q)} d\omega$$

und beweisen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1^{(n)}$$

in jedem die Punkte (p'_i, q'_i) nicht enthaltenden Teile des Gebietes T existiert und eine daselbst stetige Funktion darstellt.

Wir schliessen die Punkte (p_i, q_i) , (p'_i, q'_i) aus dem Gebiete T durch beliebige geschlossene, doppelpunktlose, einander weder schneidende noch berührende analytische Kurven C_i, C'_i aus. Die von diesen begrenzten kreisförmigen Gebiete seien mit T_i, T'_i bezeichnet. Ihre Flächeninhalte seien τ_i, τ'_i . Wir setzen zur Abkürzung $\sum T_i + \sum T'_i = T_0$. Es ist dann, wenn T^* ein beliebiges die Punkte (p'_i, q'_i) nicht enthaltendes Teilgebiet von T bezeichnet, für alle (p_0, q_0) in T^*

$$(81) \quad I_1^{(n)} = \iint_T G(p_0, q_0; p, q) K(p, q) e^{V_n(p, q)} d\omega = \iint_{T_0} + \iint_{T-T_0} = I_2^{(n)} + I_3^{(n)}.$$

Für alle n ist nach (76)

$$(82) \quad |I_2^{(n)}| < e^H \iint_{T_0} |G(p_0, q_0; p, q)| K(p, q) d\omega.$$

Man kann gewiss T_0 so klein wählen, dass für alle (p_0, q_0) in T^* und alle n

$$(83) \quad |I_2^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{4}$$

wird, unter ε einen beliebig kleinen positiven Wert verstanden.

Es ist ferner

$$(84) \quad I_3^{(n+\nu)} - I_3^{(n)} = \iint_{T-T_0} G(p_0, q_0; p, q) K(p, q) \frac{e^{V_{n+\nu}} - e^{V_n}}{V_{n+\nu} - V_n} (V_{n+\nu} - V_n) d\omega,$$

somit der SCHWARZ'schen Ungleichheit gemäss

$$(85) \quad |I_3^{(n+\nu)} - I_3^{(n)}|^2 < \iint_{T-T_0} [G(p_0, q_0; p, q) K(p, q) e^{V_{n+\nu} + \theta(p, q)(V_{n+\nu} - V_n)}]^2 d\omega \iint_{T-T_0} [V_{n+\nu} - V_n]^2 d\omega,$$

$0 < \theta(p, q) < 1$

oder a fortiori, wenn man sich das an zweiter Stelle stehende Doppelintegral über T erstreckt denkt, nach (26)

$$(86) \quad |I_3^{(n+\nu)} - I_3^{(n)}|^2 < e^{2H} \iint_{T-T_0} [G(p_0, q_0; p, q) K(p, q)]^2 d\omega \left\{ \frac{1}{\tau} [v_{0, n+\nu} - v_{0, n}]^2 + \sum_i^{1..N} \frac{1}{\lambda_i} [v_{i, n+\nu} - v_{i, n}]^2 \right\}.$$

Ich behaupte, man kann nach erfolgter Wahl der Kurven C_i, C'_i den Index n so hoch annehmen, dass für alle ν und alle (p_0, q_0) in T^*

$$(87) \quad |I_3^{(n+\nu)} - I_3^{(n)}|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

wird.

Es sei etwa

$$(88) \quad L = \text{Max} \iint_{T-T_0} e^{2H} [G(p_0, q_0; p, q) K(p, q)]^2 d\omega$$

in T^* . Es ist nun

$$(89) \quad \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{\tau} [v_{0, n+\nu} - v_{0, n}]^2 + \sum_i^{1..N} \frac{1}{\lambda_i} [v_{i, n+\nu} - v_{i, n}]^2 = \frac{1}{\tau} [v_{0, n+\nu} - v_{0, n}]^2 + \sum_i^{1..N} + \sum_{i>N} < \\ &< \frac{1}{\tau} [v_{0, n+\nu} - v_{0, n}]^2 + \sum_i^{1..N} + \frac{2}{\lambda_{N+1}} \sum_i^{1..N} [v_{i, n+\nu}^2 + v_{i, n}^2] < \frac{1}{\tau} [v_{0, n+\nu} - v_{0, n}]^2 + \\ &+ \sum_i^{1..N} \frac{1}{\lambda_i} [v_{i, n+\nu} - v_{i, n}]^2 + \frac{4d^*}{\lambda_{N+1}}. \end{aligned}$$

Da

$$(90) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{L_i} = 0$$

ist, kann man wegen (75) n gewiss so gross wählen, dass für alle ν

$$|\sigma| < \frac{\varepsilon^2}{4L}$$

wird. Alsdann ist

$$(91) \quad |I_3^{(n+\nu)} - I_3^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und nach (81) und (83) für alle (p_0, q_0) in T^*

$$(92) \quad |I_1^{(n+\nu)} - I_1^{(n)}| < |I_2^{(n)}| + |I_2^{(n+\nu)}| + |I_3^{(n)} - I_3^{(n+\nu)}| < \varepsilon.$$

Also konvergiert $I_1^{(n)}$ für alle (p_0, q_0) in T^* gleichmässig gegen eine in T^* stetige Funktion.

Wir setzen

$$(93) \quad W(p_0, q_0) = \frac{v_0}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T G(p_0, q_0; p, q) [K(p, q) e^{V_n(p, q)} - \beta(p, q)] d\omega.$$

Die Funktion $W(p_0, q_0)$ ist in jedem (p'_i, q'_i) ($i = 1, \dots, m'$) nicht enthaltenden Teile des Gebietes T stetig. In der Umgebung der Punkte (p'_i, q'_i) lässt sich $W(p_0, q_0)$ in der Form $r_i^{1-\varepsilon} \times$ beschr. Funktion ($\varepsilon =$ beliebig kleine positive Zahl) darstellen. Man findet dies, wenn man das Integral (93) in geeigneter Weise abschätzt.¹

In ganz ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass die Grenzwerte

$$(94) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T \beta V_n d\omega, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T K e^{V_n} d\omega, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T K e^{V_n} \varphi_i d\omega \quad (i = 1, 2, \dots)$$

existieren. Aus (78), (79) und (94) folgt sofort, dass auch

$$(95) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T \mathcal{A}_1 V_n d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^{1 \dots \infty} v_{in}^2$$

existiert.

¹ Beispiele für derartige Abschätzungen findet man bei PLEMEL, *Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1904, S. 337–411, insb. S. 364.

Bestimmen wir jetzt die FOURIER'schen Koeffizienten der Funktion $W(p_0, q_0)$.
Nach (11) ist zunächst, wie man leicht sieht,

$$(96) \quad \frac{1}{V_r} \iint_T W(p_0, q_0) d\omega_0 = v_0.$$

Es ist ferner für $i \geq 1$

$$(97) \quad \begin{aligned} \iint_T W(p_0, q_0) \varphi_i(p_0, q_0) d\omega_0 &= \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T \varphi_i(p_0, q_0) d\omega_0 \left[\iint_T G(p_0, q_0; p, q) \{K e^{V_n} - \beta\} d\omega \right] = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T (K e^{V_n} - \beta) d\omega \left[\iint_T G(p_0, q_0; p, q) \varphi_i(p_0, q_0) d\omega_0 \right]. \end{aligned}$$

Die Vertauschung der Reihenfolge des Grenzüberganges und der Integration sowie derjenigen der beiden sukzessiven Integrationen ist nach bekannten Sätzen gestattet.¹ Man beachte, dass $I_1^{(n)}$ in T^* gleichmässig konvergiert und in der Umgebung eines jeden der Punkte (p'_i, q'_i) für alle n

$$|I_1^{(n)}| < \text{Const. } r_i^{-\varepsilon}$$

ist, unter ε eine beliebig kleine positive Zahl verstanden.

Nach (16) ist mithin

$$(98) \quad \iint_T W(p_0, q_0) \varphi_i(p_0, q_0) d\omega_0 = -\frac{1}{\lambda_i} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T [K e^{V_n} - \beta] \varphi_i d\omega.$$

§ 6. Beweis, dass die in § 5 bestimmte Funktion der Differentialgleichung (44) genügt.

Aus (78), (79) und (95) folgt

$$(99) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^{1..n} v_i^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T [2 K e^{V_n} - 2 \beta V_n] d\omega = d.$$

¹ Vgl. z. B. PLEMEIJ, a. a. O. S. 362.

Es sei ϱ_0 eine dem absoluten Betrage nach beliebig kleine Zahl und

$$(100) \quad R_n(p, q) = V_n(p, q) + \varrho_0 \frac{\varphi_l(p, q)}{\sqrt{\lambda_l}} = \frac{v_{0n}}{\sqrt{\tau}} + \sum_i^{1..n} \frac{v_{in}}{\sqrt{\lambda_i}} \varphi_i + \varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}} \quad (l > 0).$$

Offenbar ist

$$(101) \quad \iint_T [\mathcal{A}_1 R_n + 2K e^{R_n} - 2\beta R_n] d\omega \geq d$$

oder anders geschrieben

$$(102) \quad \sum_i^{1..n} v_{in}^2 + 2\varrho_0 v_{ln} + \varrho_0^2 v_{ln}^2 + \iint_T \left[2K e^{\varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}}} e^{V_n} - 2\beta \left(V_n + \varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}} \right) \right] d\omega \geq d.$$

Wie in § 5 lässt sich zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T K e^{\varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}}} e^{V_n} d\omega$$

existiert. Also kann man in (102) zur Grenze $n = \infty$ übergehen. Man erhält

$$(103) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^{1..n} v_{in}^2 + 2\varrho_0 v_l + \varrho_0^2 v_l^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T \left[2K e^{\varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}}} e^{V_n} - 2\beta \left(V_n + \varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}} \right) \right] d\omega \geq d.$$

Aus (103) und (99) ergibt sich

$$(104) \quad 2\varrho_0 v_l + \varrho_0^2 v_l^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T \left[2K e^{V_n} \left(e^{\varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}}} - 1 \right) - 2\beta \varrho_0 \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}} \right] d\omega \geq 0$$

oder

$$(105) \quad 2\varrho_0 v_l + \varrho_0^2 v_l^2 + \varrho_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T \left[2K e^{V_n} \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}} - 2\beta \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}} \right] d\omega + \varrho_0^2 P(\varrho_0) \geq 0.$$

$P(\varrho_0)$ ist eine nur von ϱ_0 abhängige, für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen ϱ_0 dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Schranke gelegene Grösse. Man findet dies leicht, wenn man beachtet, dass die unendliche Reihe

$$e^{\frac{\varrho_0 \varphi_l}{V \lambda_l}} - 1 = \varrho_0 \frac{\varphi_l}{V \lambda_l} + \frac{1}{2!} \left(\varrho_0 \frac{\varphi_l}{V \lambda_l} \right)^2 + \dots$$

gleichmässig konvergiert und für alle n

$$|V_n| \leq H$$

ist.

Aus (105) folgt, da das Vorzeichen von ϱ_0 beliebig ist, in bekannter Weise

$$(106) \quad v_l = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{V \lambda_l} \iint_T (K e^{V_n} - \beta) \varphi_l d\omega \quad (l = 1, 2, \dots).$$

Es sei ferner

$$(107) \quad Q_n(p, q) = V_n(p, q) + \frac{\varrho_0}{V \tau}.$$

Es ist dann

$$(108) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^{1..n} v_{in}^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T \left[2 K e^{V_n + \frac{\varrho_0}{V \tau}} - 2 \beta \left(V_n + \frac{\varrho_0}{V \tau} \right) \right] d\omega \geq d.$$

Hieraus und aus (99) folgt wie vorhin

$$(109) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T K e^{V_n} d\omega = \iint_T \beta d\omega.$$

Aus (98) und (106) schliesst man, dass

$$(110) \quad \iint_T W(p_0, q_0) \varphi_l(p_0, q_0) d\omega = \frac{v_l}{V \lambda_l} \quad (l = 1, 2, \dots)$$

ist. Die Werte

$$(111) \quad v_0, \frac{v_l}{V \lambda_l} \quad (l = 1, 2, \dots)$$

sind nach (96) und (110) FOURIER'sche Koeffizienten der auf T , ausser etwa in den Punkten (p'_i, q'_i) , stetigen Funktion $W(p_0, q_0)$. Da W , wie wir in § 5 gesehen haben, in der Umgebung der Punkte (p'_i, q'_i) höchstens wie $r_i^{-\varepsilon}$ (ε beliebig klein > 0) unendlich wird, so ist das Doppelintegral $\iint_T W^2 d\omega$ gewiss vorhanden.

Nach (74) und (III) ist

$$(III2) \quad \iint_T (W - V_n)^2 d\omega = \frac{1}{\tau} (v_0 - v_{0n})^2 + \sum_i^{1..n} \frac{(v_i - v_{in})^2}{\lambda_i}.$$

Hieraus folgt aber nach (75), (76) und (77) sofort

$$(III3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T (W - V_n)^2 d\omega = 0.$$

Da für alle n

$$|V_n| \leq H$$

ist, so ist in allen Stetigkeitspunkten der Funktion W sicher

$$(III4) \quad |W| \leq H.$$

Wäre nämlich in einem Stetigkeitspunkte (p^*, q^*) auf T

$$(III5) \quad W(p^*, q^*) > H,$$

so gäbe es auch ein (p^*, q^*) enthaltendes Gebiet, in dem etwa

$$(III6) \quad W(p, q) - H \geq h_0 > 0$$

wäre. Es sei τ^* der Flächeninhalt dieses Gebietes. Dann würde aber für alle n gewiss

$$(III7) \quad \iint_T (W - V_n)^2 d\omega > h_0^2 \tau^*,$$

sein, was nach (III3) unmöglich ist.

Die Funktion $W(p, q)$ ist somit auf T beschränkt und, ausser höchstens in den Punkten (p'_i, q'_i) , stetig.

Man überzeugt sich nunmehr leicht durch eine Betrachtung, die der in § 5 durchgeführten analog ist, dass

$$(III8) \quad \iint_T K e^W d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T K e^{V_n} d\omega, \quad \iint_T \beta e^W d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T \beta e^{V_n} d\omega,$$

$$(119) \quad \iint_T (K e^W - \beta) \varphi_l d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_T (K e^{V_n} - \beta) \varphi_l d\omega = -v \sqrt{\lambda_l} \quad (l = 1, 2, \dots),$$

$$\iint_T (K e^W - \beta) d\omega = 0$$

ist. Es ist nämlich beispielsweise

$$(120) \quad D_n = \iint_T (K e^W - \beta) \varphi_l d\omega - \iint_T (K e^{V_n} - \beta) \varphi_l d\omega = \iint_{T-T_0} K \frac{e^W - e^{V_n}}{W - V_n} (W - V_n) \varphi_l d\omega + \iint_{T_0} K (e^W - e^{V_n}) \varphi_l d\omega = D'_n + D''_n,$$

$$(121) \quad |D'_n|^2 < \iint_{T-T_0} K^2 e^{2[V_n + \theta_1(p, q)(W - V_n)]} \varphi_l^2 d\omega \iint_{T-T_0} (W - V_n)^2 d\omega < e^{2H} \iint_{T-T_0} K^2 \varphi_l^2 d\omega \iint_T (W - V_n)^2 d\omega, \quad 0 < \theta_1(p, q) < 1$$

und

$$(122) \quad |D''_n| < 2 e^H \iint_{T_0} K |\varphi_l| d\omega.$$

Man kann nun gewiss den Flächeninhalt von T_0 so klein wählen, dass

$$|D''_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Hierauf wird n so gross, etwa $n > \bar{\lambda}$, angenommen, dass

$$|D'_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

ausfällt. Dies ist nach (113) ohne weiteres möglich. Man erhält so für alle $n > \bar{\lambda}$

$$(123) \quad |D_n| < \varepsilon, \text{ daher } \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0.$$

Es sei jetzt

$$(124) \quad W^*(p_0, q_0) = \frac{v_0}{V\tau} - \frac{1}{2\pi} \iint_T G(p_0, q_0; p, q) [K(p, q) e^{W(p, q)} - \beta(p, q)] d\omega.$$

Die Funktion $W^*(p_0, q_0)$ ist auf T , ausser in den Punkten (p'_i, q'_i) , wo sie sich wie $r^{1-\varepsilon} \times$ beschr. Funktion ($\varepsilon =$ einer beliebig kleinen positiven Zahl) verhält, stetig. Für die FOURIER'schen Koeffizienten von $W^*(p_0, q_0)$ finden wir in ähnlicher Weise wie vorhin die Werte

$$(125) \quad \frac{1}{V\tau} \iint_T W^*(p_0, q_0) d\omega = v_0,$$

$$(126) \quad \iint_T W^*(p_0, q_0) \varphi_l(p_0, q_0) d\omega = -\frac{1}{\lambda_l} \iint_T (K e^W - \beta) \varphi_l d\omega = \frac{v_l}{V\lambda_l} \quad (l = 1, 2, \dots).$$

Die auf T , ausser höchstens in den Punkten (p'_i, q'_i) , stetigen Funktionen $W(p_0, q_0)$ und $W^*(p_0, q_0)$ haben durchweg gleiche FOURIER'sche Koeffizienten.¹ Also ist, wie aus (26) leicht geschlossen werden kann, durchweg

$$(127) \quad W(p_0, q_0) \equiv W^*(p_0, q_0),$$

somit

$$(128) \quad W(p_0, q_0) = \frac{v_0}{V\tau} - \frac{1}{2\pi} \iint_T G(p_0, q_0; p, q) [K(p, q) e^{W(p, q)} - \beta(p, q)] d\omega.$$

Nach bekannten Sätzen (vergl. § 2) hat $W(p, q)$ auf T , ausser etwa in der Umgebung der Punkte (p_i, q_i) und (p'_i, q'_i) , stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung und genügt der Differentialgleichung

$$(129) \quad \mathcal{A}_2 W = K e^W - \beta - \frac{1}{\tau} \iint_T (K e^W - \beta) d\omega.$$

Nach (129) ist daher

$$(130) \quad \mathcal{A}_2 W + \beta = K e^W.$$

Die Funktion

$$(131) \quad u = W + v$$

ist eine Lösung unseres Problems.

¹ Die Integrale $\iint_T W^2 d\omega$ und $\iint_T W^{*2} d\omega$ existieren.

§ 7. Eindeutigkeit der Lösung.

Wir nehmen jetzt zunächst $m' = 0$ an, setzen also voraus, dass nur Unstetigkeitspunkte (p_i, q_i) ($i = 1, \dots, m$), in deren Umgebung die Lösung $u(p, q)$ sich wie $\alpha_i \log r_i$ ($\alpha_i > -2$) verhält, vorliegen. Nach bekannten Sätzen sind, wenn $-1 < \alpha_i$ ist, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial W}{\partial p}, \frac{\partial W}{\partial q}$ in (p_i, q_i) stetig.

Ist $-2 < \alpha_i < -1$ oder $\alpha_i = -1$, so sind entsprechend die Ausdrücke

$$(132) \quad \left\{ \left| \frac{\partial W}{\partial p} \right| + \left| \frac{\partial W}{\partial q} \right| \right\} r_i^{-\alpha_i - 1} \quad \text{oder} \quad \left\{ \left| \frac{\partial W}{\partial p} \right| + \left| \frac{\partial W}{\partial q} \right| \right\} |\log r_i|^{-1}$$

in der Umgebung des Punktes (p_i, q_i) beschränkt.¹

Es soll jetzt bewiesen werden, dass die vorhin gefundene Lösung unseres Problems eindeutig ist. Genauer: es gibt keine von $u(p, q)$ verschiedene, ausser in den Punkten (p_i, q_i) , nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung $u'(p, q)$ der Differentialgleichung (4), die sich in jenen Punkten entsprechend wie $\alpha_i \log r_i$ verhält, wenn überdies vorausgesetzt wird, dass die Funktionen

$$(133) \quad u'(p, q) - \alpha_i \log r_i = W_i(p, q) \quad (i = 1, \dots, m)$$

in der Umgebung der Punkte (p_i, q_i) ($i = 1, \dots, m$) stetig sind und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial W_i}{\partial p}, \frac{\partial W_i}{\partial q}$ sich daselbst wie $\frac{\partial W}{\partial p}, \frac{\partial W}{\partial q}$ verhalten.

Es sei im Gegensatz zu unserer Behauptung $u'(p, q)$ von $u(p, q)$ verschieden. Wir setzen

$$(134) \quad u(p, q) - u'(p, q) = u''(p, q).$$

$u''(p, q)$ genügt der Differentialgleichung

$$(135) \quad \mathcal{A}_2 u'' = k e^{u'} (e^{u''} - 1) = K'' (e^{u''} - 1).$$

In den Punkten (p_i, q_i) ist u'' stetig; die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u''}{\partial p}, \frac{\partial u''}{\partial q}$ verhalten sich daselbst wie $r_i^{1+\alpha_i}$, die, ausser höchstens in (p_i, q_i) , positive Funktion K'' wie $r_i^{\alpha_i}$.² Genauer gesagt, es ist z. B. $K'' r_i^{-\alpha_i}$ in der Umgebung von (p_i, q_i) beschränkt.

Ist die stetige Funktion $u''(p, q)$ nicht identisch gleich Null, so muss sie auf T positives Maximum oder negatives Minimum oder auch beides annehmen.

¹ Vgl. die Fussnote auf S. 20.

² Wir setzen, um Vorstellungen zu fixieren, $-2 < \alpha_i < -1$ ($i = 1, \dots, m$) voraus.

Es möge etwa in (p^*, q^*) ein positives Maximum liegen und es sei (p^*, q^*) zunächst von (p_i, q_i) ($i = 1, \dots, m$) verschieden. Alsdann ist

$$(136) \quad \begin{aligned} K''(p^*, q^*) (e^{u''(p^*, q^*)} - 1) &> 0, \\ \mathcal{A}_2 u''(p^*, q^*) &\leq 0, \end{aligned}$$

was wegen (135) nicht möglich ist.

Es bleibt nur noch der Fall zu untersuchen, dass positives Maximum in einem der ausgeschlossenen Punkte, etwa in (p_1, q_1) , eintritt. Wir beschreiben um (p_1, q_1) auf T eine geschlossene, doppelpunktlose, stetig gekrümmte Kurve \mathfrak{C} und bezeichnen das von ihr begrenzte, (p_1, q_1) enthaltende Gebiet mit \mathfrak{X} , die zu \mathfrak{X} gehörige, auf \mathfrak{C} verschwindende, in \mathfrak{X} positive GREEN'sche Funktion der Differentialgleichung $\mathcal{A}_2 u = 0$ mit \mathfrak{G} . Wir wählen \mathfrak{C} so nahe an (p_1, q_1) , dass in \mathfrak{X} durchweg $u''(p, q) > 0$ ausfällt. Nach bekannten Sätzen folgt mit Rücksicht auf das Verhalten der partiellen Ableitungen $\frac{\partial u''}{\partial p}$, $\frac{\partial u''}{\partial q}$ in (p_1, q_1) die Formel

$$(137) \quad u''(p, q) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{X}} K''(\bar{p}, \bar{q}) (e^{u''(\bar{p}, \bar{q})} - 1) \mathfrak{G}(p, q; \bar{p}, \bar{q}) d\bar{\omega} + t''(p, q),$$

unter t'' diejenige in \mathfrak{X} reguläre Lösung der Differentialgleichung $\mathcal{A}_2 u = 0$ verstanden, die auf \mathfrak{C} dieselben Werte wie $u''(p, q)$ annimmt.

Da in \mathfrak{X} , ausser höchstens in (p_1, q_1) ,

$$(138) \quad \begin{aligned} K''(\bar{p}, \bar{q}) (e^{u''(\bar{p}, \bar{q})} - 1) &> 0, \quad \mathfrak{G}(p, q; \bar{p}, \bar{q}) > 0, \\ t''(p, q) &< \text{Max } u''(p, q) \text{ auf } \mathfrak{C} \end{aligned}$$

ist, so ist nach (137) gewiss

$$(139) \quad u''(p_1, q_1) < \text{Max } u''(p, q) \text{ auf } \mathfrak{C},$$

womit der Eindeutigkeitssatz in dem besonderen Falle $m' = 0$ bewiesen ist.

Es ist leicht zu zeigen, dass die Funktion $W(p, q)$ das Minimum des Doppelintegrals I realisiert, d. h. dass

$$\iint_T [\mathcal{A}_1 W - 2\beta W + 2K e^W] d\omega = d$$

ist.

Den Sätzen am Schluss des § 2 gemäss ist mit Rücksicht auf (110) zunächst

$$\iint_T \mathcal{A}_1 W d\omega = \sum_i^{1, \dots, \infty} v_i^2.$$

Es ist ferner für alle μ

$$\sum_i^{1.. \mu} v_i^2 = \sum_i^{1.. \mu} \lim_{n \rightarrow \infty} v_{in}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^{1.. \mu} v_{in}^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^{1.. \infty} v_{in}^2,$$

daher

$$\iint_T \mathcal{A}_1 W d\omega = \sum_i^{1.. \infty} v_i^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^{1.. \infty} v_{in}^2.$$

Hieraus sowie aus (99) und (118) folgt

$$I' = \iint_T [\mathcal{A}_1 W - 2\beta W + 2K e^W] d\omega \leq d.$$

Ich behaupte, auf der rechten Seite gilt das Gleichheitszeichen.

Es sei im Gegensatz hierzu $I' < d$. Man kann dann, wie man sich leicht überzeugt, von der Funktion $W(p, q)$ durch geeignete »Abrundung« der in (p_i, q_i) vorliegenden Spitzen zu einer Funktion $W'(p, q)$ übergehen, die auf T durchweg stetig ist und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat, so dass

$$\iint_T [\mathcal{A}_1 W' - 2\beta W' + 2K e^{W'}] d\omega < d$$

ausfällt. Dies ist aber nicht möglich, da ja d die untere Grenze der Werte des Doppelintegrals I für alle auf T nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetigen Funktionen ist. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Es sei jetzt $m' \neq 0$. Die Funktion $W(p, q)$ ist alsdann auf T beschränkt und, ausser etwa in den Punkten (p'_i, q'_i) , stetig.

Sie gestattet ferner die Darstellung

$$(140) \quad W(p, q) = \text{Const} - \frac{1}{2\pi} \iint_T G(p, q; \bar{p}, \bar{q}) [K(\bar{p}, \bar{q}) e^{W(\bar{p}, \bar{q})} - \beta(\bar{p}, \bar{q})] d\bar{\omega}.$$

Es sei \mathfrak{C} eine geschlossene, doppelpointlose, stetig gekrümmte Kurve um einen der Punkte (p'_i, q'_i) , etwa um (p'_1, q'_1) . Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass das von \mathfrak{C} begrenzte, (p'_1, q'_1) enthaltende Gebiet \mathfrak{X} weitere singuläre Punkte weder in seinem Innern noch auf dem Rande enthält, und bezeichnen mit \mathfrak{G} wie vorhin die zu \mathfrak{X} gehörige auf \mathfrak{C} verschwindende, in \mathfrak{X} positive GREEN'sche Funktion der Differentialgleichung $\mathcal{A}_2 u = 0$. Wir setzen

$$(141) \quad W(p, q) = -\frac{1}{2\pi} \iint_T \mathfrak{G}(p, q; \bar{p}, \bar{q}) [K(\bar{p}, \bar{q}) e^{W(\bar{p}, \bar{q})} - \beta(\bar{p}, \bar{q})] d\bar{\omega} + I_5 = I_4 + I_5.$$

Man überzeugt sich leicht, dass I_5 in \mathfrak{X} und auf \mathfrak{E} [insbesondere also auch im Punkte (p'_1, q'_1)] stetig ist und in \mathfrak{X} stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat. Da überdies

$$(142) \quad \mathcal{A}_2 I_4 = K e^W - \beta$$

ist, so ist

$$(143) \quad \mathcal{A}_2 I_5 = 0.$$

Da I_4 augenscheinlich auf \mathfrak{E} verschwindet, so ist I_5 diejenige in \mathfrak{X} reguläre Lösung der Differentialgleichung $\mathcal{A}_2 u = 0$, die auf \mathfrak{E} dieselben Werte wie $W(p, q)$ annimmt.

Den Eindeutigkeitssatz sprechen wir jetzt so aus. Es gibt keine von $u(p, q)$ verschiedene, auf T , ausser in den Punkten (p_i, q_i) , (p'_i, q'_i) , nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung $u'(p, q)$ der Differentialgleichung (4), die in der Umgebung dieser Punkte entsprechend wie

$$(144) \quad \alpha_i \log r_i, \quad -2 \log r'_i - 2 \log |\log r'_i|$$

unendlich wird, wenn ferner vorausgesetzt wird, dass

$$(145) \quad u'(p, q) - v(p, q) = W'(p, q)$$

sich in den Punkten (p_i, q_i) in der vorhin auseinandergesetzten Weise verhält, in der Umgebung der Punkte (p'_i, q'_i) beschränkt ist und eine Darstellung von der Form (141) gestattet.

Dies ist, wie man sich ohne Schwierigkeit überzeugt, sicher der Fall, wenn z. B. das Integral

$$(146) \quad \int \left| \frac{\partial}{\partial n} W'(p, q) \right| ds,$$

erstreckt über einen um (p'_i, q'_i) ($i = 1, \dots, m'$) als Mittelpunkt gezeichneten Kreis in der Ebene (p, q) , mit dem Radius dieses Kreises zugleich gegen Null konvergiert.

Der Beweis ist höchst einfach. Wir setzen wieder

$$(147) \quad u(p, q) - u'(p, q) = u''(p, q).$$

Wie vorhin findet man, dass $u''(p, q)$ auf T , ausser vielleicht in den Punkten (p'_i, q'_i) , weder positives Maximum noch negatives Minimum haben kann. In

der Umgebung der Punkte (p'_i, q'_i) gestattet aber $u''(p, q)$ eine Darstellung von der Form (137). Also ist auch dort positives Maximum oder negatives Minimum unmöglich. Damit ist die Eindeutigkeit der Lösung definitiv bewiesen.

Alle bisherigen Betrachtungen gelten, wie man unmittelbar sieht, ohne jede Änderung, wenn die unseren Untersuchungen zugrunde liegende Fläche eine endliche Anzahl Windungspunkte hat.

§ 8. Der besondere Fall einer geschlossenen Riemann'schen Fläche.

Herr PICARD hat seinen Untersuchungen über die Differentialgleichung $\mathcal{A}u = ke^u$ eine zu einer beliebigen algebraischen Funktion gehörige über der (x, y) Ebene ausgebreitete m_2 -blättrige RIEMANN'sche Fläche F zugrunde gelegt.¹ Es seien $(x_1, y_1), \dots, (x_{m_1}, y_{m_1})$ beliebige im Endlichen gelegene Punkte von F ,² $k(x, y)$ eine auf F beschränkte, im Endlichen nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion. Es wird eine in F , ausser in den Punkten $(x_i, y_i) (i = 1, \dots, m_1)$ und den der Einfachheit halber als einfach vorauszusetzenden unendlich fernen Punkten, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung $u_*(x, y)$ der Differentialgleichung

$$(148) \quad \mathcal{A}u_* = ke^{u_*}$$

gesucht, die sich in (x_i, y_i) wie

$$(149) \quad \alpha_i \log R_i, R_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \quad (i = 1, \dots, m_1), \alpha_i > -2,$$

in den m_2 unendlich fernen Punkten aber entsprechend wie

$$(150) \quad -\delta_i \log R, R^2 = x^2 + y^2 \quad (i = 1, \dots, m_2), \delta_i > 2$$

verhält. Es wird hierbei

$$(151) \quad \sum \alpha_i + \sum \delta_i < 0$$

vorausgesetzt.

Die Bestimmung der Lösung $u_*(x, y)$ lässt sich, wie wir jetzt zeigen wollen, ohne wesentliche Modifikationen nach der in den vorhergehenden Paragraphen auseinandergesetzten Methode durchführen.

¹ Vgl. die auf S. 2 zitierten Arbeiten.

² Der Einfachheit halber werden (x_i, y_i) von den Windungspunkten verschieden vorausgesetzt.

Der Einfachheit halber nehmen wir $m_2 = 1$ an, legen somit der Betrachtung die schlichte (x, y) -Ebene zugrunde. In dem unendlich fernen Punkte soll sich die gesuchte Lösung wie $-\delta \log R +$ beschr. Funktion ($\delta > 2$) verhalten. Es ist ferner

$$\sum \alpha_i + \delta < 0.$$

Es sei T irgendeine einfach zusammenhängende, geschlossene, singularitätenfreie analytische Fläche, deren Punkte auf ein System isothermischer Parameter (p, q) bezogen sind. Die Gebiete F und T denken wir uns aufeinander eindeutig umkehrbar und bis auf den unendlich fernen Punkt konform abgebildet. Es mögen hierbei die Punkte (p_i, q_i) ($i = 1, \dots, m_1$) den Punkten (x_i, y_i) , der Punkt (p'', q'') dem unendlich fernen Punkte entsprechen. Denkt man sich die Lösung $u_*(x, y)$ der konformen Beziehung gemäss auf die Fläche T verpflanzt und setzt man

$$(152) \quad u_*(x, y) = u(p, q),$$

so findet man, dass die Funktion $u(p, q)$ sich auf T , ausser in den Punkten (p_i, q_i) ($i = 1, \dots, m_1$), (p'', q'') , nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig verhält und einer Differentialgleichung von der Form

$$(153) \quad \mathcal{A}_2 u = k' e^u$$

genügt. Die Funktion k' ist, ausser in (p'', q'') , positiv und nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. In der Umgebung des Punktes (p'', q'') kann man

$$(154) \quad k'(p, q) = r''^{-4} \psi'(p, q), \quad r''^2 = (p - p'')^2 + (q - q'')^2$$

setzen, unter ψ' eine beschränkte positive Funktion verstanden. In der Umgebung der Punkte (p_i, q_i) ($i = 1, \dots, m_1$), (p'', q'') verhält sich $u(p, q)$ entsprechend wie

$$(155) \quad \alpha_i \log r_i + \psi_i(p, q), \quad \alpha_i > -2,$$

$$\delta \log r'' + \psi''(p, q), \quad \delta > 2,$$

unter ψ_i, ψ'' beschränkte Funktionen verstanden.

Es sei $\beta(p, q)$ eine, ausser in den Punkten (p_i, q_i) ($i = 1, \dots, m_1$), (p'', q'') , positive, nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion auf T , die sich in der Umgebung jener Punkte entsprechend wie

(156) $r_i^{\alpha_i} H_i(p, q), r''^{(\delta-4)} H''(p, q)$ ($H_i, H'' =$ positive, beschränkte Funktionen)

verhält und der Beziehung

(157)
$$\iint_T \beta d\omega = -2\pi \left(\sum \alpha_i + \delta \right)$$

genügt. Es sei weiter $v(p, q)$ eine in T , ausser in den Punkten (p_i, q_i) ($i = 1, \dots, m_1$), (p'', q'') , nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung

(158)
$$\mathcal{A}_2 v = \beta,$$

die sich in der Umgebung dieser Punkte wie die gesuchte Lösung $u(p, q)$ verhält. Wir setzen

(159)
$$u = v + U.$$

Die Funktion U genügt der Differentialgleichung

(160)
$$\mathcal{A}_2 U + \beta = k' e^v e^U = K e^U.$$

Die Funktion K ist auf T , ausser in den Punkten $(p_i, q_i), (p'', q'')$, positiv und nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. In der Umgebung dieser Punkte verhält sie sich entsprechend wie

(161) $r_i^{\alpha_i} \theta_i(p, q), r''^{(\delta-4)} \theta''(p, q)$ ($\theta_i, \theta'' =$ positive, beschränkte Funktionen).

Hieraus folgt aber, wie man sofort sieht, dass überall auf T

(162)
$$0 < \lambda^{(7)} < \frac{\beta}{K} < \lambda^{(8)}$$

ist, unter $\lambda^{(7)}$ und $\lambda^{(8)}$ gewisse positive Konstante verstanden. Die Beziehung (162) ist der Beziehung (46) in § 4 analog. Die weitere Betrachtung verläuft ganz wie vorhin.

Inhaltsübersicht.

- § 1. Problemstellung.
- § 2. Hilfssätze und vorbereitende Betrachtungen.
- § 3. Hilfssätze und vorbereitende Betrachtungen (Fortsetzung).
- § 4. Zurückführung auf ein Problem der Variationsrechnung und Bestimmung einer ausgezeichneten Folge von Vergleichsfunktionen.
- § 5. Bestimmung einer speziellen Grenzfunktion.
- § 6. Beweis, dass die in § 5 bestimmte Funktion der Differentialgleichung (44) genügt.
- § 7. Eindeutigkeit der Lösung.
- § 8. Der besondere Fall einer geschlossenen RIEMANN'schen Fläche.

