# ZU EULERS RECURSIONSFORMEL FÜR DIE DIVISORENSUMMEN.

Aus einer Zuschrift an den Herausgeber

VON

CHR. ZELLER
in MARKGRÖNINGEN.

...... Um eine kleine Gegengabe zu bieten, sende ich eine Formel, auf welche ich gekommen bin bei Beschäftigung mit EULER, *de partitione numerorum* (Introductio in analysin infinitorum, cap. XVI) und mit seinem Ausdruck für *Divisorensummen*:

$$\int(n)=\int(n-1)+\int(n-2)-\int(n-5)-\int(n-7)+\int(n-12)+\int(n-15)\ldots$$

wo $\int(n)$ die Summe der Divisoren von $n$ incl. 1 und $n$ bezeichnet und für $\int(n-n)$ die Zahl $n$ selbst gesetzt wird.

Bedeutet ferner $(n)$ die Anzahl der Zusammensetzungen von $n$ aus allen ganzen Zahlen nach EULERS Tab. u. art. 324, dann gilt hier die Recursionsformel

$$(n)=(n-1)+(n-2)-(n-5)-(n-7)+(n-12)+(n-15)\ldots$$

(wobei anstatt $(n-n)$ die Zahl 1 zu setzen ist) welche mit der ersteren die grösste Ähnlichkeit hat. Man könnte erwarten, dass beide Formeln identische Werthe liefern, da sie demselben Recursionsgesetze folgen und von denselben ersten Werthen ausgehen, aber die Pentagonalzahlen begründen einen Unterschied, da für diese das einemal bei $\int(n-n)$ oder $\int(0)$ nach EULERS Regel die Zahl $n$, das andremal für $(n-n)$ die Einheit zu setzen ist.

Von hier aus liess sich weiter ableiten, dass

$$\int(n) = 1(n-1) + 2(n-2) - 5(n-5) - 7(n-7) + 12(n-12) + 15(n-15) \ldots$$

so dass also die Summe der Divisoren auch als eine Function der Partitionen erscheint und mit diesen durch ein gleichfalls pentagonales Recursionsgesetz zusammenhängt.

Ist dieser Ausdruck auch für die Berechnung selbst nicht zu brauchen, so ist er doch vielleicht geeignet, jene merkwürdige Formel Eulers, mit welcher auch Jacobi sich beschäftigt hat (Opera, T. 1, p. 345), in ein neues Licht zu stellen.

Beispiel:

Es ist für

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| $\int(n) =$ | 1 | 3 | 4 | 7 | 6 | 12 | 8 | 15 | 13 | 18 | 12 | 28 | 14 | 24 | 24 | 31 | 18 |
| $(n) =$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 | 42 | 56 | 77 | 101 | 135 | 176 | 231 | 297 |

wie sich aus Euler ct. art. 324 ergiebt; also nach den obigen Formeln:

$$\begin{aligned}
\int(18) &= \int(17) + \int(16) - \int(13) - \int(11) + \int(6) + \int(3) \\
&= 18 + 31 - 14 - 12 + 12 + 4 = 39 \\
(18) &= (17) + (16) - (13) - (11) + (6) + (3) \\
&= 297 + 231 - 101 - 56 + 11 + 3 = 385 \\
\int(18) &= 1.297 + 2.231 - 5.101 - 7.56 + 12.11 + 15.3 \\
&= 936 - 897 = 39 = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18.
\end{aligned}$$

Markgröningen, 23 Juni 1884.