

SUR QUELQUES POINTS
DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

PAR

E. LAGUERRE

à PARIS.

I.

1. Dans tout ce qui suit, à moins que je n'en avertisse expressément, je désigne par ξ un nombre positif ou nul et par η un nombre positif quelconque supérieur à ξ .

Cela posé, en considérant le polynôme entier du degré n

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

j'y rattacherai le polynôme du même degré $\phi(x)$ défini par l'égalité suivante

$$(1) \quad \phi(x) = \frac{x^{n+1}f(\eta) - f(x\eta)}{x - 1} + \xi \cdot \frac{f(x\eta) - f(\xi)}{x\eta - \xi}.$$

En posant, pour abréger,

$$\phi(x) = P_0x^n + P_1x^{n-1} + P_2x^{n-2} + \dots + P_{n-1}x + P_n,$$

il est aisé de déterminer les coefficients P_i .

Si, par exemple, on fait

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

un calcul facile donne

$$P_0 = a_0\eta^3 + a_1\eta^2 + a_2\eta + a_3,$$

$$P_1 = a_0\xi\eta^2 + a_1\eta^2 + a_2\eta + a_3,$$

$$P_2 = a_0\xi^2\eta + a_1\xi\eta + a_2\eta + a_3,$$

$$P_3 = a_0\xi^3 + a_1\xi^2 + a_2\xi + a_3.$$

La loi de formation de ces coefficients est évidente et s'étend aisément au cas d'un polynôme d'un degré quelconque; les coefficients extrêmes sont $f(\eta)$ et $f(\xi)$.

2. Le calcul des nombres P_i s'effectue de la façon la plus simple par la méthode suivante: que l'on forme d'abord, et par voie récurrente, une suite de nombres Q_i déterminés par les relations

$$Q_0 = a_0, \quad Q_1 = \xi Q_0 + a_1, \quad Q_2 = \xi Q_1 + a_2, \quad \dots, \quad Q_n = \xi Q_{n-1} + a_n,$$

les nombres P_i seront donnés par les égalités

$$P_n = Q_n, \quad P_{n-1} = P_n + (\eta - \xi)Q_{n-1}, \quad P_{n-2} = P_{n-1} + \eta(\eta - \xi)Q_{n-2}, \quad \dots \\ \dots, \quad P_0 = P_1 + \eta^{n-1}(\eta - \xi)Q_0.$$

3. La propriété fondamentale du polynôme $\phi(x)$ peut s'énoncer ainsi:

Le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont comprises entre les quantités ξ et η , est au plus égal au nombre des variations du polynôme $\phi(x)$, et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

Pour la démontrer, je remarque que, de l'égalité (1), on déduit

$$\frac{(\xi - \eta)xf(x\eta)}{(x-1)(x\eta - \xi)} = \frac{x^{n+1}f(\eta)}{1-x} + \phi(x) + \frac{\xi f(\xi)}{x\eta - \xi}.$$

Pour toutes les valeurs de x comprises entre $\frac{\xi}{\eta}$ et l'unité, $\frac{1}{1-x}$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances

croissantes de x , et $\frac{1}{x\eta - \xi}$ développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances décroissantes de x .

Effectuant ces développements, on a l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{(\xi - \eta)xf(x\eta)}{(x - 1)(x\eta - \xi)} = \dots + f(\eta) \cdot x^{n+2} + f(\eta) \cdot x^{n+1} + \phi(x) \\ + \frac{\xi f(\xi)}{\eta} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\xi^2 f(\xi)}{\eta^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots; \end{aligned}$$

la série double, qui compose le second membre, est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre $\frac{\xi}{\eta}$ et l'unité, et le nombre de ces valeurs, pour lesquelles elle s'annule, est évidemment égal au nombre m des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont comprises entre ξ et η . D'où il suit que ce nombre m est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la série; ce nombre des variations se réduit d'ailleurs au nombre des variations du polynôme $\phi(x)$. Il suffit pour le faire voir de remarquer que, le premier terme de $\phi(x)$ étant $f(\eta) \cdot x^n$, son coefficient est le même que celui de tous les termes précédents et que, le dernier terme étant $f(\xi)$, il est de même signe que tous les termes qui suivent. De là résulte immédiatement la proposition que je voulais démontrer.

4. Soit, comme application, l'équation

$$(2) \quad x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0.$$

En posant $\xi = 0$ et $\eta = 1$, on formera le tableau suivant

valeurs des coefficients.....	+ 1	- 2	+ 1	- 3	+ 4	- 2
valeurs des Q_i	+ 1	- 2	+ 1	- 3	+ 4	- 2
valeurs des P_i	- 1	- 2	0	- 1	+ 2	- 2,

d'où l'on conclut, puisque la suite des P_i présente deux variations, que l'équation (2) a au plus deux racines comprises entre zéro et + 1.

Faisant maintenant $\xi = 1$ et $\eta = 2$, on a ce tableau

$$\begin{array}{cccccc} + 1 & - 2 & + 1 & - 3 & + 4 & - 2 \\ + 1 & - 1 & 0 & - 3 & + 1 & - 1 \\ + 2 & - 14 & - 6 & - 6 & 0 & - 1; \end{array}$$

la suite des P_i présentant une seule variation, on voit que l'équation a une seule racine comprise entre $+ 1$ et $+ 2$.

En faisant $\xi = 2$ et $\eta = 3$, on a les suites

$$\begin{array}{cccccc} + 1 & - 2 & + 1 & - 3 & + 4 & - 2 \\ + 1 & 0 & + 1 & - 1 & + 2 & + 2 \\ + 91 & + 10 & + 10 & + 1 & + 4 & + 2; \end{array}$$

la dernière ne renfermant aucune variation, on en conclut que l'équation n'a pas de racine comprise entre $+ 2$ et $+ 3$.

Pour $\xi = 3$ et $\eta = 4$, on a le tableau suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \text{coefficients} & \dots & + 1 & - 2 & + 1 & - 3 & + 4 & - 2 \\ Q_i & \dots & + 1 & + 1 & + 4 & + 9 & + 31 & + 91; \end{array}$$

il est inutile ici de calculer les valeurs des P_i , j'ai en effet démontré⁽¹⁾ que le nombre des racines supérieures à ξ est au plus égal au nombre des variations que présente la suite des nombres Q_i ; et cette suite, pour $\xi = 3$, ne présentant aucune variation, il est clair que l'équation proposée n'a aucune racine supérieure à 3.

5. L'équation (2) a donc une racine comprise entre $+ 1$ et $+ 2$; elle n'a aucune racine supérieure à $+ 2$, ni aucune racine négative, puisque son premier membre ne présente que des variations.

L'intervalle compris entre zéro et $+ 1$ peut contenir deux racines, ou n'en contenir aucune. Pour résoudre la question, je remarque que le

(1) *Mémoire sur la théorie des équations numériques*, Journal de math. pures et appliquées, 3^{me} Série, T. 9, p. 105.

nombre des racines de l'équation proposée, qui sont comprises entre zéro et $+ 1$, est égal au nombre des racines de l'équation

$$2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

qui sont supérieures à l'unité.

Formons, en suivant la méthode que j'ai indiquée dans le mémoire cité précédemment (*Théorie des équations numériques*, p. 116), le tableau suivant

$+ 2$	$- 4$	$+ 3$	$- 1$	$+ 2$	$- 1$
$+ 2$	$- 2$	$+ 1$	0	$+ 2$	$+ 1$
$+ 2$	0	$+ 1$	0	$+ 2$;	

les nombres

$$+ 2, \quad 0, \quad + 1, \quad 0, \quad + 2, \quad + 1,$$

qui forment le contour extérieur du tableau n'offrant aucune variation, il en résulte que l'équation proposée n'a aucune racine comprise entre zéro et l'unité; elle a ainsi une seule racine comprise entre $+ 1$ et $+ 2$.

II.

6. Quand on veut effectuer la séparation des racines d'une équation ou obtenir leur valeur approximative, il est souvent utile de déterminer des limites entre lesquelles demeure comprise la valeur que prend un polynôme donné, lorsque la variable prend toutes les valeurs possibles dans un certain intervalle.

En supposant, comme ci-dessus, ξ et η positifs et η plus grand que ξ , CAUCHY a donné de cette question la solution très simple suivante:

Décomposons le polynôme donné $f(x)$ en deux parties, en mettant en évidence les termes positifs et les termes négatifs, en sorte que l'on ait

$$f(x) = f_0(x) - f_1(x);$$

cela posé, si x varie entre ξ et η , la valeur que prend le polynôme $f(x)$ demeure toujours comprise entre les nombres

$$f_0(\eta) - f_1(\xi) \quad \text{et} \quad f_0(\xi) - f_1(\eta).$$

L'exactitude de cette règle est évidente; elle est d'une application facile, mais conduit le plus souvent à des limites beaucoup trop éloignées des limites véritables.

On obtiendra une solution plus précise en employant la méthode qui suit.

Soient P_0, P_1, \dots, P_n les coefficients du polynôme $\phi(x)$; en désignant respectivement par R et par S le plus grand et le plus petit de ces nombres, considérons l'équation

$$(1) \quad R - f(x) = 0.$$

Les quantités, analogues à P_0, P_1, \dots, P_n , sont dans ce cas

$$R - P_0, R - P_1, \dots, R - P_n,$$

et il est clair qu'elles sont toutes positives ou nulles. L'équation (1) n'a donc aucune racine comprise entre ξ et η et son premier membre conserve toujours le même signe quand x varie depuis ξ jusqu'à η , à savoir le signe $+$; pour toute valeur de x , comprise entre ξ et η , on a donc

$$f(x) \overline{<} R.$$

On prouverait d'une façon analogue que, pour les mêmes valeurs, on a

$$f(x) \overline{>} S;$$

d'où cette conclusion importante:

Lorsque x prend toutes les valeurs possibles comprises entre les nombres ξ et η , la valeur du polynôme $f(x)$ demeure constamment comprise entre les nombres R et S .

7. Soit, comme application, le polynôme

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

que j'ai déjà considéré plus haut.

On voit que, quand x varie de zéro à $+1$, le polynôme prend des valeurs comprises entre les nombres -2 et $+2$; la règle de CAUCHY donne les limites -7 et $+6$. Quand x varie de $+1$ à $+2$, la règle énoncée ci-dessus donne les limites -14 et $+2$, la règle de CAUCHY les limites -40 et $+41$; enfin, dans l'intervalle compris entre $+2$ et $+3$, la règle de CAUCHY donne les limites -143 et $+236$, l'autre règle les limites bien plus resserrées $+1$ et $+91$.

8. Il est moins aisé de déterminer des limites un peu précises, entre lesquelles demeurent comprises les valeurs que prend une fonction rationnelle $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, lorsque x varie dans l'intervalle $(\xi \dots \eta)$.

Voici cependant une solution assez simple, mais limitée au cas où relativement à l'un des termes de la fraction, au polynôme $f(x)$ par exemple, les nombres P_i ont tous le même signe.

Soient

$$P_0, P_1, \dots, P_n$$

ces divers nombres, et

$$H_0, H_1, \dots, H_n$$

les nombres correspondants relativement au polynôme $\varphi(x)$; je suppose les deux polynômes du même degré, ce que l'on peut toujours admettre en introduisant au besoin un certain nombre de coefficients nuls.

Cela posé, en s'appuyant sur les considérations développées plus haut, on démontrera aisément que, lorsque x varie dans l'intervalle $(\xi \dots \eta)$, la valeur que prend la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ demeure constamment comprise entre le plus grand et le plus petit des nombres

$$\frac{H_0}{P_0}, \frac{H_1}{P_1}, \dots, \frac{H_n}{P_n}.$$

Considérons, par exemple, et en supposant $\xi = 2$ et $\eta = 3$, la fraction

$$\frac{2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x - 5}{x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 2};$$

on a

$$P_0 = 91, \quad P_1 = P_2 = 10, \quad P_3 = 1, \quad P_4 = 4 \quad \text{et} \quad P_5 = 2.$$

Le tableau suivant donnera les valeurs des Π_i

coefficients ...	0	+ 2	- 5	+ 2	- 3	- 5
Q_i	0	+ 2	- 1	0	- 3	- 11
Π_i	+ 31	+ 31	- 23	- 14	- 14	- 11.

Si maintenant nous formons les fractions

$$\frac{31}{91}, \quad \frac{31}{10}, \quad -\frac{23}{10}, \quad -14, \quad -\frac{14}{4}, \quad -\frac{11}{2},$$

nous voyons que la plus petite d'entre elles est -14 et la plus grande $\frac{31}{10}$; on en conclut que, quand x varie depuis $+2$ jusqu'à $+3$, la valeur de la fraction demeure comprise entre les limites -14 et $+3,1$.

III.

9. Soit p un nombre entier positif quelconque, mais supérieur à $(n + 1)$; dans le développement en série de l'expression

$$\frac{x^{n+1}f(\eta)}{1-x} + \phi(x) + \frac{\xi f(\xi)}{x\eta - \xi},$$

considérons seulement les termes dont les exposants sont compris entre les limites p et $-p$, nous obtiendrons ainsi un polynôme $\theta_p(x)$ dont la valeur est donnée par l'égalité

$$\begin{aligned} \theta_p &= P_0 x^p + \dots + P_0 x^{n+1} \\ &+ P_0 x^n + P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + \dots + P_{n-2} x^2 + P_{n-1} x + P_n \\ &+ \frac{\xi}{\eta} P_n \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{\xi^p}{\eta^p} P_n \cdot \frac{1}{x^p}. \end{aligned}$$

Lorsque le nombre p croît indéfiniment, θ_p a pour limite une série indéfinie θ qui, pour toutes les valeurs de x comprises entre $\frac{\xi}{\eta}$ et 1; a la même valeur que la fraction

$$\frac{(\xi - \eta)xf(x\eta)}{(x - 1)(x\eta - \xi)};$$

d'où résulte, en désignant par m le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont comprises entre ξ et η , que la série θ est convergente et s'annule pour m valeurs de la variable.

Cherchons d'abord une limite supérieure du nombre des racines positives de l'équation $\theta_p = 0$; une pareille limite est donnée immédiatement par le nombre des variations de θ_p , qui se réduit à celui des variations de $\phi(x)$. Mais on peut obtenir une limite plus précise en faisant usage d'une proposition importante due à NEWTON.

Au dessous de la suite des termes de $\theta_p(x)$ où se peuvent trouver des variations, à savoir les termes

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-2}, P_{n-1}, P_n$$

écrivons les termes de la suite

$$\begin{aligned} &P_0^2 - P_0 P_1, P_1^2 - P_0 P_2, P_2^2 - P_0 P_1, \dots \\ &\dots, P_{n-2}^2 - P_{n-3} P_{n-1}, P_{n-1}^2 - P_n P_{n-2}, P_n^2 - P_n P_{n-1} \frac{\xi}{\eta}; \end{aligned}$$

nous obtiendrons le tableau suivant

$$(A) \begin{array}{cccccccc} P_0, & P_1, & P_2, & \dots, & P_{n-2}, & P_{n-1}, & P_n, \\ + 1, & P_1^2 - P_0 P_2, & P_2^2 - P_0 P_1, & \dots, & P_{n-2}^2 - P_{n-3} P_{n-1}, & P_{n-1}^2 - P_n P_{n-2}, & + 1, \end{array}$$

où j'ai remplacé les termes extrêmes de la seconde ligne par $+ 1$, attendu que, quand P_0 et P_1 sont de signe contraire, $P_0 - P_0P_1$ est positif et que, de même, $P_n^2 - \frac{\xi}{\eta} P_n P_{n-1}$ est positif quand les termes P_n et P_{n-1} présentent une variation.

Cela posé, il suit du théorème de NEWTON que le nombre q des racines positives de l'équation $\theta_p = 0$, est au plus égal au nombre V_0 des variations de la suite supérieure du tableau (A), qui correspondent à des permanences dans la suite inférieure.

Ce nombre q est, on le voit, indépendant de la valeur attribuée au nombre entier p et sa valeur demeure la même quand p croît indéfiniment; on en conclut que le nombre m , qui représente le nombre des valeurs positives de x pour lesquelles la série θ converge vers zéro, est au plus égal à p .

D'où la proposition suivante:

Si l'on forme le tableau (A), le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont comprises entre ξ et η , est au plus égal au nombre des variations présentées par la ligne supérieure du tableau et auxquelles correspondent des permanences dans la ligne inférieure.

Soit, comme application, l'équation

$$(1) \quad x^5 - 3x^3 + 9x^2 - 11x + 5 = 0;$$

cherchons le nombre des racines comprises entre $\xi = 1$ et $\eta = 2$.

Les valeurs des nombres P_i s'obtiennent en formant le tableau suivant

$$\begin{array}{cccccc} + 1 & 0 & - 3 & + 9 & - 11 & + 5 \\ + 1 & + 1 & - 2 & + 7 & - 4 & + 1 \\ + 27 & + 11 & + 3 & + 11 & - 3 & + 1, \end{array}$$

et le tableau (A) devient

$$\begin{array}{cccccc} + 27 & + 11 & + 3 & + 11 & - 3 & + 1 \\ \dots & \dots & \dots & + 20 & - 2 & + 1. \end{array}$$

Dans la ligne inférieure, je n'ai indiqué les signes des termes que quand ils correspondent à des variations; on voit qu'il n'y a dans la ligne

supérieure aucune variation à laquelle corresponde une permanence dans la ligne inférieure, d'où il suit que l'équation proposée n'a aucune racine comprise entre $+ 1$ et $+ 2$.

On arriverait à la même conclusion en employant la méthode suivante qui trouve fréquemment d'utiles applications.

L'équation peut se mettre sous la forme

$$(x^4 + x^3 - 2x^2 + 7x - 4)(x - 1) + 1 = 0,$$

et, par suite, peut s'écrire

$$(2) \quad x = 1 - \frac{1}{x^4 + x^3 - 2x^2 + 7x - 4}.$$

Cherchons des limites entre lesquelles varie le polynôme dénominateur lorsque x varie de $+ 1$ à $+ 2$; en appliquant la méthode indiquée plus haut, on formera le tableau

$$\begin{array}{cccccc} + 1 & + 1 & - 2 & + 7 & - 4 & \\ + 1 & + 2 & 0 & + 7 & + 3 & \end{array}$$

Il suffit ici de calculer les valeurs des nombres Q_i ; ceux-ci étant en effet positifs, il est clair que les P_i seront également tous positifs et, par suite, le dénominateur demeure positif quand x varie dans les limites indiquées.

Il en résulte que le second membre de l'égalité (2) est toujours inférieur à l'unité; il ne peut donc jamais être compris entre $+ 1$ et $+ 2$ et l'on voit, comme nous l'avions reconnu précédemment, que l'équation (1) n'a aucune racine dans cet intervalle.

IV.

10. La proposition, énoncée dans le premier paragraphe, peut encore être démontrée par une autre méthode qui donne lieu à quelques conséquences intéressantes.

En désignant par ξ et η deux nombres quelconques *positifs ou négatifs*, soient $f(x)$ un polynôme entier du degré n et $\phi(x)$ le polynôme déterminé par la relation

$$\phi(x) = \frac{x^{n+1}f(\eta) - f(x\eta)}{x - 1} + \xi \cdot \frac{f(x\eta) - f(\xi)}{x\eta - \xi}.$$

Appelons $\phi_1(x)$ ce que devient $\phi(x)$, quand on remplace $f(x)$ par $(x - \lambda)$; on a évidemment

$$\phi_1(x) = \frac{x^{n+2}f(\eta)(\eta - \lambda) - f(x\eta)(x\eta - \lambda)}{x - 1} + \xi \cdot \frac{f(x\eta)(x\eta - \lambda) - f(\xi)(\xi - \lambda)}{x\eta - \xi},$$

d'où, par un calcul facile,

$$\phi_1(x) = \phi(x)(x\eta - \lambda) - \lambda f(\eta)x^{n+1} + \xi f(\xi).$$

On voit que $\phi_1(x)$ et le produit $\phi(x)(x\eta - \lambda)$ ne diffèrent que par leurs termes extrêmes; les coefficients de x^{n+1} étant respectivement [puisque $f(\eta) = P_0$ et $f(\xi) = P_n$] $P_0(\eta - \lambda)$ et $P_0\eta$, les termes constants étant respectivement $(\xi - \lambda)P_n$ et $-\lambda P_n$.

Si donc le nombre λ satisfait aux conditions suivantes

$$\eta(\eta - \lambda) > 0, \quad \lambda(\lambda - \xi) > 0,$$

le polynôme $\phi_1(x)$ présente précisément autant de variations que le produit $\phi(x)(x\eta - \lambda)$. D'où il suit, en vertu du lemme de SEGNER, que, si $\eta\lambda$ est positif, $\phi_1(x)$ a au moins une variation de plus que $\phi(x)$, et que, si $\eta\lambda$ est négatif, $\phi_1(-x)$ a au moins une variation de plus que $\phi(-x)$.

On peut donc énoncer les propositions suivantes:

L'équation $\phi(x) = 0$ a au moins autant de variations que l'équation $f(x) = 0$ a de racines réelles λ satisfaisant aux inégalités

$$(1) \quad \lambda\eta > 0, \quad \eta(\eta - \lambda) > 0, \quad \lambda(\lambda - \xi) > 0.$$

La transformée $\phi(-x)$ a au moins autant de variations que l'équation $f(x) = 0$ a de racines réelles λ satisfaisant aux inégalités

$$(2) \quad \lambda\eta < 0, \quad \eta(\eta - \lambda) > 0, \quad \lambda(\lambda - \xi) > 0.$$

11. Supposons par exemple ξ et η positifs et $\eta > \xi$, les inégalités (1) sont satisfaites pour toutes les racines comprises entre ξ et η . D'où la proposition que j'ai démontrée au commencement de ce mémoire.

Supposons maintenant que ξ et η soient des nombres positifs quelconques, les inégalités (2) sont vérifiées pour toutes les racines négatives; d'où cette conclusion:

Quels que soient les nombres positifs ξ et η , le nombre des racines négatives de l'équation $f(x) = 0$ est au plus égal au nombre des variations du polynôme $\phi(-x)$.

Dans le cas particulier où, ξ et η étant positifs, η est plus grande que ξ , on voit que, si toutes les racines de l'équation sont réelles et si toutes les racines positives sont comprises entre ξ et η , le nombre des variations de $\phi(x)$ est précisément égal au nombre des racines positives et le nombre des variations de $\phi(-x)$ égal au nombre des racines négatives.

12. Dans ce dernier cas, j'ajouterai encore une observation.

Ayant, pour toutes les valeurs de x compris entre $\frac{\xi}{\eta}$ et $+1$, l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{(\xi - \eta)x f(x\eta)}{(x - 1)(x\eta - \xi)} = & \dots + f(\eta) \cdot x^{n+2} + f(\eta) \cdot x^{n+1} + \phi(x) \\ & + \frac{\xi}{\eta} f(\xi) \cdot \frac{1}{x} + \frac{\xi^2}{\eta^2} f(\xi) \cdot \frac{1}{x^2} + \dots, \end{aligned}$$

je remarque que, si $f(\xi)$ et $f(\eta)$ sont de même signe et si l'équation $\phi(x) = 0$ n'a aucune racine comprise entre 0 et $+1$, $\phi(x)$ conserve dans cet intervalle un signe constant à savoir celui de $f(\xi)$, puisque $\phi(x)$ se réduit à cette quantité pour $\xi = 0$.

Le second membre de l'égalité précédente conserve donc toujours le même signe [à savoir celui de $f(\xi)$ et de $f(\eta)$], quand x varie de $\frac{\xi}{\eta}$ à $+1$; il en est de même du premier membre qui, par suite, ne peut s'annuler quand x varie depuis ξ jusqu'à η .

D'où la proposition suivante que l'on peut souvent appliquer avec utilité, pour reconnaître si un intervalle donné renferme des racines:

Les nombres $f(\xi)$ et $f(\eta)$ étant de même signe, l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune racine comprise entre ξ et η , si l'équation $\psi(x) = 0$ n'a aucune racine comprise entre 0 et + 1.

J'ai d'ailleurs donné⁽¹⁾ un algorithme très simple qui permet, dans beaucoup de cas, de reconnaître facilement si une équation a des racines supérieures à l'unité, à quoi se ramène immédiatement le problème de déterminer si l'équation $\psi(x) = 0$ a des racines comprises entre 0 et + 1.

Soit, comme application, l'équation

$$x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0$$

qui n'a, évidemment, qu'une seule racine négative.

Le nombre des alternances de la suite

$$10 - 8 + 3 - 2 + 1$$

étant nul, le nombre des racines positives de l'équation, qui sont inférieures à + 1, est égal à zéro; de même le nombre des alternances de la suite

$$2^5 - 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 10$$

étant également nul, on voit qu'il n'y a pas de racine supérieure à + 2.

Pour reconnaître s'il y a des racines comprises entre + 1 et + 2, j'emploierai la méthode exposée plus haut; on formera le tableau

$$\begin{array}{cccccc} + 1 & 0 & - 2 & + 3 & - 8 & + 10 \\ + 1 & + 1 & - 1 & + 2 & - 6 & + 4 \\ + 22 & + 6 & - 2 & + 2 & - 2 & + 4; \end{array}$$

d'où l'on déduit

$$\psi(x) = 22x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 4.$$

Or, le nombre des alternances de la suite

$$+ 4 - 2 + 2 - 2 + 6 + 22$$

(1) *Mémoire sur la théorie des équations numériques*, p. 116.

étant nul, l'équation $\phi(x) = 0$ n'a aucune racine positive inférieure à l'unité et, par suite, l'équation proposée n'a aucune racine comprise entre $+1$ et $+2$. Elle a donc une racine négative et quatre racines imaginaires.

V.

13. La propriété fondamentale des coefficients du polynôme $\phi(x)$ peut s'énoncer ainsi:

Le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont comprises entre les nombres ξ et η , est au plus égal au nombre des variations que présente la suite

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n.$$

Il est nécessaire d'examiner les simplifications qui se présentent, lorsque le polynôme $f(x)$ présente des lacunes.

Soit, pour fixer les idées, l'équation

$$A + Bx^3 + Cx^7 + Dx^{10} = 0;$$

formons la suite

$$\begin{aligned} P_0 &= A + B\eta^3 + C\eta^7 + D\eta^{10}, \\ P_1 &= A + B\eta^3 + C\eta^7 + D\xi\eta^9, \\ P_2 &= A + B\eta^3 + C\eta^7 + D\xi^2\eta^8, \\ P_3 &= A + B\eta^3 + C\eta^7 + D\xi^3\eta^7, \\ P_4 &= A + B\eta^3 + C\xi\eta^6 + D\xi^4\eta^6, \\ P_5 &= A + B\eta^3 + C\xi^2\eta^5 + D\xi^5\eta^5, \\ P_6 &= A + B\eta^3 + C\xi^3\eta^4 + D\xi^6\eta^4, \\ P_7 &= A + B\eta^3 + C\xi^4\eta^3 + D\xi^7\eta^3, \\ P_8 &= A + B\xi\eta^2 + C\xi^5\eta^2 + D\xi^8\eta^2, \\ P_9 &= A + B\xi^2\eta + C\xi^6\eta + D\xi^9\eta, \\ P_{10} &= A + B\xi^3 + C\xi^7 + D\xi^{10}. \end{aligned}$$

A l'égard du nombre de variations que présente la suite de ces nombres, on peut remarquer que les termes P_0 , P_1 , P_2 et P_3 peuvent s'écrire de la façon suivante

$$\Omega + D\gamma^{10}, \quad \Omega + D\xi\gamma^9, \quad \Omega + D\xi^2\gamma^8, \quad \Omega + D\xi^3\gamma^7,$$

où j'ai posé, pour abrégé,

$$\Omega = A + B\gamma^3 + C\gamma^7.$$

Il est clair que ces quantités vont toutes en croissant ou toutes en décroissant, le nombre des variations qu'elles présentent se réduit donc au nombre des variations des deux termes P_0 et P_3 et l'on peut supprimer les termes P_1 et P_2 ; on démontrerait de même qu'on peut ne tenir aucun compte des termes P_4 , P_5 , P_6 , P_8 et P_9 .

Il suffit ainsi de considérer la suite

$$\begin{aligned} A + B\gamma^3 + C\gamma^7 &+ D\gamma^{10}, \\ A + B\gamma^3 + C\gamma^7 &+ D\xi^3\gamma^7, \\ A + B\gamma^3 + C\xi^4\gamma^3 &+ D\xi^7\gamma^3, \\ A + B\xi^3 &+ C\xi^7 + D\xi^{10}. \end{aligned}$$

D'une façon un peu plus générale, soit l'équation

$$(I) \quad f(x) = A + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + Ex^\varepsilon = 0,$$

où β , γ , δ , ε désignent des nombres entiers positifs croissants; on établira comme ci-dessus la proposition suivante:

En désignant par ξ et η deux nombres positifs, dont le plus grand soit η , le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont comprises entre ξ et η , est au plus égal au nombre des variations que présente la suite des nombres

$$(T) \quad \left| \begin{array}{l} A + B\gamma^\beta + C\gamma^\gamma + D\gamma^\delta + E\gamma^\varepsilon, \\ A + B\gamma^\beta + C\gamma^\gamma + D\gamma^\delta + E\xi^{\varepsilon-\delta}\gamma^\delta, \\ A + B\gamma^\beta + C\gamma^\gamma + D\xi^{\delta-\gamma}\gamma^\gamma + E\xi^{\varepsilon-\gamma}\gamma^\gamma, \\ A + B\gamma^\beta + C\xi^{\gamma-\beta}\gamma^\beta + D\xi^{\delta-\beta}\gamma^\beta + E\xi^{\varepsilon-\beta}\gamma^\beta, \\ A + B\xi^\beta + C\xi^\gamma + D\xi^\delta + E\xi^\varepsilon. \end{array} \right.$$

La loi de formation de ces quantités est évidente et il est clair que le théorème s'étend au cas où le polynôme contient un nombre quelconque de termes.

J'ajoute qu'il subsiste encore *lorsque les exposants $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont des nombres positifs quelconques, commensurables ou incommensurables, rangés par ordre croissant de grandeur.*

Pour le démontrer, supposons que $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ soient des nombres fractionnaires quelconques et que, $\beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \beta'', \gamma'', \delta''$ et ε'' désignant des nombres entiers, on ait

$$\beta = \frac{\beta'}{\beta}, \quad \gamma = \frac{\gamma'}{\gamma}, \quad \delta = \frac{\delta'}{\delta}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

En posant, pour abrégier $\beta'\gamma'\delta'\varepsilon' = \omega$ et en faisant $x = X^\omega$, l'équation (1) a pour transformée l'équation

$$(2) \quad A + X^{\frac{\omega\delta''}{\beta'}} + X^{\frac{\omega\gamma''}{\gamma'}} + X^{\frac{\omega\delta''}{\delta'}} + X^{\frac{\omega\varepsilon''}{\varepsilon'}} = 0,$$

dans laquelle tous les exposants sont des nombres entiers.

Le nombre des racines de l'équation (1), qui sont comprises entre ξ et η , est égal au nombre des racines de l'équation (2) qui sont comprises entre $\xi^{\frac{1}{\omega}}$ et $\eta^{\frac{1}{\omega}}$. Or, en appliquant à l'équation (2) la proposition énoncée dans le n° précédent, on trouve précisément la suite (A); d'où il résulte que cette proposition subsiste lorsque $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont des nombres fractionnaires positifs quelconques et, par conséquent, même lorsqu'ils sont incommensurables.

14. Les équations importantes de la forme

$$Ae^{ax} + Be^{\beta x} + \dots + Le^{\lambda x} = 0$$

se ramènent à une équation de la forme considérée précédemment en posant $e^x = z$; d'où la proposition suivante, qui s'étend évidemment au cas où le premier membre contient un nombre quelconque de termes, mais que, pour plus de clarté, j'énoncerai seulement dans un cas particulier.

En désignant par ξ et η deux nombres positifs ou négatifs dont le plus grand soit η , par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et ε des nombres quelconques, positifs ou négatifs

tifs, que je supposerai rangés par ordre croissant de grandeur, le nombre des racines de l'équation

$$F(x) = Ae^{ax} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x} + De^{\delta x} + Ee^{\varepsilon x} = 0,$$

qui sont comprises entre ξ et η , est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite

$$\begin{aligned} Ae^{a\xi} + Be^{\beta\xi} + Ce^{i\xi} &+ De^{i\xi} &+ Ee^{z\xi}, \\ Ae^{a\xi} + Be^{\beta\xi} + Ce^{i\xi} &+ De^{i\xi} &+ Ee^{(\varepsilon-\delta)\xi+\delta\xi}, \\ Ae^{a\xi} + Be^{\beta\xi} + Ce^{i\xi} &+ De^{(\delta-\gamma)\xi+\gamma\xi} &+ Ee^{(\varepsilon-\gamma)\xi+\gamma\xi}, \\ Ae^{a\xi} + Be^{\beta\xi} + Ce^{(\gamma-\beta)\xi+\beta\xi} &+ De^{(\delta-\beta)\xi+\beta\xi} &+ Ee^{(\varepsilon-\beta)\xi+\beta\xi}, \\ Ae^{a\xi} + Be^{\beta\xi} + Ce^{i\xi} &+ De^{i\xi} &+ Ee^{z\xi}; \end{aligned}$$

il est clair que, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

Le théorème de FOURIER peut aussi s'appliquer, mais, d'une façon moins facile, aux équations de la forme précédente; il exige en effet (Voir le Mémoire de M. STERN *Sur la résolution des équations transcendentes*, Journal de CRELLE, T. 22) que l'on calcule les dérivées de $F(x)$ jusqu'à ce qu'on arrive à une dérivée qui ne change pas de signe dans l'intervalle considéré; ce qui peut exiger de longs calculs et amener souvent à tenir compte d'un très grand nombre de termes.

VI.

15. Les propositions, qui suivent, se rattachent à des considérations entièrement différentes de celles qui font l'objet des paragraphes précédents.

Étant donnée l'équation générale du degré n

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$$

il y existe toujours une infinité de systèmes de nombres

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

tels que, si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 x + \alpha_2 a_2 x^2 + \dots + \alpha_n a_n x^n = 0.$$

Il paraît difficile de déterminer, d'une façon précise, les conditions auxquelles doivent satisfaire les nombres α_i , lesquelles d'ailleurs ne dépendent que de la valeur attribuée au nombre entier n .

Je laisserai entièrement de côté ce problème et m'en tiendrai aux considérations suivantes qui peuvent, dans certains cas, trouver d'utiles applications.

16. Soient $f(x)$ un polynôme entier, du degré n , ayant toutes ses racines réelles et α un nombre positif; il est clair que l'équation

$$(1) \quad \alpha f(x) + x f'(x) = 0$$

a également toutes ses racines réelles.

Pour le voir, il suffit, dans le cas où toutes les racines de $f(x)$ sont inégales, de mettre l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{f'(x)}{f(x)} = 0,$$

et la proposition subsiste évidemment quand $f(x)$ a des racines égales.

En mettant en évidence les coefficients de $f(x)$ et en posant

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

l'équation (1) peut s'écrire

$$\alpha_0 \alpha + a_1 (\alpha + 1)x + a_2 (\alpha + 2)x^2 + \dots + a_n (\alpha + n)x^n = 0.$$

Comme elle a encore toutes ses racines réelles on peut encore en déduire une infinité d'équations jouissant de la même propriété; telle sera, en général, l'équation

$$\alpha_0 F(0) + a_1 F(1) \cdot x + a_2 F(2) \cdot x^2 + \dots + a_n F(n) \cdot x^n = 0,$$

$F(x)$ désignant un polynôme entier de la forme

$$A(x + \alpha)(x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \dots (x + \alpha_p),$$

où les α_i sont des quantités positives arbitraires et en nombre quelconque.

La même chose aura lieu évidemment, quel que soit le nombre k , à l'égard de l'équation

$$a_0 F(0) + a_1 F(1)e^x + a_2 F(2)e^{2x} + \dots + a_n F(n)e^{n^k x^n} = 0,$$

que l'on peut écrire

$$(2) \quad a_0 \theta(0) + a_1 \theta(1)x + a_2 \theta(2)x^2 + \dots + a_n \theta(n)x^n = 0,$$

si l'on pose

$$\theta(x) = A e^{\alpha x} (x + \alpha)(x + \alpha_1) \dots (x + \alpha_n).$$

Comme le nombre des quantités α_i peut croître au delà de toute limite et que le nombre k est arbitraire, on peut supposer que $\theta(x)$ soit une fonction entière du genre zéro ou du genre un.

D'où la proposition suivante:

En désignant par $\theta(x)$ une fonction entière quelconque, ne s'annulant que pour des valeurs réelles et négatives de x et dont les éléments simples sont des polynômes entiers, des exponentielles de la forme e^{kx} , des fonctions entières du genre zéro ou du genre un, si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation (2).

17. Comme application, considérons la fonction $G(x)$ de M. WEIERSTRASS qui est l'inverse de l'intégrale eulérienne $I(x)$.

La fonction $G(x + \omega)$ ne s'annule que pour $x = -\omega$, $x = -(\omega + 1)$, etc.; si donc ω est positive, $G(x + \omega)$ satisfait aux conditions énoncées ci-dessus et l'on voit que, l'équation (1) ayant toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$\frac{a_0}{I(\omega)} + \frac{a_1}{I(\omega + 1)}x + \frac{a_2}{I(\omega + 2)}x^2 + \dots + \frac{a_n}{I(\omega + n)}x^n = 0,$$

que l'on peut écrire

$$a_0 + \frac{a_1}{\omega}x + \frac{a_2}{\omega(\omega + 1)}x^2 + \frac{a_3}{\omega(\omega + 1)(\omega + 2)}x^3 + \dots \\ + \frac{a_n}{\omega(\omega + 1) \dots (\omega + n - 1)}x^n = 0.$$

J'ajouterai que le théorème subsiste encore pour les valeurs de ω comprises entre -1 et 0 (par conséquent pour toutes les valeurs de ω supérieures à -1), si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines de même signe.

18. En faisant usage de la proposition précédente,⁽¹⁾ on démontrera aisément le théorème général qui suit:

En désignant par q un nombre positif quelconque égal ou inférieur à l'unité, et par $H(x)$ et $\theta(x)$ deux fonctions entières quelconques, ne s'annulant que pour des valeurs réelles et négatives de x et dont les éléments simples sont des polynômes entiers, des exponentielles de la forme e^{tx} , des fonctions entières du genre zéro ou du genre un, si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$\Omega(x) = a_0 \theta(0) + a_1 \cdot \frac{\theta(1)}{H(0)} qx + a_2 \cdot \frac{\theta(2)}{H(0)H(1)} q^2 x^2 + a_3 \cdot \frac{\theta(3)}{H(0)H(1)H(2)} q^3 x^3 + \dots$$

$$\dots + a_n \cdot \frac{\theta(n)}{H(0)H(1)\dots H(n-1)} q^n x^n = 0.$$

On voit ainsi qu'on satisfait au problème, posé au commencement de ce paragraphe, en faisant, quels que soient les coefficients a_0, a_1, \dots, a_n (pourvu que l'équation $f(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles)

$$a_0 = \theta(0), \quad a_1 = \frac{\theta(1)}{H(0)} q, \quad a_2 = \frac{\theta(2)}{H(0)H(1)} q^2, \quad \dots;$$

on obtiendrait encore une solution plus générale en considérant l'équation $x^n \Omega\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, qui a le même nombre de racines réelles que l'équation $\Omega(x) = 0$.

19. Pour appliquer ce qui précède à un exemple simple, je considérerai l'équation

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + nx^{n-1} + x^n = 0,$$

dont toutes les racines sont réelles.

Faisant $\theta(x) = 1$, $q = 1$ et $H(x) = x + 1$, on voit que l'équation

$$\varphi(x) = 1 + n \cdot \frac{x}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$\dots + n \cdot \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} = 0$$

a toutes ses racines réelles et négatives; proposition bien connue.

⁽¹⁾ Voir, à ce sujet, mon *Mémoire sur la théorie des équations numériques*, p. 132.

Il en est de même de l'équation

$$1 + n \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3} + \dots = 0;$$

or le premier membre, quand n croit indéfiniment, a pour limite la fonction de BESSEL

$$\phi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{x^3}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \dots$$

De là résulte, en vertu d'une proposition que j'ai fait connaître dans une note insérée dans les Comptes Rendus de l'Académie des sciences, que $\phi(x)$ est une fonction du genre zéro, ou du moins le produit d'une pareille fonction par une exponentielle de la forme e^{ax} , a étant un nombre essentiellement positif.

On a donc

$$\phi(x) = e^{ax} F(x),$$

$F(x)$ étant une fonction du genre zéro et n'ayant que des racines négatives.

Je veux maintenant prouver que le nombre a est nul; à cet effet, je remarque que $\phi(x)$ satisfait à l'équation linéaire du second ordre

$$x\phi''(x) + \phi'(x) - \phi(x) = 0$$

d'où l'on déduit

$$(3) \quad a^2 + \frac{a-1}{x} = - \left(2a + \frac{1}{x} \right) \frac{F'(x)}{F(x)} - \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Quand x prend des valeurs positives de plus en plus grandes, le premier membre a pour limite a^2 ; cherchons la limite du second membre.

En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ les valeurs absolues des racines de l'équation $F(x) = 0$ (je suppose ces nombres rangés par ordre croissant de grandeur), on a

$$(4) \quad \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{1}{x + \alpha_1} + \frac{1}{x + \alpha_2} + \frac{1}{x + \alpha_3} + \dots;$$

où le second membre est convergent pour toute valeur positive de x , puisque, $F(x)$ étant du genre zéro, la série

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \dots$$

est elle-même convergente.

Soit S_p la somme des p premiers termes de la série contenue dans le second membre de l'égalité (4), on a

$$S_p < \frac{p}{x + a_1};$$

cette quantité tend vers zéro, quel que soit p , quand x croît indéfiniment, donc S_p a pour limite zéro et il en est de même de $\frac{F'(x)}{F(x)}$.

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} \frac{F''(x)}{F'(x)} &= -\frac{1}{(x + a_1)^2} - \frac{1}{(x + a_2)^2} - \frac{1}{(x + a_3)^2} - \dots \\ &+ \left[\frac{1}{x + a_1} + \frac{1}{x + a_2} + \frac{1}{x + a_3} + \dots \right]^2; \end{aligned}$$

on voit, à fortiori, que $\frac{F''(x)}{F'(x)}$ a pour limite zéro.

D'où il suit, le second membre de l'identité (3) ayant pour limite zéro, que a est nul.

La transcendante de BESSEL est donc une fonction du genre zéro.

20. Aux considérations précédentes se rattache encore le théorème qui suit:

Si l'équation

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = 0$$

a toutes ses racines réelles et de même signe; l'équation

$$\begin{aligned} a_0 \cos \lambda + a_1 \cos(\lambda + \theta)x + a_2 \cos(\lambda + 2\theta)x^2 + a_3 \cos(\lambda + 3\theta)x^3 + \dots \\ \dots + a_n \cos(\lambda + n\theta)x^n = 0, \end{aligned}$$

où λ et θ désignent deux arcs arbitraires, a toutes ses racines réelles.

Pour le démontrer, je m'appuierai sur cette remarque importante due à M. HERMITE: ⁽¹⁾

⁽¹⁾ *Sur l'indétermination des fractions rationnelles* (Bulletin de la Soc. Math., T. 7, p. 131); voir également, sur ce sujet, mes *Notes sur la résolution des équations numériques*, p. 48.

Si, pour toutes les racines de l'équation $F(x) = 0$, les coefficients de i sont de même signe et si, mettant en évidence dans le polynôme $F(x)$ la partie réelle et la partie imaginaire, on pose

$$F(x) = F_1(x) + iF_2(x),$$

les racines de l'équation

$$\alpha F_1(x) + \beta F_2(x) = 0,$$

où α et β désignent des nombres arbitraires, sont toutes réelles.

Considérons maintenant l'équation

$$(5) \quad f[x(\cos \omega + i \sin \omega)] = 0;$$

dont les racines, en désignant par k_1, k_2, k_3, \dots les racines de l'équation $f(x) = 0$, sont

$$k_1(\cos \omega - i \sin \omega), \quad k_2(\cos \omega - i \sin \omega), \quad k_3(\cos \omega - i \sin \omega), \quad \text{etc.}$$

Il est clair, puisquē les k_i sont tous de même signe, que le coefficient de i a le même signe dans toutes les racines de l'équation (5).

Or on a

$$f[x(\cos \omega + i \sin \omega)] = a_0 + a_1 \cos \omega \cdot x + a_2 \cos 2\omega \cdot x^2 + \dots + a_n \cos n\omega \cdot x^n \\ + i[a_1 \sin \omega \cdot x + a_2 \sin 2\omega \cdot x^2 + \dots + a_n \sin n\omega \cdot x^n].$$

En vertu du théorème de M. HERMITE, on voit donc que l'équation

$$\cos \lambda [a_0 + a_1 \cos \omega \cdot x + a_2 \cos 2\omega \cdot x^2 + \dots]$$

$$- \sin \lambda [a_1 \sin \omega \cdot x + a_2 \sin 2\omega \cdot x^2 + \dots] = 0$$

a toutes ses racines réelles, quels que soient les arcs réels λ et ω .

Or cette équation peut s'écrire

$$a_0 \cos \lambda + a_1 \cos(\lambda + \omega)x + a_2 \cos(\lambda + 2\omega)x^2 + \dots + a_n \cos(\lambda + n\omega)x^n = 0;$$

ce qui démontre la proposition que j'avais énoncée.