# SUR L'INTÉGRATION DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS QUI ADMETTENT DES GROUPES CONTINUS DE TRANSFORMATIONS

PAR

E. VESSIOT
à LYON.

## *Introduction.*

1. On doit à ABEL l'étude des équations algébriques telles que, si $x$ est racine d'une telle équation, $\theta(x)$ en est aussi racine, $\theta$ étant une fonction rationnelle connue. Par cette étude, ABEL a ouvert une voie nouvelle, non seulement à la théorie des équations algébriques, mais à toute l'analyse mathématique. La propriété que nous venons de rappeler peut en effet s'énoncer ainsi: les équations algébriques considérées sont celles qui admettent des transformations rationnelles connues: $x' = \theta(x)$. De sorte que lorsque SOPHUS LIE fondait, un demi-siècle plus tard, la théorie des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations, il était, dans un champ plus vaste, le continuateur de la pensée de son illustre compatriote.

Le présent travail est une contribution à cette théorie de SOPHUS LIE. Il a en vue la question suivante: »Définir et étudier les divers problèmes d'intégration auxquels peut conduire l'application de la théorie de LIE?»

Cette question peut être considérée comme résolue [1] dans le cas où le système différentiel $(A)$ considéré est un système d'équations différentielles ordinaires, ou un de ces systèmes d'équations aux dérivées partielles dont

[1] Voir S. LIE. Math. Annalen. Tome XXV.
E. VESSIOT. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Tomes VIII, H; X, C. Comptes Rendus, 13 décembre 1897.

l'intégrale générale ne dépend que de constantes et non de fonctions arbitraires: les systèmes auxiliaires dont l'intégration entraîne celle du système donné sont alors, ou bien des équations différentielles ordinaires linéaires; ou des systèmes d'équations différentielles ordinaires qui sont absolument générales, tant que le système $(A)$ n'a pas de propriété autre que d'admettre le groupe $(G)$ considéré, qui est un groupe fini.

Pour le cas général d'un système différentiel $(A)$ dépendant d'un nombre quelconque de variables dépendantes ou indépendantes, d'ordre et de degré d'indétermination quelconque, et dont on sait seulement qu'il admet un groupe continu $(G)$, fini ou infini, mais connu,[1] la question posée est bien moins élucidée.

Dans un mémoire fondamental,[2] Lie a indiqué, sur des exemples particuliers, la marche à suivre pour décomposer l'intégration du système $(A)$ en deux parties distinctes: 1°) intégration d'un système résolvant $(R)$ qui n'admet plus de groupe de transformations; 2°) intégration d'un système différentiel $(S)$ dont toutes les solutions se déduisent les unes des autres par les transformations du groupe donné $(G)$. Cela revient à décomposer l'ensemble des solutions de $(A)$ en familles de solutions telles que les solutions de chaque famille se déduisent les unes des autres par les transformations de $(G)$; il est bien remarquable que c'est la même réduction qu'opérait déjà Abel sur les équations algébriques dont nous parlions plus haut.

Dans les exemples traités par Lie, où il n'y a que deux variables indépendantes, les systèmes $(S)$ s'intégrent, par la méthode de Darboux, au moyen d'équations différentielles ordinaires. Mais il ne parait pas facile de généraliser cette méthode de manière à pouvoir l'appliquer au cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes.

2. Nous avons repris la même décomposition du problème par une méthode nouvelle dont l'avantage est de conduire, pour les systèmes définitifs $(S)$, à des *systèmes automorphes*. Nous proposons d'appeler ainsi

[1] Si le système $(A)$ est donné, les équations de définition du plus grand groupe que ce système admette sont par là-même connues.

[2] *Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.* (Leipziger Berichte, 1895.)

tout système différentiel dont les solutions se déduisent les unes des autres par les transformations d'un groupe ponctuel $(G)$, *effectuées sur les variables dépendantes;* $(G)$ sera dit le groupe associé au système, ou simplement le groupe du système.

Nous pouvons alors appliquer à ces systèmes automorphes les méthodes de réduction indiquées par LIE,[1] et qui permettent d'en remplacer l'intégration par celle d'une suite de systèmes automorphes, dont les groupes soient *simples* et *primitifs*. Pour les seuls types de groupes connus, satisfaisant à cette double condition, les systèmes automorphes correspondants s'intègrent au moyen d'équations différentielles ordinaires, qui sont linéaires si le groupe est fini.

Quant au système résolvant $(R)$, comme il donne seulement la décomposition des solutions de $(A)$ en familles de solutions homologues relativement au groupe $(G)$, il est évident que la difficulté de son intégration ne peut être en aucune façon limitée par la nature de ce groupe $(G)$, et on peut dire qu'elle est arbitraire.

On voit donc que, si l'on ne trouve pas de groupes continus infinis simples d'une nature nouvelle, l'application de la théorie de LIE ne pourra conduire qu'à des systèmes différentiels dont la difficulté d'intégration est tout-à-fait indéterminée, et à des systèmes différentiels s'intégrant par des équations différentielles ordinaires. Telle est donc la réponse que l'on peut faire à la question que nous nous étions posée? On voit que celle-ci ne pourra être entièrement résolue que lorsqu'on connaîtra tous les types de groupes simples.

Il resterait aussi à perfectionner l'étude des systèmes résolvants $(R)$. Ces systèmes sont, au fond, les mêmes dans la méthode de LIE et dans la nôtre, et ils ne se présentent pas d'eux-mêmes sous une forme entièrement arbitraire, car ils comprennent des équations dont la forme dépend encore, en une certaine manière, du groupe $(G)$.

Dans les exemples qu'il a traités, LIE a indiqué une relation simple entre le degré d'indétermination du système $(A)$, celui du système résolvant $(R)$, et celui du système des équations de définition du groupe $(G)$. Il y aurait lieu de chercher à généraliser ces résultats, et même à en compléter la démonstration dans les cas traités par LIE.

---

[1] *Verwerthung des Gruppenbegriffes für Differentialgleichungen* (Leipziger Berichte, 1895).

3. Notre travail est divisé en deux chapitres. Dans le premier, nous étudions la détermination des systèmes automorphes, qui correspondent à un groupe, donné par les équations de définition de ses transformations finies. Leur forme résulte, à vrai dire, de la théorie générale des invariants différentiels; mais il était utile de préciser les divers cas qui pourraient se présenter; et, de plus, notre travail contient ainsi une méthode complète, et nouvelle,[1] pour la détermination des invariants différentiels et des systèmes différentiels invariants qui correspondent à un groupe donné, tout en ne supposant connus que les principes fondamentaux relatifs aux équations de définition des groupes continus.

Nous rappelons ensuite, en les précisant et les complétant sur divers points, les méthodes de Lie, servant à réduire l'intégration de ces systèmes; et nous étudions les systèmes types auxquels on est ainsi ramené.

Dans le second chapitre, nous étudions la formation des systèmes différentiels les plus généraux, qui admettent un groupe, donné par les équations de définition de ses transformations finies. Le procédé indiqué nous fournit immédiatement, sous une forme précise et élégante, la réduction d'un système donné $(A)$, admettant le groupe considéré $(G)$, à un système résolvant $(R)$ et à un système automorphe.

Nous avons traité d'abord deux exemples. L'un est emprunté au mémoire de Lie; l'avantage de notre méthode y est mis en évidence, car nous pouvons préciser la nature des intégrations indispensables plus que ne le fait Lie.

Dans la théorie générale, nous avons eu surtout en vue le cas qu'on peut considérer comme le cas général dans la formation des systèmes différentiels admettant un groupe donné. Mais l'application de notre méthode aux cas exceptionnels ne nécessiterait que des modifications de détail, comme on s'en rend compte dans les deux exemples particuliers que nous avons complètement traités.

---

[1] Cette méthode présente, néanmoins, des analogies inévitables avec celles que l'on doit à Lie et à M. Tresse.

## CHAPITRE PREMIER.

## Sur la forme et l'intégration des systèmes différentiels automorphes.

### § I. *Forme générale des systèmes automorphes.*

1. Nous appelons *système différentiel automorphe* tout système différentiel $(S)$, dépendant d'un nombre quelconque $n$ de fonctions inconnues: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et d'un nombre quelconque $m$ de variables indépendantes $t_1, t_2, \ldots, t_m$, qui jouit de la propriété suivante: Ses diverses solutions se déduisent de l'une quelconque d'entre elles

$$(\sigma) \qquad x'_i = \alpha_i(t_1, t_2, \ldots, t_n), \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

par les diverses transformations d'un groupe ponctuel $(G)$, à $n$ variables, effectuées sur $x_1, \ldots, x_n$. De sorte que, si l'une quelconque des transformations de $(G)$ est

$$(T) \qquad x'_i = Tx_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

l'une quelconque des solutions de $(S)$ est définie par les équations

$$(T\sigma) \qquad Tx_i = \alpha_i(t_1, t_2, \ldots, t_m). \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

Nous étudierons d'abord comment on peut former tous ces systèmes automorphes, correspondant à un groupe $(G)$ donné par les équations de définition de ses transformations finies.

Le cas le plus simple est celui où $m = n$, et où les fonctions $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ constituent un système de fonctions indépendantes: il est clair que, si cela a lieu pour une solution, cela a lieu pour toutes. Considérons alors la solution $(\sigma)$, et imaginons qu'on fasse dans $(S)$ le changement de variables indépendantes

$$t'_i = \alpha_i(t_1, \ldots, t_n). \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

Le nouveau système admettra la solution

$$x_i = t'_i, \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

et les autres solutions, s'en déduisant toujours par les transformations de $(G)$, seront définies par les divers systèmes d'équations

$$Tx_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) = t'_i, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

qui définissent les diverses transformations de $(G)$.

Le système $(S)$ sera donc devenu le système des équations de définition du groupe $(G)$, c.-à-d. sera de la forme [1]

$$U_s(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_k'^{(k_1 \ldots k_n)}, \ldots) = \omega_s(t'_1, \ldots, t'_n), \qquad (s=1,2,\ldots,p)$$

$$\left(x_k'^{(k_1 \ldots k_n)} = \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} x_k}{\partial t_1'^{k_1} \ldots \partial t_n'^{k_n}}\right);$$

où les fonctions $U_s$ forment un système complet d'invariants fondamentaux du groupe $(G)$, qui est connu par hypothèse.

Revenons maintenant aux variables primitives. On sait [2] qu'un changement de variables indépendantes, effectué dans les $U_s$, les change en des fonctions qui ne dépendent que des $U_s$ et des variables indépendantes nouvelles; et, d'une manière plus précise, qui sont de la forme:

$$L_s\left(\ldots, U_h(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_k^{(k_1 \ldots k_n)}, \ldots), \ldots \middle| \ldots, \alpha_j^{(\partial_1 \ldots \partial_n)}, \ldots\right), \qquad (s=1,2,\ldots,p)$$

où les $x_k^{(k_1 \ldots k_n)}$ et les $\alpha_j^{(\partial_1 \ldots \partial_n)}$ désignent des dérivées quelconques, des $x_k$ et des $\alpha_j$, prises par rapport à $t_1, \ldots, t_n$.

Le système $(S)$ s'obtient donc en égalant ces fonctions $L_s$ aux fonctions de $t_1, \ldots, t_n$:

$$\omega_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_n); \qquad (s=1,2\ldots,p)$$

et pourra s'écrire enfin, en résolvant les équations ainsi obtenues par rapport aux $U_s$: [3]

$$(1) \qquad \begin{cases} U_s(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_k^{(k_1 \ldots k_n)}, \ldots) = \theta_s(t_1, \ldots, t_n), & (s=1,2,\ldots,p) \\ \left(x_k^{(k_1 \ldots k_n)} = \dfrac{\partial^{(k_1+\ldots+k_n)} x_k}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_n^{k_n}}\right). \end{cases}$$

---

[1] due à Lie. Voir, par exemple, notre mémoire *Sur la theorie générale des groupes*: N° 6. (Annales de l'École normale, 1903.)

[2] Voir le mémoire cité: N° 7.

[3] Pour la possibilité de cette résolution, voir encore le mémoire cité: N° 7.

Le raisonnement précédent, repris en sens inverse, montrerait facilement que tout système de cette forme, qui n'est pas impossible, satisfait à la question. La forme générale des fonctions $\theta_s$ s'obtient sans peine en écrivant que le système a une solution arbitraire donnée.

Les systèmes canoniques ainsi obtenus s'offrent d'eux-mêmes, dans la théorie de la similitude des groupes.[1] Nous les appellerons, pour abréger, des *systèmes automorphes de première espèce.*.

2. Supposons encore $m = n$, mais supposons que les fonctions $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ne soient plus indépendantes; il y en aura, par exemple $m' < n$ d'entre elles qui seront indépendantes, tandis que les $n - m'$ autres seront fonctions de celles-là. Imaginons que nous prenions comme variables nouvelles $z_1, \dots, z_{m'}$, ces $m'$ fonctions $\alpha_i$ indépendantes, en même temps que $n - m'$ autres fonctions quelconques de $t_1, \dots, t_n$ pour les autres variables indépendantes $z_{m'+1}, \dots, z_n$. Parmi les équations du système $(S)$, transformées par ce changement de variables, figureraient évidemment les équations

$$\frac{\partial x_i}{\partial z_{m'+j}} = 0. \qquad (j=1,2,\dots,n-m';\ i=1,2,\dots,n)$$

Et, en revenant aux variables primitives, on voit que le système $(S)$ comprend, parmi ses équations, celles d'un système complet, dont $z_1, \dots, z_{m'}$ constituent une solution; et dont $x_1, \dots, x_n$ sont des intégrales.

Des équations de ce système complet, on peut tirer les dérivées des $x_i$ par rapport à $n - m'$ des variables; par exemple, par rapport à $t_{m'+1}, \dots, t_n$. Et, par suite, on peut faire disparaître des autres équations de $(S)$ toute différentiation par rapport à l'une quelconque de ces variables.

Donc le système $(S)$ se compose alors: 1°) du système complet en question, dont $x_1, \dots, x_n$ sont des intégrales; 2°) d'un système automorphe $(S_1)$, relatif au groupe $(G)$, mais où $t_1, \dots, t_{m'}$ interviennent seules comme variables indépendantes; $t_{m'+1}, \dots, t_n$ n'y jouent plus que le rôle de paramètres.

Inversement, dans cette hypothèse, le système complet peut être choisi arbitrairement mais le système $(S_1)$ doit admettre les transformations infinitésimales ayant pour symboles les premiers membres des équations du système complet. On le verrait en raisonnant comme nous l'avons fait,

[1] Voir le mémoire cité § IX.

pour un cas analogue, dans un autre travail;[1] nous y avons indiqué aussi comment ce fait donne les conditions auxiliaires auxquelles doivent satisfaire les arbitraires qui figurent, en général, dans les équations de $(S_1)$, pour que $(S_1)$ et le système complet constituent, dans leur ensemble, un système différentiel compatible. On pourra, du reste, toujours déterminer ces arbitraires, en même temps que le système complet, en se donnant l'une quelconque des solutions $(\sigma)$ du système $(S)$ que l'on veut former.

3. Une réduction analogue se présente toujours si $m > n$; de sorte que ce cas se ramène toujours, par la séparation d'un certain système complet, au cas où $m$ est au plus égal à $n$, et où, parmi les fonctions $\alpha_i$, il y en a $m$ d'indépendantes. Au point de vue de l'intégration de $(S)$, on peut aussi intégrer d'abord le système complet qui se sépare de $(S)$, et prendre pour nouvelles variables indépendantes un système fondamental d'intégrales distinctes de ce système complet; et l'on sera ramené au cas où il y a autant de fonctions $\alpha_i$ indépendantes que de variables $t_k$.

On voit donc, qu'en dehors du cas des systèmes automorphes de première espèce, il ne reste comme cas intéressant que celui où $m$ est inférieur à $n$; et, en raisonnant de même, on voit qu'on peut même supposer qu'il y a, parmi les $\alpha_i$, exactement $m$ fonctions de $t_1, \ldots, t_m$ indépendantes. Nous allons examiner ce dernier cas.

4. Supposons d'abord le groupe $(G)$ transitif; les points $(x_1, \ldots, x_n)$ qui font exception à la *transitivité,* — (c.-à-d. qui ne peuvent pas venir coïncider avec un point *arbitraire,* par au moins une transformation de $(G)$) — satisfont, s'il en existe, à certaines relations $(R)$ en $x_1, \ldots, x_n$, de forme déterminée, qui s'obtiennent en discutant le degré d'indétermination, c.-à-d. la résolubilité des équations de définition de $(G)$. On peut d'abord supposer que ces relations $(R)$ ne font pas partie des équations du système $(S)$.

Considérons alors la solution $(\sigma)$ comme représentant une multiplicité à $m$ dimensions, de l'espace $x_1, \ldots, x_n$. En lui appliquant une transformation de $(G)$, convenablement choisie, on en déduira une autre solution $(T\sigma)$, représentant une multiplicité nouvelle, passant par un point arbitraire. Il

[1] *Sur la théorie de Galois et ses généralisations.* N$^{os}$ 31 et 33 (Annales de l'École normale, 1904).

existe donc des familles de solutions de $(S)$, dépendant de $n-m$ paramètres, c.-à-d. de la forme

$$(2) \qquad x_i = \alpha_i(t_1, \ldots, t_m \mid a_1, \ldots, a_{n-m}), \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

telles que l'on puisse résoudre leurs équations (2) par rapport à $t_1, \ldots, t_m$, $a_1, \ldots, a_{n-m}$.

Imaginons alors le système automorphe de première espèce $(S_0)$, relatif au groupe $(G)$, et admettant la solution (2), considérée comme fonction des $n$ variables $t_1, \ldots, t_m, a_1, \ldots, a_{n-m}$. Ses solutions, si on y considère $a_1, \ldots, a_{n-m}$ comme des paramètres ayant des valeurs constantes déterminées, c.-à-d. si l'on les considère comme fonctions de $t_1, \ldots, t_m$ seulement, seront les mêmes que celles de $(S)$. Donc ce système $(S_0)$ contiendra un certain nombre d'équations ne dépendant de $a_1, \ldots, a_{n-m}$, ni directement, ni par celles des dérivées des $x_i$ où figure, parmi les indices de dérivation, au moins une fois l'une des lettres $a_1, \ldots, a_{n-m}$; et l'ensemble de celles de ces équations, conséquences des équations $(S_0)$, et telles que toutes les analogues puissent s'en déduire par des différentiations et des éliminations, pourra être pris pour définir le système $(S)$.

Imaginons toujours le système $(S_0)$ formé, et cherchons à en déduire toutes les conséquences jusqu'à un ordre $\mu$ quelconque qui satisfassent aux deux conditions énoncées, c.-à-d. ne contiennent ni des dérivées autres que les dérivées par rapport aux $t_i$, ni les paramètres $a_1, \ldots, a_{n-m}$. Je dis que la première condition entraîne la seconde.

En effet, supposons formées toutes les conséquences de $(S_0)$, jusqu'à l'ordre $\mu$, satisfaisant à la première condition seulement; il faut prouver que $a_1, \ldots, a_{n-m}$ en disparaissent d'eux-mêmes. Sans cela, en effet, on pourrait peut-être éliminer $a_1, \ldots, a_{n-m}$ d'un certain nombre d'entre elles; mais il en resterait un certain nombre $k$ qu'on pourrait résoudre par rapport à $a_1, \ldots, a_k$, par exemple. Considérons les équations

$$(3) \begin{cases} a_h = \Psi_h\left(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_k^{(\beta_1\ldots\beta_m)}, \ldots \mid t_1, \ldots, t_m \mid a_{k+1}, \ldots, a_{n-m}\right), & {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,k)} \\ \qquad \left(x_i^{(\beta_1\ldots\beta_m)} = \dfrac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_m} x_i}{\partial t_1^{\beta_1}\ldots\partial t_m^{\beta_m}}\right), \end{cases}$$

ainsi obtenues. Si on y effectue une transformation quelconque de $(G)$, elles doivent visiblement rester invariantes, et par conséquent les seconds membres sont des invariants différentiels de $(G)$. Exprimons alors que ce système admet la solution (2): cette solution s'obtient, par définition, en effectuant, dans une multiplicité déterminée,

$$(4) \qquad x_i = x_i^0 = \alpha_i^0(t_1, \ldots, t_m), \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

la transformation générale d'une certaine famille de transformations de $(G)$, de la forme

$$(5) \qquad x_i = f_i(x_1^0, \ldots, x_n^0 \mid a_1, \ldots, a_{n-m}). \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Or, si nous faisons dans les équations (3) la transformation (5), elles deviennent, puisque les $\Psi_h$ sont des invariants,

$$a_h = \Psi_h\left(x_1^0, \ldots, x_n^0, \ldots, x_i^{0(\beta_1 \ldots \beta_m)}, \ldots \,\middle|\, t_1, \ldots, t_m \,\middle|\, a_{k+1}, \ldots, a_{n-m}\right); \quad (h=1,2,\ldots,k)$$

et il reste à remplacer les $x_i^0$ par leurs valeurs (4), ce qui ne peut introduire dans les $\Psi_h$ les arbitraires $a_1, \ldots, a_k$. Il est donc impossible que les conditions obtenues soient réalisées identiquement.

5. La méthode à suivre pour former les systèmes $(S)$ avec un nombre $m < n$ de variables indépendantes sera donc la suivante. On écrira le système $(S_0)$, sous la forme (1), en laissant les $\theta_s$ indéterminés dans le second membre. Et on cherchera à en déduire des conséquences où ne figurent que des dérivées par rapport à $t_1, \ldots, t_m$; pour cela, on pourra être obligé de différentier d'abord les équations (1). On devra pousser les calculs jusqu'à ce qu'ils ne puissent plus donner d'équations nouvelles, qui ne soient des conséquences de celles déjà obtenues. Dans le système ainsi obtenu figureront certaines combinaisons des $\theta_i$ et de leurs dérivées: on les remplacera par des fonctions indéterminées de $t_1, \ldots, t_m$ seuls. Ces fonctions indéterminées devront pouvoir être déterminées en écrivant que le système admet une solution *arbitraire* $(\sigma)$; de sorte que le système sera formé d'équations dont les seconds membres seront ces fonctions indéterminées, et les premiers des invariants différentiels de forme entièrement connue.

Si on laisse les seconds membres indéterminés, on devra les supposer liés par des relations de condition, obtenues en écrivant que le système est complètement intégrable.

Il est à remarquer que, le calcul précédent étant un calcul d'éliminations, on pourra être amené, dans le courant de ces éliminations, à supposer que certains déterminants fonctionnels sont différents de zéro. On devra donc, dans ce cas, reprendre le calcul à nouveau, en faisant l'hypothèse contraire, c.-à-d. en introduisant, dans les équations du système $(S)$, celles que l'on obtient en égalant à zéro ces mêmes déterminants, et où ne figureront plus de fonctions indéterminées. De sorte qu'un même groupe $(G)$ peut donner, pour un même nombre de variables indépendantes, divers types de systèmes automorphes.

Comme exemple, nous nous bornerons à citer celui du groupe des mouvements euclidiens ($n = 3$), en supposant $m = 1$, c.-à-d. que les multiplicités considérées sont des courbes. Les équations de définition du groupe, mises sous forme complétement intégrable, sont du premier et du second ordre. On trouve deux types de systèmes automorphes, contenant des équations du premier, du second et du troisième ordre. Ce sont, en désignant par $x$, $y$, $z$ les fonctions inconnues, par $t$ la variable indépendante, par $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les dérivées de $x$, $y$, $z$ par rapport à cette variable; et par des lettres accentuées les dérivées de $\xi$, $\eta$, $\zeta$;

$$(6)\qquad \begin{cases} \sum \xi^2 = A(t), & (A \neq 0) \\ \sum \xi'^2 = B(t), \\ \sum \xi''(\eta\zeta' - \zeta\eta') = C(t); \end{cases}$$

et

$$(7)\qquad \begin{cases} \sum \xi^2 = 0, \\ \xi\eta' - \eta\xi' = J(t) \, . \, \zeta, \\ \dfrac{\xi'\eta'' - \eta'\xi''}{\xi\eta' - \eta\xi'} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\xi'^2 + \eta'^2}{\xi^2 + \eta^2} = H(t). \end{cases}$$

Le second convient à des familles de courbes minima; il faut joindre aux équations écrites celles qu'on en déduit par différentiations (jusqu'au troisième ordre, c.-à-d. au second par rapport à $\xi$, $\eta$, $\zeta$).

6. Revenons sur l'hypothèse faite au début du N° 4, en supposant qu'au contraire on impose aux fonctions $x_1, \ldots, x_n$ de satisfaire aux relations $(R)$. En vertu de ces relations, on pourra alors exprimer $x_1, \ldots, x_n$

au moyen d'un moindre nombre $n'$ de fonctions inconnues, qui seront transformées par un groupe $(G')$, isomorphe à $(G)$, et ne dépendant que de $n'$ variables; de sorte qu'on sera ramené à chercher les systèmes automorphes relatifs à $(G')$.

Une réduction tout semblable se produira si le groupe $(G)$ n'est pas transitif, les invariants de $(G)$, d'ordre zéro, établissant encore des relations, de forme connue, entre $x_1, \ldots, x_n$. Nous pouvons donc considérer comme résolue la question de la construction des divers types de systèmes automorphes, relatifs au groupe $(G)$, donné par les équations de définition de ses transformations finies.

Les résultats obtenus sont, bien entendu, des cas particuliers de résultats connus sur les invariants différentiels et l'équivalence des multiplicités par rapport à un groupe connu. Mais il était intéressant de les obtenir sous une forme aussi précise que possible, et sans rien supposer connu si ce n'est les notions fondamentales sur les équations de définition des groupes.

## § II. *De l'intégration des systèmes automorphes.*

7. Lie a montré [1] que l'intégration d'un système automorphe, dont le groupe associé $(G)$ n'est pas simple, peut toujours se remplacer par l'intégration successive de *systèmes automorphes simples,* c.-à-d. dont les groupes associés sont simples.

Nous ne reviendrons pas sur la démonstration de ce théorème fondamental. Remarquons seulement que, pour l'appliquer, il faut déterminer une *suite normale* de sous-groupes du groupe $(G)$ associé au système donné, c.-à-d. une suite de sous-groupes tels que chacun d'eux soit un sous-groupe invariant maximum du précédent. C'est là un problème auxiliaire que nous avons étudié, incidemment, dans un autre mémoire [2]: nous y avons montré qu'en dehors de simples calculs algébriques, la solution en peut nécessiter, tout-au-plus, l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

---

[1] Leipziger Berichte 1895, pages 285 et ss.

[2] *Sur la théorie des groupes continus,* § 7. Annales de l'École normale, 1903.

8. Une seconde réduction dans l'intégration d'un système automorphe se présente, si le groupe $(G)$, associé au système, est imprimitif. Supposons, pour plus de simplicité, qu'il soit simple; ce qui, d'après ce qui précède, n'est pas une restriction.

Soient $x_1, \ldots, x_n$ les variables dépendantes. Les fonctions de ces variables, que le groupe échange entre elles, constituent les solutions de divers systèmes complets, invariants par le groupe, et qui, par suite, se construisent sans intégration. Supposons que l'on ait formé l'un d'eux, qu'on l'ait intégré, et que l'on ait fait le changement de variables dépendantes nécessaire pour que certaines de ces variables: $x_1, \ldots, x_{n'}$ par exemple, en constituent une solution. Elles sont alors échangées par un groupe $(G')$, isomorphe holoédriquement à $(G)$, puisque $(G)$ est simple par hypothèse.

Dans les équations du système automorphe donné $(S)$, transformé par le changement de variables dépendantes indiqué, isolons alors les équations où ne figurent que les seules variables dépendantes $x_1, \ldots, x_{n'}$; elles forment un système automorphe $(S')$, ayant $(G')$ pour groupe associé. Si de plus on a choisi un système complet invariant donnant pour $n'$ la plus petite valeur possible, $(G')$ est primitif.

Supposons $(S')$ intégré: à chacune de ses solutions ne peut correspondre, à cause de l'isomorphisme holoédrique de $(G)$ et $(G')$, qu'une seule solution de $(S)$: c'est dire que $x_{n'+1}, \ldots, x_n$ se calculent, sans intégration, au moyen des équations de $(S)$, en fonction de $x_1, \ldots, x_{n'}$.

Donc l'intégration de $(S)$ est ramenée à celle de $(S')$.

En résumé, *l'intégration de tout système automorphe se ramène à celle de systèmes automorphes à groupes simples et primitifs.* Cette réduction nécessite, au plus, l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

9. Il peut arriver que, même pour des systèmes automorphes à groupes simples et primitifs, on puisse obtenir encore une simplification. Supposons en effet qu'il existe un groupe $(G')$, isomorphe holoédriquement au groupe $(G)$ du système donné, et transformant des variables $y_1, \ldots, y_{n'}$ en nombre moindre que celui des variables $x_1, \ldots, x_n$ que transforme $(G)$. Par hypothèse[1] il existe un troisième groupe $(G_0)$, transformant des variables $z_1, \ldots, z_\nu$,

[1] Cela résulte de la définition de l'isomorphisme, telle que nous l'avons donnée dans notre mémoire, déjà cité, *sur la théorie des groupes continus* (§ IX).

et tel que $(G)$ exprime la loi de transformation, par ce groupe $(G_0)$, de certaines fonctions de $z_1, \ldots, z_\nu$; tandis que $(G')$ exprime la loi de transformation, par ce même groupe $(G_0)$, d'autres fonctions de $z_1, \ldots, z_\nu$. Comme, du reste, le type de $(G')$ importe seul, et que l'on peut par suite le remplacer, ainsi que $(G_0)$, par un groupe quelconque qui lui soit semblable; comme, de plus, nous supposons, pour simplifier, $(G)$ et $(G')$ primitifs, ce que nous pouvons faire, d'après ce qui précède; il nous est loisible d'admettre que $x_1, \ldots, x_n$ soient certaines des variables $z_1, \ldots, z_\nu$, tandis que $y_1, \ldots, y_{n'}$ sont un autre groupe des mêmes variables. Nous appellerons $z_1, \ldots, z_{n''}$ celles des variables $z_1, \ldots, z_\nu$ qui n'appartiennent, ni à l'un, ni à l'autre de ces deux groupes.

En vertu de ce qui a été dit, au numéro précédent, sur les systèmes automorphes à groupes imprimitifs, tout système automorphe, ayant $(G_0)$ pour groupe associé, et qui comprend, parmi ses équations, celles du système donné $(S)$, ne contient, en plus, que des équations qui fournissent explicitement $y_1, \ldots, y_{n'}, z_1, \ldots, z_{n''}$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$, des variables indépendantes $t_1, \ldots, t_m$, des dérivées de $x_1, \ldots, x_n$, et des fonctions de $t_1, \ldots, t_m$, encore indéterminées, qui constituent les seconds membres de ces équations. Il en résulte qu'elles ne peuvent entraîner aucune condition d'intégrabilité, qui ne soit déjà condition d'intégrabilité de $(S)$; et que, par suite, on y peut choisir arbitrairement les fonctions indéterminées qui figurent dans leurs seconds membres. La construction d'un tel système suppose donc seulement qu'on connait les équations de définition de $(G_0)$, ce que nous admettons en effet. Soit donc $(S_0)$ un tel système.

D'après ce que nous avons vu au numéro précédent, l'intégration de $(S_0)$, qui entraîne celle de $(S)$, se ramène à celle du système réduit $(S')$ qui définit seulement $y_1, \ldots, y_{n'}$. Donc l'intégration de $(S)$ se trouve ainsi remplacée par celle de $(S')$, où figure un moins grand nombre de fonctions inconnues.[1]

Donc *tout système automorphe, dont le groupe associé $(G)$ est simple et primitif, est équivalent à un autre système automorphe, que l'on peut former, relatif à un groupe quelconque isomorphe holoédriquement à $(G)$.*

---

[1] Les développements que nous venons de donner nous paraissent l'explication d'un passage très-peu explicite du mémoire déjà cité de S. Lie. (Leipziger Berichte, 1895, p. 290.)

Ce nouveau théorème permet de n'introduire, en définitive, que des systèmes automorphes à groupes simples, primitifs, et dépendant, pour une structure donnée, du nombre minimum de variables.

10. Pour achever la théorie de l'intégration des systèmes automorphes, il resterait à examiner séparément les systèmes correspondant aux divers types de groupes simples primitifs. Car si l'on a affaire à un groupe $(G)$ semblable à l'un de ces groupes types $(\Gamma)$, on pourra chercher d'abord une transformation qui change $(G)$ en $(\Gamma)$, ce qui nécessite, comme nous l'avons montré dans notre mémoire *sur la théorie des groupes continus* (§ IX),[1] l'intégration d'un système automorphe de première espèce, ayant $(\Gamma)$ pour groupe associé.

Remarquons qu'il n'y a pas à se préoccuper des groupes finis; car un système automorphe à groupe fini se ramène à un système automorphe d'équations différentielles ordinaires du premier ordre. On est donc dans le cas de ces systèmes dont nous avons prouvé autrefois[2] qu'ils s'intégrent au moyen d'équations différentielles ordinaires linéaires.

Bornons-nous donc aux groupes infinis, simples et primitifs. Lie en a trouvé quatre grandes classes, et M. Kowalewski a montré qu'il n'y en a pas d'autres, pour $n \leqq 5$. Il nous sera donc impossible d'épuiser la question, pour $n > 5$. Nous dirons seulement quelques mots pour chacune des quatre classes de groupes simples trouvées par Lie.

1°) *groupes ponctuels généraux.* Les systèmes automorphes correspondants sont ceux qui définissent un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire aux dérivées partielles

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) \frac{\partial f}{\partial t_i} = 0, \tag{8}$$

ou d'un système complet d'équations de la même forme: il n'y a donc rien de particulier à dire sur l'intégration de ces systèmes, qui revient à celle d'équations différentielles ordinaires, qui peuvent être tout-à-fait générales.

---

[1] Annales de l'École normale, 1903.

[2] Annales de Toulouse, T. VIII, H; T. X, C.

2°) *groupes ponctuels les plus généraux, n'altérant pas les volumes.* L'équation de définition unique d'un tel groupe est

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)} = 1.$$

Il n'y a pas de système automorphe correspondant, qui dépende de moins de $n$ variables indépendantes. Les systèmes automorphes de première espèce ont la forme

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)} = f(t_1, \ldots, t_n).$$

Pour intégrer un tel système, on peut se donner arbitrairement les fonctions inconnues $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et $x_n$ se détermine par une quadrature.

Quant aux systèmes automorphes, dépendant de plus de $n$ variables indépendantes, ce ne sont autre chose que des équations linéaires de la forme (8), ou des systèmes complets de telles équations, admettant un multiplicateur de Jacobi connu. La théorie de leur intégration est donc bien connue.

3°) *groupes généraux de transformations de contact.* Appelons, pour plus de netteté, $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ les fonctions inconnues; et considérons d'abord un système automorphe de première espèce; soient $t_1, t_2, \ldots, t_{2n+1}$ les variables indépendantes. D'après la théorie de la similitude des groupes,[1] une solution de ce système peut être considérée comme définissant une transformation qui change le groupe général des transformations de contact en un autre groupe, qui lui est semblable; cette transformation change l'équation

$$dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = 0 \tag{9}$$

en une autre équation de Pfaff

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \theta_k(t_1, \ldots, t_{2n+1}) dt_k = 0. \tag{10}$$

Les diverses autres solutions se déduisent de la première en y effectuant, sur $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, les diverses transformations de contact, c.-à-d. les

[1] Voir notre mémoire: *Sur la théorie des groupes continus*, § IX. Annales de l'École normale, 1903.

diverses transformations laissant l'équation (9) invariante. Elles définiront donc à leur tour les diverses transformations qui changent (9) en (10). Le problème de l'intégration du système automorphe considéré est donc identique à celui qui consiste à ramener l'équation de PFAFF (10) à la forme canonique (9) c.-à-d. se ramène au problème classique de PFAFF.

L'intégration des systèmes automorphes à plus de $2n+1$ variables indépendantes, d'après ce que nous avons vu au n° 3, se ramène au cas précédent.

Mais il y a en outre à considérer des systèmes automorphes dépendant de moins de $2n+1$ variables indépendantes. Leur intégration se rattache encore à la théorie du problème de PFAFF: mais leur étude nécessiterait d'assez longs développements, que nous réserverons pour une autre travail.

4°) *groupes généraux de transformations de contact en* $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$. Le système automorphe de première espèce définit (on le verrait en raisonnant comme plus haut) toutes les transformations qui changent une expression de PFAFF

$$(11) \qquad \sum_{k=1}^{2n} \theta_k(t_1, \ldots, t_{2n}) dt_k$$

en une expression de la forme

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i + dU,$$

$U$ étant une fonction arbitraire des variables indépendantes. La recherche de ces transformations se rattache à la théorie du problème de PFAFF. Il en est de même pour l'intégration des systèmes automorphes, relatifs au même groupe, et dépendant de moins de $2n$ variables indépendantes. C'est encore un point sur lequel nous nous réservons de revenir dans une autre occasion.

## CHAPITRE II.

## Sur l'intégration des systèmes différentiels, qui admettent des groupes de transformations.

### § I. *Un exemple de Lie.*

1. Nous allons exposer une méthode générale, dont le but est de ramener l'intégration de tous les systèmes différentiels, admettant des groupes continus de transformations, à l'intégration de systèmes automorphes.

Nous traiterons d'abord, suivant cette méthode, l'un des exemples étudiés par Lie.[1] Il nous sera plus facile ensuite de l'exposer dans toute sa généralité.

Le problème traité par Lie est le suivant:

*Exposer une théorie générale d'intégration pour les équations aux dérivées partielles du second ordre, définissant une fonction inconnue $z$ des deux variables indépendantes $x, y$; et admettant le groupe infini dont la transformation infinitésimale générale est de la forme:*

$$\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} - \xi'(x) . z\frac{\partial f}{\partial z}, \tag{1}$$

*$\xi$ étant une fonction arbitraire.*

Lie ramène la solution de ce problème à l'intégration d'un système en involution; c.-à-d. à l'emploi de la méthode de M. Darboux. Notre solution sera toute autre, et conduira à prévoir quelques simplifications de plus.

2. Étudions d'abord le groupe considéré, que nous appellerons le groupe $(G)$. Sa transformation finie générale est

$$x' = X(x), \qquad z' = \frac{z}{X'(x)}, \tag{2}$$

où $X(x)$ est une fonction arbitraire.

[1] Leipziger Berichte, 1895, pages 116 et ss.

Les équations de définition de ses transformations finies s'en déduisent sans peine. On en a d'abord une première forme évidente:

$$(3) \qquad \frac{\partial x'}{\partial z} = 0, \qquad z' \frac{\partial x'}{\partial x} = z.$$

Mettons-les sous la forme de LIE, en appliquant la méthode générale que nous avons exposée dans un autre travail.[1]

Nous introduisons deux variables indépendantes $u$ et $w$, non transformées; et nous cherchons les relations entre les dérivées de $x$, $z$ et de $x'$, $z'$ par rapport à ces variables. Pour savoir jusqu'à quel ordre il faudra pousser les calculs, nous devons mettre les équations (3) sous forme complètement intégrable; nous obtenons les équations, du 1^er^ ordre seulement,

$$(4) \qquad \frac{\partial x'}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{z}{z'}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{z'}{z}.$$

D'où les relations

$$(5) \qquad \frac{\partial x'}{\partial u} = \frac{z}{z'} \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial w} = \frac{z}{z'} \frac{\partial x}{\partial w},$$

et

$$\frac{\partial z'}{\partial u} = \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{z'}{z} \frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial w} = \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{z'}{z} \frac{\partial z}{\partial w}.$$

Il faut éliminer les dérivées de $x'$, $z'$ par rapport à $x$, $z$; ce qui donne, d'abord les relations (5), et la relation

$$(6) \qquad \frac{\partial z'}{\partial u} = \frac{z'}{z} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial w}} \left[ \frac{\partial z'}{\partial w} - \frac{z'}{z} \frac{\partial z}{\partial w} \right].$$

Il est inutile de continuer à employer la méthode générale, car on voit de suite que ces équations s'écrivent:

$$z' \frac{\partial x'}{\partial u} = z \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad z' \frac{\partial x'}{\partial w} = z \frac{\partial x}{\partial w},$$

$$\frac{1}{z'} \frac{\partial z'}{\partial u} - \frac{1}{z'} \frac{\partial z'}{\partial w} \cdot \frac{\frac{\partial x'}{\partial u}}{\frac{\partial x'}{\partial w}} = \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial w}};$$

[1] *Sur la théorie des groupes continus*, n° 6. (Ann. de l'Éc. norm., 1903.)

et la dernière peut se remplacer, en tenant compte des premières, par

$$\frac{D(x', z')}{D(u, w)} = \frac{D(x, z)}{D(u, w)}.$$

Ainsi se trouvent calculés les invariants différentiels fondamentaux

$$(7) \qquad z\frac{\partial x}{\partial u}, \quad z\frac{\partial x}{\partial w}, \quad \frac{D(x, z)}{D(u, w)}.$$

Les équations de définition de $(G)$, ramenées à la forme de Lie, sont par suite

$$(8) \qquad z'\frac{\partial x'}{\partial x} = z, \qquad z'\frac{\partial x'}{\partial z} = 0, \qquad \frac{D(x', z')}{D(x, z)} = 1.$$

3. Nous devons maintenant considérer $z$ comme une fonction de $x$ et $y$, et chercher les équations différentielles correspondantes, qui admettent le groupe $(G)$. Nous emploierons à cet effet une méthode nouvelle, analogue à celles qui ont été données par M. Tresse, dans sa thèse: [1] cette méthode est la base de la méthode d'intégration que nous exposerons ensuite.

Employons, pour plus de commodité, le langage géométrique. Nous avons à considérer une surface $\sigma$, et les surfaces qui lui sont *homologues* par rapport au groupe $(G)$; c.-à.d. qui en proviennent par les transformations de ce groupe; et à chercher les relations en $z, p, q, r, s, t, \ldots$ qui peuvent convenir à la fois à toutes ces surfaces.

Imaginons à cet effet que la surface $\sigma$ soit donnée par trois équations de la forme:

$$(\sigma) \qquad x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v).$$

Les homologues seront données, sous une forme analogue, par les solutions d'un système automorphe, dont le groupe associé s'obtiendra en adjoignant l'équation $y = y'$ à celles des diverses transformations de $(G)$ (puisque celles-ci ne transforment pas $y$).

Plus simplement encore, nous servant de cette circonstance que $y$ n'est pas transformé, il nous suffira de supposer $\sigma$ définie par deux équations de la forme

$$(9) \qquad x = f(u, y), \qquad z = g(u, y);$$

[1] *Sur les invariants différentiels.* Paris, 1893.

et les homologues de $\sigma$ seront définies d'une manière toute semblable par les solutions d'un système automorphe, relatif au groupe $(G)$, qui sera de la forme

$$(10)\qquad z\frac{\partial x}{\partial u}=\alpha,\qquad z\frac{\partial x}{\partial y}=\beta,\qquad \frac{D(x\,,\,z)}{D(u\,,\,y)}=\gamma,$$

où $\alpha\,,\beta\,,\gamma$ sont certaines fonctions de $u$ et $y$, satisfaisant à la condition d'intégrabilité du système (10),

$$(11)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial u}=\gamma;$$

et dont l'expression s'obtiendrait en exprimant que les équations (9) définissent une solution du système (10).

Il n'y aura donc qu'à chercher les relations entre $z\,,p\,,q\,,r\,,\ldots$ qui sont des conséquences de ces équations (10), et de l'hypothèse que $z$ est fonction de $x$ et $y$. Cette hypothèse s'exprimera du reste par les relations

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} dx&=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial y}dy,\\ dz&=p\,dx+q\,dy,\\ dp&=r\,dx+s\,dy,\\ dq&=s\,dx+t\,dy,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

où $du$ et $dy$ sont arbitraires.

4. Cherchons d'abord les relations du premier ordre. On a à joindre, aux équations (10), les relations

$$(13)\qquad \frac{\partial z}{\partial u}=p\frac{\partial x}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=p\frac{\partial x}{\partial y}+q;$$

ce qui donne les équations résolues

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\alpha}{z},\qquad \frac{\partial x}{\partial y}=\frac{\beta}{z},\\ &\frac{\partial z}{\partial u}=p\frac{\alpha}{z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=p\frac{\beta}{z}+q, \end{aligned}\right.$$

et l'équation de condition:

$$(15) \qquad q\alpha - \gamma z = 0.$$

On n'en pourrait rien tirer, si $\alpha = \gamma = 0$, ce qui réduirait les équations (10) à $z = 0$. Cette surface particulière est invariante par toutes les transformations de $(G)$. Nous pouvons la laisser de côté.

Alors $\alpha$ est nécessairement différent de zéro, sans quoi, à cause de (15), on retomberait sur le cas précédent. On peut donc écrire (15) sous la forme

$$(16) \qquad \frac{q}{z} = \frac{\gamma}{\alpha};$$

ce qui montre que $\frac{q}{z}$ est *un invariant différentiel du* 1^er^ *ordre* pour la famille de surfaces considérée.

On vérifierait facilement que, sous cette condition (16), le système (14) est complètement intégrable, de sorte qu'en le différentiant on n'obtiendra jamais de relation, indépendante des dérivées de $x$ et $z$ par rapport à $u$ et $y$, qui ne soit une conséquence de (16), et des relations qu'on en peut déduire par différentiations successives.

Nous allons montrer que ces relations se déduiront les unes des autres par l'emploi répété de *deux paramètres différentiels.*

Supposons en effet l'une d'elles, qui est, par hypothèse, de la forme

$$(17) \qquad J(x, y, z, p, q, r, \ldots) = H(u, y).$$

Nous aurons à la différentier par rapport à $u$ et $y$; ce qui donnera, en tenant compte des relations (14), et employant les notations usuelles de différentiation totale,

$$\frac{dJ}{dx}\cdot\frac{\alpha}{z} = \frac{\partial H}{\partial u}, \qquad \frac{dJ}{dx}\cdot\frac{\beta}{z} + \frac{dJ}{dy} = \frac{\partial H}{\partial y},$$

d'où l'on tire:

$$(18) \qquad \frac{1}{z}\frac{dJ}{dx} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial H}{\partial u}, \qquad \frac{dJ}{dy} = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial H}{\partial u}.$$

Les deux membres de ces relations définissent les paramètres différentiels annoncés, sous leur double forme.

Nous obtiendrons par conséquent ainsi une série illimitée d'invariants différentiels, avec leurs expressions au moyen de $\alpha, \beta, \gamma$ et de leurs dérivées successives; en se servant de l'identité (11), on pourra même ne laisser dans ces expressions que $\alpha, \beta$ et leurs dérivées successives.

Si, jusqu'à un certain ordre $m$, on a obtenu les relations distinctes:

$$(19) \qquad J_k(x, y, z, p, q, r, \ldots) = H_k\left(y, \alpha, \beta, \frac{\partial\alpha}{\partial u}, \frac{\partial\alpha}{\partial y}, \ldots\right), \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,\mu)}$$

tous les systèmes différentiels dont nous cherchions la forme générale résulteront de l'élimination de $u$ et de $y$ entre les équations (19), où $\alpha$ et $\beta$ auront été remplacées par des fonctions de $u$ et de $y$. Bien entendu, il se pourra qu'ils ne contiennent qu'une partie des relations provenant de cette élimination.

Le cas où ils les contiennent toutes est celui où toutes les solutions du système différentiel en $x, y, z, p, q, r, \ldots$ se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les diverses transformations de $(G)$; de sorte qu'on pourrait dire encore qu'un tel système est automorphe; mais il nous parait préférable de n'employer ce mot que dans le sens plus restreint où nous l'avons employé jusqu'ici. On sait que, dans ce cas, l'ordre du système est limité; c.-à-d. qu'il existe un certain ordre $m_0$ tel que les équations d'ordre supérieur sont des conséquences des équations d'ordre égal ou inférieur à $m_0$.

5. Tout système différentiel, de l'espèce considérée, sera donc de la forme:

$$(20) \qquad F_h(J_1, J_2, \ldots, J_\mu) = 0. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,\rho)}$$

Et, réciproquement, tout système différentiel de cette forme, pourvu qu'il soit complètement intégrable, satisfait évidemment à la question.

A ce système on pourra associer le *système résolvant*

$$(21) \qquad F_h(H_1, H_2, \ldots, H_\mu) = 0, \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,\rho)}$$

qui sera de lui-même complètement intégrable; et *l'intégration du système donné se décomposera en:* 1°) *l'intégration du système résolvant* (21); 2°) *l'intégration du système automorphe* (10).

Telle est, en deux mots, la méthode d'intégration annoncée. L'idée qui nous a guidé est de répartir l'ensemble des solutions du système donné en familles formées de solutions provenant les unes des autres par les transformations de $(G)$. C'est aussi cette idée qui est, au fond, le principe de la méthode de Lie; mais l'introduction des systèmes automorphes nous permettra de préciser davantage la nature des intégrations auxquelles nous allons être conduits.

Il nous reste en effet à étudier, de plus près, les deux problèmes types auxquels nous nous trouvons ramenés.

6. Occupons-nous d'abord de l'intégration du système automorphe (10). On voit immédiatement qu'elle se réduit à celle de l'équation

$$\beta\frac{\partial x}{\partial u} - \alpha\frac{\partial x}{\partial y} = 0, \tag{22}$$

car on a ensuite

$$z = \frac{\alpha}{\frac{\partial x}{\partial u}} = \frac{\beta}{\frac{\partial x}{\partial y}}; \tag{23}$$

et la troisième équation (10), est une conséquence de celles-là, en vertu de la condition (10).

Donc tout se réduit à l'intégration de l'équation différentielle ordinaire, à deux variables,

$$\alpha du + \beta dy = 0. \tag{24}$$

7. Etudions maintenant le système (21). Remarquons d'abord que la forme de $J_k$ ne peut dépendre du choix de la variable indépendante $u$, qui a été supposée figurer dans les formules (9), définissant l'une des surfaces cherchées. Donc les $H_k$ sont invariants[1] par l'ensemble des transformations

$$u' = \varphi(u, y), \qquad y' = y; \tag{25}$$

auxquelles s'associent

$$\alpha = \alpha'\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad \beta = \alpha'\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \beta', \tag{26}$$

[1] Une idée analogue se trouve dans le mémoire de Lie *Sur les invariants intégraux.* Leipziger Berichte, 1897, pages 379 et ss.

obtenues en écrivant que le système

$$z\frac{\partial x}{\partial u'} = \alpha', \qquad z\frac{\partial x}{\partial y} = \beta', \qquad \frac{D(x\,,\,z)}{D(u'\,,\,y)} = \gamma'$$

est équivalent au système (10).

Reciproquement, toute fonction différentielle en $u\,,y\,,\alpha\,,\beta\,,\frac{\partial\alpha}{\partial u}\,,\ldots,$ invariante par le groupe [(25), (26)], ne dépend pas des paramètres choisis pour représenter la surface $\sigma$; de sorte que, quand on y aura remplacé $\alpha$ et $\beta$, au moyen des formules (10), en fonction de $x\,,y\,,z\,,\frac{\partial x}{\partial u}\,,\ldots,$ elle ne pourra dépendra que des dérivées de $z$ par rapport à $x$ et $y$; c.-à-d. qu'elle sera devenue un invariant $J$.

*Donc le système* (21) *est caractérisé par cette propriété d'être invariant par le groupe* [(25), (26)].

Il pourrait sembler que l'on est ramené à un problème de la même nature que le premier, et par suite que l'on va se trouver dans un cercle vicieux. Mais, ici, nous n'avons pas besoin de connaître toutes les solutions; il ne nous en faut au contraire qu'une seule, dans chaque série de solutions provenant les unes des autres par les transformations du groupe [(25), (26)]. Il faut donc chercher à faire ce choix, pour n'avoir pas d'intégrations superflues.

Cela revient à chercher une forme canonique de ce système, satisfaisant à la condition précédente. On y arrive en se donnant, pour les expressions de deux invariants, une forme déterminée. Comme celle de l'invariant $y$ est forcée, on se donnera celle du premier invariant: $\frac{\gamma}{\alpha}$. Posons, par exemple,

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial u}}{\alpha} = u. \tag{27}$$

Les deux premiers invariants suivants deviendront, en se servant des paramètres différentiels trouvés plus haut,

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}{\partial u} = \frac{1}{\alpha}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}{\partial y} - \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}{\partial u} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

On aurait donc pu choisir les invariants du second ordre de manière qu'ils se réduisent, dans l'hypothèse (27), à $\alpha$ et $\beta$. On verra de même[1] que, par un choix convenable, les suivants se réduiraient à trois des dérivées $\frac{\partial\alpha}{\partial u}, \frac{\partial\alpha}{\partial y}, \frac{\partial\beta}{\partial y}$, la quatrième étant liée aux autres par la relation (27). Et ainsi de suite.

Le système (21) sera donc remplacé par un système complètement intégrable, qui pourra être le plus général de ceux qui forment, avec (27) et les équations qu'on en déduit par différentiations, un système complètement intégrable. Il sera de la forme

$$\Phi_h\left(y, u, \alpha, \beta, \frac{\partial\alpha}{\partial u}, \ldots\right) = 0, \qquad (h=1, 2, \ldots, \rho) \tag{28}$$

et de l'ordre $m - 1$, si le système (21) est d'ordre $m$.

Cette partie du calcul conduit du reste à un système auxiliaire identique à celui que donne Lie; il est facile de vérifier en effet que Lie fait la même suite de calculs, avec une autre interprétation seulement.

8. Bornons-nous, pour terminer, au cas d'une équation invariante du second ordre. Le système (28) se réduira à une équation[2]

$$\Phi(y, u, \alpha, \beta) = 0;$$

d'où l'on pourra tirer $\beta$, par exemple,

$$\beta = \chi(\alpha, u, y). \tag{29}$$

On sera donc ramené à une équation du premier ordre *linéaire*

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \frac{\partial\chi}{\partial u} - \alpha u = 0,$$

---

[1] Cela résulte, sans calcul, d'une propriété générale des invariants différentiels: voir S. Lie, Leipziger Berichte, 1895, page 118.

[2] Le système (20) se réduit à une équation de la forme

$$F\left(y, \frac{q}{z}, \frac{zs - pq}{z^3}, \frac{t}{z} - \frac{q^2}{z^2}\right) = 0.$$

c.-à-d. à un système d'équations différentielles ordinaires

$$dy = -\frac{du}{\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}} = \frac{d\alpha}{\frac{\partial\chi}{\partial u} + \alpha u}. \tag{30}$$

On verrait que l'intégration se simplifie, si l'équation (29) est homogène en $\alpha$ et $\beta$, car alors le système [(27), (29)] admet le groupe à un paramètre

$$\alpha' = c\alpha, \qquad \beta' = c\beta.$$

L'intégration se ramène alors à celle d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, et à une quadrature.

*Remarque.* Si le système donné avait pour conséquence une relation de la forme

$$\frac{q}{z} = f(y) \tag{31}$$

c.-à-d.

$$\frac{\gamma}{\alpha} = f(y),$$

l'équation (27) serait impossible. Les formules (18) montrent qu'alors tous les invariants sont fonctions de $y$ seul.

Cela prouve qu'il serait impossible, dans ce cas, de fixer la position d'un point sur une surface intégrale par les valeurs de deux invariants; et, par conséquent, impossible d'avoir une correspondance univoque entre deux surfaces intégrales homologues. Il y a donc une infinité de transformations de $(G)$ qui transforment l'une des surfaces dans l'autre, et chacune d'elles admet un sous-groupe du groupe $(G)$. La réciproque est vraie, sauf dans le cas où la surface est telle que tous ses points soient invariants par les transformations de $(G)$ qu'elle admet.

Vérifions ces prévisions: une surface de l'espèce considérée est de la forme

$$z = \psi(x) \, . \, \chi(y),$$

et admet le sous-groupe à un paramètre dont la transformation infinitésimale est

$$\frac{1}{\psi(x)} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2} z \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Quant à l'intégration de (21), elle se réduira à celle d'une équation différentielle ordinaire donnant la fonction $f(y)$. On pourra satisfaire ensuite à

$$\frac{\gamma}{\alpha} = f(y)$$

en prenant, par exemple

$$\beta = 0, \qquad \alpha = e^{\int f(y)\,dy};$$

et les équations (10) donneront

$$x = \theta(u), \qquad z\theta'(u) = e^{\int f(y)\,dy};$$

c.-à-d. puisque $\theta(u)$ est arbitraire

$$z = \psi(x) \, . \, e^{\int f(y)\,dy}.$$

Il serait, bien entendu, immédiat d'intégrer

$$\frac{q}{z} = f(y),$$

mais il était intéressant de montrer que la méthode n'est en défaut que quant à la simplification du système résolvant (21).

## § II. *Autre exemple.*

9. Nous considérerons encore le groupe $(G)$, dont la transformation infinitésimale générale est [1]

$$\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \xi'(x)y\frac{\partial f}{\partial y} + \xi''(x)y\frac{\partial f}{\partial z},$$

et dont la transformation finie générale est

$$x' = X(x), \qquad y' = yX'(x), \qquad z' = z + y\frac{X''(x)}{X'(x)}.$$

Et nous voulons étudier les équations aux dérivées partielles en $x, y, z, p, q, r, \ldots$, et les systèmes de telles équations, qui admettent ce groupe $(G)$.

Appliquons la même marche que dans l'exemple précédent.

[1] Ce groupe a été considéré par M. Medolaghi. Annali di Matematica, 1898, page 229.

Nous cherchons d'abord à définir l'ensemble des surfaces homologues d'une surface déterminée, supposée définie par trois équations

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v).$$

Cela revient à chercher les systèmes automorphes correspondants. Nous déterminons d'abord les invariants différentiels de $(G)$, en considérant $x, y, z$ comme fonctions des deux variables $u, v$ non transformées. On trouve

$$\frac{1}{y}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{1}{y}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{1}{y}\left[\frac{\partial y}{\partial u} - z\frac{\partial x}{\partial u}\right], \quad \frac{1}{y}\left[\frac{\partial y}{\partial v} - z\frac{\partial x}{\partial v}\right],$$

$$\frac{1}{y}\left[\frac{D(x, z)}{D(u, v)} - \frac{z}{y}\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right];$$

et ceux qui s'en déduisent par différentiations successives. La forme des systèmes automorphes correspondants sera donc

$$(32) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial x}{\partial u} = \alpha, & \dfrac{1}{y}\left[\dfrac{\partial y}{\partial u} - z\dfrac{\partial x}{\partial u}\right] = \beta, \\[2ex] \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial x}{\partial v} = \alpha', & \dfrac{1}{y}\left[\dfrac{\partial y}{\partial v} - z\dfrac{\partial x}{\partial v}\right] = \beta', \\[2ex] \quad \dfrac{1}{y}\dfrac{D(x, z)}{D(u, v)} - \dfrac{z}{y^2}\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} = \gamma; \end{cases}$$

ce qui s'écrit, en résolvant

$$(33) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \alpha y, & \dfrac{\partial y}{\partial u} = y(\alpha z + \beta), \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = \alpha' y, & \dfrac{\partial y}{\partial v} = y(\alpha' z + \beta'), \\[2ex] \alpha\dfrac{\partial z}{\partial v} - \alpha'\dfrac{\partial z}{\partial u} = (\alpha\beta' - \beta\alpha')z + \gamma; \end{cases}$$

et on trouve, comme conditions d'intégrabilité,

$$(34) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \alpha'}{\partial u} + \alpha\beta' - \beta\alpha' = 0, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial \beta'}{\partial u} + \gamma = 0.$$

10. Nous calculons maintenant les équations invariantes cherchées, en adjoignant aux équations (33) les suivantes

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v},$$

c.-à-d.

$$(35) \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = y[\alpha(p+qz)+\beta q], \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = y[\alpha'(p+qz)+\beta' q].$$

Éliminant les dérivées par rapport à $u$ et $v$; et, écartant le cas singulier ou $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ serait nul,[1] il vient

$$(36) \qquad qy - z = \frac{\gamma}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}.$$

Et on montrerait, comme dans l'exemple précédent, que tous les autres invariants différentiels doivent s'en déduire par différentiations successives, au moyen de paramètres différentiels. Calculons ces paramètres différentiels: nous partons à cet effet de l'identité

$$J(x, y, z, p, q, r, \ldots) = H\left(\alpha, \beta, \ldots, \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \ldots\right),$$

et, en la différentiant, nous obtenons

$$\alpha y\frac{dJ}{dx} + y(\alpha z + \beta)\frac{dJ}{dy} = \frac{\partial H}{\partial u},$$

$$\alpha' y\frac{dJ}{dx} + y(\alpha' z + \beta')\frac{dJ}{dy} = \frac{\partial H}{\partial u};$$

d'où on tire les paramètres différentiels équivalents

$$(37) \qquad \left\{\begin{aligned} y\left(\frac{dJ}{dx} + z\frac{dJ}{dy}\right) &= \frac{\beta'\dfrac{\partial H}{\partial u} - \beta\dfrac{\partial H}{\partial v}}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} = A(H), \\ y\frac{dJ}{dy} &= \frac{\alpha\dfrac{\partial H}{\partial v} - \alpha'\dfrac{\partial H}{\partial u}}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} = B(H). \end{aligned}\right.$$

---

[1] Dans ce cas, on aurait, d'après les équations (32), $\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} = 0$, et ce serait en contradiction avec l'hypothèse que $x$ et $y$ sont deux variables indépendantes.

Les seconds membres des relations ainsi obtenues sont aussi des invariants différentiels. En effet, ils ne doivent pas changer de valeur quand on fait sur $u$ et $v$ un changement de variables quelconque

$$\bar{u} = \varphi(u, v), \qquad \bar{v} = \psi(u, v). \tag{38}$$

Or, par ce changement de variables, le système (32) garde sa forme, les seconds membres étant remplacés respectivement par les fonctions $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\alpha}', \bar{\beta}', \bar{\gamma}$ de $\bar{u}, \bar{v}$, définies par les formules

$$\left\{\begin{array}{ll} \bar{\alpha}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \bar{\alpha}'\dfrac{\partial\psi}{\partial u} = \alpha, & \bar{\alpha}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \bar{\alpha}'\dfrac{\partial\psi}{\partial v} = \alpha', \\ \bar{\beta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \bar{\beta}'\dfrac{\partial\psi}{\partial u} = \beta, & \bar{\beta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \bar{\beta}'\dfrac{\partial\psi}{\partial v} = \beta', \\ \multicolumn{2}{c}{\bar{\gamma}\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} = \gamma.} \end{array}\right. \tag{39}$$

On a donc à considérer le groupe [(38), (39)]. Ses invariants différentiels jusqu'au premier ordre sont

$$\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\partial\alpha}{\partial v} - \frac{\partial\alpha'}{\partial u}\right], \qquad \frac{1}{\gamma}\left[\frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{\partial\beta'}{\partial u}\right], \qquad \frac{1}{\gamma}(\alpha\beta' - \beta\alpha'); \tag{40}$$

c.-à-d. les expressions qui interviennent seules dans les conditions d'intégrabilité (34), et la valeur de l'invariant (36). Il était du reste évident que les conditions d'intégrabilité de (32) devaient être invariantes par le groupe [(38), (39)].

Nous supposerons que l'on remplace partout $\gamma$ par sa valeur, tirée de (34)

$$\gamma = \frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{\partial\beta'}{\partial u},$$

On pourra alors abandonner la dernière des équations (39); et les invariants différentiels seront seulement

$$\frac{\dfrac{\partial\alpha'}{\partial u} - \dfrac{\partial\alpha}{\partial v}}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}, \quad \frac{\dfrac{\partial\alpha'}{\partial u} - \dfrac{\partial\beta}{\partial v}}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}; \tag{41}$$

— [dont le premier est égal à un, d'après (36); tandis que le second est l'équivalent de l'invariant $(qy - z)$] —; et ceux qui s'en déduisent par l'emploi des paramètres différentiels qui sont les seconds membres de (37). Nous n'aurons à considérer que ceux qui proviennent ainsi du second des invariants (41), les autres étant tous identiquement nuls dans la question.

11. Nous obtenons donc une suite d'identités de la forme

$$(42)\qquad J_k(x, y, z, p, q, r, \ldots) = H_k\left(\alpha, \beta, \alpha', \beta', \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \ldots\right),$$

dont (36) est la première. Tout système répondant à la question sera de la forme

$$(43)\qquad F_h(J_1, J_2, \ldots, J_\mu) = 0. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,\nu)}$$

Et pour l'intégrer, nous le remplacerons par le système résolvant formé de la première des équations (34), et du système

$$(44)\qquad F_h(H_1, H_2, \ldots, H_\mu) = 0. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,\nu)}$$

Ce système résolvant intégré, on devra intégrer ensuite le système automorphe (46).

La réduction de l'intégration du système résolvant se fera suivant la méthode suivie au n° 7. Nous poserons, par exemple, pour le premier des $H_k$

$$(45)\qquad \frac{\dfrac{\partial \beta'}{\partial u} - \dfrac{\partial \beta}{\partial v}}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} = u;$$

et les suivants se réduiront alors à

$$-\frac{\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}, \frac{\beta'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}.$$

Comme on le voit en appliquant à l'identité (45) les opérations $A(F)$ et $B(F)$. Nous poserons alors

$$(46)\qquad -\frac{\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} = v;$$

de sorte que deux des invariants $H_k$, de l'ordre suivant, se réduiront à

$$\frac{-\beta}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}, \frac{\alpha}{\alpha\beta' - \beta\alpha,}.$$

On voit donc que quatre des invariants se réduisent, en vertu des hypothèses (45) et (46), à quatre fonctions de $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ indépendantes. On aurait donc pu les remplacer par des combinaisons de ces invariants qui se seraient réduites précisément à $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$; et les suivants se réduiraient à des combinaisons de $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ et de leurs dérivées, d'où pourraient se tirer toutes ces dérivées. Le système résolvant sera ainsi réduit aux équations

$$(47)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} - \dfrac{\partial \alpha'}{\partial u} + \alpha\beta' - \beta\alpha' = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial \beta}{\partial v} - \dfrac{\partial \beta'}{\partial u} + u(\alpha\beta' - \beta\alpha') = 0, \\[2mm] \alpha' + v(\alpha\beta' - \beta\alpha') = 0, \end{cases}$$

jointes à un système qui peut être le plus général de ceux qui, associés à ces équations (41), constituent un système complétement intégrable. Un tel système n'admet plus aucune transformation en $\alpha, \beta, \alpha', \beta', u, v$. Il ne présente donc plus rien de particulier, au point de vue de la théorie des groupes.

10. Il nous reste à étudier l'intégration du système (33). Elle est immédiate: $x$ se détermine d'abord par l'équation

$$\alpha' \frac{\partial x}{\partial u} - \alpha \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

c.-à-d. en intégrant l'équation différentielle ordinaire

$$\alpha du + \alpha' dv = 0.$$

On a ensuite, sans intégration nouvelle,

$$y = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\alpha'}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad z = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial u} - \beta\right] = \frac{1}{\alpha'}\left[\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial v} - \beta'\right].$$

13. Considérons, par exemple, le cas d'une seule équation du second ordre

$$(48)\qquad F\big(qy - z, (sy - p)y + ty^2 z, ty^2\big) = 0.$$

On obtiendra, pour adjoindre aux équations (47), la seule équation

$$F\left(u, \frac{\beta'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}, v\right) = 0,$$

d'où on tirera

$$\beta' + f(u, v)(\alpha\beta' - \beta\alpha') = 0. \tag{49}$$

On trouve alors, par un calcul facile,

$$\beta' = \frac{f(u, v)}{v}\alpha', \qquad \beta = \frac{f(u, v)}{v}\alpha + \frac{1}{v}.$$

La seconde des équations (47) se réduit à une relation de la forme

$$g(u, v)\alpha + h(u, v)\alpha' - \frac{1}{v^2} = 0,$$

d'où on tirera, par exemple, $\alpha'$ en fonction linéaire de $\alpha$, qui sera, par conséquent, déterminé par une équation linéaire

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} + M(u, v)\frac{\partial \alpha}{\partial u} - P(u, v)\alpha - Q(u, v) = 0,$$

c.-à-d. par l'intégration du système

$$dv = \frac{du}{M(u, v)} = \frac{d\alpha}{P(u, v)\alpha + Q(u, v)}. \tag{50}$$

On a donc à intégrer une équation différentielle ordinaire à deux variables, $u$ et $v$; puis à effectuer deux quadratures.

*Remarque.* Dans certains cas particuliers, il deviendrait impossible de poser des équations de condition analogues à (45) et (46). C'est dans le cas où les surfaces cherchées vérifient une relation de la forme

$$qy - z = \text{constante}, \tag{51}$$

ou deux relations de la forme

$$\begin{cases} (sy - p)y + ty^2 z = F(qy - z), \\ ty^2 = G(qy - z). \end{cases} \tag{52}$$

Dans le second cas, on peut encore faire le changement de variables partiel tel que l'on ait l'identité (45). Et les équations (52) donneront

$$\beta' = \alpha'\frac{G(u)}{F(u)}, \qquad \beta = \alpha\frac{G(u)}{F(u)} - \frac{1}{F(u)};$$

et, en portant ces valeurs dans (45), il vient, en écartant la solution $\alpha' = 0$, qui ramènerait à l'autre cas singulier,

$$-G + uF + FG' - GF' = 0,$$

qui est la condition d'intégrabilité du système (52); $\alpha$ et $\alpha'$ sont donc assujettis à la seule condition

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \alpha'}{\partial u} + \frac{\alpha'}{F} = 0.$$

Comme le choix de la variable $v$ est encore arbitraire, ou prendra, par exemple

$$\alpha' = ve^{\int\frac{du}{F}}, \qquad \alpha = \chi(u)e^{\int\frac{du}{F}}, \qquad (\chi(u) \text{ arbitraire}),$$

et l'intégration du système (33) se réduira à celle de

$$vdv + \chi(u)du = 0$$

c.-à-d. à une quadrature.

Quant à l'autre cas singulier, l'intégration est immédiate.

Les singularités précédentes tiennent encore à la nature même des choses, et non à la méthode employée. Les intégrales du système (52) admettent chacune un sous-groupe de $(G)$, à un paramètre; et celles de l'équation (51) admettent un sous-groupe à deux paramètres.

## § III. *Méthode générale d'intégration.*

14. Le caractère général des raisonnements faits dans les exemples précédents est manifeste. Nous allons exposer maintenant comment ils constituent en effet le principe d'une méthode générale d'intégration des systèmes différentiels admettant des groupes, finis ou infinis, de transformations.

Soient $x_1, \ldots, x_m$ les variables indépendantes, $z_1, \ldots, z_q$ les fonctions inconnues; (A) la système donné; et $(G)$ le groupe que ce système admet. Les équations $(A)$ dépendent de $x_1, \ldots, x_n$, de $z_1, \ldots, z_q$ et des dérivées

$$z_i^{(\alpha_1\ldots\alpha_m)} = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m} z_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

Le groupe $(G)$ transforme entre elles toutes les variables $x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_q$. Nous indiquerons plus loin les simplifications à apporter à la méthode si certaines de ces variables étaient invariantes par le groupe $(G)$, mais, même dans ce cas, ce que nous allons dire s'appliquerait encore.

Chacune des solutions de $(A)$ représente une multiplicité $M$, à $m$ dimensions, de l'espace à $m+q=n$ dimensions. Désignons, pour plus de netteté, par $y_1 \ldots y_n$, les coordonnées d'un point quelconque; cela revient à poser, par exemple,

$$(53) \qquad x_1 = y_1, \ldots, x_m = y_m, z_1 = y_{m+1}, \ldots, z_q = y_n.$$

La multiplicité $M$ peut être représentée aussi par des équations

$$(54) \qquad y_k = f_k(t_1, \ldots, t_m), \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,n)}$$

où $t_1, \ldots, t_m$ sont des variables nouvelles, que nous supposerons n'être pas transformées par le groupe $(G)$; et nous représenterons les dérivées des $y_k$ par rapport aux $t_h$ par la notation

$$y_k^{(\beta_1 \ldots \beta_m)} = \frac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_m} y_k}{\partial t_1^{\beta_1} \ldots \partial t_m^{\beta_m}}.$$

Nous allons chercher à répartir les solutions $M$ de $(A)$ en familles de multiplicités homologues les unes des autres par rapport aux diverses transformations de $(G)$. Une telle famille de multiplicités $M$, supposées définies par des équations de la forme (54), est donnée, dans le cas général, comme on l'à vu au chapitre précédent, par un système automorphe

$$(55) \qquad U_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1 \ldots \beta_m)}, \ldots) = \theta_s(t_1, \ldots, t_m). \qquad {\scriptstyle (s=1,2,\ldots,p)}$$

Les premiers membres de ces équations (54) sont entièrement connus, car ils se déduisent des équations de définition des transformations finies du groupe $(G)$, équations qui se déduisent elles-mêmes sans peine des équations $(A)$ données; les seconds membres seuls dépendent du système particulier de multiplicités $M$ défini par les équations (55). Ce sont donc ces fonctions $\theta_s$ que nous allons prendre pour inconnues auxiliaires.

Elles satisfont d'abord aux conditions d'intégrabilité du système (55). Soit

$$(56) \qquad \Psi_j\left(\theta_1, \ldots, \theta_p, \ldots, \frac{\partial \theta_s}{\partial t_k}, \ldots\right) = 0, \qquad {\scriptstyle (j=1,2,\ldots,\rho)}$$

ces conditions d'intégrabilité. A ces équations se joindront celles qui proviendront des équations $(A)$ données.

Pour les former, nous nous servons de ce que, dans le cas général, ces équations $(A)$ sont des relations entre des invariants différentiels de $(G)$. Soit donc

$$(57) \qquad J(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_q, \ldots, z_i^{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)}, \ldots)$$

un tel invariant différentiel. Imaginons qu'on y fasse le changement de variables défini par les équations (53) et (54): il prendra la forme, entièrement explicite,

$$(58) \qquad J(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_q, \ldots, z_i^{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)}, \ldots) = \bar{J}(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1 \ldots \beta_m)}, \ldots);$$

et, si on suppose ensuite qu'on y remplace $y_1, \ldots, y_n$ par une solution du système (55), cette fonction $\bar{J}$ deviendra une fonction $\eta(t_1, \ldots, t_m)$ bien déterminée. Or $\bar{J}$ est un invariant de $(G)$, dans les mêmes conditions que les $U_s$; de sorte que l'équation

$$(59) \qquad \bar{J}(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k^{(\beta_1 \ldots \beta_m)}, \ldots) = \eta(t_1, \ldots, t_m).$$

admet non seulement la solution $M$ de (55) considérée, mais toutes celles qui s'en déduisent par les transformations de $(G)$, c.-à-d. toutes les solutions du système (55).

Cette équation (59) est donc une conséquence algébrique des équations (55) et de celles qui s'en déduisent par différentiations (si $J$ est d'ordre supérieur aux $U_s$). Donc, en se servant du théorème général d'algèbre qui nous a déjà servi dans un autre travail,[1] on voit que $\eta$ se calculera rationnellement en fonction des $\theta_s$ et de leurs dérivées, sans avoir à connaître les expressions de ces fonctions; c.-à.d. qu'on obtiendra, dans les conditions supposées, une identité

$$(60) \qquad J(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_q, \ldots, z_i^{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)}, \ldots) = H(\theta_1, \ldots, \theta_p, \ldots, \theta_s^{(\gamma_1 \ldots \gamma_m)}, \ldots),$$

où on pose, pour abréger,

$$\theta_s^{(\gamma_1 \ldots \gamma_m)} = \frac{\partial^{\gamma_1 + \cdots + \gamma_m} \theta_s}{\partial t_1^{\gamma_1} \ldots \partial t_m^{\gamma_m}}.$$

[1] *Sur la théorie de Galois et des diverses généralisations.* N° 5. Annales de l'École normale, 1904.

En faisant ce calcul pour les divers invariants $J_1, J_2, \ldots, J_\mu$ qui figurent dans les équations $(A)$, on obtiendra donc des fonctions équivalentes $H_1, H_2, \ldots, H_\mu$; et les équations $(A)$ seront transformées, par là-même, en un système $(B)$ de relations entre $H_1, H_2, \ldots, H_\mu$. Les équations de ce système, jointes aux conditions d'intégrabilité (56), constituent le système résolvant $(C)$ que nous nous proposions d'obtenir.

15. Étudions ce système résolvant $(C)$. Il présente, tel que nous l'avons formé, cet inconvénient, qu'une même famille de multiplicités $M$ homologues sera donnée par une infinité de solutions du système $(C)$. Cherchons, en effet, la condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes (55) définissent la même famille de multiplicités $M$; écrivons, pour plus de netteté, le second de ces systèmes

$$U_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_k'^{(\beta_1 \ldots \beta_m)}, \ldots) = \theta_s'(t_1', \ldots, t_m'), \qquad (s=1,2,\ldots,p) \tag{61}$$

en changeant le nom des variables indépendantes. Les équations (54) étant celles d'une solution de (55); il devra y avoir une solution

$$y_k = f_k'(t_1', \ldots, t_m'), \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{62}$$

de (61), qui représente la même multiplicité $M$; et cela suffira, puisque les autres multiplicités intégrales de (55), ou de (61), se déduisent de celle-là par les transformations de $(G)$. Or la condition d'identité des multiplicités (54) et (62) est qu'il existe une transformation

$$t_i' = \varphi_i(t_1, \ldots, t_m), \qquad (i=1,2,\ldots,m) \tag{63}$$

qui change les fonctions (62) dans les fonctions (54), respectivement. Mais cette même transformation change alors toute homologue de (62) en une homologue de (54), puisque les transformations de $(G)$ ne portent que sur $y_1, \ldots, y_n$ et non sur les paramètres $t$; de sorte que la condition cherchée est qu'il existe une transformation (63) par laquelle le système (61) devienne le système (55).

Ce premier point acquis, raisonnons comme au n° 7 de notre mémoire sur la théorie des groupes.[1] Les fonctions $U_s$ sont des intégrales d'un

---

[1] *Sur la théorie des groupes continus.* Annales de l'École normale, 1903.

système complet, dont les équations ont pour premiers membres les prolongements de certaines transformations infinitésimales de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_k(y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial f}{\partial y_k}. \tag{64}$$

Ce système complet admet par conséquent toute transformation infinitésimale de la forme

$$\sum_{i=1}^{m} \vartheta_i(t_1, \ldots, t_m) \frac{\partial f}{\partial t_m}, \tag{65}$$

prolongée dans les mêmes conditions; puisque le crochet des transformations (64) et (65) est évidemment nul. Ce qui revient à dire que le système complet considéré admet toute transformation de la forme (63). Donc, par cette transformation, en posant, pour abréger l'écriture,

$$U'_s = U_s(y_1, \ldots, y_n, \ldots, y'^{(\beta_1 \ldots \beta_m)}_k, \ldots), \qquad (s=1, 2, \ldots, p)$$

on aura des identités de la forme

$$U'_s = P_s(U_1, \ldots, U_p \,|\, \ldots, \varphi_i^{(\delta_1 \ldots \delta_m)}, \ldots); \qquad (s=1, 2, \ldots, p)$$

où, suivant nos notations,

$$\varphi_i^{(\delta_1 \ldots \delta_m)} = \frac{\partial^{\delta_1 + \ldots + \delta_m} \varphi_i}{\partial t_1^{\delta_1} \ldots \partial t_m^{\delta_m}}.$$

La condition pour que les systèmes (55) et (61) définissent la même famille de multiplicités $M$ homologues est donc que les fonctions $\theta'_s$ soient liées aux fonctions $\theta_s$ par les relations

$$\theta'_s = P_s(\theta_1, \ldots, \theta_p \,|\, \ldots, \varphi_i^{(\delta_1 \ldots \delta_m)}, \ldots), \qquad (s=1, 2, \ldots, p) \tag{66}$$

associées aux relations (63); les $\varphi_i$ étant des fonctions quelconques. Les équations [(63), (66)] définissent un groupe infini, isomorphe au groupe ponctuel général à $m$ variables: on connait l'importance de tels groupes dans la théorie générale des groupes de transformations.[1]

[1] Voir, par exemple, le mémoire cité N° 7, où on trouvera les indications bibliographiques sur ce sujet.

Le système $(C)$ est donc un système invariant par ce groupe infini [(63), (66)]; et une même famille de multiplicités $M$ homologues est donnée par les diverses multiplicités $\theta$

$$\theta_s = g_s(t_1, \ldots, t_m), \qquad (s=1,2,\ldots,p) \tag{67}$$

qui sont elles-mêmes homologues par rapport à ce groupe [(63), (66)].

16. Nous allons essayer de ne prendre qu'une seule multiplicité $\theta$ dans chacune des familles de multiplicités $\theta$ homologues, données par le système $(C)$. Si nous réussissons, la répartition des multiplicités $M$ en familles de multiplicités homologues sera obtenue.

Considérons une multiplicité $M$, représentée par les équations (54). Par le moyen de ces équations (54), tout invariant $J$ de $(G)$ devient une fonction $\eta(t_1, \ldots, t_m)$, et l'identité (60) lui fait correspondre une équation

$$H(\theta_1, \ldots, \theta_p, \ldots, \theta_s^{(\gamma_1 \ldots \gamma_m)}, \ldots) = \eta(t_1, \ldots, t_m), \tag{68}$$

à laquelle conduiraient aussi, comme nous l'avons vu, toutes les multiplicités homologues de $M$. Du reste $H$, provenant de l'invariant $J$, qui est indépendant du choix des paramètres $t$, est un invariant du groupe [(63), (66)]. Si donc on fait un changement de paramètres $t$, la relation (68) se transformera en celle qu'on obtient en faisant simplement ce changement de paramètres dans la fonction $\eta$.

Si donc l'invariant $J$ n'est pas une constante (en vertu des équations $(A)$), on peut choisir les paramètres de manière que le second membre de (68) soit une fonction arbitraire de $t_1, \ldots, t_m$. Et, plus généralement, si on peut trouver $\lambda$ invariants $J_1, J_2, \ldots, J_\lambda$, qui ne soient liés par aucune relation (en vertu des équations $(A)$), on pourra supposer les paramètres tellement choisis que les fonctions $H_1, H_2, \ldots, H_\lambda$, équivalentes à ces invariants par le calcul du N° 14, soient égales à $\lambda$ fonctions arbitraires, indépendantes, de $t_1, \ldots, t_m$.

Le cas le plus avantageux est celui où $\lambda = m$. On pourra alors associer au système $(C)$, en vertu du raisonnement précédent, les équations nouvelles

$$H_i(\theta_1, \ldots, \theta_p, \ldots, \theta_s^{(\gamma_1 \ldots \gamma_m)}, \ldots) = t_i; \qquad (i=1,2,\ldots,m) \tag{69}$$

et, comme leurs premiers membres sont invariants par le groupe [(63), (66)], il est visible qu'elles n'en admettent plus aucune transformation.

Donc deux solutions du système résolvant [(C), (69)] donneront toujours des systèmes automorphes (55) fournissant deux familles, différentes de multiplicités $M$ homologues. La séparation de ces familles de multiplicités est ainsi obtenue. On pourrait, naturellement, remplacer les seconds membres des équations (69) par $m$ fonctions indépendantes quelconques de $t_1, \ldots, t_m$: cela serait sans influence sur la nature des intégrations.

Le système [(C), (69)] n'offre plus rien maintenant de particulier si ce n'est de contenir les conditions d'intégrabilité du système (55) et les équations (69).

Dans le cas où $\lambda$ est inférieur à $m$, on ne pourra écrire que $\lambda < m$ équations de la forme (69); et la méthode n'est plus aussi avantageuse. Mais on prévoit, par ce qui s'est présenté dans les exemples précédents, qu'il se produira, dans ce cas, d'autres simplifications pour lesquelles il paraît difficile de donner des règles générales et précises. On devra chercher des équations différentielles auxiliaires nouvelles en $t_1, \ldots, t_m, \theta_p, \ldots, \theta_s^{(\gamma_1 \ldots \gamma_m)}, \ldots$, qui achèvent de déterminer le choix des paramètres, pour chaque multiplicité $M$; de manière à réduire au minimum le degré d'indétermination du système résolvant, comme nous pouvions le faire d'emblée dans le cas $\lambda = m$.

17. Nous concluons, *en résumé,* que notre méthode fournit, au moins dans le cas général, la réduction de l'intégration du système ($A$) aux *deux problèmes suivants successifs.*

1°) *intégration du système résolvant* [(C), (69)]. Comme il définit les familles de multiplicités $M$ homologues, la difficulté de l'intégration de ce système peut être quelconque, ($A$) étant l'un quelconque des systèmes différentiels de l'espèce considérée.

2°) *intégration du système automorphe* (55). Nous avons rappelé au chapitre précédent, les diverses réductions possibles, pour de tels systèmes.

Remarquons que nous avons écarté le cas où le système ($A$) contiendrait des équations invariantes, qui ne seraient pas des relations entre invariants; il est visible que, dans ce qu'elle a d'essentiel, la marche générale indiquée s'appliquerait encore à de pareils systèmes. Il n'y a, en réalité, de changé que la forme du système automorphe à introduire.

18. Les calculs, nécessaires pour former le système résolvant $(C)$, seront simplifiés, comme on l'a vu dans les exemples traités, par la recherche générale des invariants équivalents du groupe $(G)$ et du groupe [(63), (66)]. La méthode à suivre sera la suivante:

Nous partons des équations (55), et nous leur adjoignons les relations identiques, fournies par les règles du calcul différentiel, entre les dérivées des $z$ par rapport aux $x$ et les dérivées des $y$ par rapport aux $t$: ces relations devant être prises jusqu'à l'ordre maximum des dérivées figurant dans les équations (35). Soit $(\Delta)$ ce système de relations. Si entre les équations (55) et les équations $(\Delta)$ on peut éliminer toutes les dérivées par rapport à $t$, les équations résultant de cette élimination seront séparément invariantes par rapport au groupe $(G)$ et au groupe [(63), (66)]; elles seront donc des relations entre certains invariants de ces deux groupes. Comme, du reste, on ne doit pouvoir en tirer aucune relation, non identique, entre des invariants d'un seul de ces groupes, elles pourront se mettre sous la forme

$$(70)\quad J_h(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_q, \ldots, z_i^{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)}, \ldots) = H_h(\theta_1, \ldots, \theta_p); \quad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,\sigma)}$$

où les premiers et les seconds membres sont des invariants des deux groupes considérées, respectivement.

Si l'on faisait les mêmes calculs, en adjoignant aux équations (35) celles qui en résultent par différentiation jusqu'à un ordre quelconque, ce qui précède subsisterait, sauf qu'on pourrait, en plus de relations de la forme (70), trouver des relations où ne figureraient que des invariants du groupe [(63), (66)] (et qui appartiendraient aux conditions d'intégrabilité du système (35)); et même des relations, qui seraient des équations invariantes pour ce groupe (et qui seraient encore des conditions d'intégrabilité).

Il résulte des raisonnements faits au n° 14 que l'on obtiendra par cette voie tous les invariants du groupe $(G)$, avec leur expression équivalente en invariants du groupe [(63), (66)].

On trouvera aussi tous les invariants de ce dernier groupe; car, quand on transforme un tel invariant, en y remplaçant les $\theta_s$ par les valeurs (35), on obtient un invariant de $(G)$, qui ne dépend pas du choix des $t$, c.-à-d. qui est une fonction de $x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_q, \ldots, z_i^{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)}, \ldots)$, à moins qu'il se réduise à une constante. Dans le premier cas, l'invariant considéré, étant l'équivalent d'un invariant de $(G)$, de la forme considérée, s'obtient, d'après ce qui précède, par le calcul indiqué. Dans le second cas, on a obtenu une condition d'intégrabilité du système (35), et le calcul indiqué doit encore la fournir.

19. On pourra aussi simplifier les calculs par l'emploi de paramètres différentiels.

Soit $\lambda$ l'ordre minimum jusqu'auquel il faille différentier les équations (35) pour obtenir effectivement des relations de la forme (70). Et soit

$$J(x_1, \ldots, z_1, \ldots, z_i^{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)}, \ldots) = H(\theta_1, \ldots, \theta_p, \ldots, \theta_s^{(\gamma_1 \ldots \gamma_m)}, \ldots)$$

l'une quelconque de ces relations, de l'ordre $\lambda$, ou d'un ordre supérieur: c'est toujours une conséquence des équations (35) différentiées et des équations $(\Delta)$, poussées jusqu'à l'ordre nécessaire. Et il en est de même des relations qu'on en déduit par différentiation

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{dJ}{dx_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_k} = \frac{dH}{dt_k}. \qquad (k=1,2,\ldots,m)$$

Jointes aux équations $(\Delta)$, et (35), différentiées jusqu'à l'ordre $\lambda$, ces relations fourniront, en plus de formules d'équivalence des invariants d'ordre $\lambda$, $m$ relations de la forme

$$(71) \qquad \Omega_l\left(x_1, \ldots, z_1, \ldots, z_i^{(\alpha_1 \ldots \alpha_m)}, \ldots, \frac{dJ}{dx_1}, \ldots, \frac{dJ}{dx_m}\right) = A_l\left(\theta_1, \ldots, \theta_s^{(\gamma_1 \ldots \gamma_m)}, \ldots, \frac{dH}{dt_1}, \ldots, \frac{dH}{dt_m}\right), \qquad (l=1,2,\ldots,m)$$

qui donneront, sous leur double forme équivalente, les paramètres différentiels annoncés.