DIE BEDEUTUNG DER ABEL'SCHEN ABHANDLUNG ÜBER DIE BINOMISCHE REIHE[1] FÜR DIE FUNCTIONENTHEORIE

VON

O. STOLZ
in INNSBRUCK.

Cauchy hat in *Cours d'Analyse* (1821) Ch. VIII, § 5, die folgende Aufgabe gelöst.

(I). »Es seien alle für jeden Wert der *reellen* Veränderlichen ξ eindeutigen und stetigen complexen Functionen $f(\xi)$ zu ermitteln, wofür erstens bei beliebigen reellen Werten ξ, η das Additionstheorem

$$f(\xi)\,.\,f(\eta) = f(\xi + \eta) \tag{1}$$

besteht, und zweitens $f(1)$ gleich einer gegebenen, von Null verschiedenen complexen Zahl

$$a = A(\sin\alpha + i\sin\alpha) \qquad (A > 0,\ -\pi < \alpha \leqq \pi) \tag{2}$$

ist.» Die verlangten Functionen sind in der Formel

$$f(\xi) = A^{\xi}\big(\cos\xi(\alpha + 2k\pi) + i\sin\xi(\alpha + 2k\pi)\big)$$

enthalten, worin k jede beliebige, jedoch feste ganze Zahl sein darf.

Ersetzen wir in dieser Aufgabe die reelle Veränderliche ξ durch die aller complexen Werte fähige Veränderliche x und entsprechend in der Beziehung (1) ξ, η bezw. durch die beliebigen complexen Zahlen x, y, so erhalten wir eine ähnliche Aufgabe (II), auf die Cauchy a. a. O. nicht eingegangen ist. Ihre Lösung gibt Abel in der im Titel genannten Abhandlung vom Jahre 1826.[2]

[1] Oeuvres de N. H. Abel, nouv. édit. par Sylow et Lie. I. S. 219 f.

[2] Vgl. Oeuvres I., S. 229 f. Die Formel (3) findet sich S. 234 unter (13).

Sie lautet, wenn wir $x = \xi + i\eta$ setzen

$$f(x) = A^{\xi}\{\cos\xi(\alpha + 2k\pi) + i\sin\xi(\alpha + 2k\pi)\} \times B^{\eta}\{\cos\eta(\beta + 2l\pi) + i\sin\eta(\beta + 2l\pi)\} \tag{3}$$

unter k, l beliebige, jedoch feste ganze Zahlen, unter B eine willkürliche positive und unter β eine willkürliche reelle Constante verstanden. Da somit auf der rechten Seite der Formel (3) zwei willkürliche Constante B, β vorkommen, so hat die Aufgabe (II) an sich wenig Bedeutung.

Um die Constanten B und $\beta' = \beta + 2l\pi$ zu bestimmen, legt man der Function $f(x)$ die weitere Bedingung auf, dass sie eine analytische sein soll.

Demnach gelangen wir zur Aufgabe:

(III). »Es seien alle *analytischen* (ein- oder mehrdeutigen) Functionen $f(x)$ der complexen Veränderlichen x zu ermitteln, wofür erstens bei beliebigen complexen Werten x, y, wenn nur $f(x)$, $f(y)$, $f(x+y)$ erklärt sind, die Gleichung

$$f(x) . f(y) = f(x + y) \tag{4}$$

besteht und zweitens $f(1)$ die gegebene, von Null verschiedene Zahl a ist.« Lassen wir die Potenzreihe

$$c_0 + c_1(x - c) + c_2(x - c)^2 + \dots$$

absolut convergent für alle Werte von x, wofür $|x - c|$ kleiner als eine gewisse Constante R ist, das Element sein für eine der gesuchten Functionen $f(x)$, so finden wir aus der Gleichung (4) durch die Annahme $x = c$, $y = x - c$

$$f(x - c) = f(x) : f(c) = 1 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2 + \dots \qquad (|x - c| < R).$$

Schreiben wir hier x an Stelle von $x - c$, so folgt, dass wenn nur $|x| < R$ ist

$$f(x) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \tag{5}$$

sein muss. Legt man die auf der rechten Seite von (5) befindliche Potenzreihe von x als Element der in Rede stehenden Function $f(x)$ zu Grunde, so ergibt sich in bekannter Weise (s. u.), dass $f(x)$ eine der eindeutigen Functionen

$$e^{xLa} \qquad (La = lA + (\alpha + 2k\pi)i) \tag{6}$$

ist, wobei k jede beliebige, jedoch feste ganze Zahl sein darf. Aus der Formel (3) wird die Function (6) durch die Annahme

$$B = e^{-\alpha-2k\pi}, \qquad \beta' = lA \tag{7}$$

erhalten.

Abel bestimmt a. a. O. die vier Constanten in (3): A, $\alpha + 2k\pi$, B, β' durch die Forderung, dass $f(x)$ die Summe der binomischen Reihe

$$1 + \frac{x}{1}u + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}u^2 + \ldots,\text{[1]} \tag{8}$$

$|x|$ kleiner als 1 vorausgesetzt, sein soll. In dieser Weise ist es ihm zum ersten Male gelungen, die binomische Reihe (8) bei complexen x zu summiren. Und zwar fand er als Summe derselben den gewöhnlich als Hauptwert bezeichneten Wert der Potenz $1 + u$ hoch x, der jetzt unter dem Zeichen $(1 + u)^x$ verstanden wird.

Die soeben erwähnte Bedingung Abel's schliesst in sich die, wie wir gesehen haben, auch bei der Lösung der Aufgabe (III) auftretende Forderung, dass $f(x)$ die Summe einer convergenten ganzen Potenzreihe von x sein soll; denn die binomische Reihe (8) lässt sich für jeden Wert von x in eine solche Potenzreihe verwandeln.[2] Abel schränkt aber diese Forderung in der Art ein, dass füı $f(x)$ bloss die Summe *einer* bestimmten solchen Reihe verlangt wird. Er hat somit in der in Rede stehenden Arbeit zugleich die Aufgabe (III) bei der Annahme $a = 1 + u$ gelöst, allerdings unter der gerade angegebenen Beschränkung der Function $f(x)$.

Die directe Behandlung und allgemeine Lösung der Aufgabe (III) findet man im 2. Bande von M. Ohm's *Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik* (1822).[3] Die in den Formeln (7) vorliegende Bestimmung der Constanten B, β' lässt sich ferner mit Hilfe des von Riemann zu Grunde gelegten Begriffes der Function einer complexen Veränderlichen x erweisen.[4]

---

[1] Bei Abel stehen a. a. O. an Stelle von x, u bezw. m, x.

[2] Cauchy, *C. d'Analyse*, S. 545 ≡ Oeuvres 2. sér. III. T. S. 447.

[3] Vgl. 2. B., 2. Aufl. (1829), S. 313 f.

[4] Vgl. des Verfassers *Grundzüge d. Differential- u. Integralrechnung*, II. B., S. 90.