RECHERCHES SUR LES VALEURS EXTRÊMES DES INTÉGRALES ET SUR L'INTERPOLATION

PAR

A. MARKOFF
à S:t PETERSBOURG.

Dans ce mémoire j'ai en vue de donner la plus grande généralité aux résultats, obtenus auparavant, de compléter les démonstrations et enfin d'expliquer la connexion entre mes recherches et les recherches des autres géomètres.[1]

Les recherches sur les maxima et les minima peuvent être divisées en trois parties.

La première partie consiste dans la déductions des équations, par lesquelles se déterminent le maximum ou le minimum cherché et les autres inconnus liés à celui-ci. La seconde partie consiste dans la solution des équations obtenues ou, au moins, dans l'éclaircissement, que ces équations sont compatibles et déterminent les inconnus. Enfin la troisième partie consiste dans la démonstration, que les équations établies correspondent effectivement au maximum ou minimum cherché.

---

[1] A. MARKOFF, *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*, (en russe), 1884. *Sur une question de maximum et de minimum*, (Acta mathematica, 1886). *Nouvelles applications des fractions continues*, (Mathematische Annalen, B. 47).

TCHÉBYCHEF, *Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données*, (Mémoires de l'Acad. de Sciences de St Petersb., VII série, I, 1859).

A. KORKINE et G. ZOLOTAREF, *Sur un certain minimum*, (Nouvelles Annales, 1873).

STIELTJES, *Jets over de benaderde voorstelling van eene functie door eene andere*, (Delft, 1876).

Acta mathematica. 28. Imprimé le 28 novembre 1903.

Bien que plusieurs recherches de cette espéce se bornent à la première partie, mais le défaut de la seconde et de la troisième partie peut dénuer ces recherches de toute importance. On ne saurait justifier ce défaut par une affirmation mal fondée, qu'il est évident, que la question posée doit avoir une solution.

Au contraire, en développant convenablement la seconde et la troisième partie, nous pouvons supprimer la première, s'il est possible de deviner le résultat cherché.

Dans nos recherches il s'agit justement des questions, dont nous pouvons deviner la résolution au moyen de l'analogie à la résolution des autres questions discutées. C'est pourquoi nous tenons pour superflu de nous arrêter à la première partie.

§ 1. Soit

$$\lambda_1(z)\,,\ \lambda_2(z)\,,\ \ldots,\ \lambda_n(z)\,,\ \lambda_{n+1}(z)\,,\ \ldots$$

une série de fonctions satisfaisantes aux inégalités

$$\lambda_1(z) > 0,\quad \begin{vmatrix} \lambda_1(z)\,, & \lambda_1'(z) \\ \lambda_2(z)\,, & \lambda_2'(z) \end{vmatrix} > 0,\quad \begin{vmatrix} \lambda_1(z)\,, & \lambda_1'(z)\,, & \lambda_1''(z) \\ \lambda_2(z)\,, & \lambda_2'(z)\,, & \lambda_2''(z) \\ \lambda_3(z)\,, & \lambda_3'(z)\,, & \lambda_3''(z) \end{vmatrix} > 0,\ \ldots,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(z) & , & \lambda_1'(z) & , \ldots, & \lambda_1^{(n)}(z) \\ \lambda_2(z) & , & \lambda_2'(z) & , \ldots, & \lambda_2^{(n)}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n+1}(z) & , & \lambda_{n+1}'(z) & , \ldots, & \lambda_{n+1}^{(n)}(z) \end{vmatrix} > 0,$$

pour toutes les valeurs de z comprises entre a et b

$$(a \leqq z \leqq b).$$

Pour nos recherches il est important de démontrer la proposition suivante.

Théorème I.

Si

$$a \leqq u_1 < u_2 < \ldots < u_n < u_{n+1} \leqq b,$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & , & \lambda_1(u_2) & , \ldots , & \lambda_1(u_n) & , & \lambda_1(u_{n+1}) \\ \lambda_2(u_1) & , & \lambda_2(u_2) & , \ldots , & \lambda_2(u_n) & , & \lambda_2(u_{n+1}) \\ \lambda_3(u_1) & , & \lambda_3(u_2) & , \ldots , & \lambda_3(u_n) & , & \lambda_3(u_{n+1}) \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \lambda_{n+1}(u_1) & , & \lambda_{n+1}(u_2) & , \ldots , & \lambda_{n+1}(u_n) & , & \lambda_{n+1}(u_{n+1}) \end{vmatrix}$$

est un nombre positif.

Démonstration.

Dans le cas de $n = 0$ le théorème est évident, car dans ce cas il ne donne que l'inégalité posée

$$\lambda_1(z) > 0.$$

Cela étant, nous supposons, que ce théorème est juste pour n fonctions λ et pour n valeurs u, satisfaisantes à nos conditions, et nous allons démontrer que le même théorème sera aussi juste pour $n + 1$ fonctions λ et pour $n + 1$ valeurs u.

Pour cet effet présentons le déterminant considéré

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & , & \lambda_1(u_2) & , & \lambda_1(u_3) & , \ldots , & \lambda_1(u_n) & , & \lambda_1(u_{n+1}) \\ \lambda_2(u_1) & , & \lambda_2(u_2) & , & \lambda_2(u_3) & , \ldots , & \lambda_2(u_n) & , & \lambda_2(u_{n+1}) \\ \lambda_3(u_1) & , & \lambda_3(u_2) & , & \lambda_3(u_3) & , \ldots , & \lambda_2(u_n) & , & \lambda_2(u_{n+1}) \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \lambda_{n+1}(u_1) & , & \lambda_{n+1}(u_2) & , & \lambda_{n+1}(u_3) & , \ldots , & \lambda_{n+1}(u_n) & , & \lambda_{n+1}(u_{n+1}) \end{vmatrix}$$

comme le produit de l'expression

$$\lambda_1(u_1)\lambda_1(u_2)\lambda_1(u_3)\ldots\lambda_1(u_n)\lambda_1(u_{n+1})$$

et de l'autre déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda_2(u_2)}{\lambda_1(u_2)}-\frac{\lambda_2(u_1)}{\lambda_1(u_1)}, & \frac{\lambda_2(u_3)}{\lambda_1(u_3)}-\frac{\lambda_2(u_2)}{\lambda_1(u_2)}, & \ldots, & \frac{\lambda_2(u_{n+1})}{\lambda_1(u_{n+1})}-\frac{\lambda_2(u_n)}{\lambda_1(u_n)} \\ \frac{\lambda_3(u_2)}{\lambda_1(u_2)}-\frac{\lambda_3(u_1)}{\lambda_1(u_1)}, & \frac{\lambda_3(u_3)}{\lambda_1(u_3)}-\frac{\lambda_3(u_2)}{\lambda_1(u_2)}, & \ldots, & \frac{\lambda_3(u_{n+1})}{\lambda_1(u_{n+1})}-\frac{\lambda_3(u_n)}{\lambda_1(u_n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\lambda_{n+1}(u_2)}{\lambda_1(u_2)}-\frac{\lambda_{n+1}(u_1)}{\lambda_1(u_1)}, & \frac{\lambda_{n+1}(u_3)}{\lambda_1(u_3)}-\frac{\lambda_{n+1}(u_2)}{\lambda_1(u_2)}, & \ldots, & \frac{\lambda_{n+1}(u_{n+1})}{\lambda_1(u_{n+1})}-\frac{\lambda_{n+1}(u_n)}{\lambda_1(u_n)} \end{vmatrix}$$

lequel est égal à un produit de la forme

$$(u_2-u_1)(u_3-u_2)\ldots(u_{n+1}-u_n)\begin{vmatrix} \Lambda_1(U_1), & \Lambda_1(U_2), & \ldots, & \Lambda_1(U_n) \\ \Lambda_2(U_1), & \Lambda_2(U_2), & \ldots, & \Lambda_2(U_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Lambda_n(U_1), & \Lambda_n(U_2), & \ldots, & \Lambda_n(U_n) \end{vmatrix},$$

où l'on pose

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\lambda_2(z)}{\lambda_1(z)}\right]=\Lambda_1(z), \qquad \frac{d}{dz}\left[\frac{\lambda_3(z)}{\lambda_1(z)}\right]=\Lambda_2(z), \quad \ldots, \quad \frac{d}{dz}\left[\frac{\lambda_{n+1}(z)}{\lambda_1(z)}\right]=\Lambda_n(z)$$

et l'on désigne par

$$U_1, \; U_2, \; \ldots, \; U_n$$

des valeurs indéterminées satisfaisantes aux inégalités

$$u_1 < U_1 < u_2 < U_2 < u_3 < \ldots < u_n < U_n < u_{n+1}.$$

Les fonctions nouvelles Λ, semblablement à λ, satisfont aux conditions

$$\Lambda_1(z)>0, \quad \begin{vmatrix} \Lambda_1(z), & \Lambda_1'(z) \\ \Lambda_2(z), & \Lambda_2'(z) \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} \Lambda_1(z), & \Lambda_1'(z), & \Lambda_1''(z) \\ \Lambda_2(z), & \Lambda_2'(z), & \Lambda_2''(z) \\ \Lambda_3(z), & \Lambda_3'(z), & \Lambda_3''(z) \end{vmatrix}>0, \ldots$$

pour $a \leqq z \leqq b$, car le déterminant

$$\begin{vmatrix} \Lambda_1(z), & \Lambda_1'(z), & \Lambda_1''(z), & \ldots, & \Lambda_1^{(k-1)}(z) \\ \Lambda_2(z), & \Lambda_2'(z), & \Lambda_2''(z), & \ldots, & \Lambda_2^{(k-1)}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Lambda_k(z), & \Lambda_k'(z), & \Lambda_k''(z), & \ldots, & \Lambda_k^{(k-1)}(z) \end{vmatrix}$$

ne différe du déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(z) & , & \lambda_1'(z) & , \ldots, & \lambda_1^{(k)}(z) \\ \lambda_2(z) & , & \lambda_2'(z) & , \ldots, & \lambda_2^{(k)}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{k+1}(z) & , & \lambda_{k+1}'(z) & , \ldots, & \lambda_{k+1}^{(k)}(z) \end{vmatrix},$$

que par le diviseur $\{\lambda_1(z)\}^{k+1}$, ce qu'il est facile de manifister par des transformations simples au moyen de la formule de LEIBNIZ

$$\Lambda_i^{(l)}(z) = \frac{1}{\lambda_1(z)}\lambda_{i+1}^{(l+1)}(z) + (l+1)\left(\frac{1}{\lambda_1(z)}\right)'\lambda_{i+1}^{(l)}(z) + \frac{(l+1)l}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{\lambda_1(z)}\right)''\lambda_{i+1}^{(l-1)}(z) + \ldots$$

Il en résulte conformément à notre supposition, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \Lambda_1(U_1), & \Lambda_1(U_2), & \ldots, & \Lambda_1(U_n) \\ \Lambda_2(U_1), & \Lambda_2(U_2), & \ldots, & \Lambda_2(U_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Lambda_n(U_1), & \Lambda_n(U_2), & \ldots, & \Lambda_n(U_n) \end{vmatrix}$$

est un nombre positif, et par conséquent le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & , & \lambda_1(u_2) & , \ldots, & \lambda_1(u_{n+1}) \\ \lambda_2(u_1) & , & \lambda_2(u_2) & , \ldots, & \lambda_2(u_{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n+1}(u_1) & , & \lambda_{n+1}(u_2) & , \ldots, & \lambda_{n+1}(u_{n+1}) \end{vmatrix}$$

doit être aussi un nombre positif en vertu des égalités précédentes.

Cela suffit pour la démonstration de notre théorème.

De ce théorème découlent plusieurs corollaires importants.

Corollaire 1. Si dans le système des inégalités

$$u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_n < u_{n+1}$$

nous remplaçerons certains des signes $<$ par $=$, n'égalisant cependant aucuns trois nombres voisins de notre système

$$u_1\,,\ u_2\,,\ \ldots,\ u_n\,,\ u_{n+1}\,,$$

et si conformément à chaque égalité

$$u_i = u_{i+1}$$

nous remplaçerons dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1) & , \ \lambda_1(u_2) & , \ \ldots, & \lambda_1(u_{n+1}) \\ \lambda_2(u_1) & , \ \lambda_2(u_2) & , \ \ldots, & \lambda_2(u_{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n+1}(u_1) & , \ \lambda_{n+1}(u_2) & , \ \ldots, & \lambda_{n+1}(u_{n+1}) \end{vmatrix}$$

la colonne

$$\lambda_1(u_{i+1})\,,\ \lambda_2(u_{i+1})\,,\ \ldots,\ \lambda_{n+1}(u_{i+1})$$

par

$$\lambda_1'(u_i)\,,\ \lambda_2'(u_i)\,,\ \ldots,\ \lambda_{n+1}'(u_i)$$

le déterminant obtenu de cette manière sera aussi un nombre positif.

On peut atteindre ce résultat en divisant le déterminant primitif par les différences $u_{i+1} - u_i$ et en diminuant ces différences jusqu'à limite zéro.

Il en résulte que le déterminant nouveau ne peut être un nombre négatif, mais, il reste en doute, s'il ne puisse pas être égal à zéro.

On écartera ce doute, en exprimant le déterminant obtenu par le produit d'une quantité, qui différe de zéro, et d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} \Lambda_1(U_1), & \Lambda_1(U_2), & \ldots, & \Lambda_1(U_n) \\ \Lambda_2(U_1), & \Lambda_2(U_2), & \ldots, & \Lambda_2(U_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Lambda_n(U_1), & \Lambda_n(U_2), & \ldots, & \Lambda_n(U_n) \end{vmatrix},$$

où l'on a comme auparavant

$$\Lambda_1(z) = \frac{d}{dz}\left\{\frac{\lambda_2(z)}{\lambda_1(z)}\right\}, \quad \Lambda_2(z) = \frac{d}{dz}\left\{\frac{\lambda_3(z)}{\lambda_1(z)}\right\}, \quad \ldots, \quad \Lambda_n(z) = \frac{d}{dz}\left\{\frac{\lambda_{n+1}(z)}{\lambda_1(z)}\right\},$$

$$a < U_1 < U_2 < \ldots < U_n < b.$$

Examinons par exemple le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1), & \lambda_1'(u_1), & \lambda_1(u_3) \\ \lambda_2(u_1), & \lambda_2'(u_1), & \lambda_2(u_3) \\ \lambda_3(u_1), & \lambda_3'(u_1), & \lambda_3(u_3) \end{vmatrix}.$$

En transformant ce déterminant nous trouvons successivement

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1), & \lambda_1'(u_1), & \lambda_1(u_3) \\ \lambda_2(u_1), & \lambda_2'(u_1), & \lambda_2(u_3) \\ \lambda_3(u_1), & \lambda_3'(u_1), & \lambda_3(u_3) \end{vmatrix} = \lambda_1(u_1)\lambda_1(u_1)\lambda_1(u_3) \begin{vmatrix} 1, & \dfrac{\lambda_1'(u_1)}{\lambda_1(u_1)}, & 1 \\ \dfrac{\lambda_2(u_1)}{\lambda_1(u_1)}, & \dfrac{\lambda_2'(u_1)}{\lambda_1(u_1)}, & \dfrac{\lambda_2(u_3)}{\lambda_1(u_3)} \\ \dfrac{\lambda_3(u_1)}{\lambda_1(u_1)}, & \dfrac{\lambda_3'(u_1)}{\lambda_1(u_1)}, & \dfrac{\lambda_3(u_3)}{\lambda_1(u_3)} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1(u_1)\lambda_1(u_1)\lambda_1(u_3) \begin{vmatrix} \Lambda_1(u_1), & \dfrac{\lambda_2(u_3)}{\lambda_1(u_3)} - \dfrac{\lambda_2(u_1)}{\lambda_1(u_1)} \\ \Lambda_2(u_1), & \dfrac{\lambda_3(u_3)}{\lambda_1(u_3)} - \dfrac{\lambda_3(u_1)}{\lambda_1(u_1)} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1(u_1)\lambda_1(u_1)\lambda_1(u_3)\{u_3 - u_1\} \begin{vmatrix} \Lambda_1(U_1), & \Lambda_1(U_2) \\ \Lambda_2(U_2), & \Lambda_1(U_2) \end{vmatrix},$$

où l'on a

$$U_1 = u_1 < U_2 < u_3.$$

Corollaire 2. Si nous remplaçerons les éléments

$$\lambda_1(u_{2k}),\ \lambda_2(u_{2k}),\ \ldots,\ \lambda_{n+1}(u_{2k})$$

de chaque colonne paire du déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1), & \lambda_1(u_2), & \ldots, & \lambda_1(u_{n+1}) \\ \lambda_2(u_1), & \lambda_2(u_2), & \ldots, & \lambda_1(u_{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n+1}(u_1), & \lambda_{n+1}(u_2), & \ldots, & \lambda_{n+1}(u_{n+1}) \end{vmatrix}$$

par

$$\lambda_1'(u_{2k-1}),\ \lambda_2'(u_{2k-1}),\ \ldots,\ \lambda_{n+1}'(u_{2k-1}),$$

le déterminant obtenu de cette manière restera un nombre positif pour toutes les valeurs des nombres

$$u_1,\ u_3,\ u_5,\ \ldots,$$

pourvu qu'elles soient différentes et comprises entre a et b.

Ce corollaire découle du corollaire précédent.

Remarque. Il est évident, que dans notre théorème et dans ces corollaires la fonction $\lambda_{n+1}(z)$ peut être remplacée par chaque autre fonction $\Omega(z)$, satisfaisante à l'inégalité

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(z), & \lambda_1'(z), & \ldots, & \lambda_1^{(n)}(z) \\ \lambda_2(z), & \lambda_2'(z), & \ldots, & \lambda_2^{(n)}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n(z), & \lambda_n'(z), & \ldots, & \lambda_n^{(n)}(z) \\ \Omega(z), & \Omega'(z), & \ldots, & \Omega^{(n)}(z) \end{vmatrix} > 0$$

pour l'intervalle de $z = a$ jusqu'à $z = b$ entier.

On peut admettre aussi que l'inégalité dernière parfois se réduit à l'égalité, mais alors il faut compter parmi les nombres positifs le zéro.

Corollaire 3. Si la fonction $\Omega(z)$ satisfait à l'inégalité

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(z), & \lambda_1'(z), & \ldots, & \lambda_1^{(n)}(z) \\ \lambda_2(z), & \lambda_2'(z), & \ldots, & \lambda_2^{(n)}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_n(z), & \lambda_n'(z), & \ldots, & \lambda_n^{(n)}(z) \\ \Omega(z), & \Omega'(z), & \ldots, & \Omega^{(n)}(z) \end{vmatrix} \geqq 0$$

pour l'intervalle de $z = a$ jusqu'à $z = b$ entier et les coefficients

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

de l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

sont déterminés par les équations

$$\begin{gathered} p_1\lambda_1(u_1) + p_2\lambda_2(u_1) + \ldots + p_n\lambda_n(u_1) = \Omega(u_1), \\ p_1\lambda_1(u_2) + p_2\lambda_2(u_2) + \ldots + p_n\lambda_n(u_2) = \Omega(u_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1\lambda_1(u_n) + p_2\lambda_2(u_n) + \ldots + p_n\lambda_n(u_n) = \Omega(u_n), \end{gathered}$$

où l'on a

$$a \leqq u_1 < u_2 < \ldots < u_{n-1} < u_n \leqq b,$$

cette expression $\Phi(z)$ doit satisfaire aux inégalités

$$\begin{array}{lll} \Phi(z) \leqq \Omega(z) & \text{pour} & u_n < z < b, \\ \Phi(z) \geqq \Omega(z) & \text{»} & u_{n-1} < z < u_n, \\ \Phi(z) \leqq \Omega(z) & \text{»} & u_{n-2} < z < u_{n-1}, \\ \cdots\cdots & & \\ (-1)^n \Phi(z) \geqq (-1)^n \Omega(z) & \text{pour} & u_1 < z < u_2, \\ (-1)^n \Phi(z) \leqq (-1)^n \Omega(z) & \text{»} & a < z < u_1. \end{array}$$

On obtient ce corollaire en remarquant la formule

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1), & \lambda_1(u_2), & \dots, & \lambda_1(u_n) \\ \lambda_2(u_1), & \lambda_2(u_2), & \dots, & \lambda_2(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n(u_1), & \lambda_n(u_2), & \dots, & \lambda_n(u_n) \end{vmatrix} \{\Omega(z) - \Phi(z)\}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1), & \lambda_1(u_2), & \dots, & \lambda_1(u_n), & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(u_1), & \lambda_2(u_2), & \dots, & \lambda_2(u_n), & \lambda_2(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n(u_1), & \lambda_n(u_2), & \dots, & \lambda_n(u_n), & \lambda_n(z) \\ \Omega(u_1), & \Omega(u_2), & \dots, & \Omega(u_n), & \Omega(z) \end{vmatrix}.$$

§ 2. Ajoutons maintenant aux fonctions

$$\lambda_1(z), \lambda_2(z), \dots, \lambda_n(z), \lambda_{n+1}(z),$$

satisfaisantes aux conditions précédentes, une fonction $\Omega(z)$, laquelle satisfait aux inégalités

$$\Omega(z) \geqq 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(z), & \lambda_1'(z) \\ \Omega(z), & \Omega'(z) \end{vmatrix} \geqq 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(z), & \lambda_1'(z), & \lambda_1''(z) \\ \lambda_2(z), & \lambda_2'(z), & \lambda_2''(z) \\ \Omega(z), & \Omega'(z), & \Omega''(z) \end{vmatrix} \geqq 0, \dots$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(z), & \lambda_1'(z), & \lambda_1''(z), & \dots, & \lambda_1^{(n+1)}(z) \\ \lambda_2(z), & \lambda_2'(z), & \lambda_2''(z), & \dots, & \lambda_2^{(n+1)}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n+1}(z), & \lambda_{n+1}'(z), & \lambda_{n+1}''(z), & \dots, & \lambda_{n+1}^{(n+1)}(z) \\ \Omega(z), & \Omega'(z), & \Omega''(z), & \dots, & \Omega^{(n+1)}(z) \end{vmatrix} \geqq 0$$

pour toutes les valeurs de z, comprises entre a et b.

Nous pouvons établir la proposition suivante.

Théorème 2.

Si les fonctions

$$\lambda_1(z)\,,\ \lambda_2(z)\,,\ \ldots,\ \lambda_n(z)\,,\ \lambda_{n+1}(z)\,,\ \Omega(z)$$

satisfont aux inégalités indiquées ci-dessus et si les $k+l=n+1$ nombres

$$a_k\,,\ a_{k-1}\,,\ a_{k-2}\,,\ \ldots,\ a_1\,,\ b_1\,,\ b_2\,,\ \ldots,\ b_{l-1}\,,\ b_l,$$

satisfont aux inégalités

$$a \leqq a_k < a_{k-1} < \ldots < a_1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_l \leqq b,$$

la fonction

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_{n+1}\lambda_{n+1}(z),$$

dont les coefficients

$$p_1\,,\ p_2\,,\ \ldots,\ p_{n+1}$$

se déterminent par les équations

$$\begin{array}{l}
p_1\lambda_1(a_k) + p_2\lambda_2(a_k) + \ldots + p_n\lambda_n(a_k) + p_{n+1}\lambda_{n+1}(a_k) = \Omega(a_k)\,,\\
p_1\lambda_1(a_{k-1}) + p_2\lambda_2(a_{k-1}) + \ldots + p_n\lambda_n(a_{k-1}) + p_{n+1}\lambda_{n+1}(a_{k-1}) = \Omega(a_{k-1}),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_1\lambda_1(a_1) + p_2\lambda_2(a_1) + \ldots + p_n\lambda_n(a_1) + p_{n+1}\lambda_{n+1}(a_1) = \Omega(a_1)\,,\\
p_1\lambda_1(b_1) + p_2\lambda_2(b_1) + \ldots + p_n\lambda_n(b_1) + p_{n+1}\lambda_{n+1}(b_1) = 0\,,\\
p_1\lambda_1(b_2) + p_2\lambda_2(b_2) + \ldots + p_n\lambda_n(b_2) + p_{n+1}\lambda_{n+1}(b_2) = 0\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_1\lambda_1(b_l) + p_2\lambda_2(b_l) + \ldots + p_n\lambda_n(b_l) + p_{n+1}\lambda_{n+1}(b_l) = 0\,,
\end{array}$$

doit satisfaire aux inégalités

$$\begin{array}{lll}\Phi(z) \leqq \Omega(z) & \text{pour} & a_1 \leqq z_1 \leqq b_1, \\ \Phi(z) \geqq \Omega(z) & \text{»} & a_2 \leqq z \leqq a_1, \\ \Phi(z) \leqq \Omega(z) & \text{»} & a_3 \leqq z \leqq a_2, \\ \dots\dots & & \\ (-1)^{k-1}\Phi(z) \leqq (-1)^{k-1}\Omega(z) & \text{pour} & a_k \leqq z \leqq a_{k-1}, \\ (-1)^{k}\ \Phi(z) \leqq (-1)^{k}\ \Omega(z) & \text{»} & a \leqq z \leqq a_k\ , \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}\Phi(z) \geqq 0 & \text{pour} & a_1 \leqq z \leqq b_1, \\ \Phi(z) \leqq 0 & \text{»} & b_1 \leqq z \leqq b_2, \\ \Phi(z) \geqq 0 & \text{»} & b_2 \leqq z \leqq b_3, \\ \dots\dots & & \\ (-1)^{l-1}\Phi(z) \geqq 0 & \text{pour} & b_{l-1} \leqq z \leqq b_l, \\ (-1)^{l}\ \Phi(z) \geqq 0 & \text{»} & b_l \leqq z \leqq b\,. \end{array}$$

Démonstration.

Ce théorème a été déjà démontré dans mon mémoire *Sur une question de maximum et de minimum;* or nous allons donner une autre démonstration.

Nous remarquons d'abord que le théorème est évidemment juste dans le cas de $k = 0$, car dans ce cas la fonction $\Phi(z)$ se réduit à zéro.

Il est facile de vérifier ce théorème et dans le cas, où l'on a

$$k = 1 \quad \text{et} \quad l = 0.$$

En effet dans ce cas on obtient

$$\Phi(z) = \frac{\lambda_1(z)}{\lambda_1(a_1)}\,\Omega(a_1)$$

et par conséquent la différence

$$\Phi(z) - \Omega(z),$$

se réduit à

$$\frac{1}{\lambda_1(a_1)}\begin{vmatrix} \lambda_1(z), & \lambda_1(a_1) \\ \Omega(z), & \Omega(a_1) \end{vmatrix} = \frac{-1}{\lambda_1(a_1)}\begin{vmatrix} \lambda_1(a_1), & \lambda_1(z) \\ \Omega(a_1), & \Omega(z) \end{vmatrix}.$$

Il en résulte que cette différence est un nombre positif pour $a < z < a_1$ et au contraire — négatif pour $a_1 < z < b$; or on a

$$\Phi(z) \geqq 0$$

pour toutes les valeurs considérées de z.

Cela étant, admettons que notre théorème est établi pour tous les cas, où au lieu du nombre $n + 1$ on a n.

Formons les expressions

$$\Phi_0(z) = p_1^0\lambda_1(z) + p_2^0\lambda_2(z) + \ldots + p_n^0\lambda_n(z)$$

et

$$\Phi_1(z) = p_1'\lambda_1(z) + p_2'\lambda_2(z) + \ldots + p_n'\lambda_n(z),$$

en déterminant les coefficients

$$p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0, p_1', p_2', \ldots, p_n'$$

par les équations

$$\begin{array}{llll}
\Phi_0(a_k) & = \Omega(a_k), & & \\
\Phi_0(a_{k-1}) & = \Omega(a_{k-1}), & \Phi_1(a_{k-1}) & = \Omega(a_{k-1}), \\
\multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
\Phi_0(a_1) & = \Omega(a_1), & \Phi_1(a_1) & = \Omega(a_1), \\
\Phi_0(b_1) & = 0, & \Phi_1(b_1) & = 0, \\
\multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
\Phi_0(b_{l-1}) & = 0, & \Phi_1(b_{l-1}) & = 0, \\
 & & \Phi_1(b_l) & = 0.
\end{array}$$

Ces fonctions $\Phi_0(z)$ et $\Phi_1(z)$, conformément à notre supposition, doivent satisfaire aux inégalités

$$(-1)^k \Phi_0(z) \leqq (-1)^k \Omega(z) \text{ pour } a < z < a_k, \quad (-1)^{k-1} \Phi_1(a_k) \leqq (-1)^{k-1} \Omega(a_k),$$
$$(-1)^{k-1} \Phi_0(z) \text{ et } (-1)^{k-1} \Phi_1(z) \leqq (-1)^{k-1} \Omega(z) \text{ pour } a_k < z < a_{k-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\begin{array}{llll} \Phi_0(z) \text{ et } \Phi_1(z) \geqq \Omega(z) & \text{pour} & a_2 < z < a_1, \\ \Phi_0(z) \text{ et } \Phi_1(z) \leqq \Omega(z) & \text{»} & a_1 < z < b_1, \\ \Phi_0(z) \text{ et } \Phi_1(z) \geqq 0 & \text{»} & a_1 < z < b_1, \\ \Phi_0(z) \text{ et } \Phi_1(z) \leqq 0 & \text{»} & b_1 < z < b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{array}$$
$$(-1)^{l-1} \Phi_0(z) \text{ et } (-1)^{l-1} \Phi_1(z) \geqq 0 \text{ pour } b_{l-1} < z < b_l,$$
$$(-1)^{l-1} \Phi_0(b_l) \geqq 0, \quad (-1)^l \Phi_1(z) \geqq 0 \text{ pour } b_l < z < b.$$

D'autre part, il est facile de voir, que la fonction $\Phi(z)$ déterminée par les conditions du théorème est liée avec les fonctions $\Phi_0(z)$ et $\Phi_1(z)$ par les formules

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) - \Phi_0(b_l) \frac{\Delta_0(z)}{\Delta_0(b_l)}$$

et

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \{\Omega(a_k) - \Phi_1(a_k)\} \frac{\Delta_1(z)}{\Delta_1(a_k)},$$

où l'on a

$$\Delta_0(z) = \begin{vmatrix} \lambda_1(a_k), & \ldots, & \lambda_1(a_1), & \lambda_1(b_1), & \ldots, & \lambda_1(b_{l-1}), & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(a_k), & \ldots, & \lambda_2(a_1), & \lambda_2(b_1), & \ldots, & \lambda_2(b_{l-1}), & \lambda_2(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n+1}(a_k), & \ldots, & \lambda_{n+1}(a_1), & \lambda_{n+1}(b_1), & \ldots, & \lambda_{n+1}(b_{l-1}), & \lambda_{n+1}(z) \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta_1(z) = \begin{vmatrix} \lambda_1(z) , & \lambda_1(a_{k-1}) , & \ldots , & \lambda_1(a_1) , & \lambda_1(b_1) , & \ldots , & \lambda_1(b_l) \\ \lambda_2(z) , & \lambda_2(a_{k-1}) , & \ldots , & \lambda_2(a_1) , & \lambda_2(b_1) , & \ldots , & \lambda_2(b_l) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n+1}(z) , & \lambda_{n+1}(a_{k-1}) , & \ldots , & \lambda_{n+1}(a_1) , & \lambda_{n+1}(b_1) , & \ldots , & \lambda_{n+1}(b_l) \end{vmatrix}.$$

C'est pourquoi nous pouvons, en vertu du théorème I établir les inégalités

$$(-1)^k \Phi(z) < (-1)^k \Phi_0(z) \leqq (-1)^k \Omega(z) \text{ pour } a < z < a_k,$$

$$(-1)^{k-1} \Phi(z) \leqq (-1)^{k-1} \Phi_0(z) \leqq (-1)^{k-1} \Omega(z) \text{ pour } a_k < z < a_{k-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned} \Phi(z) > \Phi_0(z) > \Omega(z) &\quad \text{pour } a_2 < z < a_1, \\ \Phi(z) < \Phi_0(z) < \Omega(z) &\quad \text{»} \quad a_1 < z < b_1, \\ \Phi(z) > \Phi_1(z) > 0 &\quad \text{»} \quad a_1 < z < b_1, \\ \Phi(z) < \Phi_1(z) < 0 &\quad \text{»} \quad b_1 < z < b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

$$(-1)^l \Phi(z) > (-1)^l \Phi_1(z) > 0 \text{ pour } b_l < z < b.$$

De cette manière nous avons obtenu les inégalités du théorème 2, en supposant k et l différents de zéro.

Dans le cas de $l = 0$ la fonction $\Phi_0(z)$ perd le sens.

Il en reste la seule fonction auxiliaire $\Phi_1(z)$, laquelle peut servir pour démontrer l'inégalité

$$\Phi(z) \geqq 0$$

pour $a_1 < z < b$.

Quant aux autres inégalités, elles sont une suite immédiate du corollaire troisième.

Ces considérations suffisent pour reconnaître notre théorème.

§ 3. Abordons maintenant le problème suivant.

Etant donnés les nombres a, b, c, C et les valeurs des intégrales

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = \alpha_1, \quad \int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz = \alpha_2, \ \ldots, \ \int_a^b f(z)\lambda_n(z)dz = \alpha_n;$$

il s'agit de trouver les valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)dz,$$

à la condition

$$c \leqq f(z) \leqq C.$$

Or nous supposons que les fonctions λ satisfont aux conditions établies auparavant.

Le problème posé est une généralisation du problème résolu dans mon mémoire *Nouvelles applications des fractions continues.*

Si les nombres

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n$$

sont donnés arbitrairement, les conditions de notre problème peuvent être incompatibles.

On peut écarter toute incompatibilité en supposant que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se déterminent par les égalités

$$\alpha_1 = \int_a^b F(z)\lambda_1(z)dz, \quad \alpha_2 = \int_a^b F(z)\lambda_2(z)dz, \ \ldots, \ \alpha_n = \int_a^b F(z)\lambda_n(z)dz,$$

où la fonction donnée $F(z)$ satisfait aux inégalités

$$c \leqq F(z) \leqq C.$$

Nous excluons cependant les fonctions $F(z)$, pour lesquelles l'intervalle de $z = a$ jusqu'à $z = b$ se divise en n, ou en un nombre plus petit de parties de telle manière que dans chaque de ces parties la fonction $F(z)$ conserve une seule valeur c ou C.

Pour les fonctions $F(z)$ excluées les égalités

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = \int_a^b F(z)\lambda_1(z)dz, \ \ldots, \ \int_a^b f(z)\lambda_n(z)dz = \int_a^b F(z)\lambda_n(z)dz$$

conjointement avec les inégalités

$$c \leqq f(z) \leqq C$$

trainent après elles

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)dz = \int_a^b F(z)\lambda_{n+1}(z)dz.$$

Sous la restriction indiquée la solution de notre problème se réduit aux égalités que nous allons donner.

Abordons en premier lieu les deux cas les plus simples:

$$n = 1 \quad \text{et} \quad n = 2.$$

Pour résoudre le problème dans le cas de $n = 1$ il faut déterminer deux nombres η et ξ par les conditions

$$C\int_a^\eta \lambda_1(z) + c\int_\eta^a \lambda_1(z)dz = \alpha_1 = c\int_a^\xi \lambda_1(z)dz + C\int_\xi^b \lambda_1(z)dz.$$

Ces conditions sont exécutables et déterminent effectivement les nombres η et ξ; car si le nombre x croît continuellement de a jusqu'à b, la somme

$$C\int_a^x \lambda_1(z)dz + c\int_x^b \lambda_1(z)dz$$

croît aussi continuellement

$$\text{de} \quad c\int_a^b \lambda_1(z)dz \quad \text{jusqu'à} \quad C\int_a^b \lambda_1(z)dz,$$

et la somme

$$c\int_a^x \lambda_1(z)dz + C\int_x^b \lambda_1(z)dz$$

décroît

$$\text{de} \quad C\int_a^b \lambda_1(z)dz \quad \text{jusqu'à} \quad c\int_a^b \lambda_1(z)dz,$$

et outre cela on a

$$c\int_a^b \lambda_1(z)dz < \int_a^b F(z)\lambda_1(z)dz < C\int_a^b \lambda_1(z)dz.$$

Au moyen de ces nombres η et ξ formons deux fonctions f_{min} et f_{max} du nombre variable z:

$$f_{min} = C \text{ pour } a < z < \eta, \qquad f_{min} = c \text{ pour } \eta < z < b$$

et

$$f_{max} = c \text{ pour } a < z < \xi, \qquad f_{max} = C \text{ pour } \xi < z < b.$$

Les intégrales

$$\int_a^b f_{min}\lambda_2(z)dz = C\int_a^\eta \lambda_2(z)dz + c\int_\eta^b \lambda_2(z)dz$$

et

$$\int_a^b f_{max}\lambda_2(z)dz = c\int_a^\xi \lambda_2(z)dz + C\int_\xi^b \lambda_2(z)dz$$

seront les valeurs extrêmes cherchées de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz,$$

ce qu'il est clair des formules

$$\int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz - \int_a^b f_{min}\lambda_2(z)dz = \int_a^b \{f(z) - f_{min}\}\lambda_2(z)dz$$

$$= \frac{1}{\lambda_1(\eta)}\int_a^b \{f(z) - f_{min}\}\begin{vmatrix} \lambda_1(\eta), & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(\eta), & \lambda_2(z) \end{vmatrix} dz$$

et

$$\int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz - \int_a^b f_{max}\lambda_2(z)dz = \int_a^b \{f(z) - f_{max}\}\lambda_2(z)dz$$

$$= \frac{1}{\lambda_1(\xi)}\int_a^b \{f(z) - f_{max}\}\begin{vmatrix} \lambda_1(\xi), & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(\xi), & \lambda_2(z) \end{vmatrix} dz.$$

En abordant le cas

$$n = 2,$$

introduisons dans nos considérations un nombre variable η'' borné par les inégalités

$$a < \eta'' < \eta,$$

η étant le nombre déterminé auparavant.

A chaque valeur de η'' corresponde une valeur déterminée d'un autre variable ξ'', satisfaisant aux inégalités

$$\eta'' < \xi'' < b$$

et à l'équation

$$C\int_a^{\eta''} \lambda_1(z)dz + c\int_{\eta''}^{\xi''} \lambda_1(z)dz + C\int_{\xi''}^{b} \lambda_1(z)dz = \alpha_1.$$

L'existence d'un tel nombre ξ'' se manifeste de la recherche précédente, car on trouvera au moyen de ce nombre ξ'' la valeur maximum de l'intégrale

$$\int_{\eta''}^{b} f(z)\lambda_2(z)dz$$

aux conditions

$$c \leqq f(z) \leqq C \text{ et } \int_{\eta''}^{b} f(z)\lambda_1(z)dz = \int_{\eta''}^{b} f_{min}\lambda_1(z)dz,$$

où l'on a

$$f_{min} = C \text{ pour } \eta'' < z < \eta \text{ et } f_{min} = c \text{ pour } \eta < z < b.$$

En vertu de la liaison établie entre ξ'' et η'', on aura

$$\lambda_1(\xi'')d\xi'' = \lambda_1(\eta'')d\eta'',$$

en désignant par $d\xi''$ et $d\eta''$ les différentiels de ces variables.

Il en résulte que η'' et ξ'' croissent et décroissent simultanément.

Il est facile de voir aussi, qu'aux valeurs a et η du nombre η'' correspondent les valeurs ξ et b du nombre ξ''.

Après ces remarques formons l'expression

$$C\int_a^{\eta''} \lambda_2(z)dz + c\int_{\eta''}^{\xi''} \lambda_2(z)dz + C\int_{\xi''}^{b} \lambda_2(z)dz - \alpha_2,$$

laquelle nous désignons par $\chi(\eta'')$.

Si η'' croît de a jusqu'à η, la fonction $\chi(\eta'')$ decroît, car on a

$$\lambda_1(\xi'')\frac{d\chi(\eta'')}{d\eta''} = (c - C)\begin{vmatrix}\lambda_1(\eta''), & \lambda_1(\xi'')\\ \lambda_2(\eta''), & \lambda_2(\xi'')\end{vmatrix} < 0.$$

Or il est facile de conclure, au moyen de la solution de notre problème pour le cas de $n = 1$, que $\chi(a)$ est un nombre positif et $\chi(\eta)$ au contraire est un nombre négatif:

$$\chi(a) = c\int_a^\xi \lambda_2(z)dz + C\int_\xi^b \lambda_2(z)dz - \int_a^b F(z)\lambda_2(z)dz > 0,$$

$$\chi(\eta) = C\int_a^\eta \lambda_2(z)dz + c\int_\eta^b \lambda_2(z)dz - \int_a^b F(z)\lambda_2(z)dz < 0.$$

Par conséquent, il existe dans l'intervalle

de $\eta'' = a$ jusqu'à $\eta'' = \eta$

une seule valeur de η'', pour laquelle $\chi(\eta'')$ se réduit à zéro.

Nous nous persuadons ainsi, qu'il existe un seul ensemble de valeurs de η'' et ξ'', satisfaisant aux deux conditions

$$C\int_a^{\eta''} \lambda_1(z)dz + c\int_{\eta''}^{\xi''} \lambda_1(z)dz + C\int_{\xi''}^b \lambda_1(z)dz = \alpha_1$$

et

$$C\int_a^{\eta''} \lambda_2(z)dz + c\int_{\eta''}^{\xi''} \lambda_2(z)dz + C\int_{\xi''}^b \lambda_2(z)dz = \alpha_2.$$

A cet ensemble correspond la fonction f_{max} du nombre variable z, déterminée par les formules $f_{max} = c$ pour $\eta'' < z < \xi''$ et $f_{max} = C$ pour toutes autres valeurs de z. La fonction f_{max} donne pour l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)dz$$

sa valeur maximum

$$\int_a^b f_{max}\lambda_3(z)dz.$$

En effet, au moyen des égalités

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = \int_a^b f_{max}\lambda_1(z)dz$$

et

$$\int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz = \int_a^b f_{max}\lambda_2(z)dz$$

il est facile d'obtenir la suivante

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)dz - \int_a^b f_{max}\lambda_3(z)dz$$

$$= \frac{\displaystyle\int_a^b \{f(z) - f_{max}\} \begin{vmatrix} \lambda_1(\eta''), & \lambda_1(\xi''), & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(\eta''), & \lambda_2(\xi''), & \lambda_2(z) \\ \lambda_3(\eta''), & \lambda_3(\xi''), & \lambda_3(z) \end{vmatrix} dz}{\begin{vmatrix} \lambda_1(\eta''), & \lambda_1(\xi'') \\ \lambda_2(\eta''), & \lambda_2(\xi'') \end{vmatrix}},$$

d'où il est évident que la différence

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)dz - \int_a^b f_{max}\lambda_3(z)dz$$

ne peut être un nombre positif.

De la même manière il est facile de se convaincre, qu'il existe deux autres nombres ξ', η' satisfaisant aux équations]

$$c\int_a^{\xi'} \lambda_1(z)dz + C\int_{\xi'}^{\eta'} \lambda_1(z)dz + c\int_{\eta'}^b \lambda_1(z)dz = \alpha_1,$$

$$c\int_a^{\xi'} \lambda_2(z)dz + C\int_{\xi'}^{\eta'} \lambda_2(z)dz + c\int_{\eta'}^b \lambda_2(z)dz = \alpha_2$$

et aux inégalités

$$a < \xi' < \xi, \quad \eta < \eta' < b.$$

Et si l'on pose

$f_{min} = C$ pour $\xi' < z < \eta'$ et $f_{min} = c$ pour toutes les autres valeurs de z, à cette fonction f_{min} corresponde la valeur minimum de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)dz,$$

comme il est facile de conclure au moyen de la formule

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)dz - \int_a^b f_{min}\lambda_3(z)dz$$

$$= \frac{\int_a^b \{f(z) - f_{min}\} \begin{vmatrix} \lambda_1(\xi'), \lambda_1(\eta'), \lambda_1(z) \\ \lambda_2(\xi'), \lambda_2(\eta'), \lambda_2(z) \\ \lambda_3(\xi'), \lambda_3(\eta'), \lambda_3(z) \end{vmatrix} dz}{\begin{vmatrix} \lambda_1(\xi'), \lambda_1(\eta') \\ \lambda_2(\xi'), \lambda_2(\eta') \end{vmatrix}}.$$

Après avoir examiné le cas de $n = 2$, on peut passer au cas de $n = 3$; mais nous allons considérer le passage générale d'une valeur de n à la valeur suivante: de $n = k$ à $n = k + 1$.

§ 4. Supposons que notre problème est résolue pour le cas des $2m$ données:

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = \alpha_1, \ \ldots, \ \int_a^b f(z)\lambda_{2m}(z)dz = \alpha_{2m};$$

à savoir supposons, que les fonctions f_{max} et f_{min}, correspondantes à la valeur la plus grande et à la valeur la plus petite de l'intégrale considérée

$$\int_a^b f(z)\lambda_{2m+1}(z)dz,$$

se déterminent par les formules

$$f_{max} = C \text{ pour } a < z < \eta_1'', \ \xi_1'' < z < \eta_2'', \ \ldots, \ \xi_{m-1}'' < z < \eta_m'', \ \xi_m'' < z < b,$$

$$f_{max} = c \quad » \quad \eta_1'' < z < \xi_1'', \ \eta_2'' < z < \xi_2'', \ \ldots, \ \eta_m'' < z < \xi_m'',$$

$$f_{min} = C \quad » \quad \xi_1' < z < \eta_1', \ \xi_2' < z < \eta_2', \ \ldots, \ \xi_m' < z < \eta_m',$$

$$f_{min} = c \quad » \quad a < z < \xi_1', \ \eta_2' < z < \xi_2', \ \ldots, \ \eta_{m-1}' < z < \xi_m', \ \eta_m' < z < b,$$

où l'on a sans doute

$$a < \eta_1'' < \xi_1'' < \eta_2'' < \ldots < \xi_{m-1}'' < \eta_m'' < \xi_m'' < b$$

et

$$a < \xi_1' < \eta_1' < \xi_2' < \ldots < \eta_{m-1}' < \xi_m' < \eta_m' < b.$$

Introduisons ensuite un nombre variable x'', compris entre a et ξ_1', et pour chaque valeur de ce nombre variable déterminons les nombres

$$y_1'' \, , \, x_1'' \, , \, y_2'' \, , \, x_2'' \, , \, \ldots \, , \, y_m'' \, , \, x_m''$$

de telle manière, que la fonction $f(z)$, conservant la valeur constante C pour

$$x'' < z < y_1'' \, , \, x_1'' < z < y_2'' \, , \, \ldots \, , \, x_{m-1}'' < z < y_m'' \, , \, x_m'' < z < b$$

et la valeur c pour

$$y_1'' < z < x_1'' \, , \, y_2'' < z < x_2'' \, , \, \ldots \, , \, y_m'' < z < x_m'',$$

donne la valeur la plus grande à l'intégrale

$$\int_{x''}^{b} f(z) \lambda_{2m+1}(z) dz$$

aux conditions

$$c \leqq f(z) \leqq C$$

et

$$\int_{x''}^{b} f(z) \lambda_i(z) dz = \int_{x''}^{b} f_{min} \lambda_i(z) dz,$$

où l'on a

$$i = 1 \, , \, 2 \, , \, 3 \, , \, \ldots \, , \, 2m,$$

et f_{min} désigne la fonction indiquée plus haut.

En d'autres termes, nous déterminons les nombres

$$y_1'' \, , \, x_1'' \, , \, y_2'' \, , \, x_2'' \, , \, \ldots \, , \, y_m'' \, , \, x_m''$$

par les équations

$$c \int_a^{x''} \lambda_i(z) dz + C \int_{x''}^{y_1''} \lambda_i(z) dz + \ldots + C \int_{x_m''}^{b} \lambda_i(z) dz = \alpha_i,$$

en posant

$$i = 1 \, , \, 2 \, , \, 3 \, , \, \ldots \, , \, 2m.$$

En différentiant ces équations on obtient

$$\lambda_i(x'')dx'' - \lambda_i(y_1'')dy_1'' + \lambda_i(x_1'')dx_1'' - \ldots + \lambda_i(x_m'')dx_m'' = 0,$$

i étant égal à $1, 2, 3, \ldots, 2m$.

Par conséquent, les différentiels

$$dx'', dy_1'', dx_1'', dy_2'', \ldots, dx_m''$$

sont proportionnels aux déterminants des systèmes de $(2m)^2$ éléments, obtenus de la seule système suivante

$$\begin{array}{l}
\lambda_1(x''),\ \lambda_1(y_1''),\ \lambda_1(x_1''), \ldots, \lambda_1(y_m''),\ \lambda_1(x_m'') \\
\lambda_2(x''),\ \lambda_2(y_1''),\ \lambda_2(x_1''), \ldots, \lambda_2(y_m''),\ \lambda_2(x_m'') \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_{2m}(x''),\ \lambda_{2m}(y_1''), \ldots\ldots\ldots, \lambda_{2m}(y_m''),\ \lambda_{2m}(x_m'')
\end{array}$$

lorsqu'on supprime la colonne première, seconde etc.

Cela étant, il est facile de se convaincre au moyen du théorème 1, que tous les nombres

$$y_1'', x_1'', y_2'', \ldots, y_m'', x_m''$$

croissent continuellement, lorsque le nombre x'' croît continuellement.

D'autre part, pour $x'' = a$ on a

$$y_1'' = \eta_1'', \ x_1'' = \xi_1'', \ y_2'' = \eta_2'', \ \ldots, \ y_m'' = \eta_m'', \ x_m'' = \xi_m'';$$

et pour $x'' = \xi_1'$ on a

$$y_1'' = \eta_1', \quad x_1'' = \xi_2', \quad y_2'' = \eta_2', \ \ldots, \ y_m'' = \eta_m', \quad x_m'' = b.$$

Donc, en posant

$$a < x'' < \xi_1'$$

on aura les inégalités

$$\eta_1'' < y_1'' < \eta_1', \ \xi_1'' < x_1'' < \xi_2', \ \eta_2'' < y_2'' < \eta_2', \ \ldots, \ \xi_m'' < x_m'' < b.$$

Formons maintenant la somme

$$c\int_a^{x''} \lambda_{2m+1}(z)dz + C\int_{x''}^{y_1''} \lambda_{2m+1}(z)dz + \ldots + C\int_{x_m''}^{b} \lambda_{2m+1}(z)dz,$$

en la désignant par $\chi(x'')$.

Il est clair de la formule

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(y_1'') , & \lambda_1(x_1'') , & \ldots , & \lambda_1(x_m'') \\ \lambda_2(y_1'') , & \lambda_2(x_1'') , & \ldots , & \lambda_2(x_m'') \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{2m}(y_1'') , & \lambda_{2m}(x_1'') , & \ldots , & \lambda_{2m}(x_m'') \end{vmatrix} \frac{d\chi(x'')}{dx''}$$

$$= \{c - C\} \begin{vmatrix} \lambda_1(x'') , & \lambda_1(y_1'') , & \ldots , & \lambda_1(x_m'') \\ \lambda_2(x'') , & \lambda_2(y_1'') , & \ldots , & \lambda_2(x_m'') \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{2m}(x'') , & \lambda_{2m}(y_1'') , & \ldots , & \lambda_{2m}(x_m'') \\ \lambda_{2m+1}(x'') , & \ldots & \ldots , & \lambda_{2m+1}(x_m'') \end{vmatrix},$$

que cette somme décroît continuellement, lorsque x'' croît continuellement de $x'' = a$ jusqu'à $x'' = \xi_1'$.

Or, nous avons

$$\chi(a) = \int_a^b f_{max} \lambda_{2m+1}(z) dz > \alpha_{2m+1}$$

et

$$\chi(\xi_1') = \int_a^b f_{min} \lambda_{2m+1}(z) dz < \alpha_{2m+1}.$$

En vertu de cela, il existe dans l'intervalle

de $x'' = a$ jusqu'à $x'' = \xi_1'$

une seule valeur de x'', pour laquelle la valeur correspondante de $\chi(x'')$ est égale à α_{2m+1}.

Donc, il existe un seul système de nombres

$$x'' , y_1'' , x_1'' , y_2'' , \ldots , x_{m-1}'' , y_m'' , x_m'' ,$$

déterminés par les inégalités

$$a < x'' < \xi_1' , \eta_1'' < y_1'' < \eta_1' , \xi_1'' < x_1'' < \xi_2' , \ldots , \eta_m'' < y_m'' < \eta_m' , \xi_m'' < x_m'' < b$$

et par les équations

$$c\int_a^{x''}\lambda_i(z)dz + C\int_{x''}^{y_1''}\lambda_i(z)dz + c\int_{y_1''}^{x_1''}\lambda_i(z)dz + \ldots + C\int_{x_m''}^{b}\lambda_i(z)dz = \alpha_i,$$

i étant égal à $1, 2, 3, \ldots, 2m, 2m+1$.

Or, si l'on désigne par f_{max} la fonction du nombre z, qui a la valeur C pour

$$x'' < z < y_1'',\ x_1'' < z < y_2'',\ \ldots,\ x_{m-1}'' < z < y_m'',\ x_m'' < z < b$$

et la valeur c pour

$$a < z < x'',\ y_1'' < z < x_1'',\ \ldots,\ y_{m-1}'' < z < x_{m-1}'',\ y_m'' < z < x_m'',$$

la valeur correspondante

$$\int_a^b f_{max}\lambda_{2m+2}(z)dx$$

sera le maximum cherché de l'intégrale considérée

$$\int_a^b f(z)\lambda_{2m+2}(z)dz,$$

car on a

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(x'') & \lambda_1(y_1'') & \ldots, & \lambda_1(y_m''), & \lambda_1(x_m'') \\ \lambda_2(x'') & \lambda_2(y_1'') & \ldots, & \lambda_2(y_m''), & \lambda_2(x_m'') \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{2m+1}(x'') & \lambda_{2m+1}(y_1'') & \ldots & \ldots & \lambda_{2m+1}(x_m'') \end{vmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b f(z)\lambda_{2m+2}(z)dz \\ -\int_a^b f_{max}\lambda_{2m+2}(z)dz \end{array} \right\}$$

$$= \int_a^b \{f(z) - f_{max}\} \begin{vmatrix} \lambda_1(x'') & \lambda_1(y_1'') & \ldots, & \lambda_1(x_m'') & \lambda_1(z) \\ \lambda_2(x'') & \lambda_2(y_1'') & \ldots, & \lambda_2(x_m'') & \lambda_2(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{2m+2}(x'') & \lambda_{2m+2}(y_1'') & \ldots, & \lambda_{2m+2}(x_m'') & \lambda_{2m+2}(z) \end{vmatrix} dz.$$

De la même manière on peut trouver le minimum de la même integrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{2m+2}(z)dz.$$

A savoir il est facile de se convaincre, qu'il existe des nombres

$$y', x_1', y_1', x_2', \ldots, y_{m-1}', x_m', y_m',$$

déterminés par les inégalités

$$a < y' < \eta_1'', \xi_1' < x_1' < \xi_1'', \eta_1' < y_1' < \eta_2'', \ldots, \xi_m' < x_m' < \xi_m'', \eta_m' < y_m' < b$$

et par les équations

$$C\int_a^{y'} \lambda_i(z)dz + c\int_{y'}^{x_1'} \lambda_i(z)dz + C\int_{x_1'}^{y_1'} \lambda_i(z)dz + \ldots + c\int_{y_m'}^{b} \lambda_i(z)dz = \alpha_i,$$

i étant égal à $1, 2, 3, \ldots, 2m+1$.

Et si l'on désigne par f_{min} la fonction du nombre z, qui est égale à C pour

$$a < z < y', x_1' < z < y_1', x_2' < z < y_2', \ldots, x_m' < z < y_m',$$

et à c pour

$$y' < z < x_1', y_1' < z < x_2', \ldots, y_{m-1}' < z < x_m', y_m' < z < b,$$

cette fonction donnera le minimum cherché de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{2m+2}(z)dz.$$

Les considérations précédentes établissent aussi les inégalités

$$x'' < \xi_1' < x_1' < \xi_1'' < x_1'' < \xi_2' < x_2' < \xi_2'' < \ldots < \xi_m' < x_m' < \xi_m'' < x_m''$$

et

$$y' < \eta_1'' < y_1'' < \eta_1' < y_1' < \eta_2'' < y_2'' < \eta_2' < \ldots < \eta_m'' < y_m'' < \eta_m' < y_m'.$$

De la même manière on peut passer du cas, où l'on a $n = 2k+1$, au cas de $n = 2k+2$.

Donc, nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Etant données les égalités

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = \alpha_1, \qquad \int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz = \alpha_2\ , \ \ldots, \ \int_a^b f(z)\lambda_n(z) = \alpha_n$$

et la condition

$$c \leqq f(z) \leqq C,$$

les valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)dz$$

correspondent aux fonctions

$$f(z) = f_{max} \quad \text{et} \quad f(z) = f_{min}$$

lesquelles dans l'intervalle de $z = a$ jusqu'à $z = b$ n'ont que deux valeurs C et c et changent la valeur justement n fois.

Or, la fonction f_{max}, donnant le maximum de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)dz,$$

est égale à C pour les valeurs de z voisines à b, et la fonction f_{min}, donnant le minimum de la même intégrale, est au contraire égale à c pour les valeurs de z voisines à b.

§ 5. En abordant un autre problème ajoutons aux nombres a et b un nombre intermédiaire v $(a < v < b)$ et aux fonctions

$$\lambda_1(z)\ ,\ \lambda_2(z)\ ,\ \ldots,\ \lambda_n(z)$$

ajoutons aussi une fonction $\Omega(z)$, satisfaisant aux inégalités

$$\Omega(z) \geqq 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(z)\ ,\ \lambda_1'(z) \\ \Omega(z)\ ,\ \Omega'(z) \end{vmatrix} \geqq 0, \ \ldots, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1(z)\ ,\ \lambda_1'(\lambda)\ ,\ \ldots,\ \lambda_1^{(n)}(z) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n(z)\ ,\ \lambda_n'(z)\ ,\ \ldots,\ \lambda_n^{(n)}(z) \\ \Omega(z)\ ,\ \Omega'(z)\ ,\ \ldots,\ \Omega^{(n)}(z) \end{vmatrix} \geqq 0,$$

pour l'intervalle entier de $z = a$ jusqu'à $z = b$.

Notre second problème consiste dans la détermination des valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^v f(z)\Omega(z)dz$$

aux mêmes conditions qu'auparavant

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = \alpha_1, \quad \int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz = \alpha_2, \ \ldots, \ \int_a^b f(z)\lambda_n(z)dz = \alpha_n,$$

$$c \leqq f(z) \leqq C.$$

Pour éclaircir notre solution, posons

$$n = 3,$$

en nous restreignant à la recherche de la valeur la plus petite de l'intégrale examinée.

Désignons par

$$x'', y_1'', x_1'', y_1', x_1', y_1',$$

les nombres satisfaisant aux inégalités

$$a < x'' < x_1' < x_1'' < b, \ a < y' < y_1'' < y_1' < b$$

et aux égalités

$$C\int_a^{y'} \lambda_i(z)dz + c\int_{y'}^{x_1'} \lambda_i(z)dz + C\int_{x_1'}^{y_1'} \lambda_i(z)dz + c\int_{y_1'}^{b} \lambda_i(z)dz = \alpha_i,$$

$$c\int_a^{x''} \lambda_i(z)dz + C\int_{x''}^{y_1''} \lambda_i(z)dz + c\int_{y_1''}^{x_1''} \lambda_i(z)dz + C\int_{x_1''}^{b} \lambda_i(z)dz = \alpha_i,$$

i étant égal à 1, 2, 3.

L'existence de ces nombres est démontrée par les considérations précédentes.

Cela étant nous distinguons deux cas par rapport à v:

1) v est compris entre a et x'' ou entre x_1' et x_1'';

2) v est compris entre x'' et x_2' ou entre x_1'' et b.

Considérons d'abord le cas premier.

Dans ce cas, en désignant par x le nombre variable compris entre a et x'' déterminons les fonctions

$$y, x_1, y_1$$

de ce nombre par les conditions

$$c\int_a^x \lambda_i(z)dz + C\int_x^y \lambda_i(z)dz + c\int_y^{x_1} \lambda_i(z)dz + C\int_{x_1}^{y_1} \lambda_i(z)dz + c\int_{y_1}^b \lambda_i(z)dz = \alpha_i$$

pour $i = 1, 2, 3$.

Si x croît de a jusqu'à x'', le nombre x_1 croît de x_1' jusqu'à x_1''.

Par conséquent il existe une telle valeur de x, pour laquelle on a

$$x = v \quad \text{ou} \quad x_1 = v.$$

Et si l'on donne à x cette valeur et on pose

$$f_v(z) = c \text{ pour } a < z < x, \; y < z < x_1, \; y_1 < z < b$$

et $f_v(z) = C$ pour les autres valeurs de z, l'intégrale correspondante

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)dz$$

sera la valeur la plus petite de l'intégrale considérée

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)dz.$$

Cette assertion sera évidente dans le cas, où l'on a $a < v < x''$, car dans ce cas on aura

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)dz = c\int_a^v \Omega(z)\,dz.$$

En supposant ensuite

$$x_1' < v < x_1'',$$

formons l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + p_3\lambda_3(z),$$

en déterminant les coefficients

$$p_1, p_2, p_3$$

par les conditions

$$\Phi(x) = \Omega(x), \qquad \Phi(y) = \Omega(y), \qquad \Phi(y_1) = 0.$$

En vertu du théorème 2 on aura

$$\begin{array}{lll} \Phi(z) < \Omega(z) & \text{pour} & a < z < x, \\ \Phi(z) > \Omega(z) & \text{»} & x < z < y, \\ \Phi(z) < \Omega(z) & \text{»} & y < z < x_1 = v, \\ \Phi(z) > 0 & \text{»} & x_1 < z < y_1, \\ \Phi(z) < 0 & \text{»} & y_1 < z < b, \end{array}$$

et ensuite, l'inégalité

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)\,dz < \int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz$$

découle immédiatement de la formule

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)\,dz - \int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz$$

$$= \int_a^v \{f_v(z) - f(z)\}\{\Omega(z) - \Phi(z)\}dz - \int_v^b \{f_v(z) - f(z)\}\,\Phi(z)\,dz.$$

Supposons maintenant

$$x'' < v < x_1' \text{ ou } x_1'' < v < b.$$

Dans ce cas, en désignant par y un nombre variable compris entre a et y', déterminons les fonctions

$$x\,,\, y_1\,,\, x_1$$

de ce nombre par les conditions

$$C\int_a^y \lambda_i(z)\,dz + c\int_y^x \lambda_i(z)\,dz + C\int_x^{y_1} \lambda_i(z)\,dz + c\int_{y_1}^{x_1} \lambda_i(z)\,dz + C\int_{x_1}^b \lambda_i(z)\,dz = \alpha_i,$$

i étant égal à $1, 2, 3$.

Lorsque y croît continuellement de a jusqu'à y', les nombres x et x_1 croissent aussi continuellement: le premier de x'' jusqu'à x' et le second de x_1'' jusqu'à b.

Il en résulte, que l'un des deux nombres

$$x\,,\ x_1$$

peut être égalisé à v.

En disposant de y de telle manière qu'on aura

$$x = v \quad \text{ou} \quad x_1 = v,$$

posons

$$f_v(z) = C \text{ pour } a < z < y\,,\ x < z < y_1\,,\ x_1 < z < b,$$

et

$$f_v(z) = c \text{ pour } y < z < x\,,\ y_1 < z < x_1.$$

Alors, l'intégrale

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)\,dz$$

présentera la valeur la plus petite de l'intégrale considérée

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz.$$

Nous nous persuadons de cela au moyen de la formule

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)\,dz - \int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz$$

$$= \int_a^v \{f_v(z) - f(z)\}\{\Omega(z) - \Phi(z)\}\,dz - \int_v^b \{f_v(z) - f(z)\}\,\Phi(z)\,dz$$

où l'on a

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + p_3\lambda_3(z),$$

en déterminant les coefficients $p_1\,, p_2\,, p_3$ par les équations

$$\Phi(y) = \Omega(y), \qquad \Phi(x) = \Omega(x) \quad \text{et} \quad \Phi(y_1) = \Omega(y_1)$$

dans le cas de $x_1 = v$ et par les équations

$$\Phi(y) = \Omega(y), \qquad \Phi(y_1) = \Phi(x_1) = 0,$$

si l'on a $x = v$.

De la même manière on peut trouver la valeur la plus grande de la même intégrale

$$\int_a^v f(z)\Omega(z)dz.$$

Abordons les considérations générales.

§ 6. En nous arrêtant pour fixer les idées à la recherche du maximum de l'intégrale

$$\int_a^v f(z)\Omega(z)dz,$$

nous posons

$$n = 2m.$$

Quant à v nous distinguons deux cas en conservant les désignations du § 4:

1) v est compris entre

a et η_1'', ou η_1' et η_2'', ou η_2' et η_3'', ..., ou entre η_m' et b;

2) v est compris entre

η_1'' et η_1', ou η_2'' et η_2', ..., ou entre η_m'' et η_m'.

En abordant le premier cas désignons par y un nombre variable, compris entre a et η_1'' et par

$$x_1\,,\, y_1\,,\, x_2\,,\, y_2\,,\, \ldots,\, x_m\,,\, y_m$$

les fonctions de ce variable, déterminées par les équations

$$C\int_a^y \lambda_i(z)dz + c\int_y^{x_1}\lambda_i(z)dz + \ldots + C\int_{x_m}^{y_m}\lambda_i(z)dz + c\int_{y_m}^{b}\lambda_i(z)dz = \alpha_i,$$

où l'on a $i = 1, 2, 3, \ldots, 2m$.

L'existence de ces fonctions est démontrée par les raisonnements du § 4.

Il est facile aussi de se convaincre, que les nombres

$$y_1\,,\, y_2\,,\, \ldots,\, y_m$$

croissent en même temps que y croît; à savoir y_1 croît de η_1' jusqu'à η_2'', y_2 — de η_2' jusqu'à η_3'' etc., lorsque y croît de a jusqu'à η_1''.

Par conséquent on peut disposer du nombre y ainsi, que l'un des nombres

$$y\,,\,y_1\,,\,y_2\,,\,\ldots,\,y_m$$

sera égal à v.

Alors, en posant

$$f_v(z)=C \text{ pour } a<z<y\,,\; x_1<z<y_1\,,\; x_2<z<y_2\,,\;\ldots,\; x_m<z<y_m$$

et

$$f_v(z)=c \text{ pour } y<z<x_1\,,\; y_1<z<x_2\,,\; y_2<z<x_3\,,\;\ldots,\; y_m<z<b,$$

on obtiendra le maximum cherché

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)\,dz$$

de l'intégrale considérée.

Soit en effet

$$v=y_k.$$

Posons

$$\Phi(z)=p_1\lambda_1(z)+p_2\lambda_2(z)+\ldots+p_{2m}\lambda_{2m}(z)$$

en déterminant les coefficients

$$p_1\,,\,p_2\,,\,\ldots,\,p_{2m}$$

par les équations

$$\Phi(y)=\Omega(y),\quad \Phi(x_1)=\Omega(x_1),\quad \Phi(y_1)=\Omega(y_1)\,,\;\ldots,\;\Phi(x_k)=\Omega(x_k),$$
$$\Phi(x_{k+1})=0,\quad \Phi(y_{k+1})=0\,,\;\ldots,\;\Phi(x_m)=0,\quad \Phi(y_m)=0.$$

En vertu du théorème 2, la fonction $\Phi(z)$ satisfait à l'inégalité

$$\Phi(z)\leqq\Omega(z),$$

lorsque z est compris dans l'un des intervalles

$$(a\,,\,y_1)\,,\,(x_1\,,\,y_1)\,,\,(x_2\,,\,y_2)\,,\,\ldots,\,(x_k\,,\,y_k),$$

et au contraire

$$\Phi(z)\geqq\Omega(z),$$

lorsque z est compris dans l'un des intervalles

$$(y\,,\,x_1)\,,\,(y_1\,,\,x_2)\,,\,(y_2\,,\,x_3)\,,\,\ldots,\,(y_{k-1}\,,\,x_k).$$

En vertu du théorème, on aura aussi

$$\Phi(z) \geqq 0,$$

lorsque z est compris dans l'un des intervalles

$$(y_k, x_{k+1}), (y_{k+1}, x_{k+2}), \ldots, (y_m, b),$$

et au contraire

$$\Phi(z) \leqq 0,$$

lorsque z est compris dans l'un des intervalles

$$(x_{k+1}, y_{k+1}), (x_{k+2}, y_{k+2}), \ldots, (x_m, y_m).$$

D'après cela, la formule

$$\int_a^v f_v(z)\Omega(z)dz - \int_a^v f(z)\Omega(z)dz$$

$$= \int_a^v \{f_v(z) - f(z)\}\{\Omega(z) - \Phi(z)\}dz - \int_v^b \{f_v(z) - f(z)\}\Phi(z)dz$$

donne l'inégalité

$$\int_a^v f_v(z)\Omega(z)dz > \int_a^v f(z)\Omega(z)dz.$$

En passant au second cas prenons le système de nombres variables

$$x, y_1, x_1, y_2, x_2, \ldots, x_m, y_m$$

déterminé par les inégalités

$$a < x < \xi_1', \ \eta_1'' < y_1 < \eta_1', \ \xi_1'' < x_1 < \xi_2', \ \eta_2'' < y_2 < \eta_2', \ \ldots, \ \xi_m'' < x_m < b$$

et les équations

$$c\int_a^x \lambda_i(z)dz + C\int_x^{y_1} \lambda_i(z)dz + c\int_{y_1}^{x_1} \lambda_i(z)dz + \ldots + C\int_{x_m}^b \lambda_i(z)dz = \alpha_i,$$

où l'on a $i = 1, 2, 3, \ldots, 2m$.

Conformément à ce que nous avons expliqué dans le § 4, lorsque x croît continuellement de a jusqu'à ξ_1', les variables

$$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

croissent aussi continuellement: y_1 de η_1'' jusqu'à η_1', y_2 de η_2'' jusqu'à η_2' etc.

Il en résulte que l'un des nombres

$$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

peut être égalisé à v.

Cela faisant, posons

$$f_v(z) = C \text{ pour } x < z < y_1, x_1 < z < y_2, \ldots, x_{m-1} < z < y_m, x_m < z < b$$

et

$$f_v(z) = c \text{ pour } a < z < x, y_1 < z < x_1, \ldots, y_{m-1} < z < x_{m-1}, y_m < z < x_m.$$

La valeur

$$\int_a^v f_v(z)\,\Omega(z)dz$$

obtenue de cette manière sera le minimum cherché de l'intégrale examinée

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)dz,$$

ce qu'il est facile de démontrer par la méthode expliquée ci-dessus.

Donc nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Etant données les égalités

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = \alpha_1, \quad \int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz = \alpha_2, \ \ldots, \ \int_a^b f(z)\lambda_n(z)dz = \alpha_n$$

et la condition

$$c \leqq f(z) \leqq C,$$

les valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)dz$$

correspondent aux telles fonctions $f(z)$, lesquelles dans l'intervalle de $z = a$ jusqu'à $z = b$ n'ont que deux valeurs C et c et changent la valeur justement $n + 1$ fois.

Or l'une de ces deux fonctions, donnant le maximum de l'intégrale

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)dz,$$

satisfait aux conditions

$$f(v-\varepsilon)=C \quad \text{et} \quad f(v+\varepsilon)=c,$$

et l'autre, donnant le minimum de la même intégrale, satisfait aux conditions

$$f(v-\varepsilon)=c \quad \text{et} \quad f(v+\varepsilon)=C,$$

le nombre ε étant infiniment petit.

En résolvant notre problème nous avons supposé que v différe de toutes les valeurs de z, qui séparent les valeurs C et c de la fonction f_{max} ou de la fonction f_{min}.

Mais il est facile de se convaincre, que dans les cas, où v coincide avec l'une ou l'autre de ces valeurs, le maximum ou le minimum de l'intégrale examinée

$$\int_a^v f(z)\,\Omega(z)\,dz$$

se réduit à

$$\int_a^v f_{min}\,\Omega(z)\,dz \quad \text{ou a} \quad \int_a^v f_{max}\,\Omega(z)\,dz.$$

Quant aux fonctions

$$\lambda_1(z)\,,\ \lambda_2(z)\,,\ \ldots,\ \lambda_n(z)\,,\ \lambda_{n+1}(z)\,,\ \Omega(z),$$

nous avons supposé, qu'elles sont continues et ont des dérivées de certains ordres.

Mais ces suppositions ne sont pas indispensables et il est facile de voir que les résultats obtenues concernent toutes les fonctions

$$\lambda_1(z)\,,\ \lambda_2(z)\,,\ \ldots,\ \lambda_n(z)\,,\ \lambda_{n+1}(z)\,,\ \Omega(z),$$

pour lesquelles les expressions

$$\lambda_1(u_1)\,,\quad \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1(u_2) \\ \lambda_2(u_1)\,, & \lambda_2(u_2) \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1(u_2)\,, & \lambda_1(u_3) \\ \lambda_2(u_1)\,, & \lambda_2(u_2)\,, & \lambda_2(u_3) \\ \lambda_3(u_1)\,, & \lambda_3(u_2)\,, & \lambda_3(u_3) \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

sont toujours positives et les expressions

$$\Omega(u_1)\,,\quad \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1(u_2) \\ \Omega(u_1)\,, & \Omega(u_2) \end{vmatrix}\,,\quad \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1(u_2)\,, & \lambda_1(u_3) \\ \lambda_2(u_1)\,, & \lambda_2(u_2)\,, & \lambda_2(u_3) \\ \Omega(u_1)\,, & \Omega(u_2)\,, & \Omega(u_3) \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

ne peuvent être négatives, où

$$u_1\,, u_2\,, \ldots, u_{n+1}$$

désignent des nombres arbitraires assujettis seulement aux inégalités

$$a \leqq u_1 < u_2 < \ldots < u_{n+1} \leqq b.$$

Outre cela, nous avons supposé, que les nombres

$$a\,, b\,, c\,, C$$

sont finis.

La solution de notre problème dans le cas, où l'on a

$$c = 0, \qquad C = +\infty,$$

a été donnée dans le mémoire *Sur une question de maximum et de minimum.*

Nous y avons supposé sans démonstration, qu'il existe des maxima et des minima cherchés.

Mais il est facile de remplir cette lacune au moyen de considérations tout à fait analogues à celles, que nous avons employées plus haut.

§ 7. En rapprochant maintenant nos recherches des questions sur l'interpolation, traitées par les autres géomètres, posons

$$c = -1, \qquad C = +1, \qquad F(z) = 0$$

et par conséquent

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 0\,, \ldots, \alpha_n = 0.$$

Alors le maximum de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)\,dz$$

ne se distingue du minimum que par le signe $\pm$.

Cela étant, la question sur les valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)dz$$

aux conditions

$$-1 \leq f(z) \leq +1$$

et

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)\,dz = \int_a^b f(z)\lambda_2(z)\,dz = \ldots = \int_a^b f(z)\lambda_n(z)\,dz = 0$$

se réduit aux équations

$$\int_a^{\zeta_1} \lambda_1(z)dz - \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \lambda_1(z)dz + \ldots + (-1)^n \int_{\zeta_n}^b \lambda_1(z)dz = 0,$$

$$\int_a^{\zeta_1} \lambda_2(z)dz - \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \lambda_2(z)dz + \ldots + (-1)^n \int_{\zeta_n}^b \lambda_2(z)dz = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_a^{\zeta_1} \lambda_n(z)dz - \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \lambda_n(z)dz + \ldots + (-1)^n \int_{\zeta_n}^b \lambda_n(z)dz = 0,$$

où l'on a

$$a < \zeta_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_n < b.$$

Le maximum de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_{n+1}(z)dz$$

sera égal dans ce cas à la somme

$$\int_{\zeta_n}^b \lambda_{n+1}(z)dz - \int_{\zeta_{n-1}}^{\zeta_n} \lambda_{n+1}(z)dz + \int_{\zeta_{n-2}}^{\zeta_{n-1}} \lambda_{n+1}(z)dz + \ldots + (-1)^n \int_a^{\zeta_1} \lambda_{n+1}(z)dz,$$

que nous désignons, à l'exemple de TCHÉBYCHEF, par le symbole

$$\int_n \lambda_{n+1}(z),$$

en posant

$$\int_n \omega(z) = \int_{\zeta_n}^{b} \omega(z)dz - \int_{\zeta_{n-1}}^{\zeta_n} \omega(z)dz + \ldots + (-1)^n \int_a^{\zeta_1} \omega(z)dz$$

pour chaque fonction $\omega(z)$.

Aux symboles

$$\int_1 \omega(z)\,,\ \int_2 \omega(z)\,,\ \int_3 \omega(z)\,,\ \ldots$$

nous ajoutons, aussi à l'exemple de TCHÉBYCHEF, le symbole

$$\int_0 \omega(z),$$

en désignant ainsi l'intégrale

$$\int_a^b \omega(z)dz.$$

Il faut retenir que les symboles

$$\int_0 \lambda_1(z)\,,\ \int_1 \lambda_2(z)\,,\ \int_2 \lambda_3(z)\,,\ \ldots$$

désignent des nombres positifs: le premier désigne le maximum de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\lambda_1(z)dz$$

à la condition

$$-1 \leqq f(z) \leqq 1,$$

le second désigne le maximum de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz$$

aux conditions

$$-1 \leqq f(z) \leqq 1 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = 0,$$

le troisième désigne le maximum de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\lambda_3(z)dz$$

aux conditions

$$\int_a^b f(z)\lambda_1(z)dz = 0, \qquad \int_a^b f(z)\lambda_2(z)dz = 0$$

et

$$-1 \leqq f(z) \leqq 1$$

etc.

Au contraire, l'expression

$$\int_n \lambda_m(z)$$

doit se réduire à zéro chaque fois, lorsque on a

$$n \geqq m,$$

et par conséquent on aura

$$\int_n \Phi(z) = 0$$

pour chaque expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z),$$

dont les coefficients

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

sont des nombres constants.

Cela étant établi, désignons par $\Omega(z)$ une fonction quelconque, satisfaisant seulement à la condition

$$\begin{vmatrix} \lambda_1(u_1), & \lambda_1(u_2), & \ldots, & \lambda_1(u_n), & \lambda_1(u_{n+1}) \\ \lambda_2(u_1), & \lambda_2(u_2), & \ldots & \lambda_2(u_n), & \lambda_2(u_{n+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_n(u_1), & \lambda_n(u_2), & \ldots, & \lambda_n(u_n), & \lambda_n(u_{n+1}) \\ \Omega(u_1), & \Omega(u_2), & \ldots, & \Omega(u_n), & \Omega(u_{n+1}) \end{vmatrix} \geqq 0,$$

quels que soient les nombres

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}$$

assujettis aux inégalités

$$a \leqq u_1 < u_2 < \ldots < u_n < u_{n+1} < b;$$

dans le mémoire *Iets over de benaderde voorstelling van eene functie door eene andere* T. STIELTJES a traité le poblème suivant.

Trouver les coefficients

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

de l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

à condition que la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b [\Omega(z) - \Phi(z)] dz$$

soit la plus petite, en désignant par $[\omega(z)]$ la valeur absolue de $\omega(z)$.

Or, dans le mémoire *Sur un certain minimum* M. A. KORKINE et G. ZOLOTAREFF ont traité, beaucoup plus tôt que T. STIELTJES, le cas particulier du même problème, où l'on a

$$\lambda_1(z) = 1, \quad \lambda_2(z) = z, \ \ldots, \ \lambda_n(z) = z^{n-1}, \quad \Omega(z) = z^n.$$

Les raisonnements de M. A. KORKINE et G. ZOLOTAREFF sont tout à fait complets et indiscutables, mais il n'est pas possible de reconnaître le même par rapport aux raisonnements de T. STIELTJES.

Nous allons donner la résolution de ce problème sous la forme du théorème.

Théorème 3.

L'intégrale

$$\int_a^b [\Omega(z) - \Phi(z)] dz$$

atteint son minimum

$$\int_n \Omega(z),$$

lorsque les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

sont déterminés par le système d'équations

$$p_1\lambda_1(\zeta_1) + p_2\lambda_2(\zeta_1) + \ldots + p_n\lambda_n(\zeta_1) = \Omega(\zeta_1),$$
$$p_1\lambda_1(\zeta_2) + p_2\lambda_2(\zeta_2) + \ldots + p_n\lambda_n(\zeta_2) = \Omega(\zeta_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_1\lambda_1(\zeta_n) + p_2\lambda_2(\zeta_n) + \ldots + p_n\lambda_n(\zeta_n) = \Omega(\zeta_n),$$

où

$$\zeta_1 , \zeta_2 , \ldots , \zeta_n \text{ et } \int_n \Omega(z)$$

ont les significations susindiquées.

Démonstration.

Posons, que l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

se réduit à $\varphi(z)$ dans le cas, où les coefficients

$$p_1 , p_2 , \ldots , p_n$$

sont déterminés conformément aux conditions du théorème: en sorte qu'on aura

$$\varphi(\zeta_1) = \Omega(\zeta_1), \quad \varphi(\zeta_2) = \Omega(\zeta_2) , \ldots , \varphi(\zeta_n) = \Omega(\zeta_n).$$

Cela étant, en vertu du corollaire 3 du théorème I, la différence

$$\Omega(z) - \varphi(z)$$

doit être un nombre positif pour

$$b > z > \zeta_n , \ \zeta_{n-1} > z > \zeta_{n-2} , \ \zeta_{n-3} > z > \zeta_{n-4} , \ldots$$

et au contraire — un nombre négatif, lorsqu'on a

$$\zeta_n > z > \zeta_{n-1} , \ \zeta_{n-2} > z > \zeta_{n-3} , \ldots .$$

Donc

$$\int_a^b [\Omega(z) - \varphi(z)]dz = \int_n (\Omega(z) - \varphi(z)) = \int_n \Omega(z),$$

car

$$\int_n \varphi(z) = 0.$$

Or pour toute autre expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

on a

$$\int_a^b [\Omega(z) - \Phi(z)]\, dz > \int_n (\Omega(z) - \Phi(z)) = \int_n \Omega(z).$$

Les recherches de §§ 5 et 6 peuvent aussi être liées à un problème sur la représentation approximative des fonctions, si l'on posera comme auparavant

$$-1 \leqq f(z) \leqq +1,$$

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 0\,, \;\ldots\,,\; \alpha_n = 0.$$

Posons, que l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

doit représenter approximativement une fonction $\Omega(z)$ dans l'intervalle de $z = a$ jusqu'à $z = v$ et zéro dans l'intervalle de $z = v$ jusqu'à $z = b$.

En mesurant l'erreur de cette représentation par la somme

$$\int_a^v [\Omega(z) - \Phi(z)]\, dz + \int_v^b [\Phi(z)]\, dz$$

nous parvenons au problème: trouver les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

de telle manière, que la somme

$$\int_a^v [\Omega(z) - \Phi(z)]\, dz + \int_v^b [\Phi(z)]\, dz$$

soit la plus petite.

Nous allons donner la solution de ce problème sous la forme du théorème suivant pour le cas, où les expressions

$$\Omega(u_1)\,,\quad \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1(u_2) \\ \Omega(u_1)\,, & \Omega(u_2) \end{vmatrix}\,,\quad \begin{vmatrix} \lambda_1(u_1)\,, & \lambda_1(u_2)\,, & \lambda_1(u_3) \\ \lambda_2(u_1)\,, & \lambda_2(u_2)\,, & \lambda_2(u_3) \\ \Omega(u_1)\,, & \Omega(u_2)\,, & \Omega(u_3) \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

n'obtiennent pas des valeurs négatives, quels que soient les nombres

$$u_1\,,\, u_2\,,\, \ldots,\, u_{n+1},$$

assujettis aux inégalités

$$a \leqq u_1 < u_2 < \ldots < u_n < u_{n+1} \leqq b.$$

Théorème 4.

Si v ne se confond avec aucun des nombres susdits

$$\zeta_1\,,\, \zeta_2\,,\, \ldots,\, \zeta_n,$$

il existe d'autres nombres

$$\theta_1\,,\, \theta_2\,,\, \ldots,\, \theta_n$$

satisfaisant aux inégalités

$$a < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_k < v < \theta_{k+1} < \ldots < \theta_n < b$$

et aux équations

$$\int_a^{\theta_1} \lambda_i(z)dz - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda_i(z)dz + \ldots \pm \int_{\theta_k}^{v} \lambda_i(z)dz \mp \int_v^{\theta_{k+1}} \lambda_i(z)dz \ldots \pm \int_{\theta_n}^{b} \lambda_i(z)dz = 0,$$

où l'on a $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Or, la somme considérée

$$\int_a^v [\Omega(z) - \Phi(z)]dz + \int_v^b [\Phi(z)]dz$$

atteint le minimum dans le cas, où les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de l'expression

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z)$$

sont déterminés par les équations

$$\begin{aligned}
&p_1\lambda_1(\theta_1) \quad + p_2\lambda_2(\theta_1) \quad + \ldots + p_n\lambda_n(\theta_1) \quad = \Omega(\theta_1),\\
&p_1\lambda_1(\theta_2) \quad + p_2\lambda_2(\theta_2) \quad + \ldots + p_n\lambda_n(\theta_2) \quad = \Omega(\theta_2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_1\lambda_1(\theta_k) \quad + p_2\lambda_2(\theta_k) \quad + \ldots + p_n\lambda_n(\theta_k) \quad = \Omega(\theta_k),\\
&p_1\lambda_1(\theta_{k+1}) + p_2\lambda_2(\theta_{k+1}) + \ldots + p_n\lambda_n(\theta_{k+1}) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_1\lambda_1(\theta_n) \quad + p_2\lambda_2(\theta_n) \quad + \ldots + p_n\lambda_n(\theta_n) \quad = 0;
\end{aligned}$$

ce minimum est égal à

$$\int_{\theta_k}^{v}\Omega(z)dz - \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k}\Omega(z)dz + \ldots + (-1)^k\int_a^{\theta_1}\Omega(z)dz.$$

Et lorsqu'on a

$$v = \zeta_k,$$

l'expression cherchée

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_1(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z),$$

donnant à la somme

$$\int_a^v[\Omega(z) - \Phi(z)]dz + \int_v^b[\Omega(z)]dz$$

la plus petite valeur

$$\int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k}\Omega(z)dz - \int_{\zeta_{k-2}}^{\zeta_{k-1}}\Omega(z)dz + \ldots + (-1)^{k-1}\int_a^{\zeta_1}\Omega(z)dz,$$

se détermine par les équations

$$\Phi(\zeta_1) = \Omega(\zeta_1), \quad \Phi(\zeta_2) = \Omega(\zeta_2), \ \ldots, \ \Phi(\zeta_{k-1}) = \Omega(\zeta_{k-1}),$$

$$p_n = 0, \quad \Phi(\zeta_{k+1}) = 0, \quad \Phi(\zeta_{k+2}) = 0, \ \ldots, \ \Phi(\zeta_n) = 0.$$

§ 8. Passons enfin à une généralisation de la méthode d'interpolation, donnée par Tchébychef dans son mémoire *Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations.*

Pour ce but, nous introduisons dans nos recherches les fonctions

$$\psi_1(z) = \lambda_1(z),$$
$$\psi_2(z) = \lambda_2(z) + g_{1,2}\lambda_1(z),$$
$$\psi_3(z) = \lambda_3(z) + g_{2,3}\lambda_2(z) + g_{1,3}\lambda_1(z),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_n(z) = \lambda_n(z) + g_{n-1,n}\lambda_{n-1}(z) + \ldots + g_{2,n}\lambda_2(z) + g_{1,n}\lambda_1(z),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

en déterminant les coefficients

$$g_{n-1,n}\,,\ g_{n-2,n}\,,\ \ldots,\ g_{2,n}\,,\ g_{1,n}$$

par les équations

$$\int_0 \psi_n(z) = 0, \qquad \int_1 \psi_n(z) = 0\,,\ \ldots,\ \int_{n-2} \psi_n(z) = 0.$$

Ces équations se réduisent à celles-ci

$$\int_{n-2}\lambda_n(z) + g_{n-1,n}\int_{n-2}\lambda_{n-1}(z) = 0,$$
$$\int_{n-3}\lambda_n(z) + g_{n-1,n}\int_{n-3}\lambda_{n-1}(z) + g_{n-2,n}\int_{n-3}\lambda_{n-2}(z) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\int_1\lambda_n(z) + g_{n-1,n}\int_1\lambda_{n-1}(z) + \ldots + g_{2,n}\int_1\lambda_2(z) = 0,$$
$$\int_0\lambda_n(z) + g_{n-1,n}\int_0\lambda_{n-1}(z) + \ldots + g_{2,n}\int_0\lambda_2(z) + g_{1,n}\int_0\lambda_1(z) = 0,$$

les nombres

$$\int_{n-2}\lambda_{n-1}(z)\,,\ \int_{n-3}\lambda_{n-2}(z)\,,\ \ldots,\ \int_1\lambda_2(z)\,,\ \int_0\lambda_1(z)$$

étant différents de zéro.

La fonction $\psi_n(z)$ satisfait à l'équation

$$\int_m \psi_n(z) = 0$$

pour toutes les valeurs du nombre entier m, excepté $m = n - 1$.

Quant à

$$\int_{n-1} \psi_n(z),$$

il est facile de se convaincre, que ce symbole représente le maximum de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\psi_n(z)dz$$

aux conditions

$$-1 \leqq f(z) \leqq +1,$$

$$\int_a^b f(z)\psi_1(z)dz = \int_a^b f(z)\psi_2(z)dz = \ldots = \int_a^b f(z)\psi_{n-1}(z)dz = 0$$

et aussi dans le cas, où l'on a ajouté à ces conditions les suivantes

$$0 = \int_a^b f(z)\psi_{n+1}(z)\,dz = \int_a^b f(z)\psi_{n+2}(z)dz = \ldots.$$

Supposons maintenant, que pour une fonction de la forme

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_n\lambda_n(z),$$

dont les coefficients $p_1, p_2, \ldots, p_n$ restent inconnus, nous pouvons évaluer assez exactement l'intégrale

$$\int_\xi^\eta \Phi(z)dz,$$

quels que soient les nombres ξ et η compris entre a et b.

Alors, en représentant cette fonction sous la forme

$$\Phi(z) = q_1\psi_1(z) + q_2\psi_2(z) + \ldots + q_n\psi_n(z),$$

nous pouvons déterminer les coefficients $q_1, q_2, \ldots, q_n$ par les formules suivantes

$$q_1 \int_0 \psi_1(z) = \int_0 \Phi(z),$$

$$q_2 \int_1 \psi_2(z) = \int_1 \Phi(z),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$q_n \int_{n-1} \psi_n(z) = \int_{n-1} \Phi(z).$$

En généralisant de cette manière la méthode d'interpolation, donné par TCHÉBYCHEF dans le mémoire *Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données*, nous parvenons à la formule

$$\Phi(z) = \frac{\psi_1(z)\int\limits_0 \Phi(z)}{\int\limits_0 \psi_1(z)} + \frac{\psi_2(z)\int\limits_1 \Phi(z)}{\int\limits_1 \psi_2(z)} + \ldots + \frac{\psi_n(z)\int\limits_{n-1} \Phi_n(z)}{\int\limits_{n-1} \Phi_n(z)},$$

dont chaque membre se détermine indépendamment des autres.

Dans le cas traité par TCHÉBYCHEF on a

$$\lambda_1(z) = 1, \qquad \lambda_2(z) = z, \qquad \lambda_3(z) = z^2, \ \ldots, \ \lambda_n(z) = z^{n-1}, \ \ldots.$$

Par exemple, posons

$$a = 0, \qquad b = \pi,$$

$$\lambda_1(z) = 1, \qquad \lambda_2(z) = -\cos z, \qquad \lambda_3(z) = \cos 2z, \qquad \lambda_4(z) = -\cos 3z \quad \text{etc.}$$

Il est facile de se convaincre, que ces fonctions $\lambda(z)$ satisfont aux nos conditions.

Il est clair aussi, que le maximum de l'intégrale

$$\int\limits_0^\pi f(z) \cos z dz$$

à la condition

$$-1 \leqq f(z) \leqq +1$$

correspond au cas, où l'on a

$$\begin{array}{lll} +1 & \text{pour} & 0 < z < \frac{\pi}{2n}, \\ -1 & \text{»} & \frac{\pi}{2n} < z < \frac{3\pi}{2n}, \\ +1 & \text{»} & \frac{3\pi}{2n} < z < \frac{5\pi}{2n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^{n-1} & \text{pour} & \frac{(2n-3)\pi}{2n} < z < \frac{(2n-1)\pi}{2n}, \\ (-1)^n & \text{pour} & \frac{(2n-1)\pi}{2n} < z < \pi. \end{array}$$

Dans le même cas on a

$$\int_0^\pi f(z)\,dz = 0, \qquad \int_0^\pi f(z)\cos z\,dz = 0\,,\;\ldots,\; \int_0^\pi f(z)\cos(n-1)z\,dz = 0,$$

en vertu de la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos mz\,dz - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \cos mz\,dz + \ldots + (-1)^n \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\pi} \cos mz\,dz$$

$$= \frac{2}{m}\left\{\sin\frac{m\pi}{2n} - \sin\frac{3m\pi}{2n} + \sin\frac{5m\pi}{2n} - \ldots \pm \sin\frac{(2n-1)m\pi}{2n}\right\}.$$

En effet, il est évident de cette formule, que la somme algébrique

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos mz\,dz - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \cos mz\,dz + \ldots + (-1)^n \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\pi} \cos mz\,dz$$

se réduit à zéro pour toutes les valeurs positives de m, excepté

$$m = n\,,\; 3n\,,\; 5n\,,\ldots;$$

or, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos mz\,dz - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \cos mz\,dz + \ldots + (-1)^n \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\pi} \cos mz\,dz = \frac{2n}{m}(-1)^{\frac{m-n}{2n}},$$

si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier impair.

Par conséquent, la somme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos nz\,dz - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \cos nz\,dz + \ldots + (-1)^n \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\pi} \cos nz\,dz,$$

égale à 2, représente aussi le maximum de l'intégrale

$$\int_0^\pi f(z)\cos nz\,dz$$

dans le cas où outre les inégalités

$$-1 \leqq f(z) \leqq +1,$$

on a les égalités

$$\int_0^\pi f(z)dz = \int_0^\pi f(z)\cos z\,dz = \ldots = \int_0^\pi f(z)\cos(n-1)z\,dz = 0.$$

Donc, nous pouvons poser

$$\int_n \omega(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \omega(z)dz - \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} \omega(z)dz + \ldots \pm \int_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\pi} \omega(z)dz,$$

en multipliant notre symbole par ± 1.

Cela étant, on aura

$$\int_n \cos mz = 0$$

pour toutes les valeurs considérées de m, excepté

$$m = n,\ 3n,\ 5n,\ \ldots;$$

or, on aura

$$\int_n \cos mz = \frac{2n}{m}(-1)^{\frac{m-n}{2n}},$$

si $\frac{m}{n}$ est un nombre entier impair.

Enfin

$$\int_0^\pi dz = \pi \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \cos mz\,dz = 0$$

quel que soit le nombre entier m.

Passons aux fonctions

$$\begin{aligned}
&\psi_1(z) = 1,\\
&\psi_2(z) = \cos z + g_{1,2},\\
&\psi_3(z) = \cos 2z + g_{2,3}\cos z + g_{1,3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\psi_{n+1}(z) = \cos nz + g_{n,n+1}\cos(n-1)z + \ldots + g_{2,n+1}\cos z + g_{1,n+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

dont les coefficients

$$g_{1,2}\,,\ g_{2,3}\,,\ g_{1,3}\,,\ g_{3,4}\,,\ g_{2,4}\,,\ g_{1,4}\,,\ \ldots$$

doivent être déterminés conformément aux conditions

$$\int_0 \psi_{n+1}(z) = \int_1 \psi_{n+1}(z) = \int_2 \psi_{n+1}(z) = \ldots = \int_{n-1} \psi_{n+1}(z) = 0.$$

En considérant les cas particuliers les plus simples, on trouvera

$$\psi_1(z) = 1, \quad \psi_2(z) = \cos z, \quad \psi_3(z) = \cos 2z, \quad \psi_4(z) = \cos 3z + \frac{1}{3}\cos z$$

$$\psi_5(z) = \cos 4z, \quad \psi_6(z) = \cos 5z - \frac{1}{5}\cos z, \quad \psi_7(z) = \cos 6z + \frac{1}{3}\cos 2z$$

$$\psi_8(z) = \cos 7z + \frac{1}{7}\cos z, \quad \psi_9(z) = \cos 8z, \quad \psi_{10}(z) = \cos 9z + \frac{1}{3}\cos 3z$$

$$\psi_{11}(z) = \cos 10z - \frac{1}{5}\cos 2z, \quad \psi_{12}(z) = \cos 11z + \frac{1}{11}\cos z \text{ etc.}$$

Quant au cas général, on peut établir la formule

$$\psi_{n+1}(z) = \sum \frac{(-1)^h}{n'} \cos\frac{nz}{n'},$$

en désignant par n' tous les diviseurs impairs du nombre n, sans facteurs carrés, et par h le nombre des facteurs premiers de n' de la forme $4k+1$.

Pour le démontrer il faut et il suffit établir que la somme

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int_m \cos\frac{nz}{n'}$$

se réduit à zéro, si l'on a

$$m = 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \ldots,\ n-1.$$

Dans le cas de $m = 0$ et dans le cas, où le rapport $\frac{n}{m}$ ne se réduit à aucun nombre entier impair, toutes les expressions

$$\int_m \cos\frac{nz}{n'}$$

sont égales à zéro et par conséquent l'égalité

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int_m \cos \frac{nz}{n'} = 0$$

est évidente.

Or, si le rapport $\frac{n}{m}$ est égal à un nombre entier impair, il est facile de réduire notre somme

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int_m \cos \frac{nz}{n'}$$

à celle-ci

$$\frac{2m}{n} \sum (-1)^h (-1)^{\frac{n-mn'}{2mn'}},$$

en désignant par n' tous les diviseurs de $\frac{n}{m}$ sans facteurs carrés.

D'autre part on aura

$$(-1)^{\frac{n-mn'}{2mn'}} = (-1)^{\frac{n-m}{2m}} (-1)^{\frac{n'-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-m}{2m}} (-1)^{h_1},$$

en désignant par h_1 le nombre des diviseurs premiers de n' de la forme $4k+3$.

Il en résulte, que $h+h_1$ est égal au nombre de tous les diviseurs premiers de n', et par conséquent on a

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int_m \cos \frac{nz}{n'} = (-1)^{\frac{n-m}{2m}} \frac{2m}{n} (N_1 - N_2),$$

en désignant par N_1 le nombre des diviseurs de $\frac{n}{m}$, composés d'un nombre pair de facteurs premiers, et par N_2 le nombre des diviseurs de $\frac{n}{m}$, composés d'un nombre impair de facteurs premiers.

Il est important de retenir, que nous ne comptons pas l'unité au nombre des facteurs premiers et que conformément à cela le nombre des facteurs premiers de l'unité est égal à zéro.

En posant $m = n$, on trouve

$$N_1 = 1, \qquad N_2 = 0$$

et par conséquent

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int\limits_n \cos \frac{nz}{n'} = 2\,;$$

dans tous les autres cas on aura

$$N_1 - N_2 = 0.$$

De cette manière, nous nous avons persuadé que la somme

$$\sum \frac{(-1)^h}{n'} \int\limits_m \cos \frac{nz}{n'}$$

se réduit à zéro dans tous les cas, excepté le cas de $m = n$, lorsque cette somme est égale à 2.

Donc, on peut poser

$$\psi_{n+1}(z) = \sum \frac{(-1)^h}{n'} \cos \frac{nz}{n'}$$

et ensuite

$$2\,\Phi(z) = \frac{2}{\pi}\psi_1(z)\int\limits_0 \Phi(z) + \psi_2(z)\int\limits_1 \Phi(z) + \ldots + \psi_n(z)\int\limits_{n-1} \Phi(z)$$

quelle que soit la fonction

$$\Phi(z) = p_1 + p_2 \cos z + p_3 \cos 2z + \ldots + p_n \cos (n-1)z.$$

Par exemple dans le cas de $n = 4$ on aura

$$\Phi(z) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(z)\,dz + \frac{1}{2}\cos z \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(z)\,dz - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Phi(z)\,dz \right\}$$

$$+ \frac{1}{2}\cos 2z \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Phi(z)\,dz - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \Phi(z)\,dz + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \Phi(z)\,dz \right\}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\cos 3z + \frac{1}{3}\cos z\right) \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \Phi(z)\,dz - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(z)\,dz + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \Phi(z)\,dz - \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \Phi(z)\,dz \right\},$$

En faisant maintenant

$$a = 0, \qquad b = \pi$$

nous pouvons prendre aussi

$$\lambda_1(z) = \sin z, \quad \lambda_2(z) = -\sin 2z, \quad \lambda_3(z) = \sin 3z, \quad \lambda_4(z) = -\sin 4z, \;\ldots.$$

Dans ce cas, lequel au moyen de la substitution

$$h \cos z = x,$$

se réduit au cas traité par TCHÉBYCHEF, il n'est pas difficile d'établir les formules

$$\int_n \omega(z) = \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \omega(z)dz - \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{2\pi}{n+1}} \omega(z)dz + \ldots + (-1)^n \int_{\frac{n\pi}{n+1}}^{\pi} \omega(z)dz,$$

$$\int_{m-1} \sin nz = \frac{2m}{n}, \text{ lorsque } \frac{n}{m} \text{ est un nombre entier impair,}$$

$$\int_{m-1} \sin nz = 0 \text{ dans tous les autres cas}$$

et enfin

$$\psi_n(z) = \sum \frac{(-1)^k}{n'} \sin \frac{nz}{n'},$$

en désignant par n' tous les diviseurs impairs de n sans facteurs carrés et par k le nombre des facteurs premiers de n'.

§ 9. Dans tous nos recherches, le système des fonctions

$$\lambda_1(z), \lambda_2(z), \lambda_3(z), \ldots$$

a été assujetti à certaines inégalités.

Cependant on peut étendre plusieurs de nos résultats à certains cas, où les inégalités mentionnées ci-dessus n'ont pas lieu.

En posant par exemple

$$a = 0, \qquad b = 2\pi,$$

$$\lambda_1(z) = 1, \quad \lambda_2(z) = \sin z, \quad \lambda_3(z) = \cos z, \quad \lambda_4(z) = \sin 2z, \quad \lambda_5(z) = \cos 2z, \ldots$$

et en général

$$\lambda_{2k}(z) = \sin kz, \qquad \lambda_{2k+1}(z) = \cos kz,$$

il est facile de voir, que le maximum de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} f(z) \sin kz\, dz$$

à la condition

$$-1 \leqq f(z) \leqq +1$$

correspond à la fonction $f(z)$ maintenant les valeurs constantes:

$$\begin{array}{lll}
+1 & \text{pour} & 0 < z < \frac{\pi}{k}, \\
-1 & \text{»} & \frac{\pi}{k} < z < \frac{2\pi}{k}, \\
+1 & \text{»} & \frac{2\pi}{k} < z < \frac{3\pi}{k}, \\
\dots & \dots & \dots \\
+1 & \text{»} & \frac{(2k-2)\pi}{k} < z < \frac{(2k-1)\pi}{k}, \\
-1 & \text{»} & \frac{(2k-1)\pi}{k} < z < 2\pi.
\end{array}$$

En déterminant de cette manière la fonction $f(z)$, on aura en même temps

$$\int_0^{2\pi} f(z) \cos mz\, dz = 0,$$

quel que soit le nombre entier m, et

$$\int_0^{2\pi} f(z) \sin mz\, dz = \frac{4k}{m},$$

si $\frac{m}{k}$ est un nombre entier impair, et enfin

$$\int_0^{2\pi} f(z) \sin mz\, dz = 0$$

dans tous les autres cas, lorsque m est un nombre entier et $\frac{m}{k}$ n'est aucun nombre entier impair.

Par conséquent, la somme

$$\int_0^{\frac{\pi}{k}} \sin kz\,dz - \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{2\pi}{k}} \sin kz\,dz + \int_{\frac{2\pi}{k}}^{\frac{3\pi}{k}} \sin kz\,dz - \ldots - \int_{\frac{(2k-1)\pi}{k}}^{2\pi} \sin kz\,dz,$$

égale à 4, sera aussi le maximum de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} f(z) \sin kz\,dz$$

dans le cas, où la fonction $f(z)$ est assujettie non seulement aux inégalités

$$-1 \leqq f(z) \leqq 1,$$

mais aussi aux égalités

$$\int_0^{2\pi} f(z)\lambda_1(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z)\lambda_2(z)dz = \ldots = \int_0^{2\pi} f(z)\lambda_{2k-1}(z)dz = 0.$$

Pareillement, il est facile de se convaincre, que la somme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2k}} \cos kz\,dz - \int_{\frac{\pi}{2k}}^{\frac{3\pi}{2k}} \cos kz\,dz + \ldots + \int_{\frac{(4k-1)\pi}{2k}}^{2\pi} \cos kz\,dz,$$

égale à 4, est le maximum de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} f(z) \cos kz\,dz$$

aux conditions

$$-1 \leqq f(z) \leqq +1,$$

$$\int_0^{2\pi} f(z)\lambda_1(z)dz = \int_0^{2\pi} f(z)\lambda_2(z)dz = \ldots = \int_0^{2\pi} f(z)\lambda_{2k}(z)dz = 0.$$

En posant conformément à cela

$$\int_0 \omega(z) = \int_0^{2\pi} \omega(z)dz,$$

$$\int_{2k-1} \omega(z) = \int_0^{\frac{\pi}{k}} \omega(z)dz - \int_{\frac{\pi}{k}}^{\frac{2\pi}{k}} \omega(z)dz + \ldots - \int_{\frac{(2k-1)\pi}{k}}^{2\pi} \omega(z)dz,$$

$$\int_{2k} \omega(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2k}} \omega(z)dz - \int_{\frac{\pi}{2k}}^{\frac{3\pi}{2k}} \omega(z)dz + \ldots + \int_{\frac{(4k-1)\pi}{2k}}^{2\pi} \omega(z)dz,$$

on aura

$$\int_{2k} \sin mz = 0, \qquad \int_{2k-1} \cos mz = 0,$$

quels que soient les nombres entiers positifs m,

$$\int_{2k-1} \sin mz = \frac{4k}{m} \quad \text{et} \quad \int_{2k} \cos mz = (-1)^{\frac{m-k}{2k}} \frac{4k}{m},$$

si $\frac{m}{k}$ est un entier impair, et enfin

$$\int_{2k-1} \sin mz = \int_{2k} \cos mz = 0$$

dans les autres cas, lorsque m est un nombre entier et $\frac{m}{k}$ n'est aucun nombre entier impair.

Cela étant etabli, nous posons

$$\psi_1(z) = \frac{4}{2\pi},$$

$$\psi_{2k}(z) = \sum \frac{(-1)^g}{k'} \sin \frac{kz}{k'},$$

$$\psi_{2k+1}(z) = \sum \frac{(-1)^h}{k'} \cos \frac{kz}{k'},$$

en désignant par k' les diviseurs impairs de k sans facteurs carrés, par g le nombre des facteurs premiers de k', et enfin par h le nombre des facteurs premiers de k' de la forme $4i+1$.

Alors on aura

$$\int_{n-1} \psi_n(z) = 4$$

et tous les autres symboles

$$\int_0 \psi_n(z)\,, \int_1 \psi_n(z)\,, \int_2 \psi_n(z)\,, \ldots$$

seront égals à zéro.

Il en résulte que pour chaque fonction $\Phi(z)$ de la forme

$$\Phi(z) = p_1 + p_2 \sin z + p_3 \cos z + p_4 \sin 2z + \ldots,$$

nous pouvons établir la formule

$$4\Phi(z) = \psi_1(z)\int_0 \Phi(z) + \psi_2(z)\int_1 \Phi(z) + \psi_3(z)\int_2 \Phi(z) + \ldots,$$

dont tous les membres se déterminent indépendamment l'un de l'autre.

Voilà les premiers membres de cette formule

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(z)dz + \frac{1}{4}\sin z\left\{\int_0^{\pi} \Phi(z)dz - \int_{\pi}^{2\pi} \Phi(z)dz\right\}$$

$$+ \frac{1}{4}\cos z\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(z)dz - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \Phi(z)dz + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \Phi(z)dz\right\}$$

$$+ \frac{1}{4}\sin 2z\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(z)dz - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Phi(z)dz + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \Phi(z)dz - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \Phi(z)dz\right\}$$

$$+ \frac{1}{4}\cos 2z\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \Phi(z)dz - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \Phi(z)dz + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \Phi(z)dz - \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \Phi(z)dz + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \Phi(z)dz\right\}$$

etc.