SUR LES CARACTÈRES DE CONVERGENCE DES SÉRIES A TERMES POSITIFS ET SUR LES FONCTIONS INDÉFINIMENT CROISSANTES

PAR

J. HADAMARD

à BORDEAUX

1. Après avoir établi que dans une série à termes positifs

$$S = \sum^{\infty} u_n \tag{1}$$

le produit nu_n ne pouvait rester fini sans qu'il y eût divergence, les géomètres ont pu chercher pour la convergence d'une telle série une condition nécessaire et suffisante de la forme

$$\lim_{n=\infty} u_n \varphi(n) = 0. \tag{2}$$

ABEL a demontré qu'une pareille condition ne saurait être formée, et cela par le théorème suivant:

Il n'existe pas de fonction $\varphi(n)$ telle que la série à termes positifs[1] $\sum^{\infty} u_n$ *soit nécessairement convergente si le produit $u_n \varphi(n)$ tend vers* 0 *pour n infini, et nécessairement divergente si ce produit conserve une valeur finie.*

Il importe de remarquer que la formation même d'une fonction $\varphi(n)$ satisfaisant aux conditions de cet énoncé ne donnerait pas un caractère nécessaire et suffisant de convergence. En effet le produit $u_n \varphi(n)$ peut

[1] Comme il s'agit exclusivement, dans ce qui suit, de séries à termes positifs, nous négligerons désormais de mentionner cette restriction.

Acta mathematica. 18. Imprimé le 13 septembre 1894.

ne vérifier aucune des deux hypothèses précédentes: il peut osciller sans tendre vers aucune limite, la limite inférieure d'indétermination étant o.

En tenant compte de cette remarque, on constate, comme l'a fait voir M. PRINGSHEIM,[1] qu'une égalité de la forme (2) ne peut même pas donner une condition *nécessaire* de convergence (sauf, bien entendu, si $\varphi(n)$ n'est pas infini). C'est ainsi, par exemple, qu'on peut trouver une série convergente ayant une infinité de termes communs avec la série harmonique: il suffit que les indices de ces termes soient en progression géométrique, les termes intermédiaires étant ceux d'une série convergente quelconque.

Comme cependant ces cas d'oscillation ne se présentent pas dans la plupart des applications, nous nous en tiendrons au point de vue d'ABEL. Le théorème précédemment énoncé revient au fond à celui-ci: *Si peu divergente que soit une série, on peut multiplier ses termes successifs par des nombres infiniment petits sans troubler la divergence.*

DU BOIS REYMOND[2] a complété ce théorème par le suivant:

Si peu convergente que soit une série, on peut multiplier ses termes par des nombres indéfiniment croissants sans troubler la convergence.

Il est à remarquer que ce dernier donne la réponse à une question analogue à celle que s'est posée ABEL. On en déduit en effet qu'*il n'existe pas de fonction $\varphi(n)$ telle que la série $\sum^{\infty} u_n$ soit nécessairement divergente si le produit $\varphi(n)u_n$ augmente indéfiniment, et nécessairement convergente si ce produit reste fini.*

2. Les théorèmes précédents reviennent au fond à cette remarque:

On peut toujours trouver une série plus lentement convergente qu'une série convergente donnée et une série plus lentement divergente qu'une série divergente donnée.

---

[1] *Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern,* Math. Annalen, t. 35, p. 344—350; 1890.

[2] *Über Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern,* Crelle's Journal, t. 76, p. 85; 1873.

Sous cette forme ils sont pour ainsi dire intuitifs. M. PRINGSHEIM a même donné une méthode générale pour former, avec un certain degré d'arbitraire, des séries de plus en plus lentement convergentes ou divergentes.

Si l'on n'a en vue que l'existence de ces séries, on peut particulariser la valeur de l'exposant ρ qui figure dans ses recherches (ou de l'exposant analogue μ de DU BOIS-REYMOND) et réduire la démonstration à la forme simple suivante:

Théorème (a). *Si peu divergente que soit une série, on peut toujours multiplier ses termes successifs par les valeurs correspondantes d'une quantité infiniment décroissante* $\frac{1}{P(n)}$ *de façon à former une nouvelle série elle-même divergente.*

En effet la somme S_n des n premiers termes de la série (1) augmentera indéfiniment avec n et l'on aura $u_n = S_{n+1} - S_n$.

En multipliant u_n par la quantité (infiniment petite pour n infini) $\frac{1}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n+1}}}$, on aura donc la série divergente $\Sigma(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$.

Théorème (A). *Il n'existe pas de fonction* $\varphi(n)$ *telle que la série* (1) *soit nécessairement convergente si le produit* $u_n\varphi(n)$ *tend vers* 0 *et nécessairement divergente si ce produit reste supérieur à un nombre fixe.*

Car si $\varphi(n)$ jouit de la seconde propriété, la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ est divergente et nous pouvons multiplier ses termes par des nombres infiniment petits sans la rendre convergente. La première propriété n'est donc pas vérifiée.

Théorème (b). *Si peu convergente que soit une série, on peut multiplier ses termes par les valeurs correspondantes d'une quantité* Q_n *indéfiniment croissante sans troubler la convergence.*

En effet le reste r_n tendra vers 0, et la série pourra s'écrire

$$\Sigma u_n = \Sigma(r_n - r_{n+1}).$$

En multipliant u_n par la quantité indéfiniment croissante $\frac{1}{\sqrt{r_n}+\sqrt{r_{n+1}}}$, on obtiendra donc la nouvelle série convergente $\Sigma(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}})$.

Théorème (B). *Il n'existe pas de fonction $\varphi(n)$ telle que la série Σu_n soit nécessairement convergente si le produit $\varphi(n)u_n$ reste fini et nécessairement divergente si ce produit augmente indéfiniment.*

En effet, si $\varphi(n)$ jouit de la première propriété, la série $\sum\frac{1}{\varphi(n)}$ est convergente et nous pourrons multiplier ses termes par des nombres infiniment croissants sans la rendre divergente. La fonction $\varphi(n)$ ne satisfait donc pas à la seconde condition.

3. Nous avons particularisé, dans la démonstration des théorèmes (a) et (b), la méthode de formation des nouvelles séries remplissant les conditions des énoncés. On peut au contraire laisser à cette formation toute la généralité possible.

Dans le premier cas (théorème (a)), les deux séries, au lieu d'être liées par la relation

$$S'_n = \sqrt{S_n},$$

où S'_n est la quantité analogue à S_n formée dans la seconde série, pourront être liées par une relation quelconque de la forme

$$S'_n = V(S_n),$$

ou $V(x)$ sera une fonction infinie lorsque x est infini, mais dont la dérivée devient en même temps nulle. Car alors on aura bien

$$\frac{u'_n}{u_n}=\frac{S'_n-S'_{n-1}}{S_n-S_{n-1}}=V'(\Sigma), \qquad S_{n-1}<\Sigma<S_n$$

et par conséquent $\frac{u'_n}{u_n}=0$, pour $n=\infty$.

Pourra d'ailleurs être prise pour fonction V la fonction inverse de toute fonction continue et constamment croissante qui augmente indéfiniment aussi que sa dérivée lorsque x augmente indéfiniment, comme c'est le cas pour x^ρ (si $\rho>1$), pour e^x, pour $e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}}$ etc. C'est ainsi que x^ρ (avec $\rho<1$),

$\log x$, $\log.\log\ldots\log x$ donnent des types de fonctions V, ceux-là même qui ont été utilisés par M. PRINSGHEIM.

Dans le second cas, celui du théorème (b), au lieu de définir la nouvelle série par la relation

$$r'_n = \sqrt{r_n},$$

on pourra prendre

$$r'_n = V(r_n)$$

où $V(x)$ sera une fonction qui s'annulle avec x pendant que sa dérivée devient infinie pour la même valeur de la variable, autrement dit, l'inverse d'une fonction nulle ainsi que sa dérivée pour $x = 0$ (par exemple de x^ρ, pour $\rho > 1$, de $e^{-\frac{1}{x}}$, etc.).

Moyennant cette condition, le rapport

$$\frac{u'_n}{u_n} = \frac{r'_n - r'_{n+1}}{r_n - r_{n+1}} = V'(R), \qquad (r_{n+1} < R < r_n)$$

sera bien infini avec n.

4. Pour toute série donnée, on peut former, comme nous l'avons dit, les fonctions $P(n)$ ou $Q(n)$ des théorèmes (a), (b). Mais, une fonction indéfiniment croissante quelconque étant donnée, on peut toujours trouver une série assez peu divergente (ou convergente) pour que la fonction ne puisse pas être prise pour la fonction $P(n)$ (ou $Q(n)$). On a en effet la proposition suivante, aussi implicitement contenue dans les résultats de MM. DU BOIS-REYMOND et PRINGSHEIM.

Théorème (c). *Une fonction indéfiniment croissante quelconque $F(n)$ étant donnée, on peut trouver deux séries, l'une convergente, l'autre divergente, telles que le rapport des termes correspondants soit $F(n)$.*

Supposons en effet la fonction F constamment croissante et appliquons à la série $\sum_n^\infty \left(\frac{1}{F(n-1)} - \frac{1}{F(n)}\right)$ le théorème (b). Nous aurons une fonction indéfiniment croissante $Q(n-1)$ telle que la série

$$\sum\left[Q(n-1)\left(\frac{1}{F(n-1)} - \frac{1}{F(n)}\right)\right] = \sum\left[\frac{Q(n-1)}{F(n-1)} - \frac{Q(n)}{F(n)}\right] + \sum\left[\frac{Q(n) - Q(n-1)}{F(n)}\right]$$

soit convergente.

Or la série $\sum\left[\frac{Q(n-1)}{F(n-1)}-\frac{Q(n)}{F(n)}\right]$ peut être supposée convergente, car on peut faire croître Q aussi lentement qu'on veut, et en particulier plus lentement que F. Dans ces conditions, les deux séries $\sum(Q(n)-Q(n-1))$ et $\sum\frac{Q(n)-Q(n-1)}{F(n)}$ répondent a la question.

5. Nous avons supposé que la fonction F était constamment croissante. On peut en effet ramener le cas le plus général à celui-là en remplaçant la fonction F par une autre constamment croissante qui lui soit toujours au plus égale. Pour cela, après avoir représenté la suite des valeurs de $F(n)$ par des points ayant ces valeurs pour ordonnées et les valeurs correspondantes de n pour abscisses, il suffira d'entourer inférieurement cette figure d'une sorte de polygone de NEWTON analogue à celui que j'ai utilisé dans un travail précédent,[1] avec cette seule différence que ce polygone ne sera pas assujetti à la condition d'être convexe, mais seulement de n'avoir aucun côté à coefficient angulaire négatif.

Analytiquement, cela s'exprimera ainsi: la fonction F, étant infinie pour n infini, doit prendre une valeur $u_0 = F(n_0)$ plus petite que toutes les autres. De $n = 0$ à $n = n_0$, nous remplacerons les valeurs de F par d'autres qui aillent constamment en croissant et dont la dernière soit u_0. Soit ensuite $u_1 = F(n_1)$ la plus petite des valeurs de F correspondantes à $n > n_0$; de $n = n_0$ à $n = n_1$, nous remplacerons les valeurs de F par d'autres constamment croissantes de u_0 à u_1, par conséquent au plus égales aux valeurs données, et ainsi de suite.

Si nous voulons que F soit croissant au sens le plus strict du mot, c'est-à-dire ne puisse jamais rester constante pour une série de valeurs de n, il faudra, lorsque à une même valeur u_i correspondent plusieurs valeurs de n, avoir soin de prendre pour n_i la plus grande de ces dernières.

Ayant ainsi déterminé une fonction auxiliaire F' toujours au plus égale à F, mais croissante, nous pourrons opérer comme il a été dit sur cette dernière fonction. Quand nous aurons formé la série convergente

[1] *Etude sur les propriétés des fonctions entières*, Journal de Liouville, 4[e] série, tome 9, p. 174; 1893.

Σu_n telle que $\Sigma u_n F'(n)$ soit divergente, la série $\Sigma u_n F(n)$ le sera à plus forte raison.

6. Si d'une série convergente (ou divergente) on en déduit une seconde plus lentement convergente (ou divergente) que la première, de celle-ci une troisième, et aussi de suite, on peut obtenir une infinité de séries pourrant servir à juger par comparaison de la convergence ou de la divergence d'une série donnée.

C'est à cette classe de caractères qu'appartient le critérium dit *logarithmique* établi par MM. Bertrand et Bonnet, et dans lequel on avait cru voir une règle de convergence applicable à tous les cas. MM. Du Bois-Reymond [1] et Pringsheim [2] ont réfuté cette erreur et formé des séries tant convergentes que divergentes pour laquelles le critérium logarithmique ne donnait aucun résultat.

7. Cette insuffisance n'est point particulière au critérium logarithmique. Nous allons constater qu'il ne faut pas plus espérer obtenir un critérium général à l'aide d'une infinité de séries de comparaison qu'à l'aide d'une seule.

Prenant, par exemple, en premier lieu, le cas de la divergence, nous allons démontrer qu'*étant donnée une infinité de séries divergentes, on peut former une nouvelle série divergente ayant ses termes à la longue plus petits et même infiniment plus petits que n'importe quelle des premières.*

Toutefois nous avons une restriction indispensable à faire; car on peut trouver deux séries divergentes telles que toute série ayant ses termes plus petits que les termes correspondants de chacune de ces deux soit nécessairement convergente. Il suffira, par exemple, de prendre comme termes de rang pair, dans la première série, les termes successifs d'une série divergente, comme termes de rang impair ceux d'une série convergente et de faire l'inverse dans la seconde série. Nous supposerons en conséquence que la suite des termes qui se correspondent dans les séries successives soit constamment décroissante, de sorte que l'énoncé à démontrer sera le suivant:

---

[1] Du Bois-Reymond, loc. cit., p. 88—91.

[2] Pringsheim, loc. cit., p. 351—355.

Théorème (α). *Etant données des séries divergentes*

$$S^{(1)} = u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \dots + u_n^{(1)} + \dots,$$
$$S^{(2)} = u_0^{(2)} + u_1^{(2)} + \dots + u_n^{(2)} + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S^{(P)} = u_0^{(P)} + u_1^{(P)} + \dots + u_n^{(P)} + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

en nombre infini, et telles que, pour une même valeur de n, les $u_n^{(P)}$ aillent en décroissant quand P augmente, on peut toujours trouver une série plus lentement divergente que n'importe laquelle des premières, et cela de manière que le rapport des termes correspondants tende vers o.

Soit en effet $S_n^{(P)}$ la somme des n premiers termes de la série $S^{(P)}$, laquelle va en augmentant indéfiniment avec n. Prenons une suite de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_P, \dots$ indéfiniment croissants et nommons n_1 la plus petite valeur de n telle que $S_n^{(1)} \geqq \alpha_1$; n_2 la plus petite valeur de n (au moins égale à n_1), telle que $S_n^{(2)} \geqq \alpha_2$; en général, n_P la plus petite valeur de n telle que $S_n^{(P)} \geqq \alpha_P$.

Nous poserons, tout d'abord, pour $n < n_1$,

$$w_n = u_n^{(1)}.$$

Puis l'inégalité

$$S_{n_2}^{(2)} - S_{n_1}^{(1)} < S_{n_2}^{(1)} - S_{n_1}^{(1)}$$

nous montre que la différence $S_{n_2}^{(2)} - S_{n_1}^{(1)}$ peut être décomposée en $n_2 - n_1$ parties plus petites respectivement que $u_{n_1}^{(1)}, u_{n_1+1}^{(1)}, \dots, u_{n_2-1}^{(1)}$. Ce sont ces parties que nous prendrons pour valeurs successives de w_n, de $n = n_1$ à $n = n_2$ exclusivement.

En général, nous remarquerons que l'on a

$$S_{n_{P+1}}^{(P+1)} - S_{n_P}^{(P)} < S_{n_{P+1}}^{(P)} - S_{n_P}^{(P)}$$

et nous diviserons le premier membre en $n_{P+1} - n_P$ parties $w_{n_P}, w_{n_P+1}, \dots, w_{n_{P+1}}$ respectivement inférieures aux parties $u_{n_P}^{(P)}, u_{n_P+1}^{(P)}, \dots, u_{n_{P+1}-1}^{(P)}$ du second.

La série Σw_n ainsi constituée satisfait bien aux conditions de l'énoncé. Elle est manifestement divergente, puisque parmi les valeurs successives de la somme de ses n premiers termes se trouvent les valeurs $S_{n_1}^{(1)}$, $S_{n_2}^{(2)}$, $\ldots$, $S_{n_P}^{(P)}$, $\ldots$, respectivement supérieures à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_P, \ldots$ et par suite indéfiniment croissantes. D'ailleurs, à partir de $n = n_P$, on a bien $w_n < u_n^{(P)}$.

8. Si toutefois le rapport $\frac{w_n}{u_n^{(P)}}$ ne tendait pas vers o, il suffirait d'appliquer à la série w_n le théorème (a). Mais cette dernière particularité ne peut se produire que dans les cas peu intéressants où le rapport $\frac{u_n^{(P)}}{u_n^{(q)}}$ $(q > P)$ n'augmente pas indéfiniment. D'ailleurs on peut toujours écarter cette hypothèse en multipliant (ce qui est évidemment indifférent dans la question actuelle) chaque série $S^{(P)}$ par un nombre déterminé, mais variable avec P et tendant vers o quand P augmente indéfiniment.

9. **Théorème** ($\mathfrak{A}$). *Il est impossible de trouver une suite infinie de fonctions $\varphi^{(1)}(n)$, $\varphi^{(2)}(n)$, $\ldots$, $\varphi^{(P)}(n)$, $\ldots$ telles que la serie Σu_n soit nécessairement convergente si, quel que soit P, le produit $u_n \varphi^{(P)}(n)$ tend vers* o *pour n infiniment grand, et nécessairement divergente si, à partir d'une certaine valeur de P, ce même produit reste supérieur à un nombre fixe quand n augmente indéfiniment. Du moins, ces fonctions ne peuvent exister sous la condition que $\varphi^{(P)}(n)$ soit constamment croissant avec P, quand n reste invariable.*[1]

En effet si les fonctions $\varphi^{(P)}(n)$ vérifiaient la seconde condition de

---

[1] Le cas où les fonctions $\varphi^{(P)}(n)$ ne rempliraient pas cette dernière condition n'offre évidemment aucun intérêt. En effet remplaçons chaque valeur $\varphi^{(P)}(n)$ par la plus grande valeur que prenne $\varphi^{(p)}(n)$ pour $p \leqq P$. Si les séries $\sum \frac{1}{\varphi^{(P)}(n)}$ restent encore toutes divergentes, on est ramené au cas traité dans le texte. Si au contraire, pour une certaine valeur P_0 de P, on a une série convergente σ, les fonctions $\varphi^{(P)}$ ne pourront pas servir à juger de la convergence d'une série moins convergente que σ, puisqu'alors le produit $u_n \varphi^{(P)}(n)$ devra, pour une même valeur de n, prendre une infinité de valeurs infiniment petites (sans quoi la série Σu_n serait divergente à cause de la divergence de $\sum \frac{1}{\varphi^{(P)}(n)}$) et une infinité de valeurs supérieures à un nombre déterminé quelconque (sans quoi la série Σu_n serait au moins aussi convergente que σ).

l'énoncé, les séries $\sum \frac{1}{\varphi^{(P)}(n)}$ seraient divergentes, et par suite on pourrait en déduire une série Σw_n encore divergente et telle que le rapport $\frac{w_n}{\left(\frac{1}{\varphi^{(P)}(n)}\right)}$ tende vers o, quel que soit P.

10. **Théorème** (β). *Etant données des séries convergentes*

$$S^{(1)} = u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + u_2^{(1)} + \ldots + u_n^{(1)} + \ldots,$$
$$S^{(2)} = u_0^{(2)} + u_1^{(2)} + u_2^{(2)} + \ldots + u_n^{(2)} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S^{(P)} = u_0^{(P)} + u_1^{(P)} + u_2^{(P)} + \ldots + u_n^{(P)} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en nombre infini et telles que, pour une même valeur de n, $u_n^{(P)}$ soit croissant avec P, on peut trouver une série plus lentement convergente que n'importe laquelle des premières, et cela de manière que le rapport des termes correspondants soit infini avec n.

Désignant par $r_n^{(P)}$ le reste de la $P^{\text{ième}}$ série arrêtée au $n^{\text{ième}}$ terme, prenons une suite de nombres positifs $\beta_2, \ldots, \beta_P, \ldots$ constamment et indéfiniment décroissants.

Soit n_2 un entier tel que $r_{n_2}^{(2)}$ soit au plus égal à β_2. Pour $n < n_2$, nous poserons $w_n = u_n^{(1)}$.

Soit ensuite n_3 un entier (nécessairement plus grand que n_2) satisfaisant aux deux conditions

$$r_{n_3}^{(3)} \leqq \beta_3; \qquad r_{n_3}^{(3)} - r_{n_3}^{(1)} < r_{n_2}^{(2)} - r_{n_2}^{(1)}$$

ce qui est possible puisque les premiers membres de ces deux inégalités tendent vers o pour n_3 infini. Nous pourrons diviser la différence $r_{n_2}^{(2)} - r_{n_3}^{(3)}$, plus grande que $r_{n_2}^{(1)} - r_{n_3}^{(1)} = u_{n_2}^{(1)} + u_{n_2+1}^{(1)} + \cdots + u_{n_3-1}^{(1)}$, en $n_3 - n_2$ parties $w_{n_2}, w_{n_2+1}, \ldots, w_{n_3-1}$ plus grandes respectivement que $u_{n_2}^{(1)}, u_{n_2+1}^{(1)}, \ldots, u_{n_3-1}^{(1)}$.

Nous appellerons ensuite n_4 un entier (nécessairement plus grand que n_3) satisfaisant aux conditions

$$r_{n_4}^{(4)} \leqq \beta_4; \qquad r_{n_4}^{(4)} - r_{n_4}^{(2)} < r_{n_3}^{(3)} - r_{n_3}^{(2)}$$

et, en général, ayant obtenu n_P, nous en déduirons n_{P+1} par les conditions

$$r_{n_{P+1}}^{(P+1)} \leqq \beta_{P+1}; \qquad r_{n_{P+1}}^{(P+1)} - r_{n_{P+1}}^{(P-1)} < r_{n_P}^{(P)} - r_{n_P}^{(P-1)},$$

après quoi nous pourrons diviser la différence $r_{n_P}^{(P)} - r_{n_{P+1}}^{(P+1)}$, plus grande que $r_{n_P}^{(P-1)} - r_{n_{P+1}}^{(P-1)}$, en $n_{P+1} - n_P$ parties $w_{n_P}, w_{n_P+1}, \ldots, w_{n_{P+1}-1}$, respectivement supérieures à $u_{n_P}^{(P-1)}, u_{n_P+1}^{(P-1)}, \ldots, u_{n_{P+1}-1}^{(P-1)}$.

Continuant ainsi indéfiniment, nous formerons une série Σw_n manifestement convergente (puisqu'elle se réduit à $S_{n_2}^{(2)} + (r_{n_2}^{(2)} - r_{n_3}^{(3)}) + (r_{n_3}^{(3)} - r_{n_4}^{(4)}) + \ldots$, les nombres $r_{n_P}^{(P)}$ tendant vers o) et dont les termes, à partir de $n = n_{P+1}$, seront plus grands que les termes correspondants de la série $S^{(P)}$.

Comme précédemment, si le rapport $\frac{w_n}{u_n^{(P)}}$ n'augmentait pas indéfiniment, on appliquerait à la série Σw_n le théorème (C), ou encore on prendrait la précaution de multiplier les termes de chaque série $S^{(P)}$ par un même nombre, lequel augmenterait indéfiniment avec P.

11. **Théorème** ($\mathfrak{B}$). *Il est impossible de trouver une suite infinie de fonctions $\varphi^{(1)}(n), \varphi^{(2)}(n), \ldots, \varphi^{(P)}(n)$ (la quantité $\varphi^{(P)}(n)$ étant, pour une valeur fixe de n, décroissante quand P augmente*[1]*), telles que la série Σu_n soit nécessairement divergente si le produit $u_n \varphi^{(P)}(n)$ augmente indéfiniment quel que soit P, et nécessairement convergente si, à partir d'une certaine valeur de P, ce produit reste fini.*

En effet si les fonctions $\varphi^{(P)}(n)$ possédaient la seconde propriété, les séries $\sum \frac{1}{\varphi^{(P)}(n)}$ seraient toutes convergentes, et dès lors le théorème précédent permettrait d'en déduire une nouvelle série convergente pour laquelle la première condition ne serait pas vérifiée.

12. Les questions résolues par les théorèmes (α) et (β) reviennent à très peu près à celle-ci: *Etant donnée une suite infinie de fonctions $f^{(P)}(n)$ augmentant indéfiniment, mais de plus en plus lentement, trouver une fonction $F(n)$ qui augmente indéfiniment plus lentement que chacune des premières.*

---

[1] Restriction justifiée par les mêmes considérations que la précédente relative au théorème ($\mathfrak{A}$).

Les fonctions données seraient $f^P(n) = S_n^{(P)}$ dans le théorème (α), $f^P(n) = \frac{1}{r_n^{(P)}}$ dans le théorème (β).

La solution est un peu plus simple que celles que nous avons présentées à propos de ces théorèmes; car les précautions que nous avons été obligés de prendre dans leur démonstration tiennent à ce que nous avions à trouver une fonction $F(n)$ satisfaisant pour n assez grand, non seulement à l'inégalité

$$F(n) < f^P(n),$$

mais à l'inégalité

$$F(n+1) - F(n) < f^P(n+1) - f^P(n)$$

dans le cas du théorème (α), et à l'inégalité

$$\frac{1}{F(n+1)} - \frac{1}{F(n)} > \frac{1}{f^P(n+1)} - \frac{1}{f^P(n)}$$

dans le cas du théorème (β).

Ici il suffira, ayant déterminé (comme il a été dit pour le théorème (α)) les entiers $n_1, n_2, \ldots, n_P, \ldots$ tels que $f^P(n_P)$ soit infini avec P, de poser $F(n) = f^P(n)$ pour $n_P \leqq n < n_{P+1}$, ou, plus généralement, de prendre pour valeurs de $F(n)$, entre $n = n_P$ et $n = n_{P+1}$, une suite croissante de $n_{P+1} - n_P$ termes allant de $f^P(n_P)$ à $f^{P+1}(n_{P+1})$.

13. Nous pourrons encore donner à notre procédé une forme un peu différente en imaginant que l'on ait défini la quantité $f^P(n)$ pour les valeurs non entières de P, ce qui se fera en prenant pour $f^P(n)$ une quantité continue par rapport à P, croissante avec n, mais constamment décroissante quand P croît sans que n varie, et coïncidant pour P entier avec les valeurs données, toutes conditions compatibles entre elles, si du moins chaque fonction f est constamment croissante. Notre règle pourra s'énoncer alors de la façon suivante:

Ayant pris arbitrairement une fonction indéfiniment croissante $\varphi(P)$ de la variable P, on déterminera pour chaque valeur de n une valeur de P par l'équation

$$f^P(n) = \varphi(P), \tag{3}$$

ce qui est possible, du moins pour n suffisamment grand, car alors le premier membre de l'équation précédente, lequel est décroissant, sera, pour $P = 0$, supérieur au second, qui est indéfiniment croissant.

D'ailleurs les nombres P ainsi définis iront en augmentant constamment, car l'égalité $f^P(n) = \varphi(P)$ donne forcément

$$f^p(n+1) > \varphi(p), \quad \text{pour} \quad p \leqq P.$$

Ils vont en augmentant indéfiniment, car, P_0 étant un nombre donné quelconque, dès que n aura été pris tel que $f^{P_0}(n)$ soit supérieur à $\varphi(P_0)$, le nombre P devra dépasser P_0.

Si donc on désigne par $F(n)$ la valeur commune des deux membres de l'équation (3), la fonction $F(n)$ augmentera indéfiniment plus lentement que chacune des proposées.

14. Il est à remarquer qu'ici F, contrairement à ce qui pouvait arriver dans notre procédé primitif, à partir du moment où elle est atteinte par une des f^P, croît *plus* lentement qu'elle, en ce sens que si, pour une certaine valeur de n, on a $F(n) = f^P(n)$, on aura nécessairement, pour toute valeur suivante, $F(n) < f^P(n)$, l'égalité étant exclue.

15. Pour résoudre le même problème, on peut aussi commencer par la résolution du suivant:

Etant donnée une suite infinie de fonctions $\psi^P(m)$ augmentant indéfiniment de plus en plus vite, trouver un fonction $\Psi(m)$ qui augmente indéfiniment plus vite que chacune des premières.

Il suffira manifestement de prendre

$$\Psi(m) \geqq \psi^\lambda(m), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, P) \tag{4}$$

P étant infini avec m.

On peut d'ailleurs s'arranger pour que Ψ soit constamment croissant, car les inégalités (4) ne sont pas incompatibles avec l'inégalité $\Psi(m) > \Psi(m-1)$.

L'application au problème précédemment posé est immédiate: on remplacera d'abord, s'il y a lieu, chaque fonction $f^P(n)$ par une fonction constamment croissante avec n, comme au n° 5, ce qui permettra de considérer les fonctions inverses $\psi^P(m)$. On formera, comme nous venons de le dire, la fonction Ψ, et son inverse remplira manifestement le but proposé.

Il est d'ailleurs clair que cette méthode revient au fond à la précédente, la relation entre m et P étant telle que m soit la partie entière de la quantité $\varphi(P)$ qui figure au n° 13.

16. Si, lorsque P augmente indéfiniment sans que n varie, $f^P(n)$ ne tend pas vers 0, mais vers une limite L_n, laquelle augmente indéfiniment avec n, le procédé du n° 13 ne peut pas donner toutes les fonctions qui repondent à la question, puisqu'alors la fonction F, empruntant successivement les valeurs des f^P, croît au moins aussi vite que L_n.

Mais on peut toujours supposer qu'il n'en est pas ainsi en multipliant, s'il y a lieu, comme précédemment (n° 8), chacune des fonctions f^P par un nombre positif indépendant de n et nul pour P infini. Admettons donc qu'il existe un nombre A tel que, pour une valeur quelconque de n, $f^P(n)$ devienne inférieur à A si P est suffisamment grand. Les f^P étant toujours supposés constamment croissants, notre procédé permet de représenter toute fonction F augmentant indéfiniment plus lentement que les f^P, pourvu bien entendu, qu'elle croisse toujours *plus* lentement que les fonctions qu'elle atteint successivement, comme il a été dit au n° 14.

En effet, moyennant ces conditions, $F(n)$ sera, pour n assez grand, compris entre A et $f^0(n)$, et par conséquent l'égalité

$$F(n) = f^P(n) \tag{5}$$

définit une certaine valeur de P que nous désignerons par P_n.

Ces valeurs P_n vont en croissant constamment, puisque l'égalité (5) a, par hypothèse, pour conséquence nécessaire

$$F(n+1) < f^P(n+1) < f^p(n+1), \qquad (p < P);$$

ils vont en croissant indéfiniment puisque, P étant un nombre quelconque, on a pour n suffisamment grand

$$F(n) < f^P(n) < f^p(n), \qquad (p < P).$$

Il nous suffira dès lors de considérer une fonction constamment croissante $\varphi(P)$ qui pour $P = P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$, prenne respectivement les valeurs $f^{P_1}(1), f^{P_2}(2), \dots, f^{P_n}(n), \dots$. En employant cette fonction φ dans les opérations du n° 13, ces opérations donneront précisément comme résultat la fonction proposée F.

Si la fonction F ne remplit pas la condition de ne coïncider qu'une fois au plus avec chaque f^P, les P_n ne sont pas constamment croissants: on peut les remplacer par une suite de nombres constamment croissants et au plus égaux aux premiers, d'après ce qui a été dit au n° 8. On obtient ainsi une fonction $\varphi(P)$ et la fonction F' correspondante est, pour chaque valeur de n, au moins égale à F, l'égalité ayant lieu pour une infinité de ces valeurs.

17. La fonction F augmente d'autant plus lentement que la fonction $\varphi(P)$ augmente elle-même plus lentement. Car si les deux fonctions $\varphi(P), \varphi_1(P)$ satisfont, pour P très grand, à l'inégalité $\varphi_1(P) < \varphi(P)$, les équations

$$f^{\mathrm{p}}(n) = \varphi(\mathrm{p}),$$
$$f^{\mathrm{p}_1}(n) = \varphi_1(\mathrm{p}_1)$$

donneront nécessairement $\mathrm{p}_1 > \mathrm{p}$ et par suite $f^{\mathrm{p}_1}(n) < f^{\mathrm{p}}(n)$.

18. Parmi toutes les fonctions qui croissent plus lentement que chacune des f^P, en existe-t-il une qui croisse moins lentement que toutes les autres? Ce serait cette fonction qu'on pourrait être tenté de désigner pas la notation $f^{\omega}(n)$ en donnant au symbole ω le sens que lui attribue M. Cantor. Mais il est clair qu'une semblable fonction ne saurait être, car, en la désignant par F et supposant toujours, bien entendu, que le rapport $\frac{f^P(n)}{F(n)}$ soit infini avec n, quel que soit P, on pourrait considérer ces rapports successifs comme autant de fonctions $g^P(n)$ remplissant les mêmes conditions que les f^P.

On en déduirait une fonction $G(n)$ infinie avec n ainsi que tous les rapports $\frac{g^P(n)}{G(n)}$. La fonction $F(n).G(n)$, bien que croissant plus vite que F, satisferait donc néanmoins aux mêmes conditions, ce qui montre l'impossibilité de l'hypothèse faite sur F.

19. On peut même aller plus loin et démontrer la proposition suivante:

Etant données deux suites indéfinies de fonctions indéfiniment croissante, l'une

$$f^p(n) \qquad (p=1,2,\ldots,\infty)$$

composée de fonctions à croissance de plus en plus lente, l'autre

$$F^q(n) \qquad (q=1,2,\ldots,\infty)$$

composée de fonctions à croissance de plus en plus rapide, mais de manière que, pour des valeurs quelconques de p et de q, le rapport $\frac{f^p(n)}{F^q(n)}$ soit infini avec n, on peut toujours déterminer une fonction $\mathfrak{F}$ qui croisse plus lentement que n'importe quel f^p et moins lentement que n'importe quel F^q, chacun des rapports $\frac{f^p(n)}{\mathfrak{F}(n)}$, $\frac{\mathfrak{F}(n)}{F^q(n)}$ augmentant indéfiniment avec n.

Supposons en effet que, les fonctions f^p ayant été multipliées au besoin par des nombres de plus en plus petits, comme il a été dit plus haut, le rapport $\frac{f^{p'}(n)}{f^p(n)}$ ait 0 pour limite lorsque p' croît indéfiniment. Chacune des fonctions F^q correspondra (n° 16) à une fonction indéfiniment croissante $\varphi^q(p)$ et nous pourrons trouver une fonction $\Phi(p)$ qui croisse plus vite que chacune des φ^q. La fonction $\mathfrak{F}$ correspondante croîtra plus vite que chacune des F^q. D'après l'hypothèse que nous avons introduite, tous les rapports $\frac{f^p(n)}{\mathfrak{F}(n)}$ sont nécessairement infinis avec n. S'il en est de même des rapports $\frac{\mathfrak{F}(n)}{F^q(n)}$, la fonction $\mathfrak{F}$ répond à la question. Si non, on la remplacera par une autre satisfaisant aux mêmes conditions et dont le rapport avec la première croisse indéfiniment, ainsi que nous l'avons vu au n° précédent.

20. Il y aurait néanmoins lieu d'étudier les propriétés d'un ensemble *ordonné* de fonctions dont chacune croîtrait plus lentement que les précédentes, et parmi lesquelles s'en trouveraient de moins rapidement croissantes qu'une fonction quelconque donnée.

Les théorèmes précédents nous conduisent à cette conclusion qu'un pareil ensemble ne saurait être numérable.

On pourrait partir d'une suite infinie numérable de fonctions f^p, déduire de celles-là une nouvelle série de fonctions plus lentement croissantes encore, par exemple en prenant successivement pour fonctions $\varphi^{(p)}$ les fonctions f^p elles-mêmes, de ce tableau en déduire de même un troisième et ainsi de suite. L'ensemble ainsi formé ne posséderait pas encore la propriété demandée, car, en prenant dans chacun des tableaux précédents une fonction, on formerait une suite numérable équivalente à l'ensemble primitif, au point de vue qui nous occupe.[1] Mais on pourrait alors opérer sur cette suite comme sur la première, etc...., puis prendre dans chacun des tableaux infinis et en nombre infini ainsi formés, une fonction, ce qui donnerait une suite numérable qu'on utiliserait de nouveau: en un mot, chaque fois que l'on aurait obtenu un ensemble que l'on pourrait remplacer par une suite numérable, repartir de cette suite pour continuer les opérations. On formerait ainsi un ensemble qui ne pourrait plus être remplacé par aucune suite numérable de fonctions lui appartenant.

Un pareil ensemble remplirait-il le but proposé? C'est ce qu'il paraît difficile de décider actuellement.

21. Le théorème (c) peut aussi se généraliser à l'aide des propositions précédentes. On a d'abord:

Théorème (γ). *Etant donnée une suite infinie de fonctions $\varphi^p(n)$ augmentant indéfiniment, mais de plus en plus lentement, on peut toujours déterminer les u_n de manière que la série Σu_n soit convergente et toutes les séries $\Sigma u_n \varphi^p(n)$ divergentes.*

Il suffira bien évidemment de former une fonction plus lentement croissante que chacune des φ^p et d'appliquer à celle-là le théorème (c). Ou encore, on pourrait appliquer le théorème (c) à chaque fonction φ^p et former une série plus lentement convergente que toutes celles qu'on aurait obtenues.

---

[1] C'est à ce type qu'appartiendrait le système indiqué par M. Pringsheim dans le Mémoire déjà cité (commencement de la page 356).

De même:

Théorème (δ). *Les fonctions $\varphi^p(n)$ étant encore supposées augmenter indéfiniment de plus en plus lentement, on peut toujours déterminer les v_n de manière que la série Σv_n soit divergente et toutes les séries $\sum \frac{v_n}{\varphi^p(n)}$ convergentes.*

Enfin ces deux propositions peuvent être considérées comme un cas particulier de celle-ci:

Etant données deux suites infinies de fonctions $\varphi^p(n)$, $\Phi^q(n)$, les unes de plus en plus lentement, les autres de plus en plus rapidement croissantes, mais telles que pour tout système de valeurs de p et de q, le rapport $\frac{\varphi^p(n)}{\Phi^q(n)}$ augmente indéfiniment, on peut déterminer les u_n de manière que toutes les séries $\Sigma u_n \varphi^p(n)$ soient divergentes et toutes les séries $\Sigma u_n \Phi^q(n)$ convergentes.

Car il est bien clair, d'après ce que nous avons démontré au n° 19, que l'on peut trouver deux fonctions F et G intermédiaires entre les φ et les Φ et dont le rapport $\frac{F}{G}$ soit infini avec n. Il suffira dès lors d'appliquer le théorème (c) à ce rapport. On obtiendra ainsi une suite U_n et l'on fera $u_n = \frac{U_n}{G(n)}$.

26 janvier 1894.