SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'$

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

(Extrait d'une lettre à M. E. Picard.)

Les fonctions elliptiques du second degré peuvent être définies par l'équation différentielle

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D.$$

Dans l'étude des équations différentielles du second ordre c'est donc un problème qui se pose de soi-même d'étudier si l'équation différentielle plus générale

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y',$$

où A, B, C, D, E, F signifient des constantes par rapport à la variable indépendante, ne pourra pas définir des fonctions de caractère rationnel [1] autres et plus générales que les fonctions elliptiques.

Dans votre mémoire couronné [2] ainsi que dans une lettre que vous m'avez adressée et qui a été publiée dans mon journal [3] vous avez indiqué les types principaux de l'équation

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'$$

[1] Il me paraît naturel de signifier ainsi les fonctions analytiques uniformes $f(x)$ qui, n'étant pas des fonctions entières rationnelles ou transcendantes, ne possèdent pas d'autre point singulier essentiel que $x = \infty$.

[2] Journal de mathématiques, t. 5, p. 281—287.

[3] T. 17, p. 297—300.

où l'intégrale est *à apparence uniforme.* Vu l'intérèt qu'il y aurait de connaître la forme analytique des intégrales, j'ai voulu en effectuer l'intégration. J'avais obtenu *à priori* par des considérations générales qui au fond ne sont autres que celles employées par M. PAINLEVÉ,[1] que l'intégrale ayant le caractère d'être *à apparence uniforme* devait être aussi forcément de caractère rationnelle et il m'a paru intéressant de vérifier *à posteriori* ce resultat.

Voici comment j'ai procédé. La fonction $\wp(x)$ de M. WEIERSTRASS peut être définie par l'équation différentielle de second ordre

$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2$$

dont l'intégrale générale est

$$\wp = \wp(x + x_0 \,|\, g_2\,, g_3),$$

où g_2 et g_3 signifient les deux invariants. L'invariant g_3 ainsi que x_0 sont des constantes arbitraires. Regardons $\wp(x + x_0 \,|\, g_2\,, g_3)$ dans le voisinage d'un pôle. On a

$$\wp(x + x_0 \,|\, g_2\,, g_3) = \frac{1}{(x + x_0)^2} + \frac{g_2}{2^2 . 5}(x + x_0)^2 + \frac{g_3}{2^2 . 7}(x + x_0)^4 + \ldots .$$

Les pôles sont de l'ordre *deux,* un des coefficients dans le développement — celui de $(x + x_0)^4$ — est arbitraire, et les coefficients suivants sont des fonctions rationnelles entières de ce coefficient.

Commençons donc par chercher les conditions pour que l'intégrale de l'équation

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'$$

ait un pôle fixé d'une manière arbitraire dans le champ de la variable

---

[1] M. PAINLEVÉ a publié depuis, C. R. 24 juillet 1893, une courte notice où il indique la forme générale de l'intégrale, mais même en connaissant cette forme il ne paraît pas être sans importance d'avoir réellement obtenu l'intégrale dans un cas un peu général. Je saisis l'occasion pour annoncer que M. PAINLEVÉ publiera prochainement dans ce journal dans trois mémoires développés les recherches profondes et fertiles relatives aux équations différentielles, sur lesquelles des indications succinctes ont paru dernièrement dans les Comptes Rendus.

indépendante et étant de l'ordre *deux,* ainsi que les conditions pour qu'il entre dans le développement de l'intégrale dans le voisinage du pôle une autre constante arbitraire que l'affixe du pôle.

On voit d'abord, l'ordre du pôle de y^3 étant 6, l'ordre du pôle de yy' étant 5 et celui du pôle de y'' étant 4, que les deux constantes A et E doivent être égales à zéro. Supposons que $B \neq 0$ et $F \neq 0$, parce que si $B = 0$ on retombe sur les équations différentielles linéaires et si $F = 0$ on retombe sur les fonctions elliptiques.

On peut toujours, par une substitution linéaire, faire que le coefficient de y^2 devient un nombre fixé d'avance, soit 6 comme dans l'équation pour $\wp(x)$, et que le coefficient de y, comme c'était aussi le cas dans l'équation pour $\wp(x)$, devient zéro. On obtient alors

$$\text{(A)} \qquad y'' = 6y^2 + D + F.y'.\text{[1]}$$

Mettons

$$y = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{k}{x} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \dots$$

en plaçant le pôle arbitraire à $x = 0$. En introduisant cette expression dans l'équation (A) et en égalant les coefficients de la même puissance de x des deux côtés de l'égalité on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1,\\
5k &= F,\\
\alpha_0 &= -\frac{1}{12}k^2,\\
\alpha_1 &= \frac{1}{12}k^3,\\
\alpha_2 &= -\frac{1}{10}D - \frac{7}{2^4.3}k^4,\\
\alpha_3 &= \frac{11}{2.3.5}Dk + \frac{79}{2^4.3^2}k^5.
\end{aligned}$$

[1] Voir PICARD, loc. cit., p. 286.

En égalant les coefficients de x^2, on voit disparaître α_4, et on obtient

$$\left(3\alpha_3 + \frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 5} Dk + \frac{1}{2^4\cdot 3} k^5\right)k = 0.$$

En mettant $k = 0$, on trouverait $F = 0$ et on retomberait sur l'équation de la fonction $\wp(x)$. J'ai supposé $F \neq 0$. On a donc $k \neq 0$ et les deux équations pour α_3 amènent que

$$D = -\frac{3}{2} k^4.$$

L'intégrale de l'équation (A) est donc *à apparence uniforme* s'il y a entre les constantes D et F une relation telle que l'équation prend la forme

$$y'' = 6y^2 - \frac{3}{2} k^4 + 5ky', \tag{a}$$

où k est une constante indépendante de x.

Il s'agit maintenant d'effectuer l'intégration. Je suis votre indication[1]. Je mets

$$z = y'^2 + y'(a_1 + a_2 y) + a_3 y + a_4 y^2 + a_5 y^3.$$

La fonction z aura des pôles sextuples. Or, il y entre 5 constantes arbitraires et on peut par conséquent réduire ces pôles à des pôles simples. Le coefficient d'un tel pôle simple devient

$$-\frac{2^3}{5} DF - \frac{2^2\cdot 3}{5} F^5.$$

Mais cette expression est nulle à cause de la relation entre D et F. On obtient donc

$$z = y'^2 - 2ky'(k^2 + 2y) + k^4 y - 2k^2 y^2 - 4y^3$$

où la fonction z n'a pas de pôles. En différentiant z deux fois, en appliquant l'équation (a) pour éloigner les dérivées y'' et y''' et en éliminant y et y' entre les expressions pour z, z' et z'' on doit obtenir une relation entre z, z' et z'' dont l'intégrale n'a pas de pôles. Mais on voit de suite qu'il suffit de différentier une seule fois et qu'on obtient

$$z' = 6kz + 3k^7,$$

[1] Voir PICARD, loc. cit., p. 284, 285.

d'où

$$z = -\frac{k^6}{2} - k^6 He^{6kx},$$

où j'indique par H une constante arbitraire. On a donc obtenu pour première intégrale de l'équation (a)

$$y'^2 - 2ky'(2y + k^2) - 4y^3 - 2k^2y^2 + k^4y + \frac{k^6}{2} + k^6He^{6kx} = 0,$$

ou

$$\left(y' - 2k\left(y + \frac{k^2}{2}\right)\right)^2 - 4\left(y + \frac{k^2}{2}\right)^3 + k^6He^{6kx} = 0.$$

Cette équation, étant de genre *un* par rapport à y et y', la variable x étant regardée comme paramètre, peut toujours être intégrée par une méthode indiquée par M. Poincaré.[1] Mais on voit immédiatement qu'on peut arriver à l'intégration par une simple substitution.

Je mets

$$y + \frac{k^2}{2} = k^2 se^{2kx}.$$

Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ds}{dx} k^2 e^{2kx} + 2k\left(y + \frac{k^2}{2}\right),$$

ce qui amène

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = k^2 e^{2kx}(4s^3 - H).$$

Mettons donc

$$u = e^{kx}, \qquad du = ke^{kx}dx,$$

on obtient l'équation

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - H,$$

dont l'intégrale générale est

$$s = \wp(u + u_0 \mid 0, H).$$

---

[1] Voir ce journal, t. 7, p. 5—8.

L'intégrale générale de l'équation (a) devient donc

$$(\alpha) \qquad y = (D_x e^{kx})^2 \wp(e^{kx} + e^{kx_0} \,|\, 0, H) - \frac{k^2}{2}$$

où x_0 et l'invariant H sont les deux constantes arbitraires.

Je viens de traiter le cas où dans l'équation

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'$$

les deux coefficients A ét E sont nuls en même temps. Supposons maintenant que A et E ne disparaissent pas simultanément. Si l'intégrale générale est de caractère rationnel elle aura la forme

$$y = \frac{\alpha}{x} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots$$

dans le voisinage d'un pôle dont je mets l'affixe égal à zéro, pour plus de simplicité. En égalant les puissances de x^{-3} des deux côtés de l'équation différentielle, on obtient

$$2\alpha = A\alpha^3 - E\alpha^2 \qquad \text{ou} \qquad 2 + E\alpha = A\alpha^2.$$

En mettant $y = \beta z$, on peut toujours déterminer β de telle manière que dans l'équation en z

$$2 + E = A,$$

de manière que l'équation différentielle à étudier devient

$$y'' = (E + 2)y^3 + Eyy' + By^2 + Cy + D + F.y',$$

où j'ai mis y au lieu de z. En égalant dans cette équation les coefficients de x^{-3} et de x^{-2} on obtient

$$2 + E\alpha = (2 + E)\alpha^2,$$

$$\alpha_0(3(E + 2)\alpha - E) + B\alpha - F = 0.$$

Il y a deux cas à considérer $E = -3$ et $E \neq -3$. Dans le premier cas le coefficient α_0 qui correspond à la racine $\alpha = 1$ de l'équation

$$2 + E\alpha = (2 + E)\alpha^2$$

devient arbitraire, et il y a entre les coefficients de l'équation différentielle la relation

$$B = F.$$

Mais l'intégrale complète de

(b) $$y'' + 3yy' + y^3 = B(y' + y^2) + Cy + D$$

s'obtient immédiatement, elle est

(β) $$y = \frac{z'}{z}$$

où

(β') $$z''' = Bz'' + Cz' + Dz.$$

Il entre, comme vous voyez, dans l'intégrale (β) deux constantes arbitraires et indépendantes l'une de l'autre.

Dans le second cas $E \neq -3$, on peut toujours, en mettant $y = z + \gamma$, déterminer γ de manière que dans l'équation en z on ait $B = F$, de manière que nous serons ramenés à étudier l'équation différentielle

(C) $$y'' = (E + 2)y^3 + Eyy' + B(y' + y^2) + Cy + D,$$

où j'ai mis y au lieu de z.

Le coefficient α étant déterminé par l'équation

$$2 + E\alpha = (2 + E)\alpha^2$$

il y a deux cas à considérer, $E = -2$ et $E \neq -2$. Dans le premier cas, on a pour α la seule valeur $\alpha = 1$. En égalant dans

(D) $$y'' + 2yy' = B(y' + y^2) + Cy + D$$

les puissances de x^{-2} et de x^{-1} des deux côtés de l'équation on trouve que $\alpha_0 = 0$ et que α_1 devient arbitraire, ce qui amène entre B, C et D la relation $C = 0$. Mais l'équation

(d) $$y'' + 2yy' = B(y' + y^2) + D$$

s'intègre immédiatement. En mettant

$$y' + y^2 = V,$$

on obtient

$$V' = BV + D$$

et l'intégrale devient par conséquent

$$(\delta) \qquad y = \frac{z'}{z}$$

où

$$(\delta') \qquad Bz'' = (He^{Bx} - D)z.$$

Il ne nous reste donc plus que l'étude de l'équation

$$(\mathrm{C}) \qquad y'' = (E + 2)y^3 + Eyy' + B(y' + y^2) + Cy + D$$

où

$$E \neq -3 \quad \text{et} \quad E \neq -2.$$

L'intégrale étant

$$y = \frac{\alpha}{x} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots,$$

on obtient en égalant les coefficients de x^{n-2} et en employant la relation

$$2 + E\alpha = (2 + E)\alpha^2$$

une relation de la forme

$\alpha_n(n+2)(n-3-E\alpha) =$ fonction entière et rationnelle de $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0, \alpha$.

Il y aura deux cas à considérer: $E = 0$ et $E \neq 0$. Dans le premier cas[1] le coefficient α_3 devient arbitraire et il y aura deux relations entre les coefficients B, C, D qu'on obtient en mettant $n = 3$ et $\alpha = \pm 1$ dans l'équation ci-dessus entre $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0; \alpha$. Je transforme d'abord l'équation (C) par une substitution linéaire en

$$(\mathrm{E}) \qquad y'' = 2y^3 + Cy + D + F.y'.$$

Les relations entre les coefficients deviennent

$$D = 0, \qquad C = -\frac{2}{3^2}F^2.$$

---

[1] Voir Picard, ce journal, t. 17, p. 299.

L'équation pourra donc s'écrire

$$(C)\qquad y'' = 2y^3 - 2ky + 3ky',$$

où k indique une constante indépendante de x.

L'intégrale de cette équation est *à apparence uniforme* d'après votre terminologie. On voit que $y = \bar{y}$ étant une intégrale, $y = -\bar{y}$ sera de même une intégrale et on obtient

$$y = \pm\left(\frac{1}{x} + \frac{k}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{2}\right)^2 x + \alpha_3 x^3 + \dots\right)$$

où α_3 reste arbitraire.

On voit donc facilement par les mêmes considérations qui j'ai employées pour l'équation (a) que

$$z = y'^2 - 2kyy' - y^4 + k^2y^2 = (y' - ky)^2 - y^4$$

n'a pas de pôle.

On a

$$z' = 4kz.$$

Donc

$$(y' - ky)^2 - y^4 = H^2k^4e^{4kx},$$

où je désigne par H une constante arbitraire.

Je mets

$$y = z.ke^{kx}$$

et j'obtiens

$$z'^2 = (ke^{kx})^2(z^4 + H^2).$$

Donc en mettant

$$u = e^{kx}, \qquad du = ke^{kx}dx,$$

et en mettant

$$s = \frac{H^2}{z^2},$$

on obtient

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 + 4H^2s = 4(s - iH)s(s + iH).$$

En employant les notations

$$s = \wp(u \mid g_2, g_3) = \wp(u \mid e_1, e_2, e_3)$$

où

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3),$$

j'obtiens donc

$$s = \wp(u \mid -4H^2, 0) = \wp(u \mid iH, 0, -iH).$$

Mais

$$\wp(u) - e_2 = \left(\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}\right)^2.$$

L'intégrale générale de l'équation (e) devient par conséquent

$$(\varepsilon) \qquad y = HD_x e^{kx} \frac{\sigma(e^{kx} + e^{kx_0} \mid iH, 0, -iH)}{\sigma_2(e^{kx} + e^{kx_0} \mid iH, 0, -iH)},$$

où x_0 et H sont les deux constantes d'intégration.

L'intégration de l'équation

$$(C) \qquad y'' = (E + 2)y^3 + Eyy' + B(y' + y^2) + Cy + D$$

dans le cas d'une intégrale générale *à apparence uniforme* est donc effectué pour $E = 0$. J'ai déjà traité les cas $E = -3$ et $E = -2$.

Reste à traiter les autres cas. On obtient de l'équation

$$2 + E\alpha = (2 + E)\alpha^2$$

pour α les deux valeurs

$$\alpha^{(1)} = 1, \qquad \alpha^{(2)} = \frac{-2}{E + 2}.$$

On a de même:

$\alpha_n(n + 2)(n - 3 - E\alpha) =$ fonction entière et rationnelle de $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0, \alpha$.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale générale sera *à apparence uniforme* est qu'il y aura deux nombres entiers n_1 et n_2 tels que

$$n_1 - 3 - E\alpha^{(1)} = 0, \qquad n_2 - 3 - E\alpha^{(2)} = 0$$

et qu'il y aura entre les constantes B, C, D les deux relations qu'on obtient en mettant le terme à droite dans l'équation ci-dessus égal à zéro après y avoir introduit n_1 et $\alpha^{(1)}$ et puis n_2 et $\alpha^{(2)}$.[1]

On obtient

$$n_1 - 3 = E, \qquad (n_1 - 1)(n_2 - 1) = 4.$$

Donc

$$n_1 = 2, \qquad n_2 = 5,$$

ou

$$n_1 = 5, \qquad n_2 = 2,$$

parce que le cas $n_1 = n_2 = 3$, ce qui amène $E = 0$, a déjà été traité. Le cas $n_1 = 5$, $n_2 = 2$ peut être ramené au cas $n_1 = 2$, $n_2 = 5$ par une substitution linéaire.

Il nous reste donc à étudier:

$$\text{(F)} \qquad y'' = y^3 - yy' + B(y' + y^2) + Cy + D.$$

Les deux relations entre les constantes B, C, D deviennent

$$D - BC = 0,$$

$$\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 7^2}{5^2} B^3 + 5BC + D\right)\left(\frac{2 \cdot 3}{5^2} B^3 + BC + 5D\right) = 0.$$

Il y aura donc trois cas:

$$\text{(f')} \qquad y'' = y^3 - yy' + Cy,$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(f'')} & y'' = y^3 - yy' + 5h(y' + y^2) - 7^2 . h^2 y - 5 \cdot 7^2 . h^3 \\ \text{(f''')} & y'' = y^3 - yy' + 5h(y' + y^2) - h^2 y - 5 . h^3 \end{array}\right\} B = 5h$$

où l'intégrale générale est *à apparence uniforme.* Nous avons vu que, supposant

$$y = \frac{\alpha}{x} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots,$$

on aura

$$\alpha_0(3\alpha + 1) + B(\alpha - 1) = 0.$$

---

[1] Voir Picard, loc. cit., p. 283.

On a donc pour $\alpha = 1$, $\alpha_0 = 0$. En mettant

$$V = y' + y^2$$

et en se rappelant que pour $\alpha = -2$ le coefficient α_5 devient zéro, on voit que V n'a pas d'autre pôle que celui qui correspond à $\alpha = -2$, et qu'on obtient alors

$$V = \frac{\beta}{x^2} + \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \dots$$

où β_4 est arbitraire. Mais cette forme est celle de l'intégrale de l'équation

$$y'' = 6y^2 - \frac{1}{2}g_2$$

ainsi que celle de l'intégrale de mon premier type

$$\text{(a)} \qquad y'' = 6y^2 - \frac{3}{2}k^4 + 5ky'.$$

Il y a donc lieu de former l'équation différentielle de second ordre en V qui correspond à (F). On obtient

$$y(V + C) = V' - BV - D,$$

et par conséquent

$$\{V'' - BV' - V(V + C)\}(V + C) = (V' - BV - D)(BV + D).$$

Donc à cause de la relation

$$D = BC$$

et si on laisse de côté un instant le cas $V + C = 0$,

$$V'' = 2BV' + V^2 + V(C - B^2) - B^2C.$$

On voit qu'en faisant la substitution

$$V = 6z + \frac{B^2 - C}{2},$$

on est ramené à

$$z'' = 6z^2 - \frac{1}{24}(C + B^2)^2 + 2Bz'$$

qui embrasse aussi bien l'équation différentielle de second ordre de $\wp(x)$ que l'équation (a).

On obtient donc les deux équations

$$z'' = 6z^2 - \frac{1}{24}C^2,$$

$$z'' = 6z^2 - \frac{3}{2}k^4 + 5kz', \qquad h = \frac{k}{2},$$

dont la première correspond à (f′) et la seconde à (f″) et (f‴).

L'intégrale générale de (f′) devient donc:

$$(\gamma') \qquad y = \frac{\wp'\left(x + x_0 \,\middle|\, \frac{1}{12}C^2, H\right)}{\wp\left(x + x_0 \,\middle|\, \frac{1}{12}C^2, H\right) + \frac{1}{12}C^2}$$

où x_0 et l'invariant $g_3 = H$ sont les deux constantes arbitraires.

L'intégrale générale de (f″) devient

$$(\gamma'') \qquad \begin{cases} y = \dfrac{6z'}{6z - 12h^2}, \\ z = (D_x e^{2hx})^2 \wp(e^{2hx} + e^{2hx_0} \,|\, 0, H) - 2h^2, \end{cases}$$

et l'intégrale générale de (f‴) devient

$$(\gamma''') \qquad \begin{cases} y = \dfrac{6z'}{6z + 12h^2} - 5h, \\ z = (D_x e^{2hx})^2 \wp(e^{2hx} + e^{2hx_0} \,|\, 0, H) - 2h^2. \end{cases}$$

Les deux constantes arbitraires en (γ'') et (γ''') sont x_0 et l'invariant H.

J'avais laissé de côté le cas

$$V + C = 0 \quad \text{ou} \quad y' + y^2 + C = 0.$$

On voit immédiatement que l'intégration de cette équation différentielle nous donne une intégrale singulière avec une seule constante arbitraire pour nos équations différentielles (f).