EIN BEITRAG ZUR THEORIE DES LEGENDRE'SCHEN POLYNOMS

VON

DAVID HILBERT
in KÖNIGSBERG i. Pr.

Die vorliegende Mittheilung beschäftigt sich mit der Frage nach dem kleinsten von o verschiedenen Werthe, dessen das Integral

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2 dx \qquad (\beta > \alpha)$$

fähig ist, wenn man für $f(x)$ eine ganze rationale Function $n - 1^{\text{ten}}$ Grades mit *ganzzahligen* Coefficienten wählt und wenn man unter α und β gegebene Constanten versteht. Wird

$$f(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

gesetzt, so geht das Integral in eine definite quadratische Form der n Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ über:

$$I = \sum^{i,k} \alpha_{ik} a_i a_k, \qquad (i,k = 1, 2, \ldots, n)$$

deren Coefficienten durch die Formel

$$\alpha_{ik} = \int_{\alpha}^{\beta} x^{2n-i-k} dx = \frac{\beta^{2n-i-k+1} - \alpha^{2n-i-k+1}}{2n - i - k + 1}$$

gegeben sind.

Um eine obere Grenze für das Minimum dieser quadratischen Form I zu erhalten bedarf es der Berechnung ihrer Discriminante

$$D_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ersetzen wir in dieser Determinante jedes Element durch seinen Integralausdruck und verwenden dabei in allen Elementen der ersten Horizontalreihe die Integrationsveränderliche $x = x_1$, in den Elementen der 2^{ten}, $\ldots$, n^{ten} Horizontalreihe bezüglich die Integrationsveränderlichen $x = x_2$, $\ldots$, $x = x_n$, so stellt sich die Discriminante der quadratischen Form I als ein n-faches Integral von der folgenden Gestalt dar:

$$D_{\alpha\beta} = \int_\alpha^\beta \ldots \int_\alpha^\beta x_1^{n-1} x_2^{n-2} \ldots x_n^0 \prod^{i,k} (x_i - x_k) dx_1 \ldots dx_n.$$

Die Vertauschung der n Integrationsveränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ und die Addition der dadurch entstehenden Gleichungen liefert dann

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{\underline{|n}} \int_\alpha^\beta \ldots \int_\alpha^\beta \prod^{i,k} (x_i - x_k)^2 dx_1 \ldots dx_n$$

und wenn wir mittelst

$$x_i = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) y_i + \frac{1}{2}(\beta + \alpha) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

die neuen Integrationsveränderlichen $y_1, \ldots, y_n$ einführen, *so gewinnen wir die Formel*

$$D_{\alpha\beta} = \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^{n^2} D,$$

wo zur Abkürzung $D = D_{-1,+1}$ gesetzt ist.

Beispielsweise folgt für $\alpha = 0$, $\beta = 1$

$$D = 2^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & \ldots \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \ldots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{7} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{vmatrix} = 2^{n^2} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \ldots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \ldots & \frac{1}{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \ldots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Um nun D zu berechnen, entwickeln wir die ganze rationale Function $f(x)$ in eine nach Legendre'schen Polynomen X_m fortschreitende Reihe. Wegen

$$x^m = c_m X_m + c'_m X_{m-1} + \ldots + c_m^{(m)} X_0,$$

wo

$$c_m = \frac{\underline{|m}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)}$$

ist, erhalten wir

$$f(x) = a_1(c_{n-1}X_{n-1} + c'_{n-1}X_{n-2} + \ldots) + a_2(c_{n-2}X_{n-2} + c'_{n-2}X_{n-3} + \ldots) + \ldots$$

$$= c_{n-1}a_1X_{n-1} + (c'_{n-1}a_1 + c_{n-2}a_2)X_{n-2} + (c''_{n-1}a_1 + c'_{n-2}a_2 + c_{n-3}a_3X_{n-3}) + \ldots$$

und mit Hilfe der Formeln

$$\int_{-1}^{+1} X_m^2 dx = \frac{2}{2m+1}, \qquad \int_{-1}^{+1} X_m X_k dx = 0 \qquad (m \neq k)$$

folgt somit

$$[I]_{\substack{\alpha=-1\\ \beta=+1}} = \int_{-1}^{+1} f^2(x)dx = \frac{2}{2n-1}b_1^2 + \frac{2}{2n-3}b_2^2 + \frac{2}{2n-5}b_3^2 + \ldots,$$

wo

$$b_1 = c_{n-1}a_1,$$

$$b_2 = c'_{n-1}a_1 + c_{n-2}a_2,$$

$$b_3 = c''_{n-1}a_1 + c'_{n-2}a_2 + c_{n-3}a_3,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

gesetzt ist. Auf Grund dieser Darstellung als Summe von Quadraten linearer Formen gewinnt man für die Discriminante D den Werth

$$D = \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)} (c_0 c_1 \ldots c_{n-1})^2$$

$$= 2^{n^2} \frac{\left\{1^{n-1} 2^{n-2} \ldots (n-2)^2 (n-1)^1\right\}^4}{1^{2n-1} 2^{2n-2} \ldots (2n-2)^2 (2n-1)^1}$$

und hierin ist die rechte Seite genau identisch mit $\frac{2^{n^2}}{\Delta}$, wo Δ denjenigen Werth bedeutet, welchen ich in meiner Abhandlung *Über die Discriminante* *der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe*[1] für die Discriminante des einer gewissen linearen Transformation unterworfenen Legendre'schen Polynoms n^{ten} Grades erhalten habe. Unter Berücksichtigung der oben für D aufgestellten Formel folgt hieraus das Resultat

Die Discriminante der quadratischen Form $\int\limits_0^1 f^2(x)dx$ *hat den Werth*

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix} = \frac{\{1^{n-1}2^{n-2}\ldots(n-2)^2(n-1)^1\}^4}{1^{2n-1}2^{2n-2}\ldots(2n-2)^2(2n-1)^1}$$

und stimmt genau überein mit dem reciproken Werth der Discriminante der Gleichung n^{ten} *Grades*

$$\xi^n + \binom{n}{1}^2 \xi^{n-1} + \binom{n}{2}^2 \xi^{n-2} + \ldots + 1 = 0,$$

deren linke Seite sich durch eine lineare Transformation der Veränderlichen ξ *in das Legendre'sche Polynom* X_n *überführen lässt.*

Wir kehren zu der ursprünglich gestellten Frage zurück. Die Anwendung der Stirling'schen Formel liefert, wenn N eine positive Zahl bedeutet, die Gleichung

$$Nl1 + (N-1)l2 + \ldots + 2l(N-1) + 1lN = \frac{1}{2}N^2 lN - \frac{3}{4}N^2(1 + \varepsilon_N),$$

wo ε_N eine mit wachsendem N verschwindende Zahl bedeutet. Mit Hilfe dieser Formel findet man leicht

$$lD = (1 + \varepsilon_n')l(2^{-n^2}),$$

[1] Crelle's Journal, Bd. 103, S. 342.

wo ε'_n mit wachsendem n verschwindet, d. h.

$$D = \eta_n 2^{-n^2}$$

und folglich

$$D_{\alpha,\beta} = \eta_n \left(\frac{\beta - \alpha}{4}\right)^{n^2},$$

wo η_n mit wachsendem n sich der Einheit nähert.

Nun ist es, einem Satze von H. MINKOWSKI[1] zufolge, stets möglich, in einer definiten quadratischen Form die n Veränderlichen derart als ganze Zahlen zu bestimmen, dass der Werth der quadratischen Form kleiner ausfällt als das n-fache der n^{ten} Wurzel aus ihrer Discriminante. Wird daher die positive Differenz $\beta - \alpha$ kleiner als 4 angenommen, so folgt, dass es stets möglich ist, eine ganze rationale Function $f(x)$ mit ganzzahligen Coefficienten zu bestimmen, für welche der Werth des Integrals $I = \int_\alpha^\beta f^2(x)dx$ kleiner ausfällt, als $n\eta'_n\left(\frac{|\beta - \alpha|}{4}\right)^n$. Da aber $\eta'_n = \sqrt[n]{\eta_n}$ mit wachsendem n sich ebenfalls der Einheit nähert, so erhalten wir das Resultat

Das Integral $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx$ kann einen beliebig kleinen positiven Werth erhalten, wenn man die ganze ganzzahlige Function $f(x)$ geeignet wählt, vorausgesetzt, dass das Integrationsintervall α bis β kleiner als 4 ist.

Königsberg i. Pr. 13. März 1893.

---

[1] Crelle's Journal, Bd. 107, S. 291.