

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

*Invariants et équations invariantes.*¹

1. Etant donnée, dans un espace R_r à $r = n + p$ dimensions, une multiplicité M , à n dimensions, définie par p fonctions z_1, z_2, \dots, z_p de n variables indépendantes y_1, y_2, \dots, y_n , je me propose d'étudier les relations qui existent entre M et les multiplicités qui s'en déduisent lorsqu'on effectue sur l'espace R_r les transformations d'un groupe de LIE, multiplicités que j'appellerai *homologues de M* par rapport à ce groupe.

Les x étant les coordonnées d'un point quelconque de R_r , et les x' celles d'un point de l'espace transformé R'_r , les équations de définition du groupe définissent les x' en fonction des x : il peut d'ailleurs se faire que les transformations du groupe portent seulement sur un nombre moindre m de coordonnées, les $r - m$ autres n'étant pas transformées: cela revient à considérer un groupe à m variables, x_1, x_2, \dots, x_m comme s'étendant à $r - m$ variables de plus, x_{m+1}, \dots, x_r ; il suffit d'ajouter à ses équations de définition les suivantes:

$$x'_{m+1} = x_{m+1}, \quad \dots, \quad x'_r = x_r$$

et celles qui s'en déduisent par dérivation.

La multiplicité M est donnée par l'expression de p des coordonnées, savoir:

$$z_1 = x_{n+1}, \quad z_2 = x_{n+2}, \quad \dots, \quad z_p = x_r$$

en fonction des $n = r - p$ autres:

$$(1) \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad \dots, \quad y_n = x_n.$$

¹ Ces deux termes ont ici le sens des expressions souvent employées de *invariants absolus*, et *invariants relatifs*.

Alors, en transformant R_r en R'_r , p coordonnées, z'_1, z'_2, \dots, z'_p sont fonctions des n autres y'_1, y'_2, \dots, y'_n , et représentent la multiplicité transformée M' :

$$(2) \quad \begin{aligned} z'_1 &= x'_{n+1}, & z'_2 &= x'_{n+2}, & \dots, & z'_p &= x'_r, \\ y'_1 &= x'_1, & y'_2 &= x'_2, & \dots, & y'_r &= x'_r. \end{aligned}$$

Comme nous l'avons déjà fait, nous classons les équations du groupe suivant l'ordre, et nous les considérons jusqu'à un ordre quelconque K :

$$(3) \quad W_\lambda(x_1, \dots, x_r, x'_1, \dots, x'_r, \dots, x'_{i, a_1, a_2, \dots, a_r}, \dots) = 0$$

($h=1, 2, \dots, \rho$) ($a_1 + a_2 + \dots + a_r \leq K$)

ou encore, en les prenant sous forme paramétrique:

$$(A_0) \quad x'_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_r, \lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0) \quad (i=1, 2, \dots, r)$$

.

$$(A_{K-1}) \quad x'_{i, a_1, a_2, \dots, a_r} = \varphi_{i, a_1, a_2, \dots, a_r}(x_1, \dots, x_r, \lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \dots, \lambda_{\varepsilon_1}^1, \dots, \lambda_1^{K-1}, \dots, \lambda_{\varepsilon_{K-1}}^{K-1})$$

($i=1, 2, \dots, r$) ($a_1 + a_2 + \dots + a_r = K-1$)

$$(A_K) \quad x'_{i, a_1, a_2, \dots, a_r} = \varphi_{i, a_1, a_2, \dots, a_r}(x_1, \dots, x_r, \lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \dots, \lambda_1^{K-1}, \dots, \lambda_{\varepsilon_{K-1}}^{K-1}, \lambda_1^K, \dots, \lambda_{\varepsilon_K}^K).$$

($i=1, 2, \dots, r$) ($a_1 + a_2 + \dots + a_r = K$)

Je ferai remarquer que, pour chaque ordre K , le nombre ε_K des paramètres $\lambda_1^K, \dots, \lambda_{\varepsilon_K}^K$ dépend seulement du nombre m des coordonnées x_1, \dots, x_m les seules transformées, et reste le même quel que soit le nombre $r - m$ des autres.

Cela posé, si, dans les équations (2), on remplace les x' par une solution quelconque de (3), on obtient:

$$(4) \quad \begin{aligned} y'_1 &= f_1(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p), & \dots, & & y'_n &= f_n(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p) \\ z'_1 &= f_{n+1}(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p), & \dots, & & z'_p &= f_r(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p). \end{aligned}$$

Ces relations représentent un changement simultané de variables et de fonctions, qui met la multiplicité M sous la forme M' . Or, c'est un résultat bien connu de la théorie du changement de variables que les dérivées des z' par rapport aux y' peuvent s'exprimer en fonction des dérivées des z par rapport aux y , et des dérivées des fonctions f ; et que de plus, les dérivées d'un ordre quelconque K des z' , s'expriment

en fonction des dérivées d'ordre K et d'ordre inférieur des z et des f . Ceci tombe en défaut dans le cas seulement où la transformation est telle qu'il y ait une relation identique entre y'_1, y'_2, \dots, y'_n , ce qui se produit lorsque le déterminant des expressions:

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\partial f_i}{\partial z_p} \cdot \frac{\partial z_p}{\partial y_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

où les f ont les valeurs (4), est identiquement nul. Ceci n'a évidemment lieu que pour des multiplicités déduites de M par des transformations particulières, n'ayant pas lieu dans le cas de M elle-même. Je laisserai de côté, pour l'instant, ces multiplicités particulières.

Alors, si l'on désigne par $z_1^K, z_2^K, \dots, z_{\rho_K}^K$ les ρ_K dérivées d'ordre K des z par rapport aux y , et par $z_1'^K, z_2'^K, \dots, z_{\rho_K}'^K$ les dérivées correspondantes des z' ; puis, si l'on remarque que les dérivées partielles des fonctions f ne sont autre chose que celles des x' par rapport aux x , lesquelles satisfont aux équations (3), on aura les relations suivantes, données par l'opération du changement de variables et de fonctions (4):

$$(B_1) \quad z_i'^1 = \psi_i^1(z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, \dots, x'_{j, a_1, a_2, \dots, a_r}, \dots)$$

(a₁+a₂+...+a_r=1) (i=1, 2, ..., ρ₁)

.....

$$(B_K) \quad z_i'^K = \psi_i^K(z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, \dots, z_1^K, \dots, z_{\rho_K}^K, \dots, x'_{j, a_1, a_2, \dots, a_r}, \dots)$$

(a₁+a₂+...+a_r≤K) (i=1, 2, ..., ρ_K)

Ces formules deviennent, en remplaçant les $x'_{j, a_1, a_2, \dots, a_r}$ par les valeurs quelles ont en vertu des relations (A), et par une extension de la notation, suivant laquelle $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p$ sont représentés par $z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0$ ($\rho_0 = n + p = r$):

$$(C_1) \quad z_i'^1 = \bar{\omega}_i^1(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, \lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \dots, \lambda_{\varepsilon_1}^1)$$

(i=1, 2, ..., ρ₁)

.....

$$(C_K) \quad z_i'^K = \bar{\omega}_i^K(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^K, \dots, z_{\rho_K}^K, \lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \dots, \lambda_1^K, \dots, \lambda_{\varepsilon_K}^K); \quad (i=1, 2, \dots, \rho_K)$$

nous leur adjoindrons les suivantes, qui ne sont autres que les relations (A₀) avec une notation différente:

$$(C_0) \quad z_i'^0 = \bar{\omega}_i^0(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0). \quad (i=1, 2, \dots, \rho_0)$$

Cela fait, supposons que l'on puisse éliminer les λ entre ces relations (C): en général, on pourra toujours choisir, le groupe étant donné, l'espace R_r et la multiplicité M , de telle façon qu'il en soit ainsi, car le nombre des paramètres λ étant fixé, il suffit pour cela de prendre le nombre $r - m$ des variables x_{m+1}, \dots, x_r suffisamment grand.

Le résultat de cette élimination dépend de la multiplicité M , les z et leurs dérivées étant des fonctions données de y_1, y_2, \dots, y_n ; il dépend de l'ordre le plus élevé des déterminants fonctionnels des seconds membres des équations (C) par rapport aux λ , qui ne sont pas identiquement nuls, quels que soient ces λ . Je supposerai d'abord que la *multiplicité initiale* M soit la *plus générale*, à n dimensions, de l'espace R_r , c'est-à-dire, qu'elle ne satisfait à aucune équation aux dérivées partielles donnée a priori: en particulier, si, dans les équations $(C_0), (C_1), \dots, (C_K)$, l'ordre des déterminants fonctionnels considérés, qui ne sont pas identiquement nuls pour toutes les valeurs des arguments $z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^K, \dots, z_{\rho_K}^K$, est égal à s_K , ces déterminants d'ordre s_K ne s'annulent pas, lorsqu'on y remplace les z et leurs dérivées par leurs valeurs en fonction de y_1, \dots, y_n , définies par la multiplicité M . En d'autres termes, M est telle que l'on puisse résoudre les équations $(C_0), (C_1), \dots, (C_K)$ par rapport au plus grand nombre possible de paramètres $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^K$.

Dans ces conditions, l'élimination se fait par voie progressive. D'abord on élimine, si c'est possible, les λ^0 entre les équations (C_0) , puis les λ^0 et λ^1 entre les équations (C_0) et (C_1) , ce qui reproduit en particulier les équations obtenues dans l'élimination précédente, et ainsi de suite. Le résultat se présente sous forme d'équations résolues par rapport à certaines des quantités z'^0, z'^1, \dots, z'^K , ($z_1'^0, \dots, z_{\mu_0}'^0$, par exemple, pour l'ordre zéro, $z_1'^1, \dots, z_{\mu_1}'^1$, pour le premier ordre, $\dots, z_1'^K, \dots, z_{\mu_K}'^K$ pour l'ordre K) en fonction des autres z'^0, z'^1, \dots, z'^K et des z^0, z^1, \dots, z^K :

$$(D_0) \quad z_i'^0 = G_i^0(z_{\mu_0+1}'^0, \dots, z_{\rho_0}'^0, z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0) \quad (i=1, 2, \dots, \mu_0)$$

$$(D_1) \quad z_i'^1 = G_i^1(z_{\mu_0+1}'^0, \dots, z_{\rho_0}'^0, z_{\mu_1+1}'^1, \dots, z_{\rho_1}'^1, z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1) \quad (i=1, 2, \dots, \mu_1)$$

.

$$(D_K) \quad z_i'^K = G_i^K(z_{\mu_0+1}'^0, \dots, z_{\rho_0}'^0, \dots, z_{\mu_K+1}'^K, \dots, z_{\rho_K}'^K, z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^K, \dots, z_{\rho_K}^K) \quad (i=1, 2, \dots, \mu_K)$$

chaque fonction G_i^K ne dépendant que de dérivées d'ordre égal ou inférieur à K .

Il est à remarquer que ce même résultat aurait pu être directement obtenu sous la même forme, sans passer par l'intermédiaire des équations (A) et (C), par l'élimination directe des dérivées des x' , $x'_{j,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r}$ entre les équations (B) et les équations de définition (3), classées suivant les ordres $0, 1, \dots, K$.

Inversement, si M' est *homologue* de M , toute relation différentielle d'ordre K entre M' et M est une conséquence des équations $(D_0), (D_1), \dots, (D_K)$, si elle a lieu quelle que soit cette multiplicité homologue M' .

Soit, en effet, cette relation:

$$J(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^K, \dots, z_{\rho_K}^K, z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^K, \dots, z_{\rho_K}^K) = 0.$$

A tout élément particulier de M , représenté par les valeurs numériques de ses coordonnées, correspond un élément de M' , dont les valeurs numériques sont données par les équations (C), où les λ , avons-nous vu, ont des *valeurs arbitraires*. Ces deux systèmes de coordonnées de M et de M' , satisfont, quels que soient les λ , à la relation $J = 0$. Celle-ci est donc une conséquence des équations (C), ou encore, puisqu'elle est indépendante des λ , des équations (D), qui se déduisent des (C) par l'élimination des λ .

2. Ces équations (D) jouissent de propriétés remarquables. D'abord, M pouvant être à elle-même son homologue par la transformation identique, elles sont identiquement satisfaites, quand on y fait, pour toutes les valeurs des indices i et K :

$$z_i^K = z_i^K.$$

Considérons ensuite deux multiplicités homologues de M , quelconques, M' et M'' . D'après la propriété de groupe, M' est aussi homologue de M'' . On verra plus loin que si l'on substitue M'' à M dans les équations (C), l'élimination des λ se fait de la même manière. On peut donc établir entre M'' et M' les mêmes relations qu'entre M et M' , savoir:

$$z_i^h = G_i^h(z_{\mu_0+1}^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_{\mu_h+1}^h, \dots, z_{\rho_h}^h, z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^h, \dots, z_{\rho_h}^h). \\ (h=0,1,2,\dots,K) \quad (i=1,2,\dots,\mu_h)$$

Celles-ci, comparées aux équations (D), donnent:

$$(5) \quad G_i^h(z_{\mu_0+1}^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_{\mu_h+1}^h, \dots, z_{\rho_h}^h, z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^h, \dots, z_{\rho_h}^h) \\ = G_i^h(z_{\mu_0+1}^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_{\mu_h+1}^h, \dots, z_{\rho_h}^h, z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^h, \dots, z_{\rho_h}^h). \\ (h=0,1,\dots,K) \\ (i=1,2,\dots,\mu_h)$$

Cela étant, considérons les valeurs numériques de trois éléments correspondants de M , M' et M'' : elles satisfont à ces relations (5). Celles de M et M'' étant choisies, on peut prendre, pour celles de M' , les valeurs fournies par les formules (C), où l'on attribue aux λ des valeurs arbitraires: cela revient à dire qu'on peut choisir arbitrairement les valeurs de $z'_{\mu_0+1}, \dots, z'_{\rho_0}, z'_{\mu_1+1}, \dots, z'_{\rho_1}, \dots, z'_{\mu_K+1}, \dots, z'_{\rho_K}$, les autres coordonnées étant alors données par les formules (D). Les relations (5), considérées comme ayant lieu entre deux éléments correspondants de M et M'' , ont donc lieu quelles que soient les valeurs des z_i^h qui y figurent: c'est dire qu'elles sont indépendantes de ces quantités. Par conséquent si l'on pose:

$$Z_i^h(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^h, \dots, z_{\rho_h}^h) \\ = G_i^h(c_{\mu_0+1}^0, \dots, c_{\rho_0}^0, \dots, c_{\mu_h+1}^h, \dots, c_{\rho_h}^h, z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^h, \dots, z_{\rho_h}^h)$$

où les c sont des constantes arbitraires¹, les équations (5) se réduisent à:

$$Z_i^h(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^h, \dots, z_{\rho_h}^h) = Z_i^h(z_1'^{h0}, \dots, z_{\rho_0}'^{h0}, \dots, z_1'^{hh}, \dots, z_{\rho_h}'^{hh}).$$

(h=0,1,...,K) (i=1,2,...,\mu_h)

Elles ont lieu quelle que soit la multiplicité M'' , homologue de M , de sorte qu'on a aussi, entre M et M' :

$$(E_0) \quad Z_i^0(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0) = Z_i^0(z_1'^{00}, \dots, z_{\rho_0}'^{00}) \quad (i=1,2,\dots,\mu_0)$$

$$(E_1) \quad Z_i^1(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1) = Z_i^1(z_1'^{10}, \dots, z_{\rho_0}'^{10}, z_1'^{11}, \dots, z_{\rho_1}'^{11}) \quad (i=1,2,\dots,\mu_1)$$

.

$$(E_K) \quad Z_i^K(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^K, \dots, z_{\rho_K}^K) = Z_i^K(z_1'^{K0}, \dots, z_{\rho_0}'^{K0}, \dots, z_1'^{KK}, \dots, z_{\rho_K}'^{KK}). \quad (i=1,2,\dots,\mu_K).$$

Les fonctions Z , d'après leur définition, se réduisent respectivement à $z_1^0, \dots, z_{\mu_0}^0, z_1^1, \dots, z_{\mu_1}^1, \dots, z_1^K, \dots, z_{\mu_K}^K$, lorsqu'on y fait

$$z_{\mu_0+1}^0 = c_{\mu_0+1}^0, \dots, z_{\rho_0}^0 = c_{\rho_0}^0, \dots, z_{\rho_K}^K = c_{\rho_K}^K.$$

Il en résulte que les équations (E) sont indépendantes. Elles doivent en outre être des conséquences des équations (D); et par suite, elles forment un système équivalent au système (D).

¹ Les valeurs des constantes c sont assujetties seulement à laisser holomorphes les fonctions G .

Ces fonctions Z sont appelées *invariants de la multiplicité M , relatifs au groupe de transformations* considéré.

Je dis que, de plus, tout invariant d'ordre K , $H(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^K, \dots, z_{\rho_K}^K)$ est une fonction des invariants $Z_1^0, \dots, Z_{\mu_0}^0, \dots, Z_1^K, \dots, Z_{\mu_K}^K$, d'ordre K ou d'ordre inférieur qui viennent d'être obtenus.

En effet, d'après la définition de H , on aura, quelles que soient les deux multiplicités M et M' se déduisant l'une de l'autre par une transformation du groupe:

$$H(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^K, \dots, z_{\rho_K}^K) = H(z_1'^0, \dots, z_{\rho_0}'^0, \dots, z_1'^K, \dots, z_{\rho_K}'^K)$$

et cette relation, d'ordre K , sera nécessairement une conséquence des équations $(D_0), (D_1), \dots, (D_K)$, ou encore, des équations $(E_0), (E_1), \dots, (E_K)$. En résolvant ces dernières par rapport aux quantités z' , pour les porter dans $H(z_1'^0, \dots, z_{\rho_0}'^0, \dots, z_1'^K, \dots, z_{\rho_K}'^K)$, il faudra donc que les z' disparaissent, ce qui exige bien que H soit une fonction de $Z_1^0, \dots, Z_{\mu_0}^0, \dots, Z_1^K, \dots, Z_{\mu_K}^K$.

De là cette proposition:

Théorème I. *Lorsqu'une multiplicité M , soumise aux transformations d'un groupe de Lie, admet des invariants, ceux d'un ordre quelconque K ou d'ordre inférieur sont fonctions d'un nombre limité d'entre eux; et ces derniers peuvent se déduire, à l'aide de différentiations et d'éliminations seulement, des équations de définition du groupe.*

Toute relation différentielle d'ordre K existant entre M et toute multiplicité homologue M' , est une conséquence des relations obtenues en égalant entre eux les invariants distincts d'ordre K et d'ordre inférieur, de M et de M' .

3. *Equations invariantes.* Dans ce qui précède, on a supposé que M était une *multiplicité générale*, de telle façon que l'on pouvait résoudre les équations $(C_0), (C_1), \dots, (C_K)$ par rapport au plus grand nombre possible de paramètres $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^K$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce nombre s'abaisse s'expriment par des relations obtenues en annulant identiquement, quels que soient les λ , les déterminants fonctionnels d'un certain ordre des seconds membres des équations $(C_0), (C_1), \dots, (C_K)$ par rapport aux λ . On obtient ainsi un système d'équations, ou, plus généralement, plusieurs systèmes distincts, les conditions cherchées étant que M satisfasse à l'un quelconque d'entre eux.

Soit donc, l'un de ces systèmes:

$$(6) \quad J_i(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, \dots, z_1^K, \dots, z_{\rho_K}^K) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, \sigma_K)$$

et supposons que la multiplicité initiale satisfasse à ce système: j'appelle alors M , *multiplicité particulière*, et je dis que toute multiplicité M' , transformée de M , satisfait au même système (6), qui pourra être appelé *système d'équations invariantes* par rapport au groupe de transformations.

En effet, remarquons d'abord que l'élimination des λ entre les équations $(C_0), (C_1), \dots, (C_K)$ donne dans cette hypothèse entre M et M' , certaines relations différentielles dont le nombre est supérieur à celui que l'on obtient dans le cas général, et n'est pas nul. Ces relations sont d'ailleurs indépendantes, et se présentent sous la même forme que les équations (D) : appelons-les $(\Delta_0), (\Delta_1), \dots, (\Delta_K)$.

Cela étant, considérons une troisième multiplicité M'' , homologue de M et cherchons les relations qui existent entre M' et M'' . Soient x_1, x_2, \dots, x_r les coordonnées d'un point de M , x'_1, x'_2, \dots, x'_r celles d'un point de M' et x''_1, \dots, x''_r , celles d'un point de M'' . Nous regarderons M'' comme une représentation analytique nouvelle de la multiplicité M , obtenue en faisant le changement de variables indépendantes et de fonctions:

$$x''_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_r) \quad (i=1, 2, \dots, r)$$

défini par la transformation qui fait passer de M à M'' . On sait (1^{ère} partie, ch. II) qu'on peut lui associer un changement de paramètres:

$$\lambda_i''^h = L_i^h(x_1, \dots, x_r, \lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \dots, \lambda_1^h, \dots, \lambda_{\varepsilon_h}^h) \quad \left(\begin{matrix} h=1, 2, \dots, K \\ i=1, 2, \dots, \varepsilon_h \end{matrix} \right)$$

de telle façon que les équations qui se déduisent des (A) en substituant comme coordonnées les x'' aux x , s'obtiennent simplement, en remplaçant dans (A) les x et λ par les x'' et λ'' correspondants. Elles deviennent ainsi:

$$(A'') \quad \frac{\partial^h x''_i}{\partial x_1''^{a_1} \dots \partial x_r''^{a_r}} = \varphi_{i, a_1, \dots, a_r}(x''_1, \dots, x''_r, \lambda_1''^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}''^0, \dots, \lambda_1''^h, \dots, \lambda_{\varepsilon_h}''^h). \\ (h=1, 2, \dots, K) \quad (i=1, 2, \dots, r) \quad (a_1 + a_2 + \dots + a_r = h)$$

D'autre part, le changement de variables et de fonctions qui met M sous

la forme M' , donne les relations suivantes, analogues des (B) et ayant nécessairement même forme:

$$(B'') \quad z_i'^h = \psi_i^h \left(z_1'', \dots, z_{\rho_1}'', \dots, z_1''^h, \dots, z_{\rho_h}'', \dots, \frac{\partial^h x_j'}{\partial x_1''^{a_1} \dots \partial x_n''^{a_n}}, \dots \right)$$

(h=1, ..., K) (i=1, 2, ..., \rho_K)

de telle sorte que M' se rattache à M'' par les relations suivantes (C'') qui ont encore même forme que (C):

$$(C'') \quad z_i'^h = \bar{\omega}_i^h(z_1''^0, \dots, z_{\rho_0}'', \dots, z_1''^h, \dots, z_{\rho_h}'', \lambda_1''^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}'', \dots, \lambda_1''^h, \dots, \lambda_{\varepsilon_h}'').$$

(h=0, 1, ..., K) (i=1, 2, ..., \rho_h)

Les relations entre M' et M'' s'obtiendraient en éliminant les λ'' entre ces équations C'' . Or, entre M et M' , on a, jusqu'à l'ordre K , les relations indépendantes $(\Delta_0), (\Delta_1), \dots, (\Delta_K)$; si, dans ces dernières on remplace les éléments de M , par leurs valeurs, sous la forme M' , elles deviennent des relations entre M' et M'' , $(\Delta_0''), (\Delta_1''), \dots, (\Delta_K'')$, qui restent indépendantes, étant toujours résolues par rapport aux mêmes quantités $z_i''^K$. L'élimination des λ entre $(C_0''), (C_1''), \dots, (C_K'')$ entraîne donc les relations indépendantes $(\Delta_0'), (\Delta_1'), \dots, (\Delta_K')$, et par suite, (M'') est telle que les équations (C'') ne sont pas résolubles par rapport au nombre maximum de paramètres λ'' , sans quoi, il ne pourrait exister entre M' et M'' qu'un nombre moindre de relations indépendantes.

Cette conclusion subsistant, quelle que soit M'' , homologue de M , il faut donc que le système (6) ou l'un des systèmes analogues soit satisfait par M'' , indépendamment des arbitraires dont dépend celle-ci; et ce fait ne peut avoir lieu que pour le système (6) lui-même, le seul qui soit satisfait quand on prend pour M'' , la multiplicité M elle-même, qui correspond à la transformation identique. En particulier, on voit bien que deux multiplicités homologues, sont ou *générales*, ou *particulières*, en même temps, résultat auquel nous avons fait appel précédemment (§ 2, page 22).

4. L'étude des multiplicités satisfaisant à un *système invariant d'équations* se fera de la même manière que celle des multiplicités générales. Les coordonnées des éléments de pareilles multiplicités satisfont au système (6), et, pour les ordres supérieurs, aux équations qui s'en déduisent par dérivation. Ces coordonnées s'expriment donc en fonction d'un certain

nombre d'entre elles, ou de certains paramètres, pris comme nouvelles coordonnées. On peut ainsi transformer les équations (B) et (C) de façon à n'y laisser figurer que ces nouvelles coordonnées. De là une seconde classification de ces multiplicités, en *multiplicités générales* qui ne satisfont à aucune équation nouvelle donnée a priori, et en *multiplicités particulières*. Pour les premières, l'élimination des λ entre les équations (C) donne, s'il y a lieu, des relations, analogues aux équations (E) entre des *invariants* des deux multiplicités; les secondes sont définies par des *systèmes d'équations invariantes* entre les coordonnées d'une même multiplicité; et ainsi de suite. Ces divisions et subdivisions ne peuvent d'ailleurs pas se prolonger indéfiniment: on ne peut concevoir, en effet, qu'il y ait un nombre illimité de relations entre les coordonnées d'ordre K ou d'ordre inférieur, ces coordonnées étant en nombre fini.

Cette classification effectuée, on est en mesure d'établir toutes les équations aux dérivées partielles d'un ordre quelconque K et d'ordre inférieur auxquelles satisfont les multiplicités M' , transformées d'une multiplicité initiale, M , donnée. D'abord, ces équations comprennent toutes les *équations invariantes* auxquelles satisfait M . Quant aux autres, elles sont satisfaites pour toutes les valeurs des quantités z'^0, z'^1, \dots, z'^K données par les formules (C); elles sont donc des conséquences des équations (E) (ou des équations analogues, quand M n'est pas une multiplicité générale). Dans ces équations (E), les quantités z^0, z^1, \dots, z^K qui y figurent sont des fonctions données des r variables indépendantes y_1, y_2, \dots, y_r . L'élimination de ces dernières, si elle est possible, donnera enfin des relations de la forme suivante, auxquelles satisfont les multiplicités M' :

$$\Phi(Z_1^0, \dots, Z_{\mu_0}^0, Z_1^1, \dots, Z_{\mu_1}^1, \dots, Z_1^K, \dots, Z_{\mu_K}^K) = 0$$

où les Z sont pris en fonction des quantités z'^0, z'^1, \dots, z'^K .

On obtient ainsi toutes les équations cherchées, d'où la proposition suivante qui complète la précédente:

Théorème II. *Etant donnée une multiplicité M , que l'on soumet à toutes les transformations d'un groupe de Lie, les multiplicités homologues M' satisfont à des équations aux dérivées partielles qui sont de deux sortes. Ces équations s'obtiennent en exprimant pour les unes, que M satisfait aux mêmes*

systèmes d'équations invariantes que M , pour les autres, que les invariants de M' sont liés par les mêmes relations que ceux de M .

Ces équations invariantes et ces invariants se déduisent d'ailleurs par de simples différentiations et éliminations des équations de définition du groupe.

5. **Remarque.** Nous avons exclu de notre analyse, parmi les multiplicités M' , transformées de M , celles pour lesquelles y'_1, y'_2, \dots, y'_n sont liées entre elles par une relation, et ne peuvent plus être prises comme variables indépendantes. Il est bien évident par raison de continuité, que les invariants absolus et les équations invariantes ne cessent pas d'avoir un sens dans ce cas.

En effet, les quantités $y'_1, \dots, y'_n, z'_1, \dots, z'_p$, fonctions de $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p$ ne cessent pas de représenter une multiplicité à n dimensions, sans quoi, en repassant de M' à M par la transformation inverse, on trouverait que M a moins de n dimensions distinctes. Il est donc possible de prendre comme variables indépendantes, dans M , n quantités distinctes parmi $y'_1, \dots, y'_n, z'_1, \dots, z'_p$. Alors toute expression différentielle où y'_1, \dots, y'_n sont les variables indépendantes se transforme en une expression nouvelle ayant un sens bien défini. Les invariants et équations invariantes subsistent encore avec ces nouvelles variables, et, en particulier dans le cas des multiplicités M' qui avaient été précédemment exclues.

Par exemple, considérons, dans le plan, le groupe des rotations autour de l'origine. Une courbe définie par une fonction z , de y , admet pour invariant

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} \left(y \frac{dz}{dy} - z \right)$$

qui représente la distance à l'origine de la tangente au point y, z . Notre analyse tombe en défaut, lorsque la courbe en y, z se transforme en une courbe en y', z' , pour laquelle on aurait $y' = \text{const}$. Mais, en prenant z pour variable indépendante, l'invariant considéré devient:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}} \left(y - z \frac{dy}{dz} \right)$$

expression qui pour la courbe $y' = \text{const.}$ se réduit à y' . On a donc, entre la courbe en y, z , et cette courbe particulière qui est une de ses transformées, la relation:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} \left(y \frac{dz}{dy} - z \right) = y'.$$

6. **Exemple.** Considérons le groupe des mouvements dans un plan, dont la transformation générale est:

$$x'_1 = a + x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha,$$

$$x'_2 = b + x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha$$

où a, b, α sont des constantes arbitraires. Les équations de définition (A) sont ici:

$$x'_1 = \lambda_1, \quad x'_2 = \lambda_2,$$

$$\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} = \cos \alpha, \quad \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} = -\sin \alpha, \quad \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} = \sin \alpha, \quad \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} = \cos \alpha$$

les dérivées d'ordre supérieur étant toutes nulles, λ_1, λ_2 et α étant trois paramètres arbitraires.

Effectuons ces transformations sur une courbe définie par une fonction z de y ; la courbe transformée sera définie par une fonction z' de y' en posant:

$$y = x_1, \quad z = x_2,$$

$$y' = x'_1, \quad z' = x'_2$$

et on a:

$$\frac{dz'}{dy'} = \frac{\frac{\partial x'_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} \frac{dz}{dy}}{\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \frac{dz}{dy}}.$$

En tenant compte immédiatement des équations de définition, ceci donne, comme équations (C):

$$(C_1) \quad \frac{dz'}{dy'} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha \frac{dz}{dy}}{\cos \alpha - \sin \alpha \frac{dz}{dy}}$$

et, pour le second ordre:

$$(C_2) \quad \frac{d^2 z'}{dy'^2} = \frac{\left(\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} - \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \right) \frac{d^2 z}{dy^2}}{\left(\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \frac{dz}{dy} \right)^3} = \frac{\frac{d^2 z}{dy^2}}{\left(\cos \alpha - \sin \alpha \frac{dz}{dy} \right)^3}.$$

La première équation donne:

$$\frac{\cos \alpha - \sin \alpha \frac{dz}{dy}}{1} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha \frac{dz}{dy}}{\frac{dz'}{dy'}} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \left(\frac{dz'}{dy'} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}},$$

de sorte que l'élimination de α donne:

$$(D_2) \quad \frac{d^2 z'}{dy'^2} = \frac{d^2 z}{dy^2} \cdot \frac{\left(1 + \left(\frac{dz'}{dy'} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}},$$

équation qui se met sous la forme:

$$(E_2) \quad \left(1 + \left(\frac{dz'}{dy'} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{d^2 z'}{dy'^2} = \left(1 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{d^2 z}{dy^2}$$

où l'on voit apparaître l'invariant bien connu, donné par la *courbure* de la courbe.

Le calcul tombe en défaut dans le cas où (C_1) n'est plus résoluble par rapport à α , c'est-à-dire, lorsque on a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{dz'}{dy'} \right) &= \left[\left(\cos \alpha - \sin \alpha \frac{dz}{dy} \right)^2 + \left(\sin \alpha + \cos \alpha \frac{dz}{dy} \right)^2 \right] \frac{1}{\left(\cos \alpha - \sin \alpha \frac{dz}{dy} \right)^2} \\ &= \frac{1 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2}{\left(\cos \alpha - \sin \alpha \frac{dz}{dy} \right)^2} = 0. \end{aligned}$$

L'équation $1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = 0$ est une *équation invariante*, qui entraîne bien $1 + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2 = 0$: elle représente les deux systèmes de *droites isotropes* qui jouent donc le rôle de *courbes particulières* par rapport aux transformations considérées.

7. **Application.** Reprenons les équations de définition d'un groupe de transformations, entre les m variables x_1, x_2, \dots, x_m et leurs m fonctions x'_1, x'_2, \dots, x'_m . Adjoignons-leur m nouvelles coordonnées, non transformées, en posant:

$$(7) \quad u'_1 = u_1, \quad u'_2 = u_2, \quad \dots, \quad u'_m = u_m$$

et faisons porter la transformation sur une multiplicité définie par les m fonctions x_1, x_2, \dots, x_m des m variables indépendantes u_1, u_2, \dots, u_m .

La théorie générale, reprise sur cet exemple, montre que les équations (C) comprennent, en outre des équations (7), d'autres équations exprimant x'_1, x'_2, \dots, x'_m et leurs dérivées par rapport à u'_1, u'_2, \dots, u'_m , en fonction des paramètres λ , des fonctions x_1, x_2, \dots, x_m , et des dérivées de celles-ci par rapport à u_1, u_2, \dots, u_m , ces expressions étant en outre *indépendantes* de u_1, u_2, \dots, u_m .

Il en résulte que les équations (E) sont, dans le cas d'une multiplicité initiale générale, de la forme:

$$\begin{aligned}
 u'_i &= u_i, & (i=1, 2, \dots, m) \\
 J_i^0(x'_1, x'_2, \dots, x'_m) &= J_i^0(x_1, x_2, \dots, x_m) & (i=1, 2, \dots, \mu_0) \\
 \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 J_i^N(x'_1, \dots, x'_m, \dots, \frac{\partial x'_h}{\partial u'_K}, \dots, \frac{\partial^N x'_h}{\partial u_1^{a_1} \dots \partial u_m^{a_m}}, \dots) & \\
 = J_i^N(x_1, \dots, x_m, \dots, \frac{\partial x_h}{\partial u_K}, \dots, \frac{\partial^N x_h}{\partial u_1^{a_1} \dots \partial u_m^{a_m}}, \dots) & (i=1, 2, \dots, \mu_N)
 \end{aligned}$$

où les invariants J sont indépendants des variables u_1, \dots, u_m .

Ces invariants J jouent un rôle capital. On vient de voir qu'ils restent inaltérés si on effectue sur les x' un changement de fonctions défini par une transformation du groupe; d'où en se reportant au théorème IV (1^{ère} partie, ch. II):

Théorème IV. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation appartienne au groupe défini par les équations (8) est qu'elle laisse invariantes les expressions J , quand on effectue sur les x' un changement de fonctions défini par cette transformation.*

CHAPITRE II.

Les invariants et équations invariantes, définis à l'aide des transformations infinitésimales d'un groupe de Lie.

1. Considérons les groupes, dits à *un paramètre*, dont les transformations dépendent d'une seule constante arbitraire. S'il y a n variables, les équations de définition comprendront $n - 1$ équations d'ordre zéro, de la forme:

$$J_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = J_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=2,3,\dots,n)$$

où les $n - 1$ fonctions $J_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont distinctes entre elles et de l'une au moins, x_1 , par exemple, des variables x_1, x_2, \dots, x_n . Pour les ordres supérieurs, il y a autant d'équations que de dérivées.

En posant:

$$\begin{aligned} X_i &= J_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ X'_i &= J_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \end{aligned} \quad (i=2,3,\dots,n)$$

la transformation générale du groupe sera donc de la forme suivante:

$$\begin{aligned} x'_1 &= f(x_1, X_2, \dots, X_n, a) \\ X'_i &= X_i \end{aligned} \quad (i=2,3,\dots,n)$$

avec la constante arbitraire a . La première équation peut être résolue par rapport à a :

$$(1) \quad \omega(x'_1, x_1, X_2, \dots, X_n) = a$$

et la fonction ω sera telle que l'équation (1) combinée à:

$$(2) \quad \omega(x''_1, x'_1, X_2, \dots, X_n) = b$$

entraînera:

$$\omega(x''_1, x_1, X_2, \dots, X_n) = c,$$

c étant une nouvelle constante, et cela, quelles que soient les constantes a et b . Ceci veut dire que les équations homogènes en dx_1, dx'_1, dx''_1 :

$$\frac{\partial \omega(x'_1, x_1)}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial \omega(x'_1, x_1)}{\partial x_1} dx_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \omega(x''_1, x'_1)}{\partial x''_1} dx''_1 + \frac{\partial \omega(x''_1, x'_1)}{\partial x'_1} dx'_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \omega(x''_1, x_1)}{\partial x''_1} dx''_1 + \frac{\partial \omega(x''_1, x_1)}{\partial x_1} dx_1 = 0$$

sont compatibles quels que soient x_1, x'_1, x''_1 . D'où l'identité:

$$\frac{\frac{\partial \omega(x''_1, x'_1)}{\partial x''_1}}{\frac{\partial \omega(x''_1, x'_1)}{\partial x'_1}} \cdot \frac{\partial \omega(x'_1, x_1)}{\partial x'_1} + \frac{\frac{\partial \omega(x''_1, x_1)}{\partial x''_1}}{\frac{\partial \omega(x''_1, x_1)}{\partial x_1}} \cdot \frac{\partial \omega(x'_1, x_1)}{\partial x_1} = 0.$$

Cette identité subsistant si on attribue à x''_1 une valeur numérique quelconque, la fonction $\omega(x'_1, x_1, X_2, \dots, X_n)$ satisfait donc à une équation de la forme suivante:

$$\varphi(x'_1, X_2, \dots, X_n) \frac{\partial \omega}{\partial x'_1} + \varphi(x_1, X_2, \dots, X_n) \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = 0$$

et par suite, l'équation (1) peut s'écrire:

$$J_1(x'_1, X_2, \dots, X_n) - J_1(x_1, X_2, \dots, X_n) = t$$

où t est une nouvelle constante, fonction de a .

$\omega(x'_1, x_1, X_2, \dots, X_n)$ dépendant nécessairement de x'_1 et de x_1 , il en est de même de $J_1(x_1, X_2, \dots, X_n)$ relativement à x_1 , et, par suite, en posant:

$$X_1 = J_1(x_1, X_2, \dots, X_n), \quad X'_1 = J_1(x'_1, X_2, \dots, X_n),$$

X_1, X_2, \dots, X_n seront indépendants, et on a:

$$X'_1 = X_1 + t.$$

Donc:¹

Théorème I. *On peut, par un choix convenable de coordonnées, mettre la transformation générale d'un groupe de Lie à un paramètre sous la forme:*

$$(3) \quad X'_1 = X_1 + t, \quad X'_2 = X_2, \quad \dots, \quad X'_n = X_n$$

où t est une constante arbitraire.

2. On retrouve ainsi une des propriétés, aujourd'hui bien classiques, des groupes à un paramètre. On pourrait en déduire les autres. Je remarquerai seulement, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ soit un invariant de ce groupe, est que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = 0.$$

En retournant aux coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n , on trouve:

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = \xi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

expression qu'on représente par Xf .

La transformation (3), pour $t = 0$, est la *transformation identique*; pour t ayant une valeur infiniment petite δt , elle est dite *transformation infinitésimale*, et attribuée à une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un accroissement dont le premier terme est précisément $Xf \cdot \delta t$.

¹ LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, I, chap. 3, p. 49.

on trouve ainsi, en écrivant que les équations de définition sont satisfaites, jusqu'aux termes du premier ordre, que les ξ sont assujettis aux seules relations suivantes, *linéaires et homogènes* par rapport aux ξ et à leurs dérivées:

$$\begin{aligned}
 & \sum_j \left(\frac{\partial J_i^0}{\partial x_j} \right)_0 \cdot \xi_j = 0 && (i=1,2,\dots,\mu_0) \\
 & \sum_j \left(\frac{\partial J_i^1}{\partial x_j} \right)_0 \xi_j + \sum_{j,\mu} \left(\frac{\partial J_i^1}{\partial \frac{\partial x_j}{\partial x_\mu}} \right)_0 \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial x_\mu} = 0 && (i=1,2,\dots,\mu_1) \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & \sum \left(\frac{\partial J_i^N}{\partial x_j} \right)_0 \xi_j + \dots + \sum \left(\frac{\partial J_i^N}{\partial x_{j,a_1,a_2,\dots,a_n}} \right)_0 \cdot \xi_{j,a_1,a_2,\dots,a_n} = 0 && (i=1,2,\dots,\mu_N)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

où l'indice inférieur 0 indique que l'on prend les valeurs des dérivées des J pour

$$x'_i = x_i, \quad \frac{\partial x_j}{\partial x_\mu} = \varepsilon_{j,\mu}, \quad \dots, \quad x'_{j,a_1,a_2,\dots,a_n} = 0.$$

A un autre point de vue (chap. I, théor. IV), il suffit aussi d'exprimer que la transformation (4), où les x' et les x sont deux systèmes de n fonctions des mêmes variables indépendantes u_1, u_2, \dots, u_n , laisse invariante les expressions J^0, J^1, \dots, J^N , fonctions des x et de leurs dérivées par rapport aux u . En calculant, à l'aide de (4), les expressions des dérivées des x' , les termes du premier ordre obtenus sont les mêmes que ceux qui se déduiraient d'une transformation infinitésimale entre les x et leurs dérivées par rapport aux u :

$$X^{(N)} f = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dots + \sum \bar{\xi}_{i,a_1,a_2,\dots,a_n} \frac{\partial f}{\partial x_{i,a_1,a_2,\dots,a_n}}$$

où l'on pose:

$$x_{i,a_1,a_2,\dots,a_n} = \frac{\partial^N x_i}{\partial u_1^{a_1} \partial u_2^{a_2} \dots \partial u_n^{a_n}}.$$

Les $\bar{\xi}_{i,a_1,a_2,\dots,a_n}$ sont des fonctions bien déterminées, lorsque les ξ sont don-

nés, des x et de leurs dérivées, et $X^{(N)}f$ n'est autre chose que la *transformation prolongée*,¹ jusqu'à l'ordre N de

$$Xf = \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Les ξ sont donc assujettis à satisfaire aux identités suivantes, par rapport aux x et leurs dérivées:

$$(7) \quad XJ_i^0 = 0, \quad X^{(1)}J_i^1 = 0, \quad \dots, \quad X^{(N)}J_i^N = 0.$$

Or, ces mêmes relations expriment que les J admettent la transformation infinitésimale Xf , et par suite, son groupe à un paramètre.

Le raisonnement suppose d'ailleurs seulement que les ξ sont, dans (4), les coefficients des termes d'ordre le moins élevé. Donc:

Théorème II. *Etant donnée une transformation infiniment petite d'un groupe de Lie, la transformation infinitésimale définie par ses termes d'ordre le moins élevé, et son groupe à un paramètre appartiennent aussi au groupe de Lie.*²

Soit cette transformation infinitésimale, ayant mêmes termes du premier ordre que (4):

$$\bar{x}_i = x_i + \delta t \cdot \xi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots \quad (i=1,2,\dots,n)$$

on aura:

$$x'_i = \bar{x}_i + \delta t^2 \cdot \theta_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots$$

ou en exprimant les seconds membres en fonction de $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$:

$$x'_i = \bar{x}_i + \delta t^2 \cdot \theta_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \dots$$

Pour les mêmes raisons que tout à l'heure, la transformation infinitésimale:

$$Yf = \sum_i \theta_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

¹ LIE, *Transformationsgruppen*, I, ch. 25, p. 523. — Je suppose connus ici tous les résultats exposés dans ce chapitre.

² LIE, *Die Grundlagen*, etc., p. 342.

appartient encore au groupe; et ainsi de suite. On peut donc considérer la transformation infiniment petite (4), en ce qui concerne au moins ses termes pris jusqu'à un ordre infinitésimal quelconque, comme *obtenue en effectuant successivement un certain nombre de transformations infinitésimales du groupe.*

Il y a plus, si Xf et Yf appartiennent toutes deux au groupe, $X^{(N)}f$ et $Y^{(N)}f$ satisfont toutes deux aux équations (7), et par suite, aussi $(X^{(N)}Y^{(N)})$. Cette dernière, étant, comme on sait,¹ la transformation prolongée de (XY) , la transformation infinitésimale (XY) appartient au groupe. Donc:

Théorème III. *Si les deux transformations infinitésimales Xf et Yf appartiennent à un groupe de Lie, il en est de même de leur crochet (XY) .²*

4. Cette propriété du système d'équations (6) permet de retrouver les invariants dont on a établi l'existence, par une marche tout à fait parallèle à celle déjà suivie.

Reprenons, en effet, un système de p fonctions z_1, z_2, \dots, z_p de n variables indépendantes, y_1, y_2, \dots, y_n , les $r = n + p$ quantités y et z n'étant autre chose que x_1, x_2, \dots, x_r . Considérons une transformation infinitésimale quelconque:

$$Xf = \sum_{i=1}^{i=n} \eta_i(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p) \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{i=p} \zeta_i(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p) \frac{\partial f}{\partial z_i}$$

et, en calculant les variations qu'elle fait subir aux dérivées des z , par rapport aux y , *prolongeons-la* jusqu'à un ordre quelconque K

$$X^{(K)}f = \sum_{i=1}^{i=n} \eta_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{i=p} \zeta_i \frac{\partial f}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^{i=\rho_1} \zeta_i^{(1)} \frac{\partial f}{\partial z_i^1} + \dots + \sum_{i=1}^{i=\rho_K} \zeta_i^{(K)} \frac{\partial f}{\partial z_i^K}.$$

¹ LIE, *Transformationsgruppen*, I, chap. 25, p. 547.

² LIE, *Die Grundlagen*, etc., p. 348. — Dans le cas d'un groupe fini, les transformations infinitésimales du groupe sont des fonctions linéaires à coefficients constants d'un certain nombre d'entre elles X_1f, X_2f, \dots, X_rf , et ce théorème établit l'existence des relations:

$$(X_i X_k) = \sum_j c_{iks} X_s f.$$

Les y et z étant égaux aux coordonnées x , nous égalons les η et ζ aux ξ correspondants, ceux qui sont relatifs aux variables non transformées, s'il y en a, étant égalés à zéro. Alors, les ξ satisfaisant aux relations (6) et à celles qui s'en déduisent par dérivation, on peut, jusqu'à l'ordre K , exprimer un certain nombre de ξ et de leurs dérivées, en fonction *linéaire et homogène* des autres, qui restent *arbitraires*, et on trouve ainsi, $X^{(K)}f$ étant linéaire et homogène par rapport aux ξ et leurs dérivées:

$$(8) \quad X^{(K)}f = \sum_{i=1}^{i=\varepsilon_0} \xi_i^0 X_{0,i}f + \sum_{i=1}^{i=\varepsilon_1} \xi_i^1 X_{1,i}f + \dots + \sum_{i=1}^{i=\varepsilon_K} \xi_i^K X_{K,i}f$$

où les $X_{K,i}f$ sont des transformations infinitésimales bien déterminées, par rapport aux y, z , et aux dérivées des z et les ξ_i^K des coefficients arbitraires.

Toute fonction des y , des z et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre K , ou tout système d'équations entre ces mêmes quantités qui admet toutes les transformations infinitésimales du groupe, admet donc les transformations

$$(9) \quad X_{0,i}f, \quad X_{1,i}f, \quad \dots, \quad X_{K,i}f$$

et réciproquement.

Les équations obtenues en égalant à zéro les expressions (9) forment d'ailleurs un *système complet*. En effet, si $X^{(K)}f$ et $Y^{(K)}f$ appartiennent toutes deux à la forme (8), nous savons qu'il en est de même de leur crochet $(X^{(K)}Y^{(K)})$, quels que soient au reste les coefficients de $X^{(K)}f$ et de $Y^{(K)}f$. En particulier, $(X_{K,i}, X_{K,j})$ appartient donc à cette forme (8): c'est donc bien une combinaison linéaire et homogène de transformations (9).

5. Je dis que, de cette manière, on n'obtient pas d'invariants distincts de ceux obtenus par le procédé du chapitre précédent. En effet, d'abord, ces nouveaux invariants admettent une transformation infiniment petite quelconque du groupe, car l'expression obtenue en faisant une telle transformation sur l'un d'eux, est, jusqu'à un ordre infinitésimal quelconque, la même que si on effectuait successivement plusieurs transformations infinitésimales. Elle ne diffère donc de l'invariant que de quantités dont l'ordre peut être pris arbitrairement, et par suite, lui est identique.

Or, en se reportant aux équations (A) du chapitre précédent, une transformation infiniment petite s'obtient en attribuant aux paramètres λ des *valeurs arbitraires*, assujetties seulement à être infiniment voisines de celles qu'elles ont dans le cas de la transformation identique. Tout invariant ou équation invariante admettant les transformations (9) est donc indépendant de ces arbitraires, et se confond bien avec un invariant ou une équation invariante, obtenue par le premier procédé. Donc:

Théorème IV. *Les invariants d'un groupe de Lie peuvent s'obtenir par la recherche des solutions communes à un système complet d'équations linéaires aux dérivées partielles; la formation de ce système résulte immédiatement des équations de définition des transformations infinitésimales du groupe.*

*Les systèmes d'équations invariantes sont ceux qui admettent l'ensemble des transformations infinitésimales ainsi formées.*¹

6. **Exemple.** Reprenons le groupe des mouvements du plan, dont les équations de définition:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x'_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'_2}{\partial x_1}\right)^2 &= 1, & \left(\frac{\partial x'_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'_2}{\partial x_2}\right)^2 &= 1, \\ \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} &= 0, \\ 0 &= \frac{\partial^2 x'_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 x'_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 x'_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 x'_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 x'_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 x'_2}{\partial x_2^2} \end{aligned}$$

donnent, pour les transformations infinitésimales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} &= 0, & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} &= 0, \\ 0 &= \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2^2}. \end{aligned}$$

¹ LIE, *Über Differentialinvarianten*, Math. Annalen, t. 24, p. 566. — *Die Grundlagen*, etc., p. 370 et 374.

Rappelons que les systèmes d'équations invariantes dont il est question, s'obtiennent en égalant à zéro les déterminants d'un même ordre, formés avec les coefficients des transformations (9).

La transformation étant supposée porter sur une fonction $z = x_2$, d'une variable $y = x_1$, on aura :

$$\begin{aligned} \delta y &= \xi_1 \delta t, & \delta z &= \xi_2 \delta t, \\ \delta z' &= \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + z' \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) - z'^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} (1 + z'^2), \\ \delta z'' &= 2z' z'' \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} - z'' \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + z' \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) = 3z' z'' \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Les invariants du second ordre admettent ainsi les transformations :

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (1 + z'^2) \frac{\partial f}{\partial z'} + 3z' z'' \frac{\partial f}{\partial z''}$$

ce qui reproduit l'équation invariante du 1^{er} ordre :

$$(1 + z'^2) = 0$$

et l'invariant du second ordre :

$$z'' (1 + z'^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

CHAPITRE III.

Systèmes finis d'invariants, et paramètres différentiels.

1. Nous avons vu que toute multiplicité M' , déduite d'une multiplicité générale M , par une transformation d'un groupe de LIE, a ses invariants égaux à ceux de M , savoir :

$$J_i^K(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, \dots, z_1^K, \dots, z_{\rho_K}^K) = J_i^K(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, z_1^1, \dots, z_{\rho_1}^1, \dots, z_1^K, \dots, z_{\rho_K}^K)$$

(K=1,2,...) (i=1,2,...,\mu_K)

ou, pour abréger l'écriture :

$$(1) \quad J_i^K = J_i^K;$$

et les multiplicités M' satisfont aux équations obtenues par l'élimination des coordonnées y_1, y_2, \dots, y_n d'un point de M entre ces relations (1); et à celles-là seulement.

Supposons, par exemple, que l'on puisse trouver n invariants distincts I_1, I_2, \dots, I_n , en nombre égal à celui des coordonnées d'un point de M . Sur la multiplicité M , ils se réduisent à n fonctions de y_1, y_2, \dots, y_n que nous supposons encore distinctes. Alors, tout autre invariant J , de M , peut s'exprimer en fonction de I_1, I_2, \dots, I_n :

$$(2) \quad \bar{J} - \varphi(I_1, I_2, \dots, I_n) = 0$$

et les équations auxquelles satisfait M' sont les suivantes:

$$J' - \varphi(I_1, I_2, \dots, I_n) = 0$$

ou, plus simplement:

$$(3) \quad J' - \varphi' = 0.$$

On en déduit, par différentiation par rapport à y'_i :

$$(4) \quad \frac{dJ'}{dy'_i} - \frac{\partial \varphi'}{\partial I_1} \cdot \frac{dI_1}{dy'_i} - \dots - \frac{\partial \varphi'}{\partial I_n} \cdot \frac{dI_n}{dy'_i} = 0$$

où l'on représente par $\frac{df}{dy'_i}$, la dérivée totale, par rapport à y_i , d'une fonction f , de y_1, y_2, \dots, y_n , de z_1, z_2, \dots, z_p , et de leurs dérivées z_i^K , c'est-à-dire:

$$\frac{df}{dy'_i} = \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\partial f}{\partial z_\mu} \cdot \frac{\partial z_\mu}{\partial y_i} + \sum_{K \geq 1} \sum_{\mu=1}^{\mu=p_K} \frac{\partial f}{\partial z_\mu^K} \cdot \frac{\partial z_\mu^K}{\partial y_i}.$$

Ces relations (4) doivent se déduire, comme on sait, de la considération d'invariants nouveaux. En effet, il résulte d'abord des relations:

$$(5) \quad I'_1 = I_1, \quad \dots, \quad I'_n = I_n, \quad J' = J,$$

que I'_1, I'_2, \dots, I'_n , sont comme I_1, I_2, \dots, I_n , des fonctions distinctes

de y'_1, \dots, y'_n . Les relations (4) peuvent donc être résolues par rapport à $\frac{\partial \varphi'}{\partial I'_1}, \dots, \frac{\partial \varphi'}{\partial I'_n}$, et se mettre sous la forme:

$$(4') \quad \frac{D(I_1, I_2, \dots, I_n) \partial \varphi'}{D(y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \partial I'_i} - \frac{D(I_1, \dots, I_{i-1}, J, I_{i+1}, \dots, I_n)}{D(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)} = 0. \quad (i=1,2,\dots,n)$$

De la même manière, on déduit des identités (2) les suivantes:

$$\frac{D(I_1, I_2, \dots, I_n) \partial \varphi}{D(y_1, y_2, \dots, y_n) \partial I_i} - \frac{D(I_1, \dots, I_{i-1}, J, I_{i+1}, \dots, I_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} = 0.$$

Or, en vertu de (5), on a:

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial I'_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial I_i}$$

et par suite, les équations (4) deviennent:

$$(6) \quad \frac{D(I_1, \dots, I_{i-1}, J, I_{i+1}, \dots, I_n)}{D(I_1, \dots, I_{i-1}, I_i, I_{i+1}, \dots, I_n)} = \frac{D(I_1, \dots, I_{i-1}, J, I_{i+1}, \dots, I_n)}{D(I_1, \dots, I_{i-1}, I_i, I_{i+1}, \dots, I_n)}$$

où chacun des deux membres représente le quotient de deux déterminants fonctionnels formés avec des dérivées totales par rapport aux y' , pour le premier, aux y , pour le second.

Les équations (5) donnent donc par l'élimination de y_1, \dots, y_n , une relation, qui, par différentiation, conduit à n nouvelles; et celles-ci peuvent s'obtenir autrement par l'élimination de y_1, \dots, y_n entre les équations (5) et (6). On voit par là que:

Théorème I. *Etant donnés $n + 1$ invariants, le quotient de deux de leurs déterminants fonctionnels formés avec leurs dérivées totales par rapport aux n variables indépendantes, y_1, y_2, \dots, y_n , constitue un invariant nouveau.*

Nous dirons que cet invariant (6) se déduit par différentiation, de I_1, \dots, I_n, J , avec les invariants de base I_1, \dots, I_n .

2. Les équations, relatives à M' , auxquelles conduisent ces invariants, ne diffèrent pas de celles déduites par différentiation des équations

tions (3). Il en résulte qu'il sera possible, à partir d'un certain ordre, d'obtenir par ce procédé, appliqué aux invariants de cet ordre ou d'ordre inférieur, tous les invariants d'ordre supérieur. Autrement, on aurait ainsi un système d'équations aux dérivées partielles, qui, sans être incompatible, ne serait pas limité. Désignons par $I_1, I_2, \dots, I_n, J_1, J_2, \dots, J_\rho$, l'ensemble de tous ces invariants, pris jusqu'à cet ordre: nous dirons qu'ils forment un *système complet d'invariants*.

Cela étant, considérons deux multiplicités, l'une: M , générale et pour laquelle les *invariants de base* I_1, I_2, \dots, I_n sont *distincts*, définie par p fonctions z_1, z_2, \dots, z_p de y_1, y_2, \dots, y_n , l'autre: M' , représentée par p fonctions z'_1, \dots, z'_p des variables y'_1, y'_2, \dots, y'_n . S'il existe une transformation du groupe permettant de passer de M à M' , on peut exprimer y'_1, y'_2, \dots, y'_n en fonction de y_1, y_2, \dots, y_n , de façon à satisfaire simultanément aux équations:

$$(7) \quad I_1 = I_1, \quad \dots, \quad I_n = I_n, \quad J_1 = J_1, \quad \dots, \quad J_\rho = J_\rho.$$

Ces conditions sont en outre suffisantes. En effet, M étant soumise aux restrictions énoncées, les relations (7) entraînent les suivantes:

$$(8) \quad H' = H$$

où H est un invariant quelconque se déduisant par différentiation de ceux du système complet, et peut être par suite un invariant quelconque du groupe. Considérons alors un point quelconque $(y_1)_0, (y_2)_0, \dots, (y_n)_0$ de M , et les valeurs en ce point des z et leurs dérivées: $(z_1)_0, \dots, (z_p)_0, (z^1_1)_0, \dots, (z^1_{\rho_1})_0, \dots, (z^K_1)_0, \dots, (z^K_{\rho_K})_0, \dots$; puis, défini par les équations (7), le point correspondant de M' , $(y'_1)_0, (y'_2)_0, \dots, (y'_n)_0$, avec les valeurs, en ce point, des fonctions z' et de leurs dérivées: $(z'_1)_0, \dots, (z'_p)_0, (z'^1_1)_0, \dots, (z'^1_{\rho_1})_0, \dots, (z'^K_1)_0, \dots, (z'^K_{\rho_K})_0, \dots$.

Si on se reporte aux équations (C) du chapitre I:

$$(C) \quad z'^K_i = \bar{\omega}_i^K(z^0_1, \dots, z^0_{\rho_0}, z^1_1, \dots, z^1_{\rho_1}, \dots, z^K_1, \dots, z^K_{\rho_K}, \lambda^0_1, \dots, \lambda^0_{\varepsilon_0}, \dots, \lambda^K_1, \dots, \lambda^K_{\varepsilon_K}),$$

(K=1,2,...) (i=1,2,...,\rho_K)

les relations (7) et (8), satisfaites pour les valeurs particulières consi-

dérées, expriment que l'on peut attribuer aux paramètres λ des valeurs particulières $(\lambda_i^K)_0$, telle que, pour:

$$\lambda_i^K = (\lambda_i^K)_0, \quad z_i^K = (z_i^K)_0$$

on ait:

$$z_i'^K = (z_i'^K)_0$$

et cela, jusqu'à un ordre quelconque Q . A ces valeurs des paramètres λ correspondent des fonctions x'_1, x'_2, \dots, x'_r de x_1, x_2, \dots, x_r , satisfaisant aux équations du groupe, dont les valeurs ainsi que celles de toutes leurs dérivées, sont déterminées pour:

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_1)_0 = (y_1)_0, \quad \dots, \quad x_n = (x_n)_0 = (y_n)_0, \\ x_{n+1} &= (x_{n+1})_0 = (z_1)_0, \quad \dots, \quad x_r = (x_r)_0 = (z_p)_0. \end{aligned}$$

Ces fonctions représentent une transformation du groupe, qui, effectuée sur M , donne une nouvelle multiplicité \bar{M} , telle que, au point $(y_1)_0, \dots, (y_n)_0$ de M , correspond le point $(y'_1)_0, \dots, (y'_n)_0$, les valeurs des fonctions et de leurs dérivées en ce point étant en outre données par les équations (C), en y faisant $\lambda_i^K = (\lambda_i^K)_0$ et $z_i^K = (z_i^K)_0$. \bar{M} doit nécessairement se confondre avec M , les fonctions et toutes leurs dérivées ayant, dans chacune d'elles, les mêmes valeurs, pour les mêmes valeurs des variables indépendantes. La transformation considérée transforme donc bien M en M .

Ici pourrait se présenter cette objection que les développements ainsi obtenus peuvent ne pas être convergents; auquel cas la transformation qu'ils définissent serait illusoire. Mais toute solution des équations (7) peut être considérée comme représentant $r = n + p$ fonctions, $y'_1, \dots, y'_n, z'_1, \dots, z'_p$ des variables y_1, \dots, y_n . Notre proposition établit qu'à une pareille solution, correspondent r fonctions x'_1, x'_2, \dots, x'_r , des variables x_1, x_2, \dots, x_r , satisfaisant aux équations de définition du groupe, et se réduisant à ces fonctions $y'_1, \dots, y'_n, z'_1, \dots, z'_p$ de y_1, y_2, \dots, y_n , c'est-à-dire de x_1, x_2, \dots, x_n , lorsqu'on y fait:

$$x_{n+1} = z_1, \quad \dots, \quad x_r = z_p,$$

z_1, z_2, \dots, z_p étant les fonctions de y_1, y_2, \dots, y_n qui représentent M . Il résulte des propositions générales relatives aux équations aux dérivées

partielles, que, si ces fonctions $y'_1, \dots, y'_n, z'_1, \dots, z'_p$ de y_1, y_2, \dots, y_n sont régulières (nous supposons toujours qu'il en est ainsi), il en est de même des fonctions x'_1, x'_2, \dots, x'_r de x_1, x_2, \dots, x_r .

3. *Paramètres différentiels, ou opérations invariantes.* Les résultats précédents tombent en défaut lorsque, sur la multiplicité M , les invariants de base I_1, I_2, \dots, I_n ne sont plus distincts. Dans ce cas, M et ses transformées satisfont toutes à une même relation de la forme:

$$f(I_1, I_2, \dots, I_n) = 0.$$

On pourrait alors les traiter comme *multiplicités particulières*, satisfaisant à l'équation invariante précédente; mais ce procédé aurait le défaut d'exiger une étude spéciale pour chaque équation de cette forme; et la relation entre I_1, \dots, I_n peut d'ailleurs être arbitraire.

Il est préférable de reprendre la discussion générale à l'aide d'une notion nouvelle, celle de *paramètres différentiels* ou *opérations invariantes*. On appelle ainsi, étant donné un invariant J , une fonction de ses dérivées totales, $\frac{dJ}{dy_i}$, des variables y , des fonctions z et de leurs dérivées, qui, quelque soit J , constitue aussi un invariant: le paramètre est *du $K^{\text{ième}}$ ordre*, si les dérivées de J qu'il renferme sont d'ordre K et d'ordre inférieur. Dans le cas précédent nous avons établi l'existence de n paramètres différentiels du premier ordre:

$$\frac{D(I_1, \dots, I_{i-1}, J, I_{i+1}, \dots, I_n)}{D(I_1, \dots, I_i, \dots, I_n)}, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

lesquels sont des formes linéaires, homogènes, et indépendantes, de $\frac{dJ}{dy_1}, \dots, \frac{dJ}{dy_n}$.

La recherche de l'expression générale de ces paramètres différentiels se réduit à une simple construction d'invariants. Il suffit, aux fonctions z_1, z_2, \dots, z_p de y_1, \dots, y_n , d'en ajouter une nouvelle, J , que la transformation laisse invariante:

$$J' = J.$$

Les transformées des dérivées du premier ordre sont définies par les relations:

$$\frac{dJ}{dy_i} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{dJ}{dy'_\mu} \left[\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_i} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_{n+\nu}} \frac{\partial z_\nu}{\partial y_i} \right] \quad (i=1,2,\dots,n)$$

où les dérivées $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_i}$, $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_{n+\nu}}$, satisfont aux équations de définition du groupe. En les remplaçant par leurs expressions paramétriques, et résolvant par rapport aux $\frac{dJ}{dy_i}$, il vient:

$$(8) \quad \frac{dJ}{dy_i} = A_{i1} \frac{dJ}{dy_1} + A_{i2} \frac{dJ}{dy_2} + \dots + A_{in} \frac{dJ}{dy_n} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

où les A sont fonctions de $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_p, \frac{\partial z_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z_1}{\partial y_n}, \dots, \frac{\partial z_p}{\partial y_n}$ et des paramètres $\lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \dots, \lambda_{\varepsilon_1}^1$, des ordres zéro et un. Il faut éliminer les λ entre ces équations (8) et les équations (C):

$$(C) \quad z_i'^K = \bar{\omega}_i^K(z_1^0, \dots, z_{\rho_0}^0, \dots, z_1^K, \dots, z_{\rho_K}^K, \lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \dots, \lambda_1^K, \dots, \lambda_{\varepsilon_K}^K). \quad (K=1,2,\dots) \quad (i=1,2,\dots,\rho_K)$$

Pour cela, il est possible en général de résoudre les équations (C) jusqu'à un certain ordre minimum K , déterminé, par rapport aux paramètres $\lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \dots, \lambda_{\varepsilon_1}^1$, ou un certain nombre d'entre eux, de façon que, leurs valeurs étant portées dans les relations (8), tous les λ disparaissent: il en est certainement ainsi dans le cas au moins où on peut former n invariants distincts I_1, I_2, \dots, I_n , car, dans cette hypothèse, nous avons établi l'existence de n paramètres différentiels du premier ordre, distincts. En remplaçant dans les seconds membres de (8), ainsi transformés, les $z_i'^K$ qui y figurent par des constantes arbitraires, on obtient n expressions:

$$\Delta_i J = \alpha_{i1} \frac{dJ}{dy_1} + \alpha_{i2} \frac{dJ}{dy_2} + \dots + \alpha_{in} \frac{dJ}{dy_n}, \quad (i=1,2,\dots,n)$$

qui sont des invariants, c'est-à-dire, ici, les *paramètres différentiels*. Les α sont des fonctions de y_1, y_2, \dots, y_n , de z_1, z_2, \dots, z_p et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre K . Ces paramètres sont des *fonctions linéaires et homogènes* des dérivées de J ; ils sont en outre en général, *indépendants*, car, pour

des valeurs particulières attribuées aux arguments dont dépendent les α , $\Delta_i J$ se réduit respectivement à $\frac{dJ}{dy_i}$.

L'existence de ces paramètres différentiels tombe en défaut, seulement dans le cas où la résolution des équations (C) n'est plus possible comme elle a été effectuée, ce qui se produit lorsque M satisfait à une ou plusieurs *équations invariantes bien déterminées*. Il en est de même de leur indépendance: le déterminant de ces n paramètres, égalé à zéro, donne une *équation invariante*, ou se décompose en plusieurs équations, dont chacune est *invariante*, car, si elle est satisfaite par la multiplicité M , on a entre ces n paramètres, une relation linéaire:

$$\beta_1 \Delta_1 J + \beta_2 \Delta_2 J + \dots + \beta_n \Delta_n J = 0$$

à coefficients non tous nuls, et qui, après toute transformation effectuée sur M , se transforme en une autre relation linéaire

$$\beta'_1 \Delta_1 J + \beta'_2 \Delta_2 J + \dots + \beta'_n \Delta_n J = 0.$$

C'est là l'avantage de ces paramètres sur les premiers que nous avons formés, car ceux-ci cessent d'être holomorphes ou indépendants, dans le cas où M satisfait à des équations invariantes, dépendant de *fonctions arbitraires*.

4. Ces n paramètres jouissent de propriétés capitales. D'abord, tout autre paramètre différentiel, linéaire, et du premier ordre:

$$\Delta J = \beta_0 + \beta_1 \frac{dJ}{dy_1} + \beta_2 \frac{dJ}{dy_2} + \dots + \beta_n \frac{dJ}{dy_n}$$

est une fonction linéaire de $\Delta_1 J, \Delta_2 J, \dots, \Delta_n J$, dont les coefficients sont eux-mêmes des invariants. Car, $\Delta_1 J, \dots, \Delta_n J$ étant indépendants, on a:

$$\Delta J = \gamma_0 + \gamma_1 \Delta_1 J + \gamma_2 \Delta_2 J + \dots + \gamma_n \Delta_n J,$$

de sorte que toute transformation du groupe, effectuée sur M et sur une fonction quelconque J , de y_1, y_2, \dots, y_n , donnerait:

$$\gamma'_0 + \gamma'_1 \Delta_1 J' + \dots + \gamma'_n \Delta_n J' = \gamma_0 + \gamma_1 \Delta_1 J + \dots + \gamma_n \Delta_n J,$$

ou

$$\gamma'_0 - \gamma_0 + (\gamma'_1 - \gamma_1) \Delta_1 J + \dots + (\gamma'_n - \gamma_n) \Delta_n J = 0$$

et cette identité aurait lieu quelle que soit la transformation. $\Delta_1 J, \dots, \Delta_n J$ étant distincts, ceci exige bien:

$$\gamma'_0 - \gamma_0 = 0, \quad \gamma'_1 - \gamma_1 = 0 \dots \dots, \quad \gamma'_n - \gamma_n = 0.$$

En particulier, les deux paramètres différentiels du second ordre $\Delta_\mu \Delta_\nu J$ et $\Delta_\nu \Delta_\mu J$ ayant une différence qui ne contient que des dérivées du premier ordre de J , on a:

$$\Delta_\mu \Delta_\nu J - \Delta_\nu \Delta_\mu J = \gamma_{\mu\nu 1} \Delta_1 J + \dots + \gamma_{\mu\nu n} \Delta_n J,$$

les γ étant encore des invariants.¹ $\Delta_\mu J$ et $\Delta_\nu J$ se réduisant d'ailleurs, pour des valeurs particulières des variables, à $\frac{dJ}{dy_\mu}$ et $\frac{dJ}{dy_\nu}$, $\Delta_\mu \Delta_\nu J$ et $\Delta_\nu \Delta_\mu J$ se réduisent dans les mêmes conditions à $\frac{d^2 J}{dy_\mu dy_\nu}$, à des termes additifs près ne contenant que des dérivées du premier ordre. On obtient donc, par la combinaison des paramètres du premier ordre, autant de paramètres du second ordre distincts qu'il y a de dérivées de cet ordre: il en est manifestement de même pour les ordres supérieurs, et l'on voit que, dans la formation de ces paramètres, on peut faire abstraction de l'ordre dans lequel on combine les paramètres du premier ordre.

Ensuite, les n opérations $\Delta_1 J, \dots, \Delta_n J$, effectuées sur q invariants J_1, J_2, \dots, J_q , d'ordre σ , au moins égal à K , donnent autant d'invariants d'ordre $\sigma + 1$, distincts par rapport aux dérivées d'ordre $\sigma + 1$, qu'il y a de fonctions distinctes par rapport aux mêmes dérivées, parmi les quantités $\frac{dJ_1}{dy_1}, \dots, \frac{dJ_1}{dy_n}, \dots, \frac{dJ_q}{dy_n}$. En effet, les n invariants $\Delta_1 J_i, \dots, \Delta_n J_i$, en tant que fonctions des dérivées d'ordre $\sigma + 1$, sont n fonctions linéaires distinctes de $\frac{dJ_i}{dy_1}, \dots, \frac{dJ_i}{dy_n}$, les uns et les autres étant

¹ Ce résultat peut s'interpréter ainsi. Les invariants étant considérés comme solutions d'un système complet d'équations linéaires que l'on sait former, ce système admet les transformations infinitésimales $\Delta_\mu f$, où les dérivées totales $\frac{df}{dy_i}$ sont explicitées. Il admet aussi les transformations $(\Delta_\mu \Delta_\nu)$: celles-ci s'exprimant en fonctions linéaires de $\Delta_1 f, \dots, \Delta_n f$, on sait que les coefficients de ces formes linéaires sont des solutions du système complet. LIE, Math. Annalen, Bd. II.

d'ailleurs des formes linéaires des dérivées d'ordre $\sigma + 1$. Si donc les dérivées $\frac{dJ}{dy_\mu}$ peuvent s'exprimer linéairement en fonction de ρ d'entre elles, indépendantes, il y aura, de même, ρ invariants $\Delta_\mu J_i$ indépendants, H_1, H_2, \dots, H_ρ , les $nq - \rho$ autres pouvant se mettre sous la forme:

$$H_i = a_{i0} + a_{i1}H_1 + \dots + a_{i\rho}H_\rho \quad (i=1, 2, \dots, nq-\rho)$$

où les a ne dépendent pas des dérivées d'ordre $\sigma + 1$. H_1, H_2, \dots, H_ρ étant indépendants, il en résulte, comme plus haut, que ces coefficients a sont encore des invariants lesquels peuvent, au reste, se réduire à des constantes.

En particulier, on retrouve que les expressions $\Delta_\mu \Delta_\nu J$ constituent bien $\frac{1}{2}n(n+1)$ paramètres différentiels du second ordre, distincts.

5. Cela étant, dans la détermination des invariants d'une multiplicité M , on trouve, ou bien seulement un nombre fini d'invariants, ou bien un nombre d'invariants qui croît sans limite avec l'ordre. Construisons, dans ce cas, les n paramètres $\Delta_1 J, \Delta_2 J, \dots, \Delta_n J$, et soit K l'ordre le plus élevé des dérivées qui figurent dans leurs coefficients: la détermination des invariants d'ordre au plus égal à K , $J_1^0, \dots, J_{\mu_0}^0, \dots, J_1^K, \dots, J_{\mu_K}^K$, se fait en même temps, de sorte qu'on a entre M et ses transformées M' , les relations:

$$(9) \quad J_i^h = J_i^h. \quad (h=1, 2, \dots, K) \quad (i=1, 2, \dots, \mu_K)$$

De celles d'ordre K , on déduit, à l'aide des paramètres différentiels, les suivantes, d'ordre $K + 1$:

$$(10) \quad \Delta'_\nu J_i^K = \Delta_\nu J_i^K. \quad (\nu=1, 2, \dots, n) \quad (i=1, 2, \dots, \mu_K)$$

Le nombre de celles-ci qui sont indépendantes, entre elles et des relations (9), est égal, avons-nous vu, au nombre des fonctions distinctes d'ordre $K + 1$, que l'on peut former avec les dérivées $\frac{dJ_i^K}{dy_\nu}$, et ne pourrait s'abaisser que si les paramètres différentiels $\Delta_\nu J$ cessaient d'être indépendants en vertu des relations (9), c'est-à-dire en raison des valeurs que

prennent sur M , les invariants $J_1^0, \dots, J_{\mu_0}^0, \dots, J_1^K, \dots, J_{\mu_K}^K$. Nous supposons qu'il n'en est pas ainsi.

Alors les équations d'ordre $K + 1$, entre M et M' , comprennent les équations (10), et s'il y a lieu, un certain nombre d'autres, fournies par des invariants distincts des précédents. On procédera de même pour les invariants suivants d'ordre $K + 2$, et ainsi de suite. A partir d'un certain ordre l , tous les invariants d'ordre supérieur s'obtiennent en effectuant les opérations invariantes, une ou plusieurs fois, sur ceux d'ordre l .

La chose s'établirait de la même manière qu'il a été démontré que tout système d'équations aux dérivées partielles est nécessairement limité. C'est aussi ce qui résulte du même fait, établi dans le cas où on applique le procédé par différentiation, ce qui revient à substituer aux paramètres $\Delta_1 J, \Delta_2 J, \dots, \Delta_n J$, un système particulier de n autres paramètres, fonctions linéaires, et, en général, distinctes, des précédents. Par suite l ne dépasse certainement pas l'ordre le plus élevé des invariants du système complet.

On n'est arrêté, dans ces opérations, que si la formation des invariants jusqu'à l'ordre l devient impossible, ou si les paramètres différentiels cessent d'être indépendants. Ceci ne se présente que dans le cas où M satisfait à des équations invariantes bien déterminées, cas que nous laisserons d'abord de côté.

6. Supposons maintenant, qu'une telle multiplicité générale M étant donnée, elle ait a invariants d'ordre σ , J_1, J_2, \dots, J_a , s'exprimant en fonction des autres invariants d'ordre σ et d'ordre inférieur: I_1, I_2, \dots, I_β :

$$(11) \quad J_1 - \varphi_1(I_1, I_2, \dots, I_\beta) = 0, \quad \dots, \quad J_a - \varphi_a(I_1, I_2, \dots, I_\beta) = 0.$$

Les multiplicités M' , transformées de M , satisfont aux mêmes relations

$$(11') \quad J_1 - \varphi_1(I_1, I_2, \dots, I_\beta) = 0, \quad \dots, \quad J_a - \varphi_a(I_1, I_2, \dots, I_\beta) = 0.$$

Or, au système d'invariants distincts $I_1, \dots, I_\beta, J_1, \dots, J_a$, et à ceux qu'on en déduit $\Delta_1 J_1, \dots, \Delta_n J_a$, on peut supposer substitué celui des invariants aussi distincts $I_1, \dots, I_\beta, J_1 - \varphi_1, \dots, J_a - \varphi_a$, et ceux qui s'en déduisent $\Delta_1(J_1 - \varphi_1), \dots, \Delta_n(J_a - \varphi_a)$. En vertu de (11), ces

derniers sont tous nuls sur M , de telle sorte que M' satisfait aux équations:

$$(12) \quad \Delta'_v(J'_i - \varphi'_i) = 0. \quad (v=1, 2, \dots, n) \quad (i=1, 2, \dots, \alpha)$$

Mais ces équations sont satisfaites pour toute solution du système (11'), dont elles sont des conséquences par dérivation: en effet, le système (11') n'entraînant pas la dépendance des paramètres $\Delta'_v J'$, on sait que les équations (12), d'ordre $\sigma + 1$, forment un système équivalent à celui que l'on obtient en différentiant les équations (11').

D'après cela, si tous les invariants de M , d'un ordre λ , égal ou supérieur à l , sont tous fonctions des invariants d'ordre inférieur à λ , il suffit, pour exprimer que tous les invariants de M' satisfont aux mêmes relations que ceux de M , d'écrire les équations (11') jusqu'à l'ordre λ , équations parmi lesquelles il peut d'ailleurs y en avoir un certain nombre, qu'on sait reconnaître, de la forme:

$$\Delta'_v(J'_i - \varphi'_i) = 0$$

et qui sont des conséquences des autres par dérivation. Il en résulte, en égalant entre eux les invariants distincts I_1, I_2, \dots, I_β , de M et M' , que tous les invariants de M sont égaux respectivement à ceux de M' ; et par suite, comme on l'a déjà établi, ces conditions sont suffisantes pour que M' soit homologue de M .

Quant à la correspondance entre M et l'une des solutions M' de ce système (11'), elle fait correspondre à un point quelconque de M , un point déterminé de M' ou une infinité de points, suivant que le nombre β des invariants distincts est égal ou inférieur à n : et, une fois fixé ce point de M' , la correspondance est complètement déterminée.

Enfin, comme il y a au plus n invariants distincts, l'ordre λ , qui est au moins égal à l , est au plus égal à $l + n - 1$. En résumé:

Théorème II. *Dans le cas où une multiplicité à n dimensions admet relativement à un groupe de Lie, un nombre illimité d'invariants, on peut toujours construire et un système d'invariants d'un ordre minimum l , et un système de n paramètres différentiels, linéaires et homogènes, du premier ordre, qui, appliqués aux invariants précédents donnent tous ceux d'ordre supérieur.*

Les multiplicités M' , homologues d'une multiplicité générale donnée, M , sont définies par un système d'équations aux dérivées partielles obtenu en exprimant que leurs invariants d'un ordre λ , au moins égal à l , et au plus à $l + n - 1$, sont liés par les mêmes relations que ceux de M ; et la ou les correspondances qui rattachent l'une d'elles à M s'obtiennent en égalant les invariants distincts de M aux invariants correspondants de M' .

7. Les multiplicités *particulières*, pour lesquelles ce qui précède ne s'applique pas, se partagent en un nombre fini de classes, chacune d'elles étant définie par un système bien déterminé d'équations invariantes. L'étude de chaque classe se fait, comme on l'a vu (2^e partie, ch. I), de la même manière que celle des multiplicités générales. On est conduit à répéter sur elle les mêmes subdivisions, les multiplicités de cette classe possédant, les unes un *système d'invariants* que l'on saura former, les autres étant définies par de nouvelles *équations invariantes*. Pour ces dernières, il faut continuer de la même manière. Cette suite de subdivisions est d'ailleurs limitée, et on arrive nécessairement à des classes ne se partageant plus, et ayant ou n'ayant pas d'invariants: dans le cas contraire, on aurait en effet des multiplicités satisfaisant à des équations invariantes formant un système illimité d'équations aux dérivées partielles.

8. **Application.** La théorie des *surfaces applicables* nous donne une application des principes précédents, en même temps qu'un exemple de calcul d'invariants à l'aide des transformations infinitésimales. Nous considérons un ds^2 , rapporté à ses *coordonnées symétriques*:

$$ds^2 = 2\lambda dx dy.$$

Cette forme n'est pas altérée par les transformations:

$$x' = X(x), \quad y' = Y(y)$$

lesquelles forment un groupe de LIE, dont les transformations infinitésimales sont:

$$(13) \quad dx = -\xi(x)\delta t, \quad dy = -\eta(y)\delta t$$

où X et ξ sont des fonctions arbitraires de x seulement, Y et η de y seulement.

λ est une fonction de x et y , dont la transformation infinitésimale est donnée par l'équation:

$$0 = \frac{\delta\lambda}{\lambda} + \frac{\delta dx}{dx} + \frac{\delta dy}{dy} = \frac{\delta\lambda}{\lambda} + \frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy}$$

ou

$$(14) \quad \delta\lambda = \lambda(\xi' + \eta')\delta t.$$

On a à chercher les invariants du groupe de transformations (13) et (14). Nous poserons, φ étant une fonction quelconque de x et y :

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial^{i+j}\varphi}{\partial x^i \partial y^j}.$$

Les dérivées d'une telle fonction sont transformées de telle sorte que la relation:

$$d\varphi - \varphi_{10}dx - \varphi_{01}dy = 0$$

reste invariante, ce qui donne:

$$\delta\varphi_{10} = \frac{d}{dx}\delta\varphi + \varphi_{10}\xi'\delta t, \quad \delta\varphi_{01} = \frac{d}{dy}\delta\varphi + \varphi_{01}\eta'\delta t$$

où $\frac{d}{dx}$ et $\frac{d}{dy}$ représentent des dérivées totales.

Pour l'ordre zéro, on a l'équation invariante $\lambda = 0$, dont la signification est banale. Nous supposons donc $\lambda \neq 0$, et posons $\lambda = e^w$, ce qui donne:

$$\delta w = (\xi' + \eta')\delta t,$$

$$\delta\omega_{10} = (\xi'' + \omega_{10}\xi')\delta t, \quad \delta\omega_{01} = (\eta'' + \omega_{01}\eta')\delta t,$$

$$\delta\omega_{20} = (\xi''' + \omega_{10}\xi'' + 2\omega_{20}\xi')\delta t, \quad \delta\omega_{02} = (\eta''' + \omega_{01}\eta'' + 2\omega_{02}\eta')\delta t,$$

$$\delta\omega_{11} = \omega_{11}(\xi' + \eta')\delta t,$$

d'où un premier invariant du second ordre (*courbure totale*):

$$\alpha = e^{-w}\omega_{11} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \lambda.$$

Pour les ordres supérieurs, nous ne conservons, des dérivées de ω , que celles de la forme ω_{n0} et ω_{0n} , et substituons aux autres les dérivées de α . Ceci donne, pour le troisième ordre:

$$\begin{aligned}\delta\omega_{30} &= (\xi^{IV} + \omega_{10}\xi''' + \dots)\delta t, & \delta\omega_{03} &= (\eta^{IV} + \omega_{01}\eta''' + \dots)\delta t, \\ \delta\alpha_{10} &= \alpha_{10}\xi'\delta t, & \delta\alpha_{01} &= \alpha_{01}\eta'\delta t.\end{aligned}$$

Les coefficients de $\xi', \dots, \xi^{IV}, \eta', \dots, \eta^{IV}$ donnent ainsi, pour la détermination des invariants, jusqu'au 3^{me} ordre, un système de 8 équations à 10 inconnues; ces équations sont indépendantes, car elles se réduisent à:

$$(15) \quad \begin{aligned}0 &= \frac{\partial f}{\partial \omega_{30}} = \frac{\partial f}{\partial \omega_{03}} = \frac{\partial f}{\partial \omega_{20}} = \frac{\partial f}{\partial \omega_{02}} = \frac{\partial f}{\partial \omega_{10}} = \frac{\partial f}{\partial \omega_{01}}, \\ \frac{\partial f}{\partial \omega} + \omega_{11} \frac{\partial f}{\partial \omega_{11}} + \alpha_{10} \frac{\partial f}{\partial \alpha_{10}} &= 0, & \frac{\partial f}{\partial \omega} + \omega_{11} \frac{\partial f}{\partial \omega_{11}} + \alpha_{01} \frac{\partial f}{\partial \alpha_{01}} &= 0.\end{aligned}$$

Elle cessent d'être distinctes, seulement dans le cas de

$$\alpha_{10} = 0, \quad \alpha_{01} = 0,$$

équations qui forment ainsi un *système invariant*. Elles définissent des surfaces particulières, savoir:

$$\alpha = \text{const.}$$

On voit immédiatement que ces surfaces n'ont pas d'autre invariant que α .

Pour les autres, on trouve deux invariants, α , et un autre:

$$\beta = e^{-\omega} \alpha_{10} \alpha_{01}.$$

Pour le 4^{me} ordre, il faudrait prolonger les équations (15), en y ajoutant les 5 éléments du 4^{me} ordre, $\omega_{40}, \alpha_{20}, \alpha_{11}, \alpha_{02}, \omega_{04}$, ce qui laisse évidemment ces équations indépendantes, et leur ajouter les deux suivantes, provenant des coefficients de ξ^V et η^V :

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_{40}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \omega_{04}} = 0$$

lesquelles sont indépendantes entre elles, et des précédentes. On trouverait donc 3 invariants du 4^{me} ordre, et, de la même manière, $n - 1$ invariants du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Pour les déterminer, construisons d'abord les *paramètres différentiels*.
J étant un invariant, on a :

$$\delta J_{10} = J_{10} \xi' \delta t, \quad \delta J_{01} = J_{01} \eta' \delta t.$$

Nous prendrons les deux paramètres :

$$\Delta_x J = e^{-w} \alpha_{01} J_{10}, \quad \Delta_y J = \frac{J_{01}}{\alpha_{01}}$$

qui ne sont pas symétriques, mais qui tombent en défaut seulement dans le cas de $\alpha_{01} = 0$: dans ce cas, il suffirait de recourir aux paramètres analogues $e^{-w} \alpha_{10} J_{01}$ et $\frac{J_{10}}{\alpha_{10}}$.

Nous remarquerons que :

$$\begin{aligned} \Delta_x \Delta_y J - \Delta_y \Delta_x J &= -e^{-w} \left[\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{01}} J_{01} + \left(\frac{\alpha_{02}}{\alpha_{01}} - \omega_{01} \right) J_{10} \right] \\ &= -e^{-w} \alpha_{11} \Delta_y J - \frac{\alpha_{02} - \alpha_{01} \omega_{01}}{\alpha_{01}^2} \Delta_x J, \end{aligned}$$

ce qui met en évidence deux invariants du 4^{me} ordre :

$$\gamma = \frac{\alpha_{02} - \alpha_{01} \omega_{01}}{\alpha_{01}^2}, \quad \theta = e^{-w} \alpha_{11}.$$

On en connaît, en outre, deux autres :

$$\begin{aligned} \Delta_x \beta &= e^{-2w} \alpha_{01} (\alpha_{20} \alpha_{01} + \alpha_{11} \alpha_{10} - \omega_{10} \alpha_{10} \alpha_{01}), \\ \Delta_y \beta &= e^{-w} \left(\alpha_{11} + \frac{\alpha_{02} \alpha_{10}}{\alpha_{01}} - \omega_{01} \alpha_{10} \right), \end{aligned}$$

lesquels sont liés aux précédents, comme cela doit être, par une relation :

$$\theta = \Delta_y \beta - \beta \gamma.$$

On a ainsi 3 invariants du 4^{me} ordre, $\Delta_x \beta$, $\Delta_y \beta$ et γ qui constituent des fonctions distinctes, respectivement, de α_{20} , α_{11} , et α_{02} . Leurs dérivées du $q^{\text{ième}}$ ordre donnent $q + 3$ fonctions distinctes des $q + 3$ dérivées d'ordre $q + 2$ de α ; en répétant sur elles, une ou plusieurs fois, les opérations $\Delta_x J$ et $\Delta_y J$, on formera donc $q + 3$ invariants distincts d'ordre

$q + 4$, c'est-à-dire, tous les invariants d'ordre supérieur à 4; le nombre l est ici égal à 4.

Cela posé, considérons d'abord une surface *générale* M , qui n'annule donc pas α_{01} (ce cas se traiterait de la même manière). Si ses invariants α et β sont distincts, les invariants du 4^{me} ordre $\Delta_x\beta$, $\Delta_y\beta$, γ seront fonctions de α et β :

$$(16) \quad \Delta_x\beta = f_1(\alpha, \beta), \quad \Delta_y\beta = f_2(\alpha, \beta), \quad \gamma = f_3(\alpha, \beta).$$

Toute surface M' , transformée de M , est alors définie par les équations (16) qui suffisent, et les correspondances, en nombre fini, entre M et M' sont données par:

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta.$$

La troisième équation (16) est, au reste, une conséquence des deux précédentes, en vertu de l'identité:

$$\Delta_y\Delta_x\beta - \Delta_x\Delta_y\beta = \gamma.\Delta_x\beta + \theta.\Delta_y\beta = (\Delta_y\beta)^2 + \gamma(\Delta_x\beta - \beta\Delta_y\beta)$$

qui donne f_3 connaissant f_1 et f_2 , car l'expression:

$$\Delta_x\beta - \beta\Delta_y\beta = e^{-\omega}(\alpha_{01}\beta_{10} - \alpha_{10}\beta_{01})$$

ne s'annule que si α et β ne sont pas distincts.

Si M est telle que β et α ne soient pas distincts:

$$(17) \quad \beta = f(\alpha)$$

$\Delta_x\beta$ et $\Delta_y\beta$ sont aussi fonctions de α :

$$\Delta_x\beta = f(\alpha).f'(\alpha), \quad \Delta_y\beta = f'(\alpha)$$

et il en est de même des 3 invariants du 5^{me} ordre, $\Delta_x\Delta_x\beta$, $\Delta_y\Delta_x\beta$, $\Delta_y\Delta_y\beta$. Si γ est distinct de α , le 4^{me} invariant du 5^{me} ordre, $\Delta_y\gamma$, est alors fonction de α et γ :

$$(18) \quad \Delta_y\gamma = \varphi(\alpha, \gamma).$$

Les multiplicités (M') sont, dans ce cas, définies par les équations (17) et (18), la correspondance étant donnée par

$$\alpha' = \alpha, \quad \gamma' = \gamma.$$

Si, en même temps que β, γ est fonction de α :

$$(19) \quad \gamma = \phi(\alpha)$$

les 3 invariants du 4^{me} ordre sont fonctions de α ; M' est définie par les équations (17) et (19). Ici, il y a une infinité de correspondances données par la seule relation

$$\alpha' = \alpha,$$

un point x_0, y_0 de M pouvant correspondre à tout point x', y' de M' satisfaisant à l'équation

$$\alpha'(x', y') = \alpha(x_0, y_0).^1$$

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

Calcul des invariants. Formes réduites.

1. Le calcul des invariants peut être facilité souvent par l'application d'une nouvelle notion, celle de *forme réduite d'une multiplicité*, relativement à un groupe de LIE.

Considérons un élément particulier E_0 d'une multiplicité M , c'est-à-dire, un système de valeurs $z_1^{00}, \dots, z_{\rho_0}^{00}, z_1^{10}, \dots, z_{\rho_1}^{10}, \dots, z_1^{K_0}, \dots, z_{\rho_K}^{K_0}, \dots$, des variables indépendantes, des fonctions et de leurs dérivées; et re-

¹ Si l'on admet, ce qu'on verra dans la suite, que les invariants considérés sont les mêmes que ceux que l'on aurait, en prenant un ds^2 sous sa forme générale

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

on retrouve ici la solution du problème suivant: reconnaître si deux surfaces sont applicables. Cf. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. III, liv. VII, chap. II.