SUR LES INVARIANTS DIFFÉRENTIELS DES GROUPES CONTINUS DE TRANSFORMATIONS

PAR

AR. TRESSE.

Introduction.

La notion d'*invariant différentiel* est une de celles qui se présentent le plus souvent dans les différentes branches de l'Analyse. On sait, par exemple, combien est féconde, dans la Géométrie des courbes et surfaces, la théorie de la *courbure*, c'est-à-dire des invariants différentiels des courbes et surfaces par rapport au groupe des mouvements de l'espace; comment la *courbure totale* de GAUSS, combinée avec les *paramètres différentiels* de BELTRAMI, intervient heureusement dans la théorie des surfaces applicables.

De nos jours, HALPHEN a déterminé les invariants des courbes, planes[1] et gauches[2], par rapport aux transformations projectives; et c'est en généralisant ces résultats que, reprenant les recherches de LAGUERRE[3] et BRIOSCHI[4], il est arrivé, dans son mémoire célèbre[5], à construire les invariants des équations différentielles linéaires par rapport aux transformations ponctuelles qui n'altèrent pas leur forme linéaire.

---

[1] HALPHEN, Thèse, *Sur les invariants différentiels,* Paris, 1878.

[2] *Sur les invariants différentiels des courbes gauches,* Journal de l'école polytechnique, 47[me] Cahier.

[3] LAGUERRE, Comptes rendus, t. 88, p. 116 et 224.

[4] BRIOSCHI, Bulletin de la société mathématique de France, t. VII, p. 105.

[5] HALPHEN, *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables,* Mémoires des savants étrangers, t. 28.

La théorie des équations différentielles a encore fourni d'intéressantes applications des invariants différentiels à MM. APPELL et RIVEREAU[1], sur la transformation des équations de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \ldots + b_p y^p}$$

par la transformation

$$x' = X(x), \qquad y' = yX_1(x) + X_2(x)$$

ou sur des cas particuliers de ce problème; à M. ROGER LIOUVILLE[2], sur la transformation ponctuelle de l'équation:

$$y'' + a_1 y'^3 + 3a_2 y'^2 + 3a_3 y' + a_4 = 0.$$

Dans toutes ces recherches s'est présenté ce résultat que les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux équations données puissent se ramener l'une à l'autre à l'aide d'une transformation de nature déterminée, s'obtiennent par la considération d'un nombre fini d'invariants différentiels.

L'objet de ce travail est de généraliser ce principe. J'ai fait, dans ce but, application de la théorie des groupes de M. LIE, laquelle se prête admirablement à l'édification d'une théorie générale des invariants différentiels. C'est ce qu'a commencé M. LIE lui-même, dans plusieurs recherches où il avait principalement en vue la détermination de ces invariants[3]; c'est aussi ce qu'ont indiqué dans deux notes, assez brèves, mais fondamentales, HALPHEN[4] et M. GOURSAT[5].

---

[1] APPELL, *Sur les invariants de quelques équations différentielles,* Journal de math., 4[me] série, t. 5.

RIVEREAU, *Sur les invariants de certaines classes d'équations homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées,* Thèse, Paris 1890. — *Sur les invariants de quelques équations différentielles,* Journal de math., 4[me] série, t. 8.

[2] ROGER LIOUVILLE, *Sur les invariants de certaines équations différentielles,* Journal de l'école polytechnique, 59[me] cahier.

[3] Voir, entre autres, LIE, *Über Differentialinvarianten,* Math. Annalen, t. 24.

[4] HALPHEN, *Sur l'existence des invariants,* Lettre à M. SYLVESTER, American journal of mathematics, vol. 9, p. 137. — Voir, à ce sujet, LIE, *Die Begriffe Gruppe und Invariante,* Leipziger Berichte, 1887.

[5] GOURSAT, *Sur les invariants des équations différentielles,* C. R., t. 107, p. 898.

M. Lie a établi comment, en général, il existe des invariants dont le nombre croit indéfiniment avec l'ordre. J'ai démontré qu'il existe, dans chaque cas, des procédés, *paramètres différentiels* ou *opérations invariantes,* permettant, étant connus des invariants, d'en déduire de nouveaux; et que, étant déterminé un nombre fini d'invariants, on peut, par ces procédés, obtenir tous les autres. Il en résulte que les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux multiplicités de même nature puissent se ramener l'une à l'autre par une transformation du groupe, sont définies par un nombre encore limité de ces invariants.

Ce travail est divisé en trois parties. Dans la première, j'établis une proposition, fondamentale pour la suite, savoir, que l'étude d'un système d'équations aux dérivées partielles se réduit toujours à celle d'un nombre fini d'équations; puis, je rappelle les propositions générales de M. Lie, sur les groupes définis par des systèmes d'équations aux derivées partielles, groupes que j'appelle *groupes de Lie.*

Dans la seconde partie, je montre comment les invariants d'une multiplicité se déduisent immédiatement des *équations de définition* du groupe, et je rappelle comment M. Lie, partant des *transformations infinitésimales*, obtient ces invariants par l'intégration de systèmes complets. Puis j'établis les propositions concernant les systèmes finis d'invariants.

Enfin, dans la troisième partie, je montre comment la notion d'invariant différentiel s'identifie avec celle de *forme réduite,* celle-ci pouvant même guider le calcul des invariants. Je termine par la détermination des invariants d'une surface, par rapport aux transformations conformes de l'espace, d'une part, et aux transformations projectives, d'autre part; puis, par celle des invariants déjà obtenus par une voie toute différente par M. Roger Liouville dans le problème qu'il a traité.

J'ai entrepris ces recherches sur les conseils de mon très illustre maître, M. Sophus Lie, qui m'a initié à ses théories si fécondes et aujourd'hui si vastes des groupes de transformations. Qu'il me soit permis de lui en exprimer ici ma plus vive reconnaissance!

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

Propriété générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

1. On appelle *multiplicité à n dimensions d'un espace à n + p dimensions* un système de p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si une telle multiplicité satisfait à une ou plusieurs équations aux dérivées partielles, entre les x, les z et leurs dérivées, elle satisfait aussi aux équations qui s'en déduisent par différentiation. En s'élevant aux ordres supérieurs, on obtient de la sorte un nombre illimité d'équations; si on ne considère pas celles-ci comme distinctes des premières, il y a lieu de se demander s'il peut exister des systèmes comprenant un nombre illimité d'équations ainsi distinctes, et s'il peut exister des multiplicités définies comme solutions de pareils *systèmes illimités* d'équations.

Nous verrons qu'il n'en est rien. Par exemple, on sait[1] que la condition nécessaire et suffisante pour que la solution générale d'un système d'équations aux dérivées partielles ne dépende que d'un nombre fini de constantes arbitraires, est que l'on puisse à l'aide de ces équations exprimer toutes les dérivées d'un certain ordre des z, en fonction des dérivées d'ordre inférieur, des x et des z. Un pareil système est nécessairement limité.

2. Considérons d'abord le cas simple d'une seule fonction z de deux variables, x et y, définie par un système donné d'équations aux dérivées

[1] Voir, Lie, *Theorie der Transformationsgruppen,* Erster Abschnitt, p. 179.
Bourlet, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées,* Annales de l'école normale, 1891, Suppl.

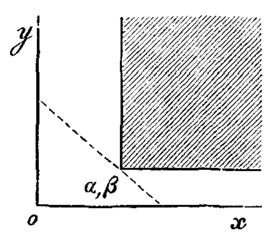
partielles. Considérons les équations d'ordre h de ce système, et mettons-les sous une *forme canonique,* en les résolvant par rapport à une ou plusieurs dérivées d'ordre h,

$$z_{\alpha,h-\alpha} = \frac{\partial^h z}{\partial x^\alpha \partial y^{h-\alpha}} = \psi_{h,\alpha}$$

de telle façon que la fonction $\psi_{h,\alpha}$ ne contienne que des dérivées d'ordre h, $z_{\alpha',h-\alpha'}$ telles que l'on ait

$$\alpha' < \alpha.$$

Une pareille réduction est toujours possible. De plus, les équations d'ordre supérieur, qu'on en déduit par différentiation, se présentent encore sous forme canonique.



Représentons alors dans un plan, la dérivée $z_{\alpha,\beta}$ par le point de coordonnées α, β: les dérivées d'un même ordre sont situées sur une droite:

$$x + y = \text{const.}$$

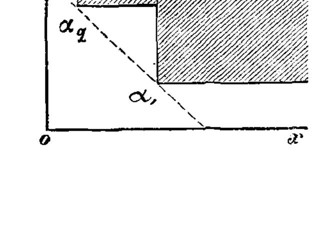
La présence, dans le *système canonique,* d'une équation résolue par rapport à $z_{\alpha,\beta}$, entraîne, pour les systèmes d'ordre supérieur, celle d'équations résolues par rapport à toutes les derivées, dont les points représentatifs sont situés dans l'angle formé par les parallèles aux axes menées par le point α, β, ou sur ces parallèles. Si donc il y a des équations résolues par rapport à une ou plusieurs dérivées d'ordre h:

$$(1) \qquad z_{\alpha_1, h-\alpha_1}, \; z_{\alpha_2, h-\alpha_2}, \; \ldots, \; z_{\alpha_q, h-\alpha_q}$$

avec

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_q,$$

on aura, à partir d'un certain ordre, des équations résolues par rapport à toutes les dérivées de z, $z_{\alpha,\beta}$, excepté pour



$$\alpha < \alpha_q \quad \text{ou} \quad \beta < h - \alpha_1;$$

il peut même se présenter plusieurs équations résolues par rapport à une même dérivée $z_{\alpha,\beta}$; il nous suffit de ne conserver qu'une seule d'entre elles, celle, par exemple, qui s'obtient en différentiant la dérivée d'indice α le plus élevé, parmi les dérivées (1).

Le nombre des dérivées qui ne figurent pas dans les premiers membres, pour un ordre déterminé, est alors constant quel que soit cet ordre, et égal à $h - \alpha_1 + \alpha_q$. Si alors le système n'est pas limité, c'est qu'il y a lieu d'ajouter des équations nouvelles, lesquelles, combinées avec les précédentes, peuvent se mettre encore sous forme canonique. Or, après $h - \alpha_1 + \alpha_q$ équations nouvelles, au plus, on trouve un ordre s, tel que toutes les dérivées d'ordre s et d'ordre supérieur de z s'expriment en fonction des dérivées d'ordre inférieur. Le système est alors *nécessairement limité,* et toute équation nouvelle, ajoutée aux précédentes, se ramène à une équation d'ordre inférieur à s, laquelle peut être ou n'être pas analytiquement indépendante des premières. Dans tous les cas, le système est donc limité.

3. La proposition subsiste dans le cas d'une multiplicité, que j'appellerai *de deuxième espèce,* formée de p fonctions $z_1, z_2, \dots, z_p$ dépendant chacune de *deux* variables indépendantes, x_1, y_1, pour z_1, x_2, y_2 pour $z_2, \dots, x_p, y_p$ pour z_p: ces variables peuvent d'ailleurs ne pas être toutes différentes. Ici, on dressera encore une liste des dérivées d'ordre h, en rangeant d'abord celles de z_1, $z_{1,\alpha\beta}$ $\left(z_{1,\alpha\beta} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} z_1}{\partial x_1^\alpha \partial y_1^\beta}\right)$ suivant les indices α décroissants, puis celles de z_2, de la même manière, et ainsi de suite. En suivant cette liste, on peut mettre les équations d'un même ordre h, que comprend le système, sous une *forme canonique,* c'est-à-dire, en les résolvant par rapport aux dérivées d'ordre h:

$$z_{i,\alpha,h-\alpha} = \psi_{i,\alpha,h-\alpha}$$

de telle façon que les dérivées d'ordre h, qui figurent dans $\psi_{i,\alpha,h-\alpha}$ suivent $z_{i,\alpha,h-\alpha}$ dans la liste. Cette forme a encore la propriété manifeste de rester canonique après différentiation.

Dans les premiers membres de ces équations figurent par leurs dérivées une ou plusieurs fonctions z. D'après le paragraphe précédent, on ne peut ajouter qu'un nombre fini d'équations nouvelles, résolues par rapport aux dérivées de ces fonctions. Si donc le système n'est pas limité, on fera apparaître, après un nombre fini d'additions d'équations nouvelles, une on plusieurs fonctions nouvelles z, et ainsi de suite. Finalement, on aura dans les premiers membres, toutes les fonctions z, après quoi, en ajoutant encore un nombre fini d'équations nouvelles, on arriverait à exprimer toutes les dérivées d'un certain ordre en fonction des dérivées d'ordre inférieur. Sous cette forme, le système est alors nécessairement *limité.*

4. Pour généraliser la proposition, je la supposerai établie pour toute multiplicité de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce, et l'étendrai à celles de $n^{\text{ième}}$ espèce.

Soit, celle-ci, formée de p fonctions, $z_1, z_2, \ldots, z_p$, chacune de n variables indépendantes, z_i, par exemple, étant fonction de $x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,n}$. On posera

$$z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z_i}{\partial x_{i,1}^{\alpha_1} \partial x_{i,2}^{\alpha_2} \ldots \partial x_{i,n}^{\alpha_n}},$$

Comme dans les cas précédents, on dressera une liste des dérivées d'un même ordre, en rangeant les dérivées de z_1, $z_{1,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ suivant les indices α_1 décroissants, celles ayant même indice α_1, suivant les indices α_2 décroissants, et ainsi de suite, et de même pour les fonctions suivantes $z_2, \ldots, z_p$. D'après cette liste, il est encore possible de mettre les équations d'ordre h sous une forme canonique se conservant par différentiation:

$$(2) \qquad z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \psi_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}, \qquad (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=h)$$

les dérivées d'ordre h qui figurent dans $\psi_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ suivant $z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ sur la liste.

Çela fait, supposons que la fonction z_i figure dans l'un des premiers membres de ces équations, par sa dérivée $z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$. Dans les équations d'ordre supérieur, on a, par le fait, des équations résolues par rapport à toutes les dérivées de $z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$. Nous considérons l'ensemble des autres dérivées de z_i, d'ordre h et d'ordre supérieur, comme appartenant à une multiplicité de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce, définie comme il suit. Prenons comme fonctions les dérivées de z_i, d'ordre h, distinctes de $z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$; et soit $z_{i,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}$ l'une quelconque d'entre elles: l'un au moins des indices β est inférieur à l'indice α correspondant, car on a:

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Si, $\beta_n < \alpha_n$, on considère seulement les dérivées de $z_{i,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}$ prises par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, et non à x_n. Parmi les autres $z_{i,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}$ on prend celles pour lesquelles on a: $\beta_{n-1} < \alpha_{n-1}$, et on considère toutes leurs dérivées, sauf celles prises par rapport à x_{n-1}, et ainsi de suite. De cette façon, on fait entrer toutes les dérivées de z_i, d'ordre égal ou supérieur à h, qui ne sont pas dérivées de $z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$, dans une multiplicité de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce, car une telle dérivée a l'un au moins de ses indices inférieur au nombre correspondant de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. De plus, cette multiplicité de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce ne comprend aucune dérivée de $z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$.

On fera ainsi pour toutes celles des fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ qui figurent dans les premiers membres du système (2). Or, d'après ce qui a été admis sur les multiplicités de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce, on ne peut ajouter qu'un nombre fini d'équations nouvelles résolues par rapport aux dérivées de ces fonctions, ainsi mises à part: il en est même certaines qui s'introduisent nécessairement, celles qui expriment que deux des dérivées de la multiplicité de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce sont identiques. Si donc le système n'est pas limité, on fera apparaître, dans les premiers membres, après un nombre fini d'additions d'équations, une ou plusieurs nouvelles fonctions z, et ainsi de suite. Finalement, on arriverait encore à un système nécessairement *limité,* permettant d'exprimer toutes les dérivées d'un certain ordre en fonction des dérivées d'ordre inférieur. Donc:

Théorème I. *Un système d'équations aux dérivées partielles étant défini d'une manière quelconque, ce système est nécessairement limité, c'est-à-dire qu'il existe un ordre fini s, tel que, toutes les équations d'ordre supérieur à s que comprend le système, se déduisent par de simples différentiations des équations d'ordre égal ou inférieur à s.*

5. La méthode suivie dans cette analyse conduit à d'autres résultats. En différentiant les équations d'un système canonique, on a négligé ce fait qu'une même dérivée peut, dans certains cas, s'exprimer de plusieurs manières différentes, pour n'envisager qu'une seule de ces expressions. Si on exprime que ces différentes valeurs doivent être égales, on forme ainsi des équations, qui, si elles ne sont pas des conséquences analytiques de celles déjà connues, appartiennent à la catégorie des équations nouvelles qu'il faut ajouter au système.

Dans le cas où ce procédé n'ajoute pas d'équations nouvelles, on dit, ou que *les conditions d'intégrabilité sont satisfaites,* ou que le système est *complètement intégrable,* ou qu'il est *en involution.*

D'après cela, étant donné un système quelconque de ρ équations aux dérivées partielles, on peut, selon la marche suivie, le mettre sous forme canonique, puis différentier ses équations, et exprimer, s'il y a lieu, les conditions d'intégrabilité. Nos raisonnements montrent que, en suivant cette voie, on arrive, après un *nombre limité d'opérations,* ou à un *système complètement intégrable,* ou à un système définissant toutes les dérivées d'un certain ordre s, en fonction des dérivées d'ordre inférieur. Si on différentie ces équations d'ordre s, puis qu'on écrive les conditions d'intégrabilité relatives aux dérivées d'ordre $s + 1$, ou bien on trouve qu'elles sont des conséquences analytiques des équations d'ordre égal ou inférieur à s, ou bien on obtient de nouvelles équations d'ordre s ou inférieur. Dans ce cas, on ajoute ces équations au système proposé, et on répète les mêmes opérations. Finalement, les dérivées d'ordre au plus égal à s étant en nombre fini, on arrive, après un *nombre limité d'opérations,* ou à un système incompatible, ou à un système complètement intégrable, dont la solution généralene dépend alors que d'un nombre fini de constantes arbitraires. Donc:

Théorème II. *Etant donné un système quelconque d'équations aux dérivées partielles, on peut, après un nombre limité de différentiations et d'éliminations, ou bien montrer qu'il est incompatible, ou bien le mettre sous forme d'un système complètement intégrable, dont la solution générale dépend alors, suivant les cas, de fonctions ou de constantes arbitraires.*

6. L'existence des solutions de ces systèmes complètement intégrables, dans toute leur généralité, a fait l'objet de plusieurs travaux remarquables, particuliérement de MM. Meray et Riquier[1] et Bourlet[2], qui ont continué les savantes recherches de Cauchy, de M. Darboux[3] et de Mme de Kowalevski[4]. Le développement de ces travaux n'a pas place ici; j'en

[1] Meray et Riquier, Annales de l'école normale supérieure, 1890.

[2] Bourlet, loc. cit.

[3] G. Darboux, Comptes rendus de l'académie des sciences, t. 80, p. 101 et 317.

[4] Sophie von Kowalevski, Journal de Crelle, t. 80.

retiendrai seulement, pour l'utilité de ce qui suivra, ce fait que la solution générale d'un système complètement intégrable dépend de fonctions ou de constantes arbitraires. Je remarquerai de plus, ce qui est encore un résultat des travaux que je viens de citer[1], que les équations d'un système complètement intégrable permettent de former les développements en séries des solutions; les coefficients de ces séries, c'est-à-dire les valeurs que prennent, pour un système donné $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$, de valeurs des variables indépendantes, les fonctions z et leurs dérivées, sont assujettis seulement à satisfaire aux équations du système, de telle sorte qu'un certain nombre d'entre eux peuvent être choisis *arbitrairement,* sous certaines conditions de convergence seulement.

CHAPITRE II.

Les groupes de Lie.

1. Je rappelle d'abord quelques définitions[2]. Etant données n variables, ou coordonnées d'un point d'un espace R_n à n dimensions, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, considérons n autres variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, définies en fonction des premières par les équations:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

Si inversement, on peut résoudre ces équations par rapport aux x en fonction des x', on dit qu'elles représentent une *transformation,* substituant les x' aux x. Une transformation peut être considérée, soit comme un simple *changement de variables,* soit comme une transformation ponctuelle de l'espace R_n en un autre espace R'_n. Ainsi, les équations:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \qquad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

---

[1] Bourlet, loc. cit., p. 52. (Suppl.)

[2] Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen,* Erster Abschnitt, Einleitung.

représentent, soit un changement de coordonnées rectangulaires, soit une rotation du plan autour de l'origine.

Etant défini un ensemble de transformations, on dit qu'il constitue un *groupe de transformations,* si la succession de deux d'entre elles, effectuées l'une après l'autre, constitue encore une transformation de l'ensemble.

Nous supposerons toujours, avec M. LIE, que toute transformation (1) d'un groupe vérifie un système d'équations aux dérivées partielles entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$, d'une part, $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ considérées comme fonctions des variables précédentes et leurs dérivées, d'autre part, et que, réciproquement, toute solution d'un pareil système définit une transformation du groupe. Nous supposerons en outre que ce système n'est formé que *d'équations analytiques* par rapport à tous les arguments, variables, fonctions et dérivées qui y figurent, et qu'il est *irréductible.* J'appellerai *groupe de Lie,* un groupe ainsi défini; il est *fini* ou *infini,* suivant que sa transformation générale dépend de *constantes* ou de *fonctions* arbitraires; il est *continu,* c'est-à-dire, que l'on peut passer de l'une quelconque de ses transformations à une autre par une variation continue de ces arbitraires.

2. Quant au système d'équations qui définit les transformations du groupe (1), je supposerai toujours qu'il est mis sous forme *complètement intégrable,* opération que l'on sait effectuer; alors, si le système est d'ordre N, toute équation d'ordre inférieur ou égal à N, que l'on pourrait déduire de ce système par des différentiations, suivies de l'élimination des dérivées d'ordre supérieur à N, est nécessairement une *conséquence analytique* des équations de ce système; en outre, toute équation d'ordre supérieur à N, satisfaite par toutes les solutions de ce système, se déduit nécessairement par différentiation des équations de ce système. Soit, ce système, formé de ρ équations:

$$W_h(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n, \ldots, x'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}, \ldots) = 0 \qquad (h=1,2,\ldots,\rho) \tag{2}$$

en posant:

$$x'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n} = \frac{\partial^{a_1+a_2+\ldots+a_n} x'_i}{\partial x_{x_1}^{a_1} \partial x_{x_2}^{a_2} \ldots \partial x_{x_n}^{a_n}}.$$

Il comprend μ_0 équations distinctes d'ordre *zéro,* μ_1 équations distinctes d'ordre *un*, ..., μ_N équations distinctes d'ordre N, c'est-à-dire que, des μ_K équations d'ordre K, par exemple, on ne peut pas déduire d'équations d'ordre inférieur par élimination des dérivées d'ordre K; ces μ_K équations comprennent d'ailleurs celles qu'on obtient en différentiant les équations d'ordre $K - 1$. On a:

$$\rho = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_N$$

et le groupe est *fini,* si μ_N est égal au nombre des dérivées d'ordre N, *infini,* s'il lui est inférieur.

On pourra d'ailleurs, suivant les cas, supposer le système (2) *prolongé* jusqu'à un ordre Q supérieur à N en, lui adjoignant les μ_{N+1} équations distinctes d'ordre $N + 1$, μ_{N+2} d'ordre $N + 2, \ldots, \mu_Q$ d'ordre Q, qui se déduisent des μ_N équations d'ordre N, par $1, 2, \ldots, Q - N$ dérivations successives. Quand nous parlerons des équations du système (2), d'ordre au plus égal à K, ce nombre K pourra être quelconque, inférieur, égal, ou supérieur à N; et il faudra entendre par là l'ensemble des μ_0 équations d'ordre $0, \mu_1$ d'ordre $1, \ldots, \mu_K$ d'ordre K, qui viennent d'être formées.

Ces équations peuvent prendre une autre forme qui nous sera utile dans la suite. Les μ_0 équations d'ordre zéro n'entraînent pas de relation entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seulement, de sorte qu'elles permettent d'exprimer un certain nombre des fonctions $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, en fonction des autres et de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; plus généralement, elles permettent d'exprimer $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et de ε_0 paramètres, $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0$, que j'appellerai *paramètres d'ordre zéro:*

$$(A_0) \qquad x'_h = \varphi_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0). \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,n)}$$

Ensuite, les μ_1 équations du premier ordre donnent certaines des dérivées du premier ordre en fonction des autres, de $x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$; ou mieux, elles donnent les dérivées du premier ordre, en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0$, et de ε_1 paramètres nouveaux $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1$, dits *paramètres du premier ordre:*

$$(A_1) \qquad \frac{\partial x'_h}{\partial x_i} = \varphi_{h,0,0,\ldots,1,\ldots,0}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1).$$

Et ainsi de suite, jusqu'à un ordre quelconque K, les dérivées d'ordre K s'exprimant en fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n$, des ε_0 paramètres d'ordre *zéro*, ε_1 d'ordre *un*, ..., et de ε_K *paramètres d'ordre* K, $\lambda_1^K, \lambda_2^K, \dots, \lambda_{\varepsilon_K}^K$:

$$(A_K) \qquad x'_{h,a_1,a_2,\dots,a_n} = \varphi_{h,a_1,a_2,\dots,a_n}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \dots, \lambda_{\varepsilon_1}^1, \dots, \lambda_1^K, \dots, \lambda_{\varepsilon_K}^K). \atop {\scriptstyle (h=1,2,\dots,n) \quad (a_1+a_2+\dots+a_n=K)}$$

L'ensemble des équations $(A_0), (A_1), \dots, (A_K)$ est équivalent au système (2) pris jusqu'à l'ordre K.

Dans les fonctions φ qui figurent dans ces équations, les paramètres λ sont *essentiels,* c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonctions des λ et de $x_1, x_2, \dots, x_n$, en *nombre inférieur* à $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_K$, telles que les φ puissent s'exprimer à l'aide des x et de ces fonctions seulement. Il en résulte que les équations (A_0) peuvent être résolues par rapport à $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0$, les équations (A_1), par rapport à $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \dots, \lambda_{\varepsilon_1}^1$, et ainsi de suite, pour tout système de valeurs des x' satisfaisant aux équations (2).

Notons en outre qu'on peut toujours trouver au moins une solution des équations (2), représentée par des fonctions $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$, qui prennent, ainsi que leurs dérivées, dans le voisinage d'un point quelconque:

$$x_1 = x_{10}, \qquad x_2 = x_{20}, \quad \dots, \quad x_n = x_{n0}$$

des valeurs définies par les formules (A), où l'on donne aux λ des *valeurs arbitraires,* et aux x, les valeurs $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$.

3. Cela posé, soit T une transformation déterminée, mais quelconque, du groupe:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\dots,n)}$$

et effectuons sur les x' le changement de fonctions défini par la transformation T:

$$(3) \qquad \bar{x}'_i = f_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n).$$

Les $\bar{x}'$, fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n$, et leurs dérivées, s'expriment en fonction des x' et de leurs dérivées, et réciproquement, les équations (3) étant résolubles par rapport à $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$. Le système (2) se change ainsi en un système:

$$(2') \qquad \overline{W}_h(x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \dots, \bar{x}'_n, \dots, \bar{x}'_{i,a_1,a_2,\dots,a_n}, \dots) = 0$$

et les équations (A) se transforment en des équations (A'):

$$(A'_0)\qquad \bar{x}'_h = \bar{\varphi}_h(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(A'_K)\quad \bar{x}'_{h,a_1,a_2,\dots,a_n} = \bar{\varphi}_{h,a_1,a_2,\dots,a_n}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \dots, \lambda_{\varepsilon_1}^1, \dots, \lambda_1^K, \dots, \lambda_{\varepsilon_K}^K)$$

où les paramètres λ sont encore *essentiels* dans les fonction $\bar{\varphi}$, car si leur nombre pouvait s'abaisser, il en serait de même, en revenant aux fonctions initiales x', pour les fonctions φ.

Toute solution de (2′) se déduit d'une solution de (2) par la transformation (3), de sorte que, si

$$(4)\qquad x'_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

est la solution générale de (2), celle de (2′) est:

$$(5)\qquad \bar{x}'_i = f_i(F_1, F_2, \dots, F_n) = G_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Or, ceci représente la transformation obtenue par la succession des transformations (4), puis (5), toutes deux appartenant au groupe. Par suite, toute solution de (2′) satisfait aussi aux équations:

$$(2'')\qquad W_h(x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \dots, \bar{x}'_n, \dots, \bar{x}'_{i,a_1,a_2,\dots,a_n}, \dots) = 0,$$

système qui peut se mettre sous la forme:

$$(A''_0)\qquad \bar{x}'_h = \varphi_h(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1'^0, \lambda_2'^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}'^0)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(A''_K)\quad \bar{x}'_{h,a_1,a_2,\dots,a_n} = \varphi_{h,a_1,a_2,\dots a_n}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1'^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}'^0, \lambda_1'^1, \dots, \lambda_{\varepsilon_1}'^1, \dots, \lambda_1'^K, \dots, \lambda_{\varepsilon_K}'^K)$$

où figurent $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_K$ *paramètres essentiels* nouveaux $\lambda_1'^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}'^0$, $\lambda_1'^1, \dots, \lambda_{\varepsilon_1}'^1, \dots, \lambda_1'^K, \dots, \lambda_{\varepsilon_K}'^K$. A tout système de valeurs attribuées aux x et aux λ dans les équations (A') correspond donc, dans les équations (A'') un système de valeurs des x et des λ', qui rend les seconds membres de (A'') égaux respectivement à ceux de (A'):

$$(6)\qquad \bar{\varphi}_{h,a_1,a_2,\dots,a_n}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \dots, \lambda_1^K, \dots, \lambda_{\varepsilon_K}^K)$$
$$= \varphi_{h,a_1,a_1,\dots,a_n}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1'^0, \dots, \lambda_{\varepsilon_0}'^0, \dots, \lambda_1'^K, \dots, \lambda_{\varepsilon_K}'^K),$$

les x ayant mêmes valeurs dans les deux systèmes.

Ces équations (6) peuvent donc être résolues par rapport aux λ' et sont compatibles. Elles donnent pour les différents ordres successifs:

$$(7)\quad \begin{aligned} \lambda_i'^0 &= L_i^0(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0), && (i=1,2,\ldots,\varepsilon_0) \\ \lambda_i'^1 &= L_i^1(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1) && (i=1,2,\ldots,\varepsilon_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_i'^K &= L_i^K(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1, \ldots, \lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K) && (i=1,2,\ldots,\varepsilon_K) \end{aligned}$$

où les fonctions L_i^K ne dépendent que des paramètres λ, d'ordre au plus égal à K. Inversement on peut résoudre ces équations (7) par rapport aux λ; car, s'il en était autrement, elles entraîneraient au moins une relation de la forme:

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1'^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}'^0, \ldots, \lambda_1'^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}'^K) = 0,$$

laquelle serait ainsi conséquence des équations (6). Alors, en substituant dans les fonctions $\bar{\varphi}$ les paramètres λ' aux paramètres λ, on pourrait, dans ces fonctions $\bar{\varphi}$, abaisser le nombre des paramètres en vertu de la relation précédente; et ceci est impossible, puisque les λ sont *essentiels* dans les fonctions $\bar{\varphi}$.

Les formules (7) établissent ainsi l'identité des systèmes (A') et (A''), ou encore l'équivalence des systèmes (2′) et (2″). Donc:

Théorème I. *Les équations de définition des transformations d'un groupe de Lie restent invariantes lorsqu'on effectue sur les x', un changement de fonctions défini par une transformation quelconque du groupe.*

4. Par une marche parallèle, on pourrait résoudre les μ_0 équations d'ordre zéro par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, car elles ne peuvent entraîner de relation entre les fonctions $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, toute transformation ayant nécessairement une inverse. On formerait ainsi un système analogue au système (A). En effectuant alors sur les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la transformation *inverse* de T:

$$x_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$$

le système (2) se changerait en un système équivalent au suivant:

$$W_h(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots, x'_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}, \ldots) = 0$$

où les dérivées $x'_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ sont prises par rapport aux variables $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$. Donc:

Théorème II. *Les mêmes équations restent invariantes, par un changement de variables indépendantes, défini par une transformation inverse d'une transformation quelconque du groupe.*

5. Il se déduit de là de nouvelles conséquences. Les systèmes (2) et (2′) ont mêmes solutions, et en particulier, la suivante:

$$\bar{x}'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

correspondant à la transformation T. On peut donc dans (4), disposer des fonctions F, c'est-à-dire trouver une transformation S du groupe, de façon que les relations (5) deviennent:

$$\bar{x}'_i = f_i(F_1, F_2 \ldots, F_n) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ceci exige:

$$F_i = x_i,$$

ce qui fait apparaître, parmi les transformations du groupe, la *transformation identique.* Ensuite, puisqu'il en est ainsi, on peut déterminer S de façon que l'on ait:

$$\bar{x}'_i = f_i(F_1, F_2, \ldots, F_n) = x_i.$$

Ceci exige que les fonctions F satisfassent aux identités:

$$f_i(F_1, F_2, \ldots, F_n) = x_i$$

et alors la transformation S donne:

$$x_i = f_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n),$$

c'est-à-dire, qu'elle est *inverse de T*, transformation arbitraire du groupe. Donc:[1]

Théorème III. *Tout groupe de Lie contient la transformation identique et ses transformations sont deux à deux inverses.*

Ceci permet d'établir la réciproque des Théorèmes I et II. Soit, en effet, T, une transformation, qui effectuée sur les fonctions x':

$$\bar{x}'_i = f_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$$

laisse invariant le système (2). Ce système (2) étant satisfait pour la transformation identique:

$$x'_i = x_i$$

aura donc aussi pour solution:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

c'est-à-dire que le groupe contient la transformation T. En opérant de même pour le changement de variables indépendantes, on voit finalement que:

Théorème IV. *Un groupe de Lie étant défini par le système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable:*

$$(2) \qquad W_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots, x'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}, \ldots) = 0 \quad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,\rho)}$$

la condition nécessaire et suffisante pour que ce groupe contienne une transformation T, est que cette dernière, effectuée, soit sur les variables indépendantes x, soit sur les fonctions x', laisse invariant le système (2).

---

[1] Je dois cette démonstration de cette proposition à l'obligeance de M. ENGEL, qui a bien voulu me la communiquer. Je répète d'ailleurs que tous les résultats de ce chapitre sont dus à M. LIE, qui les a exposés en particulier dans le mémoire suivant: *Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen continuirlichen Transformationsgruppen*, Leipziger Berichte, 1891.

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

Invariants et équations invariantes.[1]

1. Etant donnée, dans un espace R_r à $r = n + p$ dimensions, une multiplicité M, à n dimensions, définie par p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de n variables indépendantes $y_1, y_2, \ldots, y_n$, je me propose d'étudier les relations qui existent entre M et les multiplicités qui s'en déduisent lorsqu'on effectue sur l'espace R_r les transformations d'un groupe de Lie, multiplicités que j'appellerai *homologues de M* par rapport à ce groupe.

Les x étant les coordonnées d'un point quelconque de R_r, et les x' celles d'un point de l'espace transformé R'_r, les équations de définition du groupe définissent les x' en fonction des x: il peut d'ailleurs se faire que les transformations du groupe portent seulement sur un nombre moindre m de coordonnées, les $r - m$ autres n'étant pas transformées: cela revient à considérer un groupe à m variables, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ comme s'étendant à $r - m$ variables de plus, $x_{m+1}, \ldots, x_r$; il suffit d'ajouter à ses équations de définition les suivantes:

$$x'_{m+1} = x_{m+1}, \quad \ldots, \quad x'_r = x_r$$

et celles qui s'en déduisent par dérivation.

La multiplicité M est donnée par l'expression de p des coordonnées, savoir:

$$z_1 = x_{n+1}, \quad z_2 = x_{n+2}, \quad \ldots, \quad z_p = x_r$$

en fonction des $n = r - p$ autres:

$$(1) \qquad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad \ldots, \quad y_n = x_n.$$

---

[1] Ces deux termes ont ici le sens des expressions souvent employées de *invariants absolus*, et *invariants relatifs*.

Alors, en transformant R_r en R'_r, p coordonnées, $z'_1, z'_2, \ldots, z'_p$ sont fonctions des n autres $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$, et représentent la multiplicité transformée M':

$$(2) \qquad \begin{aligned} z'_1 &= x'_{n+1}, & z'_2 &= x'_{n+2}, & \ldots, \quad z'_p &= x'_r, \\ y'_1 &= x'_1, & y'_2 &= x'_2, & \ldots, \quad y'_r &= x'_r. \end{aligned}$$

Comme nous l'avons déjà fait, nous classons les équations du groupe suivant l'ordre, et nous les considérons jusqu'à un ordre quelconque K:

$$(3) \qquad \underset{(h=1,2,\ldots,p)}{W_h}(x_1, \ldots, x_r, x'_1, \ldots, x'_r, \ldots, \underset{(a_1+a_2+\ldots+a_r \leq K)}{x'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_r}}, \ldots) = 0$$

ou encore, en les prenant sous forme paramétrique:

$$(A_0) \qquad x'_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_r, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0) \qquad (i=1,2,\ldots,r)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(A_{K-1}) \quad \underset{(i=1,2,\ldots,r)}{x'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_r}} = \underset{(a_1+a_2+\ldots+a_r=K-1)}{\varphi_{i,a_1,a_2,\ldots,a_r}}(x_1, \ldots, x_r, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1, \ldots, \lambda_1^{K-1}, \ldots, \lambda_{\varepsilon_{K-1}}^{K-1})$$

$$(A_K) \quad \underset{(i=1,2,\ldots,r)}{x'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_r}} = \underset{(a_1+a_2+\ldots+a_r=K)}{\varphi_{i,a_1,a_2,\ldots,a_r}}(x_1, \ldots, x_r, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \ldots, \lambda_1^{K-1}, \ldots, \lambda_{\varepsilon_{K-1}}^{K-1}, \lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K).$$

Je ferai remarquer que, pour chaque ordre K, le nombre ε_K des paramètres $\lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K$ dépend seulement du nombre m des coordonnées $x_1, \ldots, x_m$ les seules transformées, et reste le même quel que soit le nombre $r - m$ des autres.

Cela posé, si, dans les équations (2), on remplace les x' par une solution quelconque de (3), on obtient:

$$(4) \qquad \begin{aligned} y'_1 &= f_1(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p), & \ldots, \quad y'_n &= f_n(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p) \\ z'_1 &= f_{n+1}(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p), & \ldots, \quad z'_p &= f_r(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p). \end{aligned}$$

Ces relations représentent un changement simultané de variables et de fonctions, qui met la multiplicité M sous la forme M'. Or, c'est un résultat bien connu de la théorie du changement de variables que les dérivées des z' par rapport aux y' peuvent s'exprimer en fonction des dérivées des z par rapport aux y, et des dérivées des fonctions f; et que de plus, les dérivées d'un ordre quelconque K des z', s'expriment en fonction des dérivées d'ordre K et d'ordre inférieur des z et des f. Ceci tombe en défaut dans le cas seulement où la transformation est telle qu'il y ait une relation identique entre $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$, ce qui se produit lorsque le déterminant des expressions:

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\partial f_i}{\partial z_p} \cdot \frac{\partial z_p}{\partial y_i} \qquad {\scriptstyle (i,j=1,2,\ldots,n)}$$

où les f ont les valeurs (4), est identiquement nul. Ceci n'a évidemment lieu que pour des multiplicités déduites de M par des transformations particulières, n'ayant pas lieu dans le cas de M elle-même. Je laisserai de côté, pour l'instant, ces multiplicités particulières.

Alors, si l'on désigne par $z_1^K, z_2^K, \ldots, z_{\rho_K}^K$ les ρ_K dérivées d'ordre K des z par rapport aux y, et par $z_1'^K, z_2'^K, \ldots, z_{\rho_K}'^K$ les dérivées correspondantes des z'; puis, si l'on remarque que les dérivées partielles des fonctions f ne sont autre chose que celles des x' par rapport aux x, lesquelles satisfont aux équations (3), on aura les relations suivantes, données par l'opération du changement de variables et de fonctions (4):

$$(B_1) \qquad z_i'^1 = \psi_i^1(z_1^1, \ldots, z_{\rho_1}^1, \ldots, x'_{j,a_1,a_2,\ldots,a_r}, \ldots) \qquad {\scriptstyle (a_1+a_2+\ldots+a_r=1) \quad (i=1,2,\ldots,\rho_1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(B_K) \qquad z_i'^K = \psi_i^K(z_1^1, \ldots, z_{\rho_1}^1, \ldots, z_1^K, \ldots, z_{\rho_K}^K, \ldots, x'_{j,a_1,a_2,\ldots,a_r}, \ldots) \qquad {\scriptstyle (a_1+a_2+\ldots+a_r \leqq K) \quad (i=1,2,\ldots\rho_K)}$$

Ces formules deviennent, en remplacant les $x'_{j,a_1,a_2,\ldots,a_r}$ par les valeurs quelles ont en vertu des relations (A), et par une extension de la notation, suivant laquelle $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p$ sont représentés par $z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0$ $(\rho_0 = n + p = r)$:

$$(C_1) \quad z_i'^1 = \varpi_i^1(z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, z_1^1, \ldots, z_{\rho_1}^1, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,\rho_1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(C_K) \quad z_i'^K = \varpi_i^K(z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, \ldots, z_1^K, \ldots, z_{\rho_K}^K, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \ldots, \lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K); \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,\rho_K)}$$

nous leur adjoindrons les suivantes, qui ne sont autres que les relations (A_0) avec une notation différente:

$$(C_0) \qquad z_i'^0 = \varpi_i^0(z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0). \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,\rho_0)}$$

Cela fait, supposons que l'on puisse éliminer les λ entre ces relations (C): en général, on pourra toujours choisir, le groupe étant donné, l'espace R_r et la multiplicité M, de telle façon qu'il en soit ainsi, car le nombre des paramètres λ étant fixé, il suffit pour cela de prendre le nombre $r - m$ des variables $x_{m+1}, \ldots, x_r$ suffisamment grand.

Le résultat de cette élimination dépend de la multiplicité M, les z et leurs dérivées étant des fonctions données de $y_1, y_2, \ldots, y_n$; il dépend de l'ordre le plus élevé des déterminants fonctionnels des seconds membres des équations (C) par rapport aux λ, qui ne sont pas identiquement nuls, quels que soient ces λ. Je supposerai d'abord que la *multiplicité initiale* M soit la *plus générale,* à n dimensions, de l'espace R_r, c'est-à-dire, qu'elle ne satisfait à aucune équation aux dérivées partielles donnée a priori: en particulier, si, dans les équations $(C_0), (C_1), \ldots, (C_K)$, l'ordre des déterminants fonctionnels considérés, qui ne sont par identiquement nuls pour toutes les valeurs des arguments $z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, \ldots, z_1^K, \ldots, z_{\rho_K}^K$, est égal à s_K, ces déterminants d'ordre s_K ne s'annulent pas, lorsqu'on y remplace les z et leurs dérivées par leurs valeurs en fonction de $y_1, \ldots, y_n$, définies par la multiplicité M. En d'autres termes, M est telle que l'on puisse résoudre les équations $(C_0), (C_1), \ldots, (C_K)$ par rapport au plus grand nombre possible de paramètres $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^K$.

Dans ces conditions, l'élimination se fait par voie progressive. D'abord on élimine, si c'est possible, les λ^0 entre les équations (C_0), puis les λ^0 et λ^1 entre les équations (C_0) et (C_1), ce qui reproduit en particulier les équations obtenues dans l'élimination précédente, et ainsi de suite. Le résultat se présente sous forme d'équations résolues par rapport à certaines des quantités $z'^0, z'^1, \ldots, z'^K$, ($z_1'^0, \ldots, z_{\mu_0}'^0$, par exemple, pour l'ordre zéro, $z_1'^1, \ldots, z_{\mu_1}'^1$, pour le premier ordre, $\ldots, z_1'^K, \ldots, z_{\mu_K}'^K$ pour l'ordre K) en fonction des autres $z'^0, z'^1, \ldots, z'^K$ et des $z^0, z^1, \ldots, z^K$:

$$(D_0) \qquad z_i'^0 = G_i^0(z_{\mu_0+1}'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,\mu_0)}$$

$$(D_1) \qquad z_i'^1 = G_i^1(z_{\mu_0+1}'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, z_{\mu_1+1}'^1, \ldots, z_{\rho_1}'^1, z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, z_1^1, \ldots, z_{\rho_1}^1) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,\mu_1)}$$

. . . .

$$(D_K) \qquad z_i'^K = G_i^K(z_{\mu_0+1}'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, \ldots, z_{\mu_K+1}'^K, \ldots, z_{\rho_K}'^K, z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, \ldots, z_1^K, \ldots, z_{\rho_K}^K) \qquad {\scriptstyle (i=1,2\ldots,\mu_K)}$$

chaque fonction G_i^K ne dépendant que de dérivées d'ordre égal ou inférieur à K.

Il est à remarquer que ce même résultat aurait pu être directement obtenu sous la même forme, sans passer par l'intermédiaire des équations (A) et (C), par l'élimination directe des dérivées des x', $x'_{j,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r}$ entre les équations (B) et les équations de définition (3), classées suivant les ordres $0, 1, \ldots, K$.

Inversement, si M' est *homologue* de M, toute relation différentielle d'ordre K entre M' et M est une conséquence des équations (D_0), (D_1), $\ldots$, (D_K), si elle a lieu quelle que soit cette multiplicité homologue M'.

Soit, en effet, cette relation:

$$J(z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, \ldots, z_1^K, \ldots, z_{\rho_K}^K, z_1'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, \ldots, z_1'^K, \ldots, z_{\rho_K}'^K) = 0.$$

A tout élément particulier de M, représenté par les valeurs numériques de ses coordonnées, correspond un élément de M', dont les valeurs numériques sont données par les équations (C), où les λ, avons-nous vu, ont des *valeurs arbitraires*. Ces deux systèmes de coordonnées de M et de M', satisfont, quels que soient les λ, à la relation $J = 0$. Celle-ci est donc une conséquence des équations (C), ou encore, puiqu'elle est indépendante des λ, des équations (D), qui se déduisent des (C) par l'élimination des λ.

2. Ces équations (D) jouissent de propriétés remarquables. D'abord, M pouvant être à elle-même son homologue par la transformation identique, elles sont identiquement satisfaites, quand on y fait, pour toutes les valeurs des indices i et K:

$$z_i'^K = z_i^K.$$

Considérons ensuite deux multiplicités homologues de M, quelconques, M' et M''. D'après la propriété de groupe, M' est aussi homologue de M''. On verra plus loin que si l'on substitue M'' à M dans les équations (C), l'élimination des λ se fait de la même manière. On peut donc établir entre M'' et M' les mêmes relations qu'entre M et M', savoir:

$$z_i'^h = G_i^h(z_{\mu_0+1}'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, \ldots, z_{\mu_h+1}'^h, \ldots, z_{\rho_h}'^h, z_1''^0, \ldots, z_{\rho_0}''^0, \ldots, z_1''^h, \ldots, z_{\rho_h}''^h).$$
$$(h=0,1,2,\ldots,K) \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_h)$$

Celles-ci, comparées aux équations (D), donnent:

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} &G_i^h(z_{\mu_0+1}'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, \ldots, z_{\mu_h+1}'^h, \ldots, z_{\rho_h}'^h, z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, \ldots, z_1^h, \ldots, z_{\rho_h}^h) \\ &= G_i^h(z_{\mu_0+1}'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, \ldots, z_{\mu_h+1}'^h, \ldots, z_{\rho_h}'^h, z_1''^0, \ldots, z_{\rho_0}''^0, \ldots, z_1''^h, \ldots, z_{\rho_h}''^h). \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} h=0,1,\ldots,K \\ i=1,2,\ldots,\mu_h \end{pmatrix}$$

Cela étant, considérons les valeurs numériques de trois éléments correspondants de M, M' et M'': elles satisfont à ces relations (5). Celles de M et M'' étant choisies, on peut prendre, pour celles de M', les valeurs fournies par les formules (C), où l'on attribue aux λ des valeurs arbitraires: cela revient à dire qu'on peut choisir arbitrairement les valeurs de $z'^0_{\mu_0+1}, \ldots, z'^0_{\rho_0}, z'^1_{\mu_1+1}, \ldots, z'^1_{\rho_1}, \ldots, z'^K_{\mu_K+1}, \ldots, z'^K_{\rho_K}$, les autres coordonnées étant alors données par les formules (D). Les relations (5), considérées comme ayant lieu entre deux éléments correspondants de M et M'', ont donc lieu quelles que soient les valeurs des z'^h_i qui y figurent: c'est dire qu'elles sont indépendantes de ces quantités. Par conséquent si l'on pose:

$$Z^h_i(z^0_1, \ldots, z^0_{\rho_0}, \ldots, z^h_1, \ldots, z^h_{\rho_h})$$
$$= G^h_i(c^0_{\mu_0+1}, \ldots, c^0_{\rho_0}, \ldots, c^h_{\mu_h+1}, \ldots, c^h_{\rho_h}, z^0_1, \ldots, z^0_{\rho_0}, \ldots, z^h_1, \ldots, z^h_{\rho_h})$$

où les c sont des constantes arbitraires[1], les équations (5) se réduisent à:

$$Z^h_i(z^0_1, \ldots, z^0_{\rho_0}, \ldots, z^h_1, \ldots, z^h_{\rho_h}) = Z^h_i(z''^0_1, \ldots, z''^0_{\rho_0}, \ldots, z''^h_1, \ldots, z''^h_{\rho_h}).$$
$$(h=0,1,\ldots,K) \qquad (i=1,2,\ldots\mu_h)$$

Elles ont lieu quelle que soit la multiplicité M'', homologue de M, de sorte qu'on a aussi, entre M et M':

$$(E_0) \qquad Z^0_i(z^0_1, \ldots, z^0_{\rho_0}) = Z^0_i(z'^0_1, \ldots, z'^0_{\rho_0}) \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_0)$$
$$(E_1) \qquad Z^1_i(z^0_1, \ldots, z^0_{\rho_0}, z^1_1, \ldots, z^1_{\rho_1}) = Z^1_i(z'^0_1, \ldots, z'^0_{\rho_0}, z'^1_1, \ldots, z'^1_{\rho_1}) \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(E_K) \qquad Z^K_i(z^0_1,\ldots,z^0_{\rho_0},\ldots,z^K_1,\ldots,z^K_{\rho_K}) = Z^K_i(z'^0_1,\ldots,z'^0_{\rho_0},\ldots,z'^K_1,\ldots,z'^K_{\rho_K}). \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_K).$$

Les fonctions Z, d'après leur définition, se réduisent respectivement à $z^0_1, \ldots, z^0_{\mu_0}, z^1_1, \ldots, z^1_{\mu_1}, \ldots, z^K_1, \ldots, z^K_{\mu_K}$, lorsqu'on y fait

$$z^0_{\mu_0+1} = c^0_{\mu_0+1}, \quad \ldots, \quad z^0_{\rho_0} = c^0_{\rho_0}, \quad \ldots, \quad z^K_{\rho_K} = c^K_{\rho_K}.$$

Il en résulte que les équations (E) sont indépendantes. Elles doivent en outre être des conséquences des équations (D); et par suite, elles forment un système équivalent au système (D).

---

[1] Les valeurs des constantes c sont asujetties seulement à laisser holomorphes les fonctions G.

Ces fonctions Z sont appelées *invariants de la multiplicité M, relatifs au groupe de transformations* considéré.

Je dis que, de plus, tout invariant d'ordre K, $H(z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, \ldots, z_1^K, \ldots, z_{\rho_K}^K)$ est une fonction des invariants $Z_1^0, \ldots, Z_{\mu_0}^0, \ldots, Z_1^K, \ldots, Z_{\mu_K}^K$, d'ordre K ou d'ordre inférieur qui viennent d'être obtenus.

En effet, d'après la définition de H, on aura, quelles que soient les deux multiplicités M et M' se déduisant l'une de l'autre par une transformation du groupe:

$$H(z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, \ldots, z_1^K, \ldots, z_{\rho_K}^K) = H(z_1'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, \ldots, z_1'^K, \ldots, z_{\rho_K}'^K)$$

et cette relation, d'ordre K, sera nécessairement une conséquence des équations $(D_0), (D_1), \ldots, (D_K)$, ou encore, des équations $(E_0), (E_1), \ldots, (E_K)$. En résolvant ces dernières par rapport aux quantités z', pour les porter dans $H(z_1'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, \ldots, z_1'^K, \ldots, z_{\rho_K}'^K)$, il faudra donc que les z' disparaissent, ce qui exige bien que H soit une fonction de $Z_1^0, \ldots, Z_{\mu_0}^0, \ldots, Z_1^K, \ldots, Z_{\mu_K}^K$.

De là cette proposition:

Théorème I. *Lorsqu'une multiplicité M, soumise aux transformations d'un groupe de Lie, admet des invariants, ceux d'un ordre quelconque K ou d'ordre inférieur sont fonctions d'un nombre limité d'entre eux; et ces derniers peuvent se déduire, à l'aide de différentiations et d'éliminations seulement, des équations de définition du groupe.*

Toute relation différentielle d'ordre K existant entre M et toute multiplicité homologue M', est une conséquence des relations obtenues en égalant entre eux les invariants distincts d'ordre K et d'ordre inférieur, de M et de M'.

3. *Equations invariantes.* Dans ce qui précède, on a supposé que M était une *multiplicité générale,* de telle façon que l'on pouvait résoudre les équations $(C_0), (C_1), \ldots, (C_K)$ par rapport au plus grand nombre possible de paramètres $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^K$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce nombre s'abaisse s'expriment par des relations obtenues en annulant identiquement, quels que soient les λ, les déterminants fonctionnels d'un certain ordre des seconds membres des équations (C_0), $(C_1), \ldots, (C_K)$ par rapport aux λ. On obtient ainsi un système d'équations, ou, plus généralement, plusieurs systèmes distincts, les conditions cherchées étant que M satisfasse à l'un quelconque d'entre eux.

Soit donc, l'un de ces systèmes:

$$(6) \qquad J_i(z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, z_1^1, \ldots, z_{\rho_1}^1, \ldots, z_1^K, \ldots, z_{\rho_K}^K) = 0 \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,\sigma_K)}$$

et supposons que la multiplicité initiale satisfasse à ce système: j'appelle alors M, *multiplicité particulière,* et je dis que toute multiplicité M', transformée de M, satisfait au même système (6), qui pourra être appelé *système d'équations invariantes* par rapport au groupe de transformations.

En effet, remarquons d'abord que l'élimination des λ entre les équations (C_0), (C_1), ..., (C_K) donne dans cette hypothèse entre M et M', certaines relations différentielles dont le nombre est supérieur à celui que l'on obtient dans le cas général, et n'est pas nul. Ces relations sont d'ailleurs indépendantes, et se présentent sous la même forme que les équations (D): appelons-les (Δ_0), (Δ_1), ..., (Δ_K).

Cela étant, considérons une troisième multiplicité M'', homologue de M et cherchons les relations qui existent entre M' et M''. Soient x_1, x_2, ..., x_r les coordonnées d'un point de M, x_1', x_2', ..., x_r' celles d'un point de M' et x_1'', ..., x_r'', celles d'un point de M''. Nous regarderons M'' comme une représentation analytique nouvelle de la multiplicité M, obtenue en faisant le changement de variables indépendantes et de fonctions:

$$x_i'' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_r) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,r)}$$

défini par la transformation qui fait passer de M à M''. On sait (1ère partie, ch. II) qu'on peut lui associer un changement de paramètres:

$$\lambda_i''^h = L_i^h(x_1, \ldots, x_r, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \ldots, \lambda_1^h, \ldots, \lambda_{\varepsilon_h}^h) \qquad \left({\scriptstyle h=1,2,\ldots,K \atop i=1,2,\ldots,\varepsilon_h}\right)$$

de telle façon que les équations qui se déduisent des (A) en substituant comme coordonnées les x'' aux x, s'obtiennent simplement, en remplaçant dans (A) les x et λ par les x'' et λ'' correspondants. Elles deviennent ainsi:

$$(A'') \qquad \frac{\partial^h x_i'}{\partial x_1''^{a_1} \ldots \partial x_r''^{a_r}} = \varphi_{i,a_1,\ldots;a_r}(x_1'', \ldots, x_r'', \lambda_1''^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}''^0, \ldots, \lambda_1''^h, \ldots, \lambda_{\varepsilon_h}''^h).$$
$$\scriptstyle (h=1,2,\ldots,K) \qquad (i=1,2,\ldots,r) \qquad (a_1+a_2+\ldots+a_r=h)$$

D'autre part, le changement de variables et de fonctions qui met M sous la forme M'', donne les relations suivantes, analogues des (B) et ayant nécessairement même forme:

$$(B'') \quad z_i'^h = \psi_i^h\left(z_1'', \ldots, z_{\rho_1}'', \ldots, z_1''^h, \ldots, z_{\rho_h}''^h, \ldots, \frac{\partial^h x_j'}{\partial x_1''^{\alpha_1} \ldots \partial x_n''^{\alpha_r}}, \ldots\right) \quad {\scriptstyle (h=1,\ldots,K) \quad (i=1,2,\ldots,\rho_K)}$$

de telle sorte que M' se rattache à M'' par les relations suivantes (C'') qui ont encore même forme que (C):

$$(C'') \quad z_i'^h = \varpi_i^h(z_1''^0, \ldots, z_{\rho_0}''^0, \ldots, z_1''^h, \ldots, z_{\rho_h}''^h, \lambda_1''^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}''^0, \ldots, \lambda_1''^h, \ldots, \lambda_{\varepsilon_h}''^h). \quad {\scriptstyle (h=0,1,\ldots,K) \quad (i=1,2,\ldots,\rho_h)}$$

Les relations entre M' et M'' s'obtiendraient en éliminant les λ'' entre ces équations C''. Or, entre M et M', on a, jusqu'à l'ordre K, les relations indépendantes $(\Delta_0), (\Delta_1), \ldots, (\Delta_K)$; si, dans ces dernières on remplace les éléments de M, par leurs valeurs, sous la forme M'', elles deviennent des relations entre M' et M'', $(\Delta_0''), (\Delta_1''), \ldots, (\Delta_K'')$, qui restent indépendantes, étant toujours résolues par rapport aux mêmes quantités $z_i'^K$. L'élimination des λ entre $(C_0''), (C_1''), \ldots, (C_K'')$ entraîne donc les relations indépendantes $(\Delta_0''), (\Delta_1''), \ldots, (\Delta_K'')$, et par suite, (M'') est telle que les équations (C'') ne sont pas résolubles par rapport au nombre maximum de paramètres λ'', sans quoi, il ne pourrait exister entre M' et M'' qu'un nombre moindre de relations indépendantes.

Cette conclusion subsistant, quelle que soit M'', homologue de M, il faut donc que le système (6) ou l'un des systèmes analogues soit satisfait par M'', indépendamment des arbitraires dont dépend celle-ci; et ce fait ne peut avoir lieu que pour le système (6) lui-même, le seul qui soit satisfait quand on prend pour M'', la multiplicité M elle-même, qui correspond à la transformation identique. En particulier, on voit bien que deux multiplicités homologues, sont ou *générales,* ou *particulières,* en même temps, résultat auquel nous avons fait appel précédemment (§ 2, page 22).

4. L'étude des multiplicités satisfaisant à un *système invariant d'équations* se fera de la même manière que celle des multiplicités générales. Les coordonnées des éléments de pareilles multiplicités satisfont au système (6), et, pour les ordres supérieurs, aux équations qui s'en déduisent par dérivation. Ces coordonnées s'expriment donc en fonction d'un certain

nombre d'entre elles, ou de certains paramètres, pris comme nouvelles coordonnées. On peut ainsi transformer les équations (B) et (C) de façon à n'y laisser figurer que ces nouvelles coordonnées. De là une seconde classification de ces multiplicités, en *multiplicités générales* qui ne satisfont à aucune équation nouvelle donnée a priori, et en *multiplicités particulières.* Pour les premières, l'élimination des λ entre les équations (C) donne, s'il y a lieu, des relations, analogues aux équations (E) entre des *invariants* des deux multiplicités; les secondes sont définies par des *systèmes d'équations invariantes* entre les coordonnées d'une même multiplicité; et ainsi de suite. Ces divisions et subdivisions ne peuvent d'ailleurs pas se prolonger indéfiniment: on ne peut concevoir, en effet, qu'il y ait un nombre illimité de relations entre les coordonnées d'ordre K ou d'ordre inférieur, ces coordonnées étant en nombre fini.

Cette classification effectuée, on est en mesure d'établir toutes les équations aux dérivées partielles d'un ordre quelconque K et d'ordre inférieur auxquelles satisfont les multiplicités M', transformées d'une multiplicité initiale, M, donnée. D'abord, ces équations comprennent toutes les *équations invariantes* auxquelles satisfait M. Quant aux autres, elles sont satisfaites pour toutes les valeurs des quantités $z'^0, z'^1, \dots, z'^K$ données par les formules (C); elles sont donc des conséquences des équations (E) (ou des équations analogues, quand M n'est pas une multiplicité générale). Dans ces équations (E), les quantités $z^0, z^1, \dots, z^K$ qui y figurent sont des fonctions données des r variables indépendantes $y_1, y_2, \dots, y_r$. L'élimination de ces dernières, si elle est possible, donnera enfin des relations de la forme suivante, auxquelles satisfont les multiplicités M':

$$\Phi(Z_1^0, \dots, Z_{\mu_0}^0, Z_1^1, \dots, Z_{\mu_1}^1, \dots, Z_1^K, \dots, Z_{\mu_K}^K) = 0$$

où les Z sont pris en fonction des quantités $z'^0, z'^1, \dots, z'^K$.

On obtient ainsi toutes les équations cherchées, d'où la proposition suivante qui complète la précédente:

Théorème II. *Etant donnée une multiplicité M, que l'on soumet à toutes les transformations d'un groupe de Lie, les multiplicités homologues M' satisfont à des équations aux dérivées partielles qui sont de deux sortes. Ces équations s'obtiennent en exprimant pour les unes, que M' satisfait aux mêmes* *systèmes d'équations invariantes que M, pour les autres, que les invariants de M' sont liés par les mêmes relations que ceux de M.*

Ces équations invariantes et ces invariants se déduisent d'ailleurs par de simples différentiations et éliminations des équations de définition du groupe.

5. **Remarque**. Nous avons exclu de notre analyse, parmi les multiplicités M', transformées de M, celles pour lesquelles $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ sont liées entre elles par une relation, et ne peuvent plus être prises comme variables indépendantes. Il est bien évident par raison de continuité, que les invariants absolus et les équations invariantes ne cessent pas d'avoir un sens dans ce cas.

En effet, les quantités $y'_1, \ldots, y'_n, z'_1, \ldots, z'_p$, fonctions de $y_1, \ldots, y_n$, $z_1, \ldots, z_p$ ne cessent pas de représenter une multiplicité à n dimensions, sans quoi, en repassant de M' à M par la transformation inverse, on trouverait que M a moins de n dimensions distinctes. Il est donc possible de prendre comme variables indépendantes, dans M', n quantités distinctes parmi $y'_1, \ldots, y'_n, z'_1, \ldots, z'_p$. Alors toute expression différentielle où $y'_1, \ldots, y'_n$ sont les variables indépendantes se transforme en une expression nouvelle ayant un sens bien défini. Les invariants et équations invariantes subsistent encore avec ces nouvelles variables, et, en particulier dans le cas des multiplicités M' qui avaient été précédemment exclues.

Par exemple, considérons, dans le plan, le groupe des rotations autour de l'origine. Une courbe définie par une fonction z, de y, admet pour invariant

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}\left(y\frac{dz}{dy}-z\right)$$

qui représente la distance à l'origine de la tangente au point y, z. Notre analyse tombe en défaut, lorsque la courbe en y, z se transforme en une courbe en y', z', pour laquelle on aurait $y' = \text{const.}$ Mais, en prenant z pour variable indépendante, l'invariant considéré devient:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}}\left(y-z\frac{dy}{dz}\right)$$

expression qui pour la courbe $y' = \text{const.}$ se réduit à y'. On a donc, entre la courbe en y, z, et cette courbe particulière qui est une de ses transformées, la relation:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}\left(y\frac{dz}{dy} - z\right) = y'.$$

6. **Exemple.** Considérons le groupe des mouvements dans un plan, dont la transformation générale est:

$$x_1' = a + x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha,$$
$$x_2' = b + x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha$$

où a, b, α sont des constantes arbitraires. Les équations de définition (A) sont ici:

$$x_1' = \lambda_1, \qquad x_2' = \lambda_2,$$

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} = \cos\alpha, \qquad \frac{\partial x_1'}{\partial x_2} = -\sin\alpha, \qquad \frac{\partial x_2'}{\partial x_1} = \sin\alpha, \qquad \frac{\partial x_2'}{\partial x_2} = \cos\alpha$$

les dérivées d'ordre supérieur étant toutes nulles, λ_1, λ_2 et α étant trois paramètres arbitraires.

Effectuons ces transformations sur une courbe définie par une fonction z de y; la courbe transformée sera définie par une fonction z' de y' en posant:

$$y = x_1, \qquad z = x_2,$$
$$y' = x_1', \qquad z' = x_2'$$

et on a:

$$\frac{dz'}{dy'} = \frac{\frac{\partial x_2'}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\frac{dz}{dy}}{\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\frac{dz}{dy}}.$$

En tenant compte immédiatement des équations de définition, ceci donne, comme équations (C):

$$(C_1) \qquad \frac{dz'}{dy'} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha\frac{dz}{dy}}{\cos\alpha - \sin\alpha\frac{dz}{dy}}$$

et, pour le second ordre:

$$(C_2) \qquad \frac{d^2 z'}{dy'^2} = \frac{\left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial x_2'}{\partial x_2} - \frac{\partial x_2'}{\partial x_1}\frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\right)\frac{d^2 z}{dy^2}}{\left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\frac{dz}{dy}\right)^3} = \frac{\frac{d^2 z}{dy^2}}{\left(\cos\alpha - \sin\alpha\frac{dz}{dy}\right)^3}.$$

La première équation donne:

$$\frac{\cos\alpha - \sin\alpha\frac{dz}{dy}}{\mathrm{I}} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha\frac{dz}{dy}}{\frac{dz'}{dy'}} = \frac{\left(\mathrm{I} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\mathrm{I} + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

de sorte que l'élimination de α donne:

$$(D_2) \qquad \frac{d^2 z'}{dy'^2} = \frac{d^2 z}{dy^2}\cdot\frac{\left(\mathrm{I} + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\mathrm{I} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

équation qui se met sous la forme:

$$(E_2) \qquad \left(\mathrm{I} + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{d^2 z'}{dy'^2} = \left(\mathrm{I} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{d^2 z}{dy^2}$$

où l'on voit apparaître l'invariant bien connu, donné par la *courbure* de la courbe.

Le calcul tombe en défaut dans le cas où (C_1) n'est plus résoluble par rapport à α, c'est-à-dire, lorsque on a:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{dz'}{dy'}\right) = \left[\left(\cos\alpha - \sin\alpha\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\sin\alpha + \cos\alpha\frac{dz}{dy}\right)^2\right]\frac{\mathrm{I}}{\left(\cos\alpha - \sin\alpha\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

$$= \frac{\mathrm{I} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}{\left(\cos\alpha - \sin\alpha\frac{dz}{dy}\right)^2} = 0.$$

L'équation $1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = 0$ est une *équation invariante,* qui entraîne bien $1 + \left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2 = 0$: elle représente les deux systèmes de *droites isotropes* qui jouent donc le rôle de *courbes particulières* par rapport aux transformations considérées.

7. **Application.** Reprenons les équations de définition d'un groupe de transformations, entre les m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et leurs m fonctions $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$. Adjoignons-leur m nouvelles coordonnées, non transformées, en posant:

$$(7) \qquad u'_1 = u_1, \qquad u'_2 = u_2, \quad \ldots, \quad u'_m = u_m$$

et faisons porter la transformation sur une multiplicité définie par les m fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_m$ des m variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

La théorie générale, reprise sur cet exemple, montre que les équations (C) comprennent, en outre des équations (7), d'autres équations exprimant $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ et leurs dérivées par rapport à $u'_1, u'_2, \ldots, u'_m$, en fonction des paramètres λ, des fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_m$, et des dérivées de celles-ci par rapport à $u_1, u_2, \ldots, u_m$, ces expressions étant en outre *indépendantes* de $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Il en résulte que les équations (E) sont, dans le cas d'une multiplicité initiale générale, de la forme:

$$u'_i = u_i, \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

$$J_i^0(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) = J_i^0(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$J_i^N\left(x'_1, \ldots, x'_m, \ldots, \frac{\partial x'_h}{\partial u'_K}, \ldots, \frac{\partial^N x'_h}{\partial u'^{\alpha_1}_1 \ldots \partial u'^{\alpha_m}_m}, \ldots\right)$$

$$= J_i^N\left(x_1, \ldots, x_m, \ldots, \frac{\partial x_h}{\partial u_K}, \ldots, \frac{\partial^N x_h}{\partial u_1^{\alpha_1} \ldots \partial u_m^{\alpha_m}}, \ldots\right) \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_N)$$

où les invariants J sont indépendants des variables $u_1, \ldots, u_m$.

En particulier, supposons que la multiplicité initiale M soit la suivante:

$$x_1 = u_1, \qquad x_2 = u_2, \quad \ldots, \quad x_m = u_m.$$

Alors si

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m). \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,m)}$$

définit la transformation générale du groupe, la multiplicité M' sera:

$$x'_i = f_i(u'_1, u'_2, \ldots, u'_m). \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,m)}$$

M ne cesse d'ailleurs pas d'être une multiplicité générale, car alors les équations (C) se confondent, à la notation près, avec les équations (A): et celles-ci sont résolubles par rapport à tous les paramètres λ, sans quoi ces paramètres cesseraient d'être essentiels. D'autre part, l'élimination, entre les équations (E), des variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de M est immédiate, et par suite, M' satisfait, jusqu'à l'ordre N, aux seules équations suivantes, qui sont donc, sous une autre forme, les équations de définition du groupe:

$$(8)\quad \begin{cases} J_i^0(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m) = J_i^0(x_1, x_2, \ldots, x_m) & {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,\mu_0)} \\ J_i^1\left(x'_1, \ldots, x'_m, \dfrac{\partial x'_1}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial x'_h}{\partial x_k}, \ldots, \dfrac{\partial x'_m}{\partial x_m}\right) = \alpha_i^1(x_1, x_2, \ldots, x_m) & {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,\mu_1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ J_i^N(x'_1, \ldots, x'_m, \ldots, x'_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}, \ldots) = \alpha_i^N(x_1, x_2, \ldots, x_m) & {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,\mu_N)} \end{cases}$$

où les α représentent ce que deviennent les J quand on y fait:

$$x'_1 = x_1, \qquad x'_2 = x_2, \quad \ldots, \quad x'_m = x_m.$$

Donc:

Théorème III. *Les équations de définition des transformations d'un groupe de Lie s'obtiennent en exprimant que certaines fonctions J, de x'_1, $\ldots, x'_m$ et de leurs dérivées par rapport à $x_1, \ldots, x_m$ sont identiquement égales aux expressions qu'on en déduit en y attribuant aux x' les valeurs qu'elles ont pour la transformation identique.*

Ces invariants J jouent un rôle capital. On vient de voir qu'ils restent inaltérés si on effectue sur les x' un changement de fonctions défini par une transformation du groupe; d'où en se reportant au théorème IV (1ère partie, ch. II):

Théorème IV. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation appartienne au groupe défini par les équations* (8) *est qu'elle laisse invariantes les expressions J, quand on effectue sur les x' un changement de fonctions défini par cette transformation.*

CHAPITRE II.

Les invariants et équations invariantes, définis à l'aide des transformations infinitésimales d'un groupe de Lie.

1. Considérons les groupes, dits *à un paramètre,* dont les transformations dépendent d'une seule constante arbitraire. S'il y a n variables, les équations de définition comprendront $n - 1$ équations d'ordre zéro, de la forme:

$$J_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = J_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (i=2,3,\dots,n)$$

où les $n - 1$ fonctions $J_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont distinctes entre elles et de l'une au moins, x_1, par exemple, des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. Pour les ordres supérieurs, il y a autant d'équations que de dérivées.

En posant:

$$X_i = J_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$X'_i = J_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \qquad (i=2,3,\dots,n)$$

la transformation générale du groupe sera donc de la forme suivante:

$$x'_1 = f(x_1, X_2, \dots, X_n, a)$$
$$X'_i = X_i \qquad (i=2,3,\dots,n)$$

avec la constante arbitraire a. La première équation peut être résolue par rapport à a:

$$\omega(x_1', x_1, X_2, \ldots, X_n) = a \tag{1}$$

et la fonction ω sera telle que l'équation (1) combinée à:

$$\omega(x_1'', x_1', X_2, \ldots, X_n) = b \tag{2}$$

entraînera:

$$\omega(x_1'', x_1, X_2, \ldots, X_n) = c,$$

c étant une nouvelle constante, et cela, quelles que soient les constantes a et b. Ceci veut dire que les équations homogènes en dx_1, dx_1', dx_1'':

$$\frac{\partial\omega(x_1', x_1)}{\partial x_1'}dx_1' + \frac{\partial\omega(x_1', x_1)}{\partial x_1}dx_1 = 0,$$

$$\frac{\partial\omega(x_1'', x_1')}{\partial x_1''}dx_1'' + \frac{\partial\omega(x_1'', x_1')}{\partial x_1'}dx_1' = 0,$$

$$\frac{\partial\omega(x_1'', x_1)}{\partial x_1''}dx_1'' + \frac{\partial\omega(x_1'', x_1)}{\partial x_1}dx_1 = 0$$

sont compatibles quels que soient x_1, x_1', x_1''. D'où l'identité:

$$\frac{\dfrac{\partial\omega(x_1'', x_1')}{\partial x_1''}}{\dfrac{\partial\omega(x_1'', x_1')}{\partial x_1'}}\cdot\frac{\partial\omega(x_1', x_1)}{\partial x_1'} + \frac{\dfrac{\partial\omega(x_1'', x_1)}{\partial x_1''}}{\dfrac{\partial\omega(x_1'', x_1)}{\partial x_1}}\cdot\frac{\partial\omega(x_1', x_1)}{\partial x_1} = 0.$$

Cette identité subsistant si on attribue à x_1'' une valeur numérique quelconque, la fonction $\omega(x_1', x_1, X_2, \ldots, X_n)$ satisfait donc à une équation de la forme suivante:

$$\varphi(x_1', X_2, \ldots, X_n)\frac{\partial\omega}{\partial x_1'} + \varphi(x_1, X_2, \ldots, X_n)\frac{\partial\omega}{\partial x_1} = 0$$

et par suite, l'équation (1) peut s'écrire:

$$J_1(x_1', X_2, \ldots, X_n) - J_1(x_1, X_2, \ldots, X_n) = t$$

où t est une nouvelle constante, fonction de a.

$\omega(x_1', x_1, X_2, \dots, X_n)$ dépendant nécessairement de x_1' et de x_1, il en est de même de $J_1(x_1, X_2, \dots, X_n)$ relativement à x_1, et, par suite, en posant:

$$X_1 = J_1(x_1, X_2, \dots, X_n), \qquad X_1' = J_1(x_1', X_2, \dots, X_n),$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ seront indépendants, et on a:

$$X_1' = X_1 + t.$$

Donc:[1]

Théorème I. *On peut, par un choix convenable de coordonnées, mettre la transformation générale d'un groupe de Lie à un paramètre sous la forme:*

$$X_1' = X_1 + t, \qquad X_2' = X_2, \quad \dots, \quad X_n' = X_n \tag{3}$$

où t est une constante arbitraire.

2. On retrouve ainsi une des propriétés, aujourd'hui bien classiques, des groupes à un paramètre. On pourrait en déduire les autres. Je remarquerai seulement, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ soit un invariant de ce groupe, est que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = 0.$$

En retournant aux coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$, on trouve:

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = \xi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

expression qu'on représente par Xf.

La transformation (3), pour $t = 0$, est la *transformation identique;* pour t ayant une valeur infiniment petite δt, elle est dite *transformation infinitésimale,* et attribue à une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un accroissement dont le premier terme est précisément $Xf \,.\, \delta t$.

---

[1] Lie, *Theorie der Transformationsgruppen,* I, chap. 3, p. 49.

Le symbole Xf caractérise complètement la transformation infinitésimale et son groupe à un paramètre.

La condition pour qu'une fonction soit un invariant du groupe est qu'elle satisfasse à l'équation

$$Xf = 0,$$

et, de même, pour qu'un système d'équations:

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_l = 0,$$

admette les transformations du groupe,[1] il faut et il suffit que ce système entraîne:

$$Xf_1 = 0, \qquad Xf_2 = 0, \quad \ldots, \quad Xf_l = 0.$$

3. Ceci rappelé, nous distinguerons, avec M. Lie, entre une *transformation infinitésimale,* ainsi déduite d'un groupe à un paramètre, et une *transformation infiniment petite:*

$$(4) \qquad x'_i = x_i + \delta t \,.\, \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \delta t^2 \,.\, \eta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots$$

où les termes d'ordre supérieur au premier n'ont pas avec ceux du premier ordre la même dépendance que dans une transformation infinitésimale, et ne sont pas nécessairement déterminés par eux.

Pour exprimer qu'une telle transformation (4) appartient au groupe de Lie défini par les équations (8) du chap. I, adjoignons aux formules (4), les suivantes qui s'en déduisent par différentiation:

$$(5) \qquad \begin{array}{l} \dfrac{\partial x'_i}{\partial x_\mu} = \varepsilon_{i\mu} + \delta t \,.\, \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_\mu} + \ldots \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n} = \delta t \,.\, \xi_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n} + \ldots ; \end{array} \qquad \begin{array}{l} \varepsilon_{i\mu} = 0 \text{ pour } i \neq \mu \\ \varepsilon_{ii} = 1 \end{array}$$

[1] Ib., ch. 7, p. 108. Le système d'équations est supposé ne pas annuler tous les déterminants fonctionnels d'ordre l de $f_1, f_2, \ldots, f_l$.

on trouve ainsi, en écrivant que les équations de définition sont satisfaites, jusqu'aux termes du premier ordre, que les ξ sont assujettis aux seules relations suivantes, *linéaires et homogènes* par rapport aux ξ et à leurs dérivées:

$$(6)\quad \begin{aligned} &\sum_j \left(\frac{\partial J_i^0}{\partial x_j'}\right)_0 \cdot \xi_j = 0 && (i=1,2,\ldots,\mu_0)\\ &\sum_j \left(\frac{\partial J_i^1}{\partial x_j'}\right)_0 \xi_j + \sum_{j,\mu} \left(\frac{\partial J_i^1}{\partial \frac{\partial x_j'}{\partial x_\mu}}\right)_0 \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial x_\mu} = 0 && (i=1,2,\ldots,\mu_1)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\sum \left(\frac{\partial J_i^N}{\partial x_j'}\right)_0 \xi_j + \cdots + \sum \left(\frac{\partial J_i^N}{\partial x'_{j,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}}\right)_0 \cdot \xi_{j,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = 0 && (i=1,2,\ldots,\mu_N) \end{aligned}$$

où l'indice inférieur o indique que l'on prend les valeurs des dérivées des J pour

$$x_i' = x_i, \qquad \frac{\partial x_j'}{\partial x_\mu} = \varepsilon_{j,\mu}, \quad \ldots, \quad x'_{j,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = 0.$$

A un autre point de vue (chap. I, théor. IV), il suffit aussi d'exprimer que la transformation (4), où les x' et les x sont deux systèmes de n fonctions des mêmes variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_n$, laisse invariantes les expressions $J^0, J^1, \ldots, J^N$, fonctions des x et de leurs dérivées par rapport aux u. En calculant, à l'aide de (4), les expressions des dérivées des x', les termes du premier ordre obtenus sont les mêmes que ceux qui se déduiraient d'une transformation infinitésimale entre les x et leurs dérivées par rapport aux u:

$$X^{(N)}f = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots + \sum \bar{\xi}_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} \frac{\partial f}{\partial x_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}}$$

où l'on pose:

$$x_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{\partial^N x_i}{\partial u_1^{\alpha_1} \partial u_2^{\alpha_2} \ldots \partial u_n^{\alpha_n}}.$$

Les $\bar{\xi}_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ sont des fonctions bien déterminées, lorsque les ξ sont donnés, des x et de leurs dérivées, et $X^{(N)}f$ n'est autre chose que la *transformation prolongée,*[1] jusqu'à l'ordre N de

$$Xf = \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Les ξ sont donc assujettis à satisfaire aux identités suivantes, par rapport aux x et leurs dérivées:

$$(7) \qquad XJ_i^0 = 0, \qquad X^{(1)}J_i^1 = 0, \quad \ldots, \quad X^{(N)}J_i^N = 0.$$

Or, ces mêmes relations expriment que les J admettent la transformation infinitésimale Xf, et par suite, son groupe à un paramètre.

Le raisonnement suppose d'ailleurs seulement que les ξ sont, dans (4), les coefficients des termes d'ordre le moins élevé. Donc:

Théorème II. *Etant donnée une transformation infiniment petite d'un groupe de Lie, la transformation infinitésimale définie par ses termes d'ordre le moins élevé, et son groupe à un paramètre appartiennent aussi au groupe de Lie.*[2]

Soit cette transformation infinitésimale, ayant mêmes termes du premier ordre que (4):

$$\bar{x}_i = x_i + \delta t \,.\, \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

on aura:

$$x_i' = \bar{x}_i + \delta t^2 .\, \theta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots$$

ou en exprimant les seconds membres en fonction de $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$:

$$x_i' = \bar{x}_i + \delta t^2 .\, \theta_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) + \ldots .$$

Pour les mêmes raisons que tout à l'heure, la transformation infinitésimale:

$$Yf = \sum_i \theta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

---

[1] Lie, *Transformationsgruppen,* I, ch. 25, p. 523. — Je suppose connus ici tous les résultats exposés dans ce chapitre.

[2] Lie, *Die Grundlagen,* etc., p. 342.

appartient encore au groupe; et ainsi de suite. On peut donc considérer la transformation infiniment petite (4), en ce qui concerne au moins ses termes pris jusqu'à un ordre infinitésimal quelconque, comme *obtenue en effectuant successivement un certain nombre de transformations infinitésimales du groupe.*

Il y a plus, si Xf et Yf appartiennent toutes deux au groupe, $X^{(N)}f$ et $Y^{(N)}f$ satisfont toutes deux aux équations (7), et par suite, aussi $(X^{(N)}Y^{(N)})$. Cette dernière, étant, comme on sait,[1] la transformation prolongée de (XY), la transformation infinitésimale (XY) appartient au groupe. Donc:

Théorème III. *Si les deux transformations infinitésimales Xf et Yf appartiennent à un groupe de Lie, il en est de même de leur crochet* (XY).[2]

4. Cette propriété du système d'équations (6) permet de retrouver les invariants dont on a établi l'existence, par une marche tout à fait parallèle à celle déjà suivie.

Reprenons, en effet, un système de p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de n variables indépendantes, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, les $r = n + p$ quantités y et z n'étant autre chose que $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Considérons une transformation infinitésimale quelconque:

$$Xf = \sum_{i=1}^{i=n} \eta_i(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p)\frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{i=p} \zeta_i(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p)\frac{\partial f}{\partial z_i}$$

et, en calculant les variations qu'elle fait subir aux dérivées des z, par rapport aux y, *prolongeons*-la jusqu'à un ordre quelconque K

$$X^{(K)}f = \sum_{i=1}^{i=n} \eta_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{i=p} \zeta_i \frac{\partial f}{\partial z_i} + \sum_{i=1}^{i=\rho_1} \zeta_i^{(1)} \frac{\partial f}{\partial z_i^1} + \ldots + \sum_{i=1}^{i=\rho_K} \zeta_i^{(K)} \frac{\partial f}{\partial z_i^K}.$$

---

[1] Lie, *Transformationsgruppen,* I, chap. 25, p. 547.

[2] Lie, *Die Grundlagen,* etc., p. 348. — Dans le cas d'un groupe fini, les transformations infinitésimales du groupe sont des fonctions linéaires à coefficients constants d'un certain nombre d'entre elles $X_1f, X_2f, \ldots, X_rf$, et ce théorème établit l'existence des relations:

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f.$$

Les y et z étant égaux aux coordonnées x, nous égalerons les η et ζ aux ξ correspondants, ceux qui sont relatifs aux variables non transformées, s'il y en a, étant égalés à zéro. Alors, les ξ satisfaisant aux relations (6) et à celles qui s'en déduisent par dérivation, on peut, jusqu'à l'ordre K, exprimer un certain nombre de ξ et de leurs dérivées, en fonction *linéaire et homogène* des autres, qui restent *arbitraires,* et on trouve ainsi, $X^{(K)}f$ étant linéaire et homogène par rapport aux ξ et leurs dérivées:

$$X^{(K)}f = \sum_{i=1}^{i=\varepsilon_0} \xi_i^0 X_{0,i}f + \sum_{i=1}^{i=\varepsilon_1} \xi_i^1 X_{1,i}f + \dots + \sum_{i=1}^{i=\varepsilon_K} \xi_i^K X_{K,i}f \tag{8}$$

où les $X_{K,i}f$ sont des transformations infinitésimales bien déterminées, par rapport aux y, z, et aux dérivées des z et les ξ_i^K des coefficients arbitraires.

Toute fonction des y, des z et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre K, ou tout système d'équations entre ces mêmes quantités qui admet toutes les transformations infinitésimales du groupe, admet donc les transformations

$$X_{0,i}f, \quad X_{1,i}f, \quad \dots, \quad X_{K,i}f \tag{9}$$

et réciproquement.

Les équations obtenues en égalant à zéro les expressions (9) forment d'ailleurs un *système complet.* En effet, si $X^{(K)}f$ et $Y^{(K)}f$ appartiennent toutes deux à la forme (8), nous savons qu'il en est de même de leur crochet $(X^{(K)}Y^{(K)})$, quels que soient au reste les coefficients de $X^{(K)}f$ et de $Y^{(K)}f$. En particulier, $(X_{K,i}, X_{K,j})$ appartient donc à cette forme (8): c'est donc bien une combinaison linéaire et homogène de transformations (9).

5. Je dis que, de cette manière, on n'obtient pas d'invariants distincts de ceux obtenus par le procédé du chapitre précédent. En effet, d'abord, ces nouveaux invariants admettent une transformation infiniment petite quelconque du groupe, car l'expression obtenue en faisant une telle transformation sur l'un d'eux, est, jusqu'à un ordre infinitésimal quelconque, la même que si on effectuait successivement plusieurs transformations infinitésimales. Elle ne diffère donc de l'invariant que de quantités dont l'ordre peut être pris arbitrairement, et par suite, lui est identique.

Or, en se reportant aux équations (A) du chapitre précédent, une transformation infiniment petite s'obtient en attribuant aux paramètres λ des *valeurs arbitraires,* assujetties seulement à être infiniment voisines de celles qu'elles ont dans le cas de la transformation identique. Tout invariant ou équation invariante admettant les transformations (9) est donc indépendant de ces arbitraires, et se confond bien avec un invariant ou une équation invariante, obtenue par le premier procédé. Donc:

Théorème IV. *Les invariants d'un groupe de Lie peuvent s'obtenir par la recherche des solutions communes à un système complet d'équations linéaires aux dérivées partielles; la formation de ce système résulte immédiatement des équations de définition des transformations infinitésimales du groupe.*

Les systèmes d'équations invariantes sont ceux qui admettent l'ensemble des transformations infinitésimales ainsi formées.[1]

6. **Exemple.** Reprenons le groupe des mouvements du plan, dont les équations de définition:

$$\left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\right)^2 = 1, \qquad \left(\frac{\partial x_2'}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial x_2'}{\partial x_1} + \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}\frac{\partial x_2'}{\partial x_2} = 0,$$

$$0 = \frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 x_2'}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 x_2'}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 x_2'}{\partial x_2^2}$$

donnent, pour les transformations infinitésimales:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = 0,$$

$$0 = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2^2}.$$

---

[1] Lie, *Über Differentialinvarianten,* Math. Annalen, t. 24, p. 566. — *Die Grundlagen,* etc., p. 370 et 374.

Rappelons que les systèmes d'équations invariantes dont il est question, s'obtiennent en égalant à zéro les déterminants d'un même ordre, formés avec les coefficients des transformations (9).

La transformation étant supposée porter sur une fonction $z = x_2$, d'une variable $y = x_1$, on aura:

$$\delta y = \xi_1 \delta t, \qquad \delta z = \xi_2 \delta t,$$

$$\delta z' = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + z' \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) - z'^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} (1 + z'^2),$$

$$\delta z'' = 2 z' z'' \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} - z'' \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + z' \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) = 3 z' z'' \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}.$$

Les invariants du second ordre admettent ainsi les transformations:

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \; \frac{\partial f}{\partial z}, \; (1 + z'^2) \frac{\partial f}{\partial z'} + 3 z' z'' \frac{\partial f}{\partial z''}$$

ce qui reproduit *l'équation invariante du* 1er *ordre:*

$$(1 + z'^2) = 0$$

et *l'invariant du second ordre:*

$$z''(1 + z'^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

CHAPITRE III.

Systèmes finis d'invariants, et paramètres différentiels.

1. Nous avons vu que toute multiplicité M', déduite d'une multiplicité *générale* M, par une transformation d'un groupe de Lie, a ses invariants égaux à ceux de M, savoir:

$$J_i^K(z_1'^0, \ldots, z_{\rho_0}'^0, z_1'^1, \ldots, z_{\rho_1}'^1, \ldots, z_1'^K, \ldots, z_{\rho_K}'^K) = J_i^K(z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, z_1^1, \ldots, z_{\rho_1}^1, \ldots, z_1^K, \ldots, z_{\rho_K}^K)$$
$$(K=1,2,\ldots) \qquad (i=1,2,\ldots,\mu_K)$$

ou, pour abréger l'écriture:

$$J_i'^K = J_i^K; \tag{1}$$

et les multiplicités M' satisfont aux équations obtenues par l'élimination des coordonnées $y_1, y_2, \dots, y_n$ d'un point de M entre ces relations (1); et à celles-là seulement.

Supposons, par exemple, que l'on puisse trouver n invariants distincts $I_1, I_2, \dots, I_n$, en nombre égal à celui des coordonnées d'un point de M. Sur la multiplicité M, ils se réduisent à n fonctions de $y_1, y, \dots, y_n$ que nous supposerons encore distinctes. Alors, tout autre invariant J, de M, peut s'exprimer en fonction de $I_1, I_2, \dots, I_n$:

$$J - \varphi(I_1, I_2, \dots, I_n) = 0 \tag{2}$$

et les équations auxquelles satisfait M' sont les suivantes:

$$J' - \varphi(I'_1, I'_2, \dots, I'_n) = 0$$

ou, plus simplement:

$$J' - \varphi' = 0. \tag{3}$$

On en déduit, par différentiation par rapport à y'_i:

$$\frac{dJ'}{dy'_i} - \frac{\partial\varphi'}{\partial I'_1}\cdot\frac{dI'_1}{dy'_i} - \dots - \frac{\partial\varphi'}{\partial I'_n}\cdot\frac{dI'_n}{dy'_i} = 0 \tag{4}$$

où l'on représente par $\frac{df}{dy_i}$, la dérivée totale, par rapport à y_i, d'une fonction f, de $y_1, y_2, \dots, y_n$, de $z_1, z_2, \dots, z_p$, et de leurs dérivées z_i^K, c'est-à-dire:

$$\frac{df}{dy_i} = \frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\partial f}{\partial z_\mu}\cdot\frac{\partial z_\mu}{\partial y_i} + \sum_{K\geq 1}\sum_{\mu=1}^{\mu=p_K} \frac{\partial f}{\partial z_\mu^K}\cdot\frac{\partial z_\mu^K}{\partial y_i}.$$

Ces relations (4) doivent se déduire, comme on sait, de la considération d'invariants nouveaux. En effet, il résulte d'abord des relations:

$$I'_1 = I_1, \quad \dots, \quad I'_n = I_n, \qquad J' = J, \tag{5}$$

que $I'_1, I'_2, \dots, I'_n$, sont comme $I_1, I_2, \dots, I_n$, des fonctions distinctes de $y'_1, \ldots, y'_n$. Les relations (4) peuvent donc être résolues par rapport à $\frac{\partial\varphi'}{\partial I'_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi'}{\partial I'_n}$, et se mettre sous la forme:

$$(4') \qquad \frac{D(I'_1, I'_2, \ldots, I'_n)}{D(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)}\frac{\partial\varphi'}{\partial I'_i} - \frac{D(I'_1, \ldots, I'_{i-1}, J', I'_{i+1}, \ldots, I'_n)}{D(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)} = 0. \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

De la même manière, on déduit des identités (2) les suivantes:

$$\frac{D(I_1, I_2, \ldots, I_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\frac{\partial\varphi}{\partial I_i} - \frac{D(I_1, \ldots, I_{i-1}, J, I_{i+1}, \ldots, I_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = 0.$$

Or, en vertu de (5), on a:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial I'_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial I_i}$$

et par suite, les équations (4) deviennent:

$$(6) \qquad \frac{D(I'_1, \ldots, I'_{i-1}, J', I'_{i+1}, \ldots, I'_n)}{D(I'_1, \ldots, I'_{i-1}, I'_i, I'_{i+1}, \ldots, I'_n)} = \frac{D(I_1, \ldots, I_{i-1}, J, I_{i+1}, \ldots, I_n)}{D(I_1, \ldots, I_{i-1}, I_i, I_{i+1}, \ldots, I_n)}$$

où chacun des deux membres représente le quotient de deux déterminants fonctionnels formés avec des dérivées totales par rapport aux y', pour le premier, aux y, pour le second.

Les équations (5) donnent donc par l'élimination de $y_1, \ldots, y_n$, une relation, qui, par différentiation, conduit à n nouvelles; et celles-ci peuvent s'obtenir autrement par l'élimination de $y_1, \ldots, y_n$ entre les équations (5) et (6). On voit par là que:

Théorème I. *Etant donnés $n + 1$ invariants, le quotient de deux de leurs déterminants fonctionnels formés avec leurs dérivées totales par rapport aux n variables indépendantes, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, constitue un invariant nouveau.*

Nous dirons que cet invariant (6) *se déduit par différentiation, de* $I_1, \ldots, I_n, J$, avec les *invariants de base* $I_1, \ldots, I_n$.

2. Les équations, relatives à M', auxquelles conduisent ces invariants, ne diffèrent pas de celles déduites par différentiation des équa-

tions (3). Il en résulte qu'il sera possible, à partir d'un certain ordre, d'obtenir par ce procédé, appliqué aux invariants de cet ordre ou d'ordre inférieur, tous les invariants d'ordre supérieur. Autrement, on aurait ainsi un système d'équations aux dérivées partielles, qui, sans être incompatible, ne serait pas limité. Désignons par $I_1, I_2, \ldots, I_n, J_1, J_2, \ldots, J_\rho$, l'ensemble de tous ces invariants, pris jusqu'à cet ordre: nous dirons qu'ils forment un *système complet d'invariants.*

Cela étant, considérons deux multiplicités, l'une: M, *générale* et pour laquelle les *invariants de base* $I_1, I_2, \ldots, I_n$ *sont distincts,* définie par p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, l'autre: M', représentée par p fonctions $z'_1, \ldots, z'_p$ des variables $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$. S'il existe une transformation du groupe permettant de passer de M à M', on peut exprimer $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ en fonction de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, de façon à satisfaire simultanément aux équations:

$$(7) \qquad I'_1 = I_1, \quad \ldots, \quad I'_n = I_n, \qquad J'_1 = J_1, \quad \ldots, \quad J'_\rho = J_\rho.$$

Ces conditions sont en outre suffisantes. En effet, M étant soumise aux restrictions énoncées, les relations (7) entraînent les suivantes:

$$(8) \qquad H' = H$$

où H est un invariant quelconque se déduisant par différentiation de ceux du système complet, et peut être par suite un invariant quelconque du groupe. Considérons alors un point quelconque $(y_1)_0, (y_2)_0, \ldots, (y_n)_0$ de M, et les valeurs en ce point des z et leurs dérivées: $(z_1)_0, \ldots, (z_p)_0$, $(z_1^1)_0, \ldots, (z_{\rho_1}^1)_0, \ldots, (z_1^K)_0, \ldots, (z_{\rho_K}^K)_0, \ldots$; puis, défini par les équations (7), le point correspondant de M', $(y'_1)_0, (y'_2)_0, \ldots, (y'_n)_0$, avec les valeurs, en ce point, des fonctions z' et de leurs dérivées: $(z'_1)_0, \ldots, (z'_p)_0, (z'^1_1)_0, \ldots, (z'^1_{\rho_1})_0, \ldots, (z'^K_1)_0, \ldots, (z'^K_{\rho_K})_0, \ldots$.

Si on se reporte aux équations (C) du chapitre I:

$$(C) \qquad z'^K_i = \varpi^K_i(z^0_1, \ldots, z^0_{\rho_0}, z^1_1, \ldots, z^1_{\rho_1}, \ldots, z^K_1, \ldots, z^K_{\rho_K}, \lambda^0_1, \ldots, \lambda^0_{\varepsilon_0}, \ldots, \lambda^K_1, \ldots, \lambda^K_{\varepsilon_K}),$$
$$(K=1,2,\ldots) \quad (i=1,2,\ldots,\rho_K)$$

les relations (7) et (8), satisfaites pour les valeurs particulières considérées, expriment que l'on peut attribuer aux paramètres λ des valeurs particulières $(\lambda_i^K)_0$, telle que, pour:

$$\lambda_i^K = (\lambda_i^K)_0, \qquad z_i^K = (z_i^K)_0$$

on ait:

$$z_i'^K = (z_i'^K)_0$$

et cela, jusqu'à un ordre quelconque Q. A ces valeurs des paramètres λ correspondent des fonctions $x_1', x_2', \ldots, x_r'$ de $x_1, x_2, \ldots, x_r$, satisfaisant aux équations du groupe, dont les valeurs ainsi que celles de toutes leurs dérivées, sont déterminées pour:

$$x_1 = (x_1)_0 = (y_1)_0, \quad \ldots, \quad x_n = (x_n)_0 = (y_n)_0,$$
$$x_{n+1} = (x_{n+1})_0 = (z_1)_0, \quad \ldots, \quad x_r = (x_r)_0 = (z_p)_0.$$

Ces fonctions représentent une transformation du groupe, qui, effectuée sur M, donne une nouvelle multiplicité $\overline{M}$, telle que, au point $(y_1)_0, \ldots, (y_n)_0$ de M, correspond le point $(y_1')_0, \ldots, (y_n')_0$, les valeurs des fonctions et de leurs dérivées en ce point étant en outre données par les équations (C), en y faisant $\lambda_i^K = (\lambda_i^K)_0$ et $z_i^K = (z_i^K)_0$. $\overline{M}$ doit nécessairement se confondre avec M', les fonctions et toutes leurs dérivées ayant, dans chacune d'elles, les mêmes valeurs, pour les mêmes valeurs des variables indépendantes. La transformation considérée transforme donc bien M en M'.

Ici pourrait se présenter cette objection que les développements ainsi obtenus peuvent ne pas être convergents; auquel cas la transformation qu'ils définissent serait illusoire. Mais toute solution des équations (7) peut être considérée comme représentant $r = n + p$ fonctions, $y_1', \ldots, y_n'$, $z_1', \ldots, z_p'$ des variables $y_1, \ldots, y_n$. Notre proposition établit qu'à une pareille solution, correspondent r fonctions $x_1', x_2', \ldots, x_r'$, des variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$, satisfaisant aux équations de définition du groupe, et se réduisant à ces fonctions $y_1', \ldots, y_n', z_1', \ldots, z_p'$ de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, c'est-à-dire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lorsqu'on y fait:

$$x_{n+1} = z_1, \quad \ldots, \quad x_r = z_p,$$

$z_1, z_2, \ldots, z_p$ étant les fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui représentent M. Il résulte des propositions générales relatives aux équations aux dérivées partielles, que, si ces fonctions $y'_1, \ldots, y'_n, z'_1, \ldots, z'_p$ de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont régulières (nous supposons toujours qu'il en est ainsi), il en est de même des fonctions $x'_1, x'_2, \ldots, x'_r$ de $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

3. *Paramètres différentiels, ou opérations invariantes.* Les résultats précédents tombent en défaut lorsque, sur la multiplicité M, les invariants de base $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ne sont plus distincts. Dans ce cas, M et ses transformées satisfont toutes à une même relation de la forme:

$$f(I_1, I_2, \ldots, I_n) = 0.$$

On pourrait alors les traiter comme *multiplicités particulières,* satisfaisant à *l'équation invariante* précédente; mais ce procédé aurait le défaut d'exiger une étude spéciale pour chaque équation de cette forme; et la relation entre $I_1, \ldots, I_n$ peut d'ailleurs être arbitraire.

Il est préférable de reprendre la discussion générale à l'aide d'une notion nouvelle, celle de *paramètres différentiels* ou *opérations invariantes.* On appelle ainsi, étant donné un invariant J, une fonction de ses dérivées totales, $\frac{dJ}{dy_i}$, des variables y, des fonctions z et de leurs dérivées, qui, quelque soit J, constitue aussi un invariant: le paramètre est *du* $K^{\text{ième}}$ *ordre,* si les dérivées de J qu'il renferme sont d'ordre K et d'ordre inférieur. Dans le cas précédent nous avons établi l'existence de n paramètres différentiels du premier ordre:

$$\frac{D(I_1, \ldots, I_{i-1}, J, I_{i+1}, \ldots, I_n)}{D(I_1, \ldots, I_i, \ldots, I_n)}, \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

lesquels sont des formes linéaires, homogènes, et indépendantes, de $\frac{dJ}{dy_1}, \ldots, \frac{dJ}{dy_n}$.

La recherche de l'expression générale de ces paramètres différentiels se réduit à une simple construction d'invariants. Il suffit, aux fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de $y_1, \ldots, y_n$, d'en ajouter une nouvelle, J, que la transformation laisse invariante:

$$J' = J.$$

Les transformées des dérivées du premier ordre sont définies par les relations:

$$\frac{dJ}{dy_i} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{dJ}{dy'_\mu} \left[\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_i} + \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_{n+\nu}} \frac{\partial z_\nu}{\partial y_i} \right] \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

où les dérivées $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_i}$, $\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_{n+\nu}}$, satisfont aux équations de définition du groupe. En les remplaçant par leurs expressions paramétriques, et résolvant par rapport aux $\frac{dJ}{dy'_i}$, il vient:

$$\text{(8)} \qquad \frac{dJ}{dy'_i} = A_{i1} \frac{dJ}{dy_1} + A_{i2} \frac{dJ}{dy_2} + \cdots + A_{in} \frac{dJ}{dy_n} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

où les A sont fonctions de $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p, \frac{\partial z_1}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z_1}{\partial y_n}, \ldots, \frac{\partial z_p}{\partial y_n}$ et des paramètres $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1$, des ordres zéro et un. Il faut éliminer les λ entre ces équations (8) et les équations (C):

$$(C) \qquad z_i'^K = \varpi_i^K(z_1^0, \ldots, z_{\rho_0}^0, \ldots, z_1^K, \ldots, z_{\rho_K}^K, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \ldots, \lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K). \qquad {\scriptstyle (K=1,2,\ldots) \quad (i=1,2,\ldots,\rho_K)}$$

Pour cela, il est possible en général de résoudre les équations (C) jusqu'à un certain ordre minimum K, déterminé, par rapport aux paramètres $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1$, ou un certain nombre d'entre eux, de façon que, leurs valeurs étant portées dans les relations (8), tous les λ disparaissent: il en est certainement ainsi dans le cas au moins où on peut former n invariants distincts $I_1, I_2, \ldots, I_n$, car, dans cette hypothèse, nous avons établi l'existence de n paramètres différentiels du premier ordre, distincts. En remplaçant dans les seconds membres de (8), ainsi transformés, les $z_i'^K$ qui y figurent par des constantes arbitraires, on obtient n expressions:

$$\Delta_i J = \alpha_{i1} \frac{dJ}{dy_1} + \alpha_{i2} \frac{dJ}{dy_2} + \cdots + \alpha_{in} \frac{dJ}{dy_n}, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

qui sont des invariants, c'est-à-dire, ici, les *paramètres différentiels*. Les α sont des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, de $z_1, z_2, \ldots, z_p$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre K. Ces paramètres sont des *fonctions linéaires et homogènes* des dérivées de J; ils sont en outre en général, *indépendants,* car, pour des valeurs particulières attribuées aux arguments dont dépendent les α, $\Delta_i J$ se réduit respectivement à $\frac{dJ}{dy_i}$.

L'existence de ces paramètres différentiels tombe en défaut, seulement dans le cas où la résolution des équations (C) n'est plus possible comme elle a été effectuée, ce qui se produit lorsque M satisfait à une ou plusieurs *équations invariantes bien déterminées.* Il en est de même de leur indépendance: le déterminant de ces n paramètres, égalé à zéro, donne une *équation invariante,* ou se décompose en plusieurs équations, dont chacune est *invariante,* car, si elle est satisfaite par la multiplicité M, on a entre ces n paramètres, une relation linéaire:

$$\beta_1 \Delta_1 J + \beta_2 \Delta_2 J + \ldots + \beta_n \Delta_n J = 0$$

à coefficients non tous nuls, et qui, après toute transformation effectuée sur M, se transforme en une autre relation linéaire

$$\beta_1' \Delta_1 J + \beta_2' \Delta_2 J + \ldots + \beta_n' \Delta_n J = 0.$$

C'est là l'avantage de ces paramètres sur les premiers que nous avons formés, car ceux-ci cessent d'être holomorphes ou indépendants, dans le cas où M satisfait à des équations invariantes, dépendant de *fonctions arbitraires.*

4. Ces n paramètres jouissent de propriétés capitales. D'abord, tout autre paramètre différentiel, linéaire, et du premier ordre:

$$\Delta J = \beta_0 + \beta_1 \frac{dJ}{dy_1} + \beta_2 \frac{dJ}{dy_2} + \ldots + \beta_n \frac{dJ}{dy_n}$$

est une fonction linéaire de $\Delta_1 J, \Delta_2 J, \ldots, \Delta_n J$, dont les coefficients sont eux-mêmes des invariants. Car, $\Delta_1 J, \ldots, \Delta_n J$ étant indépendants, on a:

$$\Delta J = \gamma_0 + \gamma_1 \Delta_1 J + \gamma_2 \Delta_2 J + \ldots + \gamma_n \Delta_n J,$$

de sorte que toute transformation du groupe, effectuée sur M et sur une fonction quelconque J, de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, donnerait:

$$\gamma_0' + \gamma_1' \Delta_1' J' + \ldots + \gamma_n' \Delta_n' J' = \gamma_0 + \gamma_1 \Delta_1 J + \ldots + \gamma_n \Delta_n J,$$

ou

$$\gamma_0' - \gamma_0 + (\gamma_1' - \gamma_1) \Delta_1 J + \ldots + (\gamma_n' - \gamma_n) \Delta_n J = 0$$

et cette identité aurait lieu quelle que soit la transformation. $\Delta_1 J, \ldots, \Delta_n J$ étant distincts, ceci exige bien:

$$\gamma_0' - \gamma_0 = 0, \qquad \gamma_1' - \gamma_1 = 0 \;. \quad \ldots, \quad \gamma_n' - \gamma_n = 0.$$

En particulier, les deux paramètres différentiels du second ordre $\Delta_\mu \Delta_\nu J$ et $\Delta_\nu \Delta_\mu J$ ayant une différence qui ne contient que des dérivées du premier ordre de J, on a:

$$\Delta_\mu \Delta_\nu J - \Delta_\nu \Delta_\mu J = \gamma_{\mu\nu 1} \Delta_1 J + \ldots + \gamma_{\mu\nu n} \Delta_n J,$$

les γ étant encore des invariants.[1] $\Delta_\mu J$ et $\Delta_\nu J$ se réduisant d'ailleurs, pour des valeurs particulières des variables, à $\frac{dJ}{dy_\mu}$ et $\frac{dJ}{dy_\nu}$, $\Delta_\mu \Delta_\nu J$ et $\Delta_\nu \Delta_\mu J$ se réduisent dans les mêmes conditions à $\frac{d^2 J}{dy_\mu dy_\nu}$, à des termes additifs près ne contenant que des dérivées du premier ordre. On obtient donc, par la combinaison des paramètres du premier ordre, autant de paramètres du second ordre distincts qu'il y a de dérivées de cet ordre: il en est manifestement de même pour les ordres supérieurs, et l'on voit que, dans la formation de ces paramètres, on peut faire abstraction de l'ordre dans lequel on combine les paramètres du premier ordre.

Ensuite, les n opérations $\Delta_1 J, \ldots, \Delta_n J$, effectuées sur q invariants $J_1, J_2, \ldots, J_q$, d'ordre σ, au moins égal à K, donnent autant d'invariants d'ordre $\sigma + 1$, distincts par rapport aux dérivées d'ordre $\sigma + 1$, qu'il y a de fonctions distinctes par rapport aux mêmes dérivées, parmi les quantités $\frac{dJ_1}{dy_1}, \ldots, \frac{dJ_1}{dy_n}, \ldots, \frac{dJ_q}{dy_n}$. En effet, les n invariants $\Delta_1 J_i$, $\ldots, \Delta_n J_i$, en tant que fonctions des dérivées d'ordre $\sigma + 1$, sont n fonctions linéaires distinctes de $\frac{dJ_i}{dy_1}, \ldots, \frac{dJ_i}{dy_n}$, les uns et les autres étant

---

[1] Ce résultat peut s'interpréter ainsi. Les invariants étant considérés comme solutions d'un système complet d'équations linéaires que l'on sait former, ce système admet les transformations infinitésimales $\Delta_\mu f$, où les dérivées totales $\frac{df}{dy_i}$ sont explicitées. Il admet aussi les transformations $(\Delta_\mu \Delta_\nu)$: celles-ci s'exprimant en fonctions linéaires de $\Delta_1 f, \ldots, \Delta_n f$, on sait que les coefficients de ces formes linéaires sont des solutions du système complet. LIE, Math. Annalen, Bd. 11.

d'ailleurs des formes linéaires des dérivées d'ordre $\sigma + 1$. Si donc les dérivées $\frac{dJ}{dy_\mu}$ peuvent s'exprimer linéairement en fonction de ρ d'entre elles, indépendantes, il y aura, de même, ρ invariants $\Delta_\mu J_i$ indépendants, $H_1, H_2, \ldots, H_\rho$, les $nq - \rho$ autres pouvant se mettre sous la forme:

$$H_i = a_{i0} + a_{i1} H_1 + \ldots + a_{i\rho} H_\rho \qquad (i=1,2,\ldots,nq-\rho)$$

où les a ne dépendent pas des dérivées d'ordre $\sigma + 1$. $H_1, H_2, \ldots, H_\rho$ étant indépendants, il en résulte, comme plus haut, que ces coefficients a sont encore des invariants lesquels peuvent, au reste, se réduire à des constantes.

En particulier, on retrouve que les expressions $\Delta_\mu \Delta_\nu J$ constituent bien $\frac{1}{2} n(n+1)$ paramètres différentiels du second ordre, distincts.

5. Cela étant, dans la détermination des invariants d'une multiplicité M, on trouve, ou bien seulement un nombre fini d'invariants, ou bien un nombre d'invariants qui croît sans limite avec l'ordre. Construisons, dans ce cas, les n paramètres $\Delta_1 J, \Delta_2 J, \ldots, \Delta_n J$, et soit K l'ordre le plus élevé des dérivées qui figurent dans leurs coefficients: la détermination des invariants d'ordre au plus égal à K, $J_1^0, \ldots, J_{\mu_0}^0, \ldots, J_1^K, \ldots, J_{\mu_K}^K$, se fait en même temps, de sorte qu'on a entre M et ses transformées M', les relations:

$$J_i'^h = J_i^h. \qquad (h=1,2,\ldots,K) \quad (i=1,2,\ldots,\mu_K) \tag{9}$$

De celles d'ordre K, on déduit, à l'aide des paramètres différentiels, les suivantes, d'ordre $K+1$:

$$\Delta_\nu' J_i'^K = \Delta_\nu J_i^K. \qquad (\nu=1,2,\ldots,n) \quad (i=1,2,\ldots,\mu_K) \tag{10}$$

Le nombre de celles-ci qui sont indépendantes, entre elles et des relations (9), est égal, avons-nous vu, au nombre des fonctions distinctes d'ordre $K+1$, que l'on peut former avec les dérivées $\frac{dJ_i^K}{dy_\nu}$, et ne pourrait s'abaisser que si les paramètres différentiels $\Delta_\nu J$ cessaient d'être indépendants en vertu des relations (9), c'est-à-dire en raison des valeurs que prennent sur M, les invariants $J_1^0, \ldots, J_{\mu_0}^0, \ldots, J_1^K, \ldots, J_{\mu_K}^K$. Nous supposerons qu'il n'en est pas ainsi.

Alors les équations d'ordre $K + 1$, entre M et M', comprennent les équations (10), et s'il y a lieu, un certain nombre d'autres, fournies par des invariants distincts des précédents. On procèdera de même pour les invariants suivants d'ordre $K + 2$, et ainsi de suite. A partir d'un certain ordre l, tous les invariants d'ordre supérieur s'obtiennent en effectuant les opérations invariantes, une ou plusieurs fois, sur ceux d'ordre l.

La chose s'établirait de la même manière qu'il a été démontré que tout système d'équations aux dérivées partielles est nécessairement limité. C'est aussi ce qui résulte du même fait, établi dans le cas où on applique le procédé par différentiation, ce qui revient à substituer aux paramètres $\Delta_1 J, \Delta_2 J, \ldots, \Delta_n J$, un système particulier de n autres paramètres, fonctions linéaires, et, en général, distinctes, des précédents. Par suite l ne dépasse certainement pas l'ordre le plus élevé des invariants du *système complet*.

On n'est arrêté, dans ces opérations, que si la formation des invariants jusqu'à l'ordre l devient impossible, ou si les paramètres différentiels cessent d'être indépendants. Ceci ne se présente que dans le cas où M satisfait à des *équations invariantes bien déterminées,* cas que nous laisserons d'abord de côté.

6. Supposons maintenant, qu'une telle multiplicité *générale* M étant donnée, elle ait α invariants d'ordre σ, $J_1, J_2, \ldots, J_\alpha$, s'exprimant en fonction des autres invariants d'ordre σ et d'ordre inférieur: $I_1, I_2, \ldots, I_\beta$:

$$(11) \quad J_1 - \varphi_1(I_1, I_2, \ldots, I_\beta) = 0, \quad \ldots, \quad J_\alpha - \varphi_\alpha(I_1, I_2 \ldots, I_\beta) = 0.$$

Les multiplicités M', transformées de M, satisfont aux mêmes relations

$$(11') \quad J'_1 - \varphi_1(I'_1, I'_2, \ldots, I'_\beta) = 0, \quad \ldots, \quad J'_\alpha - \varphi_\alpha(I'_1, I'_2, \ldots, I'_\beta) = 0.$$

Or, au système d'invariants distincts $I_1, \ldots, I_\beta$, $J_1, \ldots, J_\alpha$, et à ceux qu'on en déduit $\Delta_1 J_1, \ldots, \Delta_n J_\alpha$, on peut supposer substitué celui des invariants aussi distincts $I_1, \ldots, I_\beta$, $J_1 - \varphi_1, \ldots, J_\alpha - \varphi_\alpha$, et ceux qui s'en déduisent $\Delta_1(J_1 - \varphi_1), \ldots, \Delta_n(J_\alpha - \varphi_\alpha)$. En vertu de (11), ces derniers sont tous nuls sur M, de telle sorte que M' satisfait aux équations:

$$(12) \qquad \Delta'_\nu(J'_i - \varphi'_i) = 0. \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\ldots,n)\ (i=1,2,\ldots,\alpha)}$$

Mais ces équations sont satisfaites pour toute solution du système (11'), dont elles sont des conséquences par dérivation: en effet, le système (11') n'entraînant pas la dépendance des paramètres $\Delta'_\nu J'$, on sait que les équations (12), d'ordre $\sigma + 1$, forment un système équivalent à celui que l'on obtient en différentiant les équations (11').

D'après cela, si tous les invariants de M, d'un ordre λ, égal ou supérieur à l, sont tous fonctions des invariants d'ordre inférieur à λ, il suffit, pour exprimer que tous les invariants de M' satisfont aux mêmes relations que ceux de M, d'écrire les équations (11') jusqu'à l'ordre λ, équations parmi lesquelles il peut d'ailleurs y en avoir un certain nombre, qu'on sait reconnaître, de la forme:

$$\Delta'_\nu(J'_i - \varphi'_i) = 0$$

et qui sont des conséquences des autres par dérivation. Il en résulte, en égalant entre eux les invariants distincts $I_1, I_2, \ldots, I_\beta$, de M et M', que tous les invariants de M sont égaux respectivement à ceux de M'; et par suite, comme on l'a déjà établi, ces conditions sont suffisantes pour que M' soit homologue de M.

Quant à la correspondance entre M et l'une des solutions M' de ce système (11'), elle fait correspondre à un point quelconque de M, un point déterminé de M' ou une infinité de points, suivant que le nombre β des invariants distincts est égal ou inférieur à n: et, une fois fixé ce point de M', la correspondance est complètement déterminée.

Enfin, comme il y a au plus n invariants distincts, l'ordre λ, qui est au moins égal à l, est au plus égal à $l + n - 1$. En résumé:

Théorème II. *Dans le cas où une multiplicité à n dimensions admet relativement à un groupe de Lie, un nombre illimité d'invariants, on peut toujours construire et un système d'invariants d'un ordre minimum l, et un système de n paramètres différentiels, linéaires et homogènes, du premier ordre, qui, appliqués aux invariants précédents donnent tous ceux d'ordre supérieur.*

Les multiplicités M', homologues d'une multiplicité générale donnée, M, sont définies par un système d'équations aux dérivées partielles obtenu en exprimant que leurs invariants d'un ordre λ, au moins égal à l, et au plus à $l + n - 1$, sont liés par les mêmes relations que ceux de M; et la ou les correspondances qui rattachent l'une d'elles à M s'obtiennent en égalant les invariants distincts de M aux invariants correspondants de M'.

7. Les multiplicités *particulières,* pour lesquelles ce qui précède ne s'applique pas, se partagent en un nombre fini de classes, chacune d'elles étant définie par un système bien déterminé d'équations invariantes. L'étude de chaque classe se fait, comme on l'a vu (2e partie, ch. I), de la même manière que celle des multiplicités générales. On est conduit à répéter sur elle les mêmes subdivisions, les multiplicités de cette classe possédant, les unes un *système d'invariants* que l'on saura former, les autres étant définies par de nouvelles *équations invariantes.* Pour ces dernières, il faut continuer de la même manière. Cette suite de subdivisions est d'ailleurs limitée, et on arrive nécessairement à des classes ne se partageant plus, et ayant ou n'ayant pas d'invariants: dans le cas contraire, on aurait en effet des multiplicités satisfaisant à des équations invariantes formant un système illimité d'équations aux dérivées partielles.

8. **Application.** La théorie des *surfaces applicables* nous donne une application des principes précédents, en même temps qu'un exemple de calcul d'invariants à l'aide des transformations infinitésimales. Nous considérons un ds^2, rapporté à ses *coordonnées symétriques:*

$$ds^2 = 2\lambda dx dy.$$

Cette forme n'est pas altérée par les transformations:

$$x' = X(x), \qquad y' = Y(y)$$

lesquelles forment un groupe de Lie, dont les transformations infinitésimales sont:

$$\delta x = -\xi(x)\delta t, \qquad \delta y = -\eta(y)\delta t \tag{13}$$

où X et ξ sont des fonctions arbitraires de x seulement, Y et η de y seulement.

λ est une fonction de x et y, dont la transformation infinitésimale est donnée par l'équation:

$$0 = \frac{\delta\lambda}{\lambda} + \frac{\delta dx}{dx} + \frac{\delta dy}{dy} = \frac{\delta\lambda}{\lambda} + \frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy}$$

ou

$$\delta\lambda = \lambda(\xi' + \eta')\delta t. \tag{14}$$

On a à chercher les invariants du groupe de transformations (13) et (14). Nous poserons, φ étant une fonction quelconque de x et y:

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial^{i+j}\varphi}{\partial x^i\,\partial y^j}.$$

Les dérivées d'une telle fonction sont transformées de telle sorte que la relation:

$$d\varphi - \varphi_{10}dx - \varphi_{01}dy = 0$$

reste invariante, ce qui donne:

$$\delta\varphi_{10} = \frac{d}{dx}\delta\varphi + \varphi_{10}\xi'\delta t, \qquad \delta\varphi_{01} = \frac{d}{dy}\delta\varphi + \varphi_{01}\eta'\delta t$$

où $\frac{d}{dx}$ et $\frac{d}{dy}$ représentent des dérivées totales.

Pour l'ordre zéro, on a *l'équation invariante* $\lambda = 0$, dont la signification est banale. Nous supposons donc $\lambda \neq 0$, et posons $\lambda = e^{\omega}$, ce qui donne:

$$\delta\omega = (\xi' + \eta')\delta t,$$

$$\delta\omega_{10} = (\xi'' + \omega_{10}\xi')\delta t; \qquad \delta\omega_{01} = (\eta'' + \omega_{01}\eta')\delta t,$$

$$\delta\omega_{20} = (\xi''' + \omega_{10}\xi'' + 2\omega_{20}\xi')\delta t, \qquad \delta\omega_{02} = (\eta''' + \omega_{01}\eta'' + 2\omega_{02}\eta')\delta t,$$

$$\delta\omega_{11} = \omega_{11}(\xi' + \eta')\delta t,$$

d'où un premier invariant du second ordre (*courbure totale*):

$$\alpha = e^{-\omega}\omega_{11} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\log\lambda.$$

Pour les ordres supérieurs, nous ne conservons, des dérivées de ω, que celles de la forme ω_{n0} et ω_{0n}, et substituons aux autres les dérivées de α. Ceci donne, pour le troisième ordre:

$$\delta\omega_{30} = (\xi^{\text{IV}} + \omega_{10}\xi''' + \ldots)\delta t, \qquad \delta\omega_{03} = (\eta^{\text{IV}} + \omega_{01}\eta''' + \ldots)\delta t,$$

$$\delta\alpha_{10} = \alpha_{10}\xi'\delta t, \qquad \delta\alpha_{01} = \alpha_{01}\eta'\delta t.$$

Les coefficients de $\xi', \ldots, \xi^{\text{IV}}, \eta', \ldots, \eta^{\text{IV}}$ donnent ainsi, pour la détermination des invariants, jusqu'au 3^{me} ordre, un système de 8 équations à 10 inconnues; ces équations sont indépendantes, car elles se réduisent à:

$$(15) \quad \begin{gathered} 0 = \frac{\partial f}{\partial\omega_{30}} = \frac{\partial f}{\partial\omega_{03}} = \frac{\partial f}{\partial\omega_{20}} = \frac{\partial f}{\partial\omega_{02}} = \frac{\partial f}{\partial\omega_{10}} = \frac{\partial f}{\partial\omega_{01}}, \\ \frac{\partial f}{\partial\omega} + \omega_{11}\frac{\partial f}{\partial\omega_{11}} + \alpha_{10}\frac{\partial f}{\partial\alpha_{10}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial\omega} + \omega_{11}\frac{\partial f}{\partial\omega_{11}} + \alpha_{01}\frac{\partial f}{\partial\alpha_{01}} = 0. \end{gathered}$$

Elle cessent d'être distinctes, seulement dans le cas de

$$\alpha_{10} = 0, \qquad \alpha_{01} = 0,$$

équations qui forment ainsi un *système invariant*. Elles définissent des surfaces particulières, savoir:

$$\alpha = \text{const.}$$

On voit immédiatement que ces surfaces n'ont pas d'autre invariant que α.

Pour les autres, on trouve deux invariants, α, et un autre:

$$\beta = e^{-\omega}\alpha_{10}\alpha_{01}.$$

Pour le 4^{me} ordre, il faudrait prolonger les équations (15), en y ajoutant les 5 éléments du 4^{me} ordre, $\omega_{40}, \alpha_{20}, \alpha_{11}, \alpha_{02}, \omega_{04}$, ce qui laisse évidemment ces équations indépendantes, et leur ajouter les deux suivantes, provenant des coefficients de ξ^{V} et η^{V}:

$$\frac{\partial f}{\partial\omega_{40}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial\omega_{04}} = 0$$

lesquelles sont indépendantes entre elles, et des précédentes. On trouverait donc 3 invariants du 4^{me} ordre, et, de la même manière, $n - 1$ invariants du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Pour les déterminer, construisons d'abord les *paramètres différentiels.* J étant un invariant, on a:

$$\delta J_{10} = J_{10}\xi'\delta t, \qquad \delta J_{01} = J_{01}\eta'\delta t.$$

Nous prendrons les deux paramètres:

$$\Delta_x J = e^{-\omega}\alpha_{01}J_{10}, \qquad \Delta_y J = \frac{J_{01}}{\alpha_{01}}$$

qui ne sont pas symétriques, mais qui tombent en défaut seulement dans le cas de $\alpha_{01} = 0$: dans ce cas, il suffirait de recourir aux paramètres analogues $e^{-\omega}\alpha_{10}J_{01}$ et $\frac{J_{10}}{\alpha_{10}}$.

Nous remarquerons que:

$$\Delta_x\Delta_y J - \Delta_y\Delta_x J = -e^{-\omega}\left[\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{01}}J_{01} + \left(\frac{\alpha_{02}}{\alpha_{01}} - \omega_{01}\right)J_{10}\right]$$

$$= -e^{-\omega}\alpha_{11}\Delta_y J - \frac{\alpha_{02} - \alpha_{01}\omega_{01}}{\alpha_{01}^2}\Delta_x J,$$

ce qui met en évidence deux invariants du 4^{me} ordre:

$$\gamma = \frac{\alpha_{02} - \alpha_{01}\omega_{01}}{\alpha_{01}^2}, \qquad \theta = e^{-\omega}\alpha_{11}.$$

On en connaît, en outre, deux autres:

$$\Delta_x\beta = e^{-2\omega}\alpha_{01}(\alpha_{20}\alpha_{01} + \alpha_{11}\alpha_{10} - \omega_{10}\alpha_{10}\alpha_{01}),$$

$$\Delta_y\beta = e^{-\omega}\left(\alpha_{11} + \frac{\alpha_{02}\alpha_{10}}{\alpha_{01}} - \omega_{01}\alpha_{10}\right),$$

lesquels sont liés aux précédents, comme cela doit être, par une relation:

$$\theta = \Delta_y\beta - \beta\gamma.$$

On a ainsi 3 invariants du 4^{me} ordre, $\Delta_x\beta$, $\Delta_y\beta$ et γ qui constituent des fonctions distinctes, respectivement, de α_{20}, α_{11}, et α_{02}. Leurs dérivées du $q^{\text{ième}}$ ordre donnent $q+3$ fonctions distinctes des $q+3$ dérivées d'ordre $q+2$ de α; en répétant sur elles, une ou plusieurs fois, les opérations $\Delta_x J$ et $\Delta_y J$, on formera donc $q+3$ invariants distincts d'ordre

$q + 4$, c'est-à-dire, tous les invariants d'ordre supérieur à 4; le nombre l est ici égal à 4.

Cela posé, considérons d'abord une surface *générale* M, qui n'annule donc pas α_{01} (ce cas se traiterait de la même manière). Si ses invariants α et β sont distincts, les invariants du 4^{me} ordre $\Delta_x\beta$, $\Delta_y\beta$, γ seront fonctions de α et β:

$$(16) \qquad \Delta_x\beta = f_1(\alpha, \beta), \qquad \Delta_y\beta = f_2(\alpha, \beta), \qquad \gamma = f_3(\alpha, \beta).$$

Toute surface M', transformée de M, est alors définie par les équations (16) qui suffisent, et les correspondances, en nombre fini, entre M et M' sont données par:

$$\alpha' = \alpha, \qquad \beta' = \beta.$$

La troisième équation (16) est, au reste, une conséquence des deux précédentes, en vertu de l'identité:

$$\Delta_y\Delta_x\beta - \Delta_x\Delta_y\beta = \gamma.\Delta_x\beta + \theta.\Delta_y\beta = (\Delta_y\beta)^2 + \gamma(\Delta_x\beta - \beta\Delta_y\beta)$$

qui donne f_3 connaissant f_1 et f_2, car l'expression:

$$\Delta_x\beta - \beta\Delta_y\beta = e^{-\omega}(\alpha_{01}\beta_{10} - \alpha_{10}\beta_{01})$$

ne s'annule que si α et β ne sont pas distincts.

Si M est telle que β et α ne soient pas distincts:

$$(17) \qquad \beta = f(\alpha)$$

$\Delta_x\beta$ et $\Delta_y\beta$ sont aussi fonctions de α:

$$\Delta_x\beta = f(\alpha).f'(\alpha), \qquad \Delta_y\beta = f'(\alpha)$$

et il en est de même des 3 invariants du 5^{me} ordre, $\Delta_x\Delta_x\beta$, $\Delta_y\Delta_x\beta$, $\Delta_y\Delta_y\beta$. Si γ est distinct de α, le 4^{me} invariant du 5^{me} ordre, $\Delta_y\gamma$, est alors fonction de α et γ:

$$(18) \qquad \Delta_y\gamma = \varphi(\alpha, \gamma).$$

Les multiplicités (M') sont, dans ce cas, définies par les équations (17) et (18), la correspondance étant donnée par

$$\alpha' = \alpha, \qquad \gamma' = \gamma.$$

Si, en même temps que β, γ est fonction de α:

$$\gamma = \psi(\alpha) \tag{19}$$

les 3 invariants du 4^{me} ordre sont fonctions de α; M' est définie par les équations (17) et (19). Ici, il y a une infinité de correspondances données par la seule relation

$$\alpha' = \alpha,$$

un point x_0, y_0 de M pouvant correspondre à tout point x', y' de M' satisfaisant à l'équation

$$\alpha'(x', y') = \alpha(x_0, y_0).$$[1]

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

Calcul des invariants. Formes réduites.

1. Le calcul des invariants peut être facilité souvent par l'application d'une nouvelle notion, celle de *forme réduite d'une multiplicité,* relativement à un groupe de Lie.

Considérons un élément particulier E_0 d'une multiplicité M, c'est-à-dire, un système de valeurs $z_1^{00}, \ldots, z_{\rho_0}^{00}, z_1^{10}, \ldots, z_{\rho_1}^{10}, \ldots, z_1^{K0}, \ldots, z_{\rho_K}^{K0}, \ldots,$ des variables indépendantes, des fonctions et de leurs dérivées; et re-

[1] Si l'on admet, ce qu'on verra dans la suite, que les invariants considérés sont les mêmes que ceux que l'on aurait, en prenant un ds^2 sous sa forme générale

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

on retrouve ici la solution du problème suivant: reconnaître si deux surfaces sont applicables. Cf. Darboux, *Théorie générale des surfaces,* t. III, liv. VII, chap. II.

Si, en même temps que β, γ est fonction de α:

$$\gamma = \psi(\alpha) \tag{19}$$

les 3 invariants du 4^{me} ordre sont fonctions de α; M' est définie par les équations (17) et (19). Ici, il y a une infinité de correspondances données par la seule relation

$$\alpha' = \alpha,$$

un point x_0, y_0 de M pouvant correspondre à tout point x', y' de M' satisfaisant à l'équation

$$\alpha'(x', y') = \alpha(x_0, y_0).$$ [1]

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

Calcul des invariants. Formes réduites.

1. Le calcul des invariants peut être facilité souvent par l'application d'une nouvelle notion, celle de *forme réduite d'une multiplicité,* relativement à un groupe de Lie.

Considérons un élément particulier E_0 d'une multiplicité M, c'est-à-dire, un système de valeurs $z_1^{00}, \ldots, z_{\rho_0}^{00}, z_1^{10}, \ldots, z_{\rho_1}^{10}, \ldots, z_1^{K0}, \ldots, z_{\rho_K}^{K0}, \ldots,$ des variables indépendantes, des fonctions et de leurs dérivées; et re-

---

[1] Si l'on admet, ce qu'on verra dans la suite, que les invariants considérés sont les mêmes que ceux que l'on aurait, en prenant un ds^2 sous sa forme générale

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

on retrouve ici la solution du problème suivant: reconnaître si deux surfaces sont applicables. Cf. Darboux, *Théorie générale des surfaces,* t. III, liv. VII, chap. II.

gardons un invariant comme une fonction de ces coordonnées, telle, que la même fonction des coordonnées d'un élément E_0', transformé de E_0, quand on soumet M à une transformation du groupe, ait la même valeur. Les coordonnées de E_0', étant définies par les relations:

$$(C^0) \quad z_i'^{K0} = \varpi_i^K(z_1^{00}, \ldots, z_{\rho_0}^{00}, \ldots, z_1^{K0}, \ldots, z_{\rho_K}^{K0}, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \ldots, \lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K) \quad {\scriptstyle (K=1,3,\ldots) \quad (i=1,2,\ldots,\rho_K)}$$

où les λ sont des parametres arbitraires, on peut choisir ces paramètres de façon que certaines des coordonnées de E_0', $z_{\mu_0+1}'^{00}, \ldots, z_{\rho_0}'^{00}, z_{\mu_1+1}'^{10}, \ldots, z_{\rho_1}'^{10}, \ldots, z_{\mu_K+1}^{K0}, \ldots, z_{\rho_K}'^{K0}, \ldots$, prennent des valeurs fixes arbitraires, $c_{\mu_0+1}^0, \ldots, c_{\rho_0}^0, c_{\mu_1+1}^1, \ldots, c_{\rho_1}^1, \ldots, c_{\mu_K+1}^K, \ldots, c_{\rho_K}^K, \ldots$, pourvu au moins que, soit les coordonnées de E_0, soit ces constantes arbitraires, ne satisfassent pas à certaines équations invariantes: cette exception ne pourrait se présenter que soit dans le cas où M serait une *multiplicité particulière,* soit, dans le cas contraire, pour des points particuliers de M. Les autres coordonnées de E_0', sont alors complètement déterminées:

$$z_i'^{K0} = G_i^K(z_1^{00}, \ldots, z_{\rho_0}^{00}, \ldots, z_1^{K0}, \ldots, z_{\rho_K}^{K0}, c_{\mu_0+1}^0, \ldots, c_{\rho_0}^0, \ldots, c_{\mu_K+1}^K, \ldots, c_{\rho_K}^K) \quad {\scriptstyle (K=1,2,\ldots) \quad (i=1,2,\ldots,\mu_K)}$$

et leurs valeurs, fonctions des coordonnées de E_0 sont les invariants cherchés. C'est, en effet, la marche que nous avons suivie pour former ces invariants. C'est ce qui résulte aussi de la remarque suivante.

Soit $\mathcal{E}_0$, l'élément transformé de E_0, *élément réduit,* caractérisé par les valeurs constantes $c_{\mu_0+1}^0, \ldots, c_{\rho_0}^0, \ldots, c_{\mu_K+1}^K, \ldots, c_{\rho_K}^K, \ldots$ de certaines de ses coordonnées. La transformation T qui donne

$$E_0 T = \mathcal{E}_0$$

est bien déterminée, et unique au moins dans un domaine fini; elle serait déterminée jusqu'à l'ordre K seulement, si les valeurs des constantes c n'étaient fixées que jusqu'à cet ordre K.

Soit E_0' un élément déduit de E_0 par une transformation quelconque $\mathfrak{T}$; il lui correspond un *élément réduit,* $\mathcal{E}_0'$, et une transformation, T', bien déterminée, telle que:

$$E_0' T' = \mathcal{E}_0'$$

On a donc:

$$E_0\,\mathfrak{T}T' = \mathcal{E}'_0.$$

La transformation $\mathfrak{T}T'$ qui fait de E_0 un élément réduit doit donc se confondre avec T (au moins jusqu'à l'ordre K), et $\mathcal{E}'_0$ se confondre de même avec $\mathcal{E}_0$. Les coordonnées non arbitraires de $\mathcal{E}'_0$ ou $\mathcal{E}_0$ s'exprimant de la même manière en fonctions de celles de E'_0 pour le premier, de E_0 pour le second, ces fonctions sont donc bien des invariants.

Ceci montre en outre que, réciproquement, si à un élément E_0 de M correspond un élément réduit $\mathcal{E}_0$, de forme définie, et déduit de E_0 par une transformation *bien déterminée* du groupe, les coordonnées non arbitraires de $\mathcal{E}_0$ sont des invariants, fonctions des coordonnées de E_0. De plus, ces invariants qui, pour

$$z^0_{\mu_0+1} = c^0_{\mu_0+1}, \quad \ldots, \quad z^0_{\rho_0} = c^0_{\rho_0}, \qquad z^1_{\mu_1+1} = c^1_{\mu_1+1}, \quad \ldots, \quad z^1_{\rho_1} = c^1_{\rho_1}, \quad \ldots,$$

se réduisent à $z^0_1, \ldots, z^0_{\mu_0}, z^1_1, \ldots, z^1_{\mu_1}$ sont manifestement distincts: considérés comme solutions du système complet formé à l'aide des transformations infinitésimales, ils constituent un système de *solutions principales* de ce système complet.

Dans le cas où E_0 satisfait à une équation invariante qui ne permet plus la réduction à la forme $\mathcal{E}_0$, il en est de même des éléments transformés E'_0. Alors, il y aura une forme réduite nouvelle, distincte de la précédente, chacune des équations ou systèmes d'équations invariantes qui définissent les multiplicités particulières pouvant correspondre à une forme réduite bien déterminée. Par conséquent:

Théorème I. *A tout groupe de Lie, on peut faire correspondre, pour une multiplicité de dimensions données, un nombre limité de formes réduites, telles que tout élément E_0 d'une telle multiplicité puisse se mettre, à l'aide d'une transformation bien déterminée du groupe, sous l'une de ces formes réduites. Les coordonnées de l'élément réduit $\mathcal{E}_0$ sont, les unes, égales à des constantes fixes, les autres des invariants, fonctions des coordonnées de l'élément initial E_0.*

2. Par exemple, étant donnée une surface, on peut, en effectuant sur elle une transformation bien déterminée du groupe des mouvements:

$$p\,,\ q\,,\ r\,,\ yr - zq\,,\ zp - xr\,,\ xq - yp$$

transporter l'un quelconque de ses points à l'origine, son équation dans le voisinage de ce point étant:

$$z = \frac{a_{20}}{2}x^2 + \frac{a_{02}}{2}y^2 + \frac{a_{30}}{6}x^3 + \frac{a_{21}}{2}x^2y + \frac{a_{12}}{2}xy^2 + \frac{a_{03}}{6}y^3 + \dots .$$

Les coefficients de cette forme réduite sont les valeurs des invariants de la surface, en ce point; en particulier, a_{20} et a_{02} sont les inverses des deux rayons de courbure. Cette réduction se fait en transportant le trièdre des coordonnées, sur le trièdre formé par la normale à la surface, et ses deux directions principales en ce point. Elle tombe donc en défaut, dans le cas où ce trièdre s'évanouit, c'est-à-dire, soit lorsque la normale est tangente à la surface, soit lorsque les deux directions principales sont confondues: de là deux classes de *multiplicités particulières,* les unes, les développables circonscrites au cercle de l'infini, définies par l'équation invariante:

$$1 + p^2 + q^2 = 0,$$

les autres, les surfaces réglées dont les génératrices sont les droites isotropes, et dont l'équation est:

$$[rpq(1 + q^2) - 2s(1 + p^2)(1 + q^2) + tpq(1 + p^2)]^2$$
$$+ (1 + p^2 + q^2)[r(1 + q^2) - t(1 + p^2)]^2 = 0.$$

3. La méthode peut être généralisée. Supposons qu'à l'aide d'une transformation du groupe, non pas nécessairement unique, cette fois, on puisse mettre un élément arbitraire E_0 de M sous une forme réduite $\mathcal{E}_0$, caractérisée par les valeurs fixes $c^0_{\nu_0+1}, \dots, c^0_{\rho_0}, c^1_{\nu_1+1}, \dots, c^1_{\rho_1}, \dots$ que prennent respectivement ses coordonnées $z^0_{\nu_0+1}, \dots, z^0_{\rho_0}, z^1_{\nu_1+1}, \dots, z^1_{\rho_1}, \dots$. Les autres coordonnées, $z^0_1, \dots, z^0_{\nu_0}, z^1_1, \dots, z^1_{\nu_1}, \dots$ de $\mathcal{E}_0$ sont fonctions des coordonnées de l'élément initial E_0, et les invariants cherchés sont fonctions de ces seules quantités. Pour les obtenir, il suffit d'achever la réduction de l'élément à une forme réduite bien déterminée, en tenant compte seulement des valeurs constantes déjà attribuées à certaines coordonnées. On posera donc, dans les équations (C^0):

$$z'^{00}_{\nu_0+1} = z^{00}_{\nu_0+1} = c^0_{\nu_0+1}, \quad \dots, \quad z'^{00}_{\rho_0} = z^{00}_{\rho_0} = c^0_{\rho_0},$$
$$z'^{10}_{\nu_1+1} = z^{10}_{\nu_1+1} = c^1_{\nu_1+1}, \quad \dots, \quad z'^{10}_{\rho_1} = z^{10}_{\rho_1} = c^1_{\rho_1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

puis on achèvera de déterminer les paramètres λ, en attribuant à de nouvelles coordonnées $z'^{00}_{\mu_0+1}, \ldots, z'^{00}_{\nu_0}, z'^{10}_{\mu_1+1}, \ldots, z'^{10}_{\nu_1}, \ldots$ des valeurs constantes: on exprime ainsi les autres coordonnées $z'^{00}_1, \ldots, z'^{00}_{\mu_0}, z'^{10}_1, \ldots, z'^{10}_{\mu_1}, \ldots$ en fonction de $z^{00}_1, \ldots, z^{00}_{\nu_0}, z^{10}_1, \ldots, z^{10}_{\nu_1}, \ldots$, et ces expressions sont les invariants cherchés; la transformation qui ramène E_0 à la dernière forme réduite est en effet unique.

4. Ce procédé est intéressant dans le cas où la forme intermédiaire $\mathcal{E}_0$ a elle-même pour coordonnées les invariants d'un sous-groupe du groupe proposé. On obtient alors les invariants du groupe général, exprimés en fonction de ceux du sous-groupe.

On peut arriver au même résultat à l'aide des transformations infinitésimales, la méthode s'appliquant d'ailleurs à un système complet quelconque d'équations linéaires aux dérivées partielles.

Soit donc un système complet

$$(1) \qquad X_1 f = 0, \quad \ldots, \quad X_h f = 0, \qquad X_{h+1} f = 0, \quad \ldots, \quad X_n f = 0$$

de n équations linéaires aux dérivées partielles, à r variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Nous supposons que les h premières forment elles-mêmes un système complet dont on connaît les solutions principales $x'_{h+1}, \ldots, x'_r$, qui se réduisent à $x_{h+1}, \ldots, x_r$, pour

$$x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_h = x_h^0.$$

Pour achever l'intégration de (1), nous prenons comme nouvelles variables $x_1, \ldots, x_h, x'_{h+1}, \ldots, x'_r$, et alors le système complet devient:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0,$$

$$(2) \qquad X_i f = X_i x'_{h+1} \frac{\partial f}{\partial x'_{h+1}} + X_i x'_{h+2} \frac{\partial f}{\partial x'_{h+2}} + \ldots + X_i x'_r \frac{\partial f}{\partial x'_r} = 0 \quad (i=h+1,\ldots,n)$$

où les coefficients des dernières équations sont supposés exprimés en fonction de $x_1, \ldots, x_h, x'_{h+1}, \ldots, x'_r$. Si on résout les dernières équations, par rapport à $\frac{\partial f}{\partial x'_{h+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x'_n}$, par exemple, le système devient *jacobien*, de telle sorte que ses coefficients sont alors indépendants de $x_1, \ldots, x_h$. Le résultat de cette résolution ne change donc pas si on remplace dans (2), $x_1, \ldots, x_h$ par des constantes, en particulier par $x_1^0, \ldots, x_h^0$. Soit:

$$X_i x'_k = \varphi_{ik}(x_1, \ldots, x_h, x'_{h+1}, \ldots, x'_r) = \psi_{ik}(x_1, \ldots, x_h, x_{h+1}, \ldots, x_r).$$

Cette substitution donne identiquement:

$$\varphi_{ik}(x_1^0, \ldots, x_h^0, x'_{h+1}, \ldots, x'_r) = \psi_{ik}(x_1^0, \ldots, x_h^0, x'_{h+1}, \ldots, x'_r),$$

et on remplace le système (2) par un système équivalent en substituant à tout coefficient $X_i x'_k$ l'expression $\psi_{ik}(x_1^0, \ldots, x_h^0, x'_{h+1}, \ldots . x'_r)$, laquelle s'obtient simplement en calculant $X_i x'_k$ en fonction de $x_1, \ldots, x_h, x_{h+1}, \ldots, x_r$, et y faisant ensuite:

$$x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_h = x_h^0, \qquad x_{h+1} = x'_{h+1}, \quad \ldots, \quad x_r = x'_r.$$

Les dernières équations (2) forment alors un système complet par rapport aux seules variables $x'_{h+1}, \ldots, x'_r$, dont les solutions sont les intégrales de (1), exprimées en fonction de $x'_{h+1}, \ldots, x'_r$.

5. L'application de la méthode peut être facilitée dans certains cas. Elle consiste à effectuer sur l'élément intermédiaire $\mathcal{E}_0$, une transformation qui n'altère pas ses coordonnées constantes:

$$(3) \quad z^0_{\nu_0+1} = c^0_{\nu_0+1}, \quad \ldots, \quad z^0_{\rho_0} = c^0_{\rho_0}, \qquad z^1_{\nu_1+1} = c^1_{\nu_1+1}, \quad \ldots, \quad z^1_{\rho_1} = c^1_{\rho_1}, \quad \ldots$$

En général, la transformation générale jouissant de cette propriété dépend des autres coordonnées $z_1^{00}, \ldots, z_{\nu_0}^{00}, z_1^{10}, \ldots, z_{\nu_1}^{10}, \ldots$ de $\mathcal{E}_0$: dans le cas contraire, elle appartient nécessairement à un groupe Γ, sous-groupe du proposé G. Tout revient donc, dans ce cas, à faire une dernière réduction de la forme intermédiaire $\mathfrak{M}$, par une transformation de Γ, c'est-à-dire, à déterminer les invariants des multiplicités $\mathfrak{M}$, par rapport au groupe Γ.

C'est ce qui résulte aussi du raisonnement suivant. — Si S est la transformation générale de Γ, et T_0 une transformation particulière mettant une multiplicité donnée M sous la forme $\mathfrak{M}$, la transformation générale de G qui donne la même réduction est $T_0 S$. Tout invariant de

$\mathfrak{M}$ par rapport à Γ, exprimé en fonction des coordonnées de M, est alors nécessairement indépendant des arbitraires de cette transformation $T_0 S$, puisqu'il garde la même valeur, quelle que soit la multiplicité réduite $\mathfrak{M}$ à laquelle on ait ramené M; c'est donc une fonction bien déterminée des coordonnées de M, et, par suite, il constitue un invariant de M par rapport au groupe G.

Réciproquement, tout invariant de M par rapport au groupe G, exprimé en fonction des coordonnées d'une multiplicité $\mathfrak{M}$, donne évidemment un invariant de $\mathfrak{M}$ par rapport au groupe Γ, et les invariants distincts sont les mêmes, toute relation qu'il y a entre eux sous la forme $\mathfrak{M}$, subsistant quand on revient à la forme M.

Par exemple, un ds^2,

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2 \tag{4}$$

peut toujours, à l'aide d'une transformation convenable du groupe G:

$$x' = X(x, y), \qquad y' = Y(x, y),$$

où X et Y sont des fonctions arbitraires de x et y, se mettre sous la forme:

$$ds^2 = 2\lambda dx dy \tag{5}$$

et la transformation générale de G qui conserve cette forme réduite de ds^2, est indépendante de λ et constitue un sous-groupe Γ de G:

$$x' = \Xi(x), \qquad y' = H(y),$$

où Ξ est une fonction arbitraire de x seulement, et H de y seulement. Tout invariant de la forme (5) par rapport au groupe Γ donne donc un un invariant de la forme (4) par rapport au groupe G; et on obtient tous ces derniers invariants de cette manière.

CHAPITRE II.

Invariants d'une surface par rapport aux transformations conformes et aux transformations projectives de l'espace.

1. Appliquons ces principes à la recherche des invariants d'une surface, définie par une fonction z de x et y, par rapport au groupe G_{10} des *transformations conformes* de l'espace:

$$(G_{10})\quad \boxed{\begin{array}{c} p\,,\; q\,,\; r\,,\; zq-yr\,,\; xr-yp\,,\; yp-xq, \\ U,\; 2xU-(x^2+y^2+z^2)p\,,\; 2yU-(x^2+y^2+z^2)q\,,\; 2zU-(x^2+y^2+z^2)r \end{array}}$$

avec:

$$U = xp + yq + zr.$$

Les six premières transformations forment le groupe G_6 des mouvements de l'espace; à l'aide d'une transformation de ce groupe, on peut, avons-nous vu, transporter un point quelconque de la surface à l'origine, l'équation de la surface ayant la forme:

$$(1)\qquad z = \frac{a_{20}x^2 + a_{02}y^2}{2} + \frac{a_{30}}{6}x^3 + \frac{a_{21}}{2}x^2y + \frac{a_{12}}{2}xy^2 + \frac{a_{03}}{6}y^3 + \dots$$

où les coefficients sont les valeurs des invariants du groupe G_6, au point considéré. Ceci devient impossible dans deux cas particuliers, définis chacun par une équation invariante, qui est aussi *équation invariante* de G_{10}. Nous laisserons ces deux cas de côté.

La transformation conforme n'altérant pas les lignes de courbure, la transformation générale de G_{10} qui n'altère pas la forme de l'équation (1) est indépendante des coefficients de (1). Elle forme effectivement un groupe G_4, celui des 4 dernières transformations de G_{10}. Sa transformation infinitésimale est:

$$\begin{aligned}
\delta x &= [2x(ax + by + cz + h) - a(x^2 + y^2 + z^2)]\,\delta t,\\
\delta y &= [2y(ax + by + cz + h) - b(x^2 + y^2 + z^2)]\,\delta t,\\
\delta z &= [2z(ax + by + cz + h) - c(x^2 + y^2 + z^2)]\,\delta t,
\end{aligned}$$

où a, b, c, h sont des paramètres arbitraires.

L'équation (1) étant:

$$z = f(x, y),$$

l'équation de la surface transformée est:

$$z - \delta z = f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x - \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y,$$

ou, en s'arrêtant aux termes du premier ordre en δt:

$$\begin{aligned}
z = f(x, y) + \delta t \Big\{ & 2(ax + by + cf + h)\Big(f - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\\
& + (x^2 + y^2 + f^2)\Big(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} - c\Big)\Big\}.
\end{aligned}$$

D'après cela, la transformation infinitésimale des coefficients de (1) est:

$$\begin{aligned}
&\delta a_{20} + (2h a_{20} + 2c)\,\delta t = 0, && \delta a_{02} + (2h a_{02} + 2c)\,\delta t = 0,\\
&\delta a_{30} + 4h a_{30}\,\delta t = 0, && \delta a_{03} + 4h a_{03}\,\delta t = 0,\\
&\delta a_{21} + [4h a_{21} + 2b(a_{20} - a_{02})]\,\delta t = 0, && \delta a_{12} + [4h a_{12} + 2a(a_{02} - a_{20})]\,\delta t = 0.
\end{aligned}$$

Elle met en évidence 1° une *équation invariante* du second ordre:

$$a_{20} - a_{02} = 0.$$

2° *deux invariants* du troisième ordre:

$$\frac{a_{30}}{(a_{20} - a_{02})^2}, \qquad \frac{a_{03}}{(a_{20} - a_{02})^2}.$$

L'équation invariante exprime que *la transformation conforme change un ombilic en ombilic.* Quand elle est satisfaite, les deux invariants du 3^{me} ordre n'ont plus de sens.

Pour avoir la signification de ces invariants, déterminons, dans le voisinage de l'origine, les rayons de courbure de la surface. Ils sont donnés par l'équation:

$$\rho^2(s^2-rt)+\rho\sqrt{1+p^2+q^2}\,[r(1+q^2)+t(1+p^2)-2spq]-(1+p^2+q^2)^2=0,$$

qui, aux termes du second ordre près, se réduit ici à:

$$-\rho^2 rt+\rho(r+t)-1=0,$$

ce qui donne pour chacun des rayons de courbure:

$$\rho_1=\frac{1}{r}=\frac{1}{a_{20}}-\frac{a_{30}x+a_{21}y}{a_{20}^2}+\dots$$

$$\rho_2=\frac{1}{t}=\frac{1}{a_{02}}-\frac{a_{12}x+a_{03}y}{a_{02}^2}+\dots.$$

Désignons par s_1 l'arc de la ligne de courbure suivant laquelle la sphère osculatrice de rayon ρ_1 touche la surface, par s_2 celui de la seconde ligne de courbure. On a:

$$s_1=x+\dots\qquad s_2=y+\dots$$

et, par suite, à l'origine, on a:

$$a_{20}=\frac{1}{\rho_1},\qquad a_{02}=\frac{1}{\rho_2},$$

$$a_{30}=-\frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial\rho_1}{\partial s_1},\qquad a_{03}=-\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial\rho_2}{\partial s_2},\qquad a_{21}=-\frac{1}{\rho_1^2}\frac{\partial\rho_1}{\partial s_2},\qquad a_{12}=-\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial\rho_2}{\partial s_1},$$

et les deux invariants obtenus sont, au signe près:

$$\frac{\rho_2^2\dfrac{\partial\rho_1}{\partial s_1}}{(\rho_1-\rho_2)^2},\qquad \frac{\rho_1^2\dfrac{\partial\rho_2}{\partial s_2}}{(\rho_1-\rho_2)^2}.$$

La même méthode conduit à 5 invariants du 4^{me} ordre, dont le calcul est, jusqu'à présent, sans intérêt.

2. On peut, de la même manière, construire les invariants d'une surface par rapport au *groupe des transformations projectives.* On peut, en effet, décomposer les transformations du groupe en sous-groupes s'emboîtant les uns dans les autres, suivant ce tableau:

$$\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{p\,,\,q\,,\,r}\quad xr\quad yr}\quad xq\quad yp\quad xp - yq}\quad xp + yq\quad zr}\quad zp\quad zq} \quad xU - zq\qquad yU - zp\qquad zU}$$

A chacun de ces groupes correspond, comme on le verra, une forme réduite bien déterminée, la transformation générale du groupe suivant qui n'altère pas les caractères de cette forme réduite, étant indépendante des coefficients qui y figurent.

1°. D'abord, une transformation du groupe $\boxed{p\,,\,q\,,\,r}$, permet de transporter un point quelconque $x_0\,, y_0\,, z_0$ de la surface à l'origine, ce qui met son équation sous la forme:

$$z = z_{10}x + z_{01}y + \ldots + \frac{z_{hk}}{h!\,k!}x^h y^k + \ldots \tag{2}$$

où z_{hk} représente la valeur, en ce point, de la dérivée $\frac{\partial^{h+k}z}{\partial x^h \partial y^k}$.

2°. $\boxed{xr\quad yr}$. En posant:

$$z' = z - z_{10}x - z_{01}y$$

on obtient la forme réduite:

$$z = \frac{z_{20}}{2}x^2 + z_{11}xy + \frac{z_{02}}{2}y^2 + \ldots + \frac{z_{hk}}{h!\,k!}x^h y^k + \ldots. \tag{3}$$

On voit par là que tout invariant est indépendant de $x\,, y\,, z$, et des dérivées premières $z_{10}\,, z_{01}$.

3°. $\boxed{xq \quad yp \quad xp - yq}$. On détermine la transformation:

$$x = lx' + my', \qquad (lm_1 - ml_1 = 1)$$
$$y = l_1x' + m_1y',$$

de façon à annuler les termes en x'^2 et y'^2. On pose donc:

$$l_1 = \lambda l, \qquad m_1 = \mu m,$$

λ et μ étant les racines de l'équation:

$$z_{20} + 2z_{11}u + z_{02}u^2 = 0,$$

ce qui tombe en défaut, lorsque ces racines sont égales, c'est-à-dire, pour:

$$z_{11}^2 - z_{20}z_{02} = 0,$$

équation invariante des *surfaces développables.*

Si on écrit l'équation (3):

$$z = \frac{1}{2}\varphi_2(x, y) + \frac{1}{1.2.3}\varphi_3(x, y) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots p}\varphi_p(x, y) + \ldots,$$

φ_p étant une fonction homogène de degré p, l'équation devient, par la transformation

$$z = \sum_{p \geqq 2} \frac{1}{1.2\ldots p}\varphi_p(lx' + my', \ l_1x' + m_1y')$$

ou

$$z = \sum_{h+k \geqq 2} \frac{a_{hk}}{h!\,k!} l^h m^k x'^h y'^k$$

en posant:

$$a_{hk} = \frac{h!}{(h+k)!}[\varphi'_{h+k,x}(1, \lambda) + \mu\varphi'_{h+k,y}(1, \lambda)]_{(k)}$$

$$= \frac{k!}{(h+k)!}[\varphi'_{h+k,x}(1, \mu) + \lambda\varphi'_{h+k,y}(1, \mu)]_{(h)}.$$

Dans cette forme, l et m satisfont à la relation:

$$lm(\mu - \lambda) = 1.$$

On achève de les déterminer en égalant entre eux les coefficients de x'^3 et y'^3, ce qui donne:

$$\alpha_{30} l^3 = \alpha_{03} m^3,$$

d'où:

$$l = \alpha_{03}^{\frac{1}{6}} \alpha_{30}^{-\frac{1}{6}} (\mu - \lambda)^{-\frac{1}{2}}, \qquad m = \alpha_{30}^{\frac{1}{6}} \alpha_{03}^{-\frac{1}{6}} (\mu - \lambda)^{-\frac{1}{2}},$$

ce qui tombe en défaut dans le cas où l'une des quantités α_{30} et α_{03} est nulle, c'est-à-dire lorsque les équations:

$$z_{20} + 2z_{11}u + z_{02}u^2 = 0,$$

$$z_{30} + 3z_{21}u + 3z_{12}u^2 + z_{03}u^3 = 0,$$

ont une racine commune. C'est le cas des *surfaces réglées.*

Sauf dans ces deux cas d'exception, l'équation se met donc sous la forme:

$$(4) \qquad \begin{aligned} z = {} & \frac{a_{11}}{\mu - \lambda} xy + \frac{\alpha_{30}^{\frac{1}{2}} \alpha_{03}^{\frac{1}{2}}}{(\mu - \lambda)^{\frac{3}{2}}} \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2(\mu - \lambda)^{\frac{3}{2}}} \left(\alpha_{03}^{\frac{1}{6}} \alpha_{30}^{-\frac{1}{6}} \alpha_{21} x^2 y + \alpha_{30}^{\frac{1}{6}} \alpha_{03}^{-\frac{1}{6}} \alpha_{12} x y^2 \right) \\ & + \sum_{h+k \geq 4} \frac{\alpha_{30}^{\frac{k-h}{6}} \alpha_{03}^{\frac{h-k}{6}}}{(\mu - \lambda)^{\frac{h+k}{2}}} \frac{a_{hk}}{h!\,k!} x^h y^k. \end{aligned}$$

4°. $\boxed{xp + yq \quad zr}$. La transformation

$$x = \sigma x', \qquad y = \sigma y', \qquad z' = \tau z,$$

permet, en prenant:

$$\tau\sigma^2 \frac{a_{11}}{\mu - \lambda} = 1, \qquad \tau\sigma^3 \frac{\alpha_{03}^{\frac{1}{2}} \alpha_{30}^{\frac{1}{2}}}{(\mu - \lambda)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

d'amener les coefficients de xy et $\frac{x^3 + y^3}{6}$ à être égaux à l'unité, les cas d'exception étant encore ceux qui viennent d'être signalés. De là la forme réduite:

$$(5) \qquad z = xy + \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{a_{21}}{2} x^2 y + \frac{a_{12}}{2} xy^2 + \sum_{h+k \geqq 4} \frac{a_{hk}}{h!\,k!} x^h y^k = \varphi(x, y)$$

avec

$$a_{hk} = \alpha_{11}^{h+k-3}\, \alpha_{03}^{1-\frac{h+2k}{3}}\, \alpha_{30}^{1-\frac{2h+k}{3}}\, \alpha_{hk}.$$

5°. $\boxed{zp \quad zq}$. L'équation de la surface

$$z = \varphi(x, y)$$

devient, par la transformation infinitésimale précédente:

$$z = \varphi(x, y) - \left[fz \frac{\partial \varphi}{\partial x} - gz \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] \delta t$$

où f et g sont des constantes arbitraires; ou, aux termes du second ordre en δt, près:

$$z = \varphi(x, y) - \varphi(x, y)\left(f \frac{\partial \varphi}{\partial x} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \delta t,$$

ce qui donne, pour les coefficients $a_{21}, a_{12}, \ldots$ la transformation infinitésimale:

$$\begin{aligned}
&\delta a_{21} + 2g\,\delta t = 0, && \delta a_{12} + 2f\,\delta t = 0,\\
&\delta a_{40} + 4g\,\delta t = 0, && \delta a_{04} + 4f\,\delta t = 0,\\
&\delta a_{31} + (4f + 6g a_{21})\,\delta t = 0, && \delta a_{13} + (4g + 6f a_{12})\,\delta t = 0,
\end{aligned}$$

$$\delta a_{22} + 6(f a_{21} + g a_{12})\,\delta t = 0.$$

Elle correspond aux transformations finies:

$$\begin{aligned}
&a'_{21} = a_{21} - 2g', && a'_{12} = a_{12} - 2f',\\
&a'_{40} = a_{40} - 4g', && a'_{04} = a_{04} - 4f',\\
&a'_{31} = a_{31} - 6g' a_{21} - 4f' + 6g'^2, && a'_{13} = a_{13} - 6f' a_{12} - 4g' + 6f'^2,
\end{aligned}$$

$$a'_{22} = a_{22} - 6(f' a_{21} + g' a_{12}) + 12 f' g'.$$

En prenant

$$g' = \frac{a_{21}}{2}, \qquad f' = \frac{a_{12}}{2},$$

on met l'équation de la surface sous la forme:

$$z = xy + \frac{x^3 + y^3}{6} + \sum_{h+k \geq 4} \frac{A_{hk}}{h!\,k!} x^h y^k \tag{6}$$

où les coefficients A constituent les *invariants de la surface par rapport au groupe des transformations linéaires,* les premiers coefficients ayant en particulier les valeurs suivantes:

$$A_{40} = a_{40} - 2a_{21}, \qquad A_{04} = a_{04} - 2a_{12},$$

$$A_{31} = a_{31} - \frac{3}{2}a_{21}^2 - 2a_{12}, \qquad A_{13} = a_{13} - \frac{3}{2}a_{12}^2 - 2a_{21},$$

$$A_{22} = a_{22} - 3a_{12}a_{21}.$$

6°. $\boxed{xU - zq \quad yU - zp \quad zU}$. Enfin, la transformation infinitésimale projective la plus générale qui n'altère pas la forme réduite (6):

$$z = \phi(x, y)$$

est indépendante des coefficients A. Elle forme donc un groupe et a pour expression:

$$\delta x = [x(lx + my + nz) - mz]\,\delta t, \qquad \delta y = [y(lx + my + nz) - lz]\,\delta t,$$

$$\delta z = z(lx + my + nz)\delta t,$$

où l, m, n sont des coefficients arbitraires. Elle transforme la surface (6) en la suivante:

$$z - \delta z = \phi(x, y) - \frac{\partial \phi}{\partial x}\delta x - \frac{\partial \phi}{\partial y}\delta y,$$

ou, aux termes près du second ordre en δt:

$$z = \phi(x, y) + \delta t\left\{(lx + my + n\phi)\left(\phi - x\frac{\partial \phi}{\partial x} - y\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \phi\left(m\frac{\partial \phi}{\partial x} + l\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right\}.$$

La transformation infinitésimale des A qui en résulte est:

$$\delta A_{40} + 4l\,\delta t = 0, \qquad \delta A_{04} + 4m\,\delta t = 0,$$
$$\delta A_{31} - 2m\,\delta t = 0, \qquad \delta A_{13} - 2l\,\delta t = 0,$$
$$\delta A_{22} + 4n\,\delta t = 0,$$

ce qui correspond à la transformation finie:

$$A'_{40} = A_{40} - 4l', \qquad A'_{04} = A_{04} - 4m',$$
$$A'_{31} = A_{31} + 2m', \qquad A'_{13} = A_{13} + 2l',$$
$$A'_{22} = A_{22} - 4n'.$$

En prenant:

$$m' = -\frac{A_{31}}{2}, \qquad l' = -\frac{A_{13}}{2}, \qquad n' = \frac{A_{22}}{4},$$

l'équation de la surface se met sous la forme:

$$(7) \qquad z = xy + \frac{1}{6}(x^3 + y^3) + \frac{1}{24}(\mathfrak{A}_{40}x^4 + \mathfrak{A}_{04}y^4) + \sum_{h+k\geqq 5} \frac{\mathfrak{A}_{hk}}{h!\,k!} x^h y^k,$$

où les $\mathfrak{A}$ constituent les invariants de la surface par rapport au groupe projectif général. En particulier, on a deux invariants du 4^{me} ordre, qui ont pour expressions:

$$\mathfrak{A}_{40} = A_{40} + 2A_{13} = a_{40} + 2a_{13} - 6a_{21} - 3a_{12}^2$$
$$= \alpha_{03}^{-\frac{4}{3}}\alpha_{30}^{-\frac{5}{3}}(\alpha_{11}\alpha_{03}\alpha_{40} + 2\alpha_{11}\alpha_{30}\alpha_{13} - 6\alpha_{30}\alpha_{03}\alpha_{21} - 3\alpha_{30}\alpha_{12}^2),$$
$$\mathfrak{A}_{04} = A_{04} + 2A_{31} = a_{04} + 2a_{31} - 6a_{12} - 3a_{21}^2$$
$$= \alpha_{30}^{-\frac{4}{3}}\alpha_{03}^{-\frac{5}{3}}(\alpha_{11}\alpha_{30}\alpha_{04} + 2\alpha_{11}\alpha_{03}\alpha_{31} - 6\alpha_{03}\alpha_{30}\alpha_{12} - 3\alpha_{03}\alpha_{21}^2).$$

3. On peut donner de ces deux invariants, l'interprétation suivante. Comparons la surface proposée à une *surface anharmonique:*

$$P_1^{\lambda_1} P_2^{\lambda_2} P_3^{\lambda_3} P_4^{\lambda_4} = 1 \qquad (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0)$$

où les P sont des fonctions linéaires indépendantes de x, y, z. Une telle surface, par une transformation projective convenable, peut se mettre sous la forme:

$$z = x^a y^b.$$

Elle dépend de 15 constantes arbitraires, et admet un groupe à deux paramètres de transformations projectives

$$\boxed{xp + azr, \qquad yq + bzr}$$

de sorte qu'elle admet *deux invariants,* lesquels sont précisément les constantes a et b. Effectivement, déterminons pour cette surface $z = x^a y^b$, les valeurs, en un point quelconque x et y, des deux invariants A_{40} et A_{04}.

Ici, on a:

$$z_{ij} = a(a - 1) \ldots (a - i + 1) b(b - 1) \ldots (b - j + 1) x^{a-i} y^{b-j},$$

de sorte que z_{ij} est de degré $a - i$ en x, $b - j$ en y. L'équation en u est:

$$\frac{a(a-1)}{x^2} + \frac{2ab}{xy} u + \frac{b(b-1)}{y^2} u^2 = 0,$$

de sorte que λ et μ sont de degré -1 en x et $+1$ en y. L'expression:

$$\alpha_{p0} = \varphi_p(1, \lambda) = z_{p0} + p z_{p-1,1} \lambda + \ldots$$

est de degré $a - p$ en x et b en y; et, pour une raison analogue, α_{hk} est de degré $a - h - k$ en x et b en y. Il en résulte que A_{40} et A_{04} sont de degré zéro en x et y, c'est-à-dire, qu'ils dépendent bien de a et b seulement.

Ceci montre qu'en tout point d'une surface quelconque S, il est en général possible de trouver une *surface anharmonique* Σ (plus précisement, un nombre limité de telles surfaces), qui soit osculatrice avec S, jusqu'aux éléments du 4^me^ ordre. Les valeurs des deux invariants de S en ce point s'expriment en fonction des deux invariants de cette surface anharmonique Σ.

On a laissé de côté, dans cette analyse, deux classes de surfaces, les *surfaces développables* et les *surfaces réglées.* Les invariants des premières se ramènent à ceux des courbes gauches et ont été complètement déterminés par HALPHEN.[1]

[1] *Sur les invariants différentiels des courbes gauches,* Journal de l'école polytechnique, 47^e^ cahier.

CHAPITRE III.

Equation $y'' = a_0 y'^3 - a_1 y'^2 + b_1 y' - b_0$.

1. L'équation

$$y'' = a_0 y'^3 - a_1 y'^2 + b_1 y' - b_0 \tag{1}$$

où a_0, a_1, b_1, b_0 sont des fonctions de x et y, a la propriété de conserver la même forme par une transformation ponctuelle quelconque. En particulier, si on considère x comme fonction de y, elle se transforme en:

$$x'' = b_0 x'^3 - b_1 x'^2 + a_1 x' - a_0,$$

ce qui revient à substituer les a aux b, et inversement, en même temps que l'on change x en y et inversement.

La transformation infinitésimale effectuée sur x et y, est ici:

$$\delta x = -\xi \delta t, \qquad \delta y = -\eta \delta t, \tag{2}$$

où ξ et η sont des fonctions arbitraires de x et y. Elle donne:

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + y'^2 \frac{\partial \xi}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\frac{\delta y''}{\delta t} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + y'\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right) - y'^2\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right)$$
$$+ y'^3 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + y''\left(2\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} + 3y'\frac{\partial \xi}{\partial y}\right).$$

La transformation infinitésimale des coefficients a et b est alors donnée par l'identité:

$$-\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + y'\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right) - y'^2\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right) + y'^3 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$
$$+ (a_0 y'^3 - a_1 y'^2 + b_1 y' - b_0)\left(2\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} + 3y'\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)$$
$$- (3a_0 y'^2 - 2a_1 y' + b_1)\left[-\frac{\partial \eta}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + y'^2 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right]$$
$$-\frac{\delta a_0}{\delta t} y'^3 + \frac{\delta a_1}{\delta t} y'^2 - \frac{\delta b_1}{\delta t} y' + \frac{\delta b_0}{\delta t} = 0,$$

ce qui donne:

$$\frac{\delta a_0}{\delta t} = a_0\left(2\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) - a_1\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2},$$

$$\frac{\delta a_1}{\delta t} = -3a_0\frac{\partial\eta}{\partial x} + a_1\frac{\partial\eta}{\partial y} - 2b_1\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\delta b_0}{\delta t} = b_0\left(2\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y}\right) - b_1\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\delta b_1}{\delta t} = -3b_0\frac{\partial\xi}{\partial y} + b_1\frac{\partial\xi}{\partial x} - 2a_1\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}.$$

Le calcul des accroissements des dérivées φ_x et φ_y d'une fonction φ de x et y se fait à l'aide des formules:

$$\frac{\delta\varphi_x}{\delta t} = \frac{d}{dx}\frac{\delta\varphi}{\delta t} + \varphi_x\frac{\partial\xi}{\partial x} + \varphi_y\frac{\partial\eta}{\partial x}, \qquad \frac{\delta\varphi_y}{\delta t} = \frac{d}{dy}\frac{\delta\varphi}{\delta t} + \varphi_x\frac{\partial\xi}{\partial y} + \varphi_y\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Pour les éléments du 1^er^ ordre, on obtient ainsi:

$$\frac{\delta a_{0x}}{\delta t} = \frac{\partial^3\xi}{\partial x\partial y^2} + \cdots, \qquad \frac{\delta a_{0y}}{\delta t} = \frac{\partial^3\xi}{\partial y^3} + \cdots,$$

$$\frac{\delta b_{0y}}{\delta t} = \frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial y} + \cdots, \qquad \frac{\delta b_{0x}}{\delta t} = \frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} + \cdots,$$

$$\frac{\delta a_{1x}}{\partial t} = \frac{\partial^3\eta}{\partial x\partial y^2} - 2\frac{\partial^3\xi}{\partial x^2\partial y} + \cdots, \qquad \frac{\delta a_{1y}}{\delta t} = \frac{\partial^3\eta}{\partial y^3} - 2\frac{\partial^3\xi}{\partial x\partial y^2} + \cdots,$$

$$\frac{\delta b_{1y}}{\delta t} = \frac{\partial^3\xi}{\partial x^2\partial y} - 2\frac{\partial^3\eta}{\partial x\partial y^2} + \cdots, \qquad \frac{\delta b_{1x}}{\delta t} = \frac{\partial^3\xi}{\partial x^3} - 2\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial y} + \cdots.$$

On est conduit à poser:

$$\alpha_1 = a_{1y} + 2a_{0x}, \qquad 3\alpha = a_{1x} + 2b_{1y},$$

$$\beta_1 = b_{1x} + 2b_{0y}, \qquad 3\beta = b_{1y} + 2a_{1x}$$

et à substituer aux dérivées de a_1 et b_1, les quantités $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ et leurs dérivées, pour lesquelles on a:

$$\frac{\delta\alpha_1}{\delta t} = \frac{\partial^3\eta}{\partial y^3} + \cdots, \qquad \frac{\delta\alpha}{\delta t} = -\frac{\partial^3\eta}{\partial x\partial y^2} + \cdots,$$

$$\frac{\delta\beta_1}{\delta t} = \frac{\partial^3\xi}{\partial x^3} + \cdots, \qquad \frac{\delta\beta}{\delta t} = -\frac{\partial^3\xi}{\partial x^2\partial y} + \cdots.$$

Il suffit même, pour avoir tous les éléments d'ordre supérieur, de considérer seulement les dérivées de a_{0y} et α_1 par rapport à y seulement, celles de b_{0x} et β_1 par rapport à x seulement, en considérant simultanément toutes les dérivées des autres éléments du premier ordre, $a_{0x}, b_{0y}, \alpha, \beta$.

Ceci montre que, dans tout invariant, les dérivées d'ordre supérieur figurent seulement sous la forme des dérivées d'une des deux expressions:

$$l = a_{0x^2} + \beta_y = \frac{\partial^2 a_0}{\partial x^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 a_1}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 b_1}{\partial y^2},$$

$$m = b_{0y^2} + \alpha_x = \frac{\partial^2 b_0}{\partial y^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 b_1}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2}$$

et on pourra, à partir du 3^{me} ordre, considérer seulement les dérivées de a_{0x} par rapport à y, celles de b_{0y} par rapport à x, et introduire l et m et leurs dérivées.

On a:

$$\begin{aligned}\frac{\delta l}{\delta t} = {} & a_0\left(2\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}\right) - a_1\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial y} - 2a_0\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{2}{3}a_1\frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial y^2} - \frac{4}{3}b_1\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} \\ & - b_0\frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3} + \frac{1}{3}b_1\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} - \frac{2}{3}a_1\frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial y^2} + \cdots \\ = {} & - a_0\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} - a_1\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial y} - b_1\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} - b_0\frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3} + \cdots\end{aligned}$$

d'où il résulte que, dans tout invariant, les quantités l et m ne figurent que par les combinaisons:

$$h = l + a_0\beta_1 - a_1\beta + b_1 a_{0x} + b_0 a_{0y},$$

$$k = m + b_0\alpha_1 - b_1\alpha + a_1 b_{0y} + a_0 b_{0x},$$

expressions que l'on peut maintenant substituer à l et m.

Le calcul complet des accroissements de h et k donne:

$$\frac{\delta h}{\delta t} = h\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + 2\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) - k\frac{\partial \xi}{\partial y},$$
(4)
$$\frac{\delta k}{\delta t} = k\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - h\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

résultat remarquable, en ce sens que les dérivées du second ordre de ξ et η n'y figurent pas.

On pourrait achever la détermination des invariants, en prolongeant la transformation infinitésimale (4) aux dérivées de h et k; puis, en ajoutant à chacune de ces dérivées des fonctions linéaires de $a_{0x}, b_{0y}, a_{0y}, b_{0x}, \alpha_1, \beta_1, \alpha$ et β, on peut faire disparaître, dans l'expression de leurs transformations infinitésimales, les dérivées du 3^{me} ordre de ξ et η. Le calcul est rendu pratiquement facile, eu égard à notre remarque (3^{me} partie, ch. I), sur l'intégration progressive des systèmes complets.

On obtient ainsi 6 invariants du 4^{me} ordre, et, en général, $2(n-1)$ du $n^{ième}$ ordre, lesquels peuvent être exprimés en fonctions linéaires des $2(n-1)$ dérivées du $(n-2)^{ième}$ ordre de h et k.

Nous suivrons une autre marche. Il résulte des équations (4), qu'il y a une équation différentielle du 1^{er} ordre, invariablement attachée à la proposée, car, si l'on combine avec (4) les formules:

$$\frac{\delta}{\delta t}dx = -\frac{\partial \xi}{\partial x}dx - \frac{\partial \xi}{\partial y}dy, \qquad \frac{\delta}{\delta t}dy = -\frac{\partial \eta}{\partial x}dx - \frac{\partial \eta}{\partial y}dy$$

on trouve l'équation *invariante:*

$$(5) \qquad hdy - kdx = 0.$$

Il en résulte que l'on peut, par une transformation du groupe, annuler h; il suffit de prendre pour nouvelle variable indépendante, une fonction x_1 de x et y satisfaisant à:

$$(6) \qquad h\frac{\partial x_1}{\partial x} + k\frac{\partial x_1}{\partial y} = 0$$

en laissant y fixe: cela, sous la seule condition que x_1 ne se réduise pas à une simple fonction de y, c'est-à-dire, que l'on n'ait pas:

$$k = 0.$$

Dans ce cas, il suffit d'intervertir x et y, pour réaliser immédiatement la condition $h = 0$.

Ce calcul tomberait en défaut, dans le cas où on aurait simultanément:

$$(7) \qquad h = 0, \qquad k = 0.$$

On a ainsi un *système invariant d'équations;* lorsqu'il est satisfait, nos calculs précédents montrent que l'équation (1) n'admet pas d'invariants. Il en est ainsi, en particulier, pour l'équation

$$y'' = 0,$$

de sorte que le système (7) exprime les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (1) puisse se ramener par une transformation ponctuelle à l'équation précédente. On sait comment, dans ce cas, M. Lie a ramené l'intégration de cette équation (1), à celle d'une équation linéaire du 3^{me} ordre.[1]

Quant à la transformation générale (2) qui laisse invariante l'équation $h = 0$, elle est définie, d'après (4), par:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0.$$

Elle est bien indépendante des nouveaux coefficients de l'équation, et engendre un groupe, savoir:

$$x_1 = X(x), \qquad y_1 = Y(x, y) \tag{8}$$

ou, avec les transformations infinitésimales:

$$\delta x = -\xi(x)\delta t, \qquad \delta y = -\eta(x, y)\delta t \tag{8'}$$

où X et ξ sont des fonctions arbitraires de x seulement, Y et η des fonctions arbitraires de x et y.

L'équation (1) étant mise sous une nouvelle forme pour laquelle on a $h = 0$, tout revient maintenant à calculer les invariants de ses coefficients par rapport au groupe (8) ou (8'), lequel donne:

$$(9) \quad \begin{aligned} &\frac{\delta a_0}{\delta t} = a_0\left(2\frac{\partial \eta}{\partial y} - \xi'\right), && \frac{\delta b_0}{\delta t} = b_0\left(2\xi' - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) - b_1\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \\ &\frac{\delta a_1}{\delta t} = -3a_0\frac{\partial \eta}{\partial x} + a_1\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}, && \frac{\delta b_1}{\delta t} = b_1\xi' - 2a_1\frac{\partial \eta}{\partial x} + \xi'' - 2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

---

[1] Lie, Archives norvégiennes, 1883, *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten,* III.

On rencontre une première *équation invariante,* d'ordre zéro:

$$a_0 = 0$$

et tout revient, dans le cas où elle est satisfaite, à étudier la transformation (9) par rapport aux trois fonctions a_1, b_1, b_0. Nous laisserons de côté ce cas particulier pour ne nous attacher qu'au cas général.

En prolongeant la transformation (9) au premier ordre, on fait apparaître les dérivées du 3^{me} ordre de ξ et η, d'où il résulte que, dans un invariant du 1^{er} ordre, les dérivées du premier ordre figurent seulement sous l'une des formes a_{0x}, a_{0y} et:

$$\beta = \frac{1}{3}(b_{1y} + 2a_{1x})$$

pour lesquelles on a:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta a_{0y}}{\delta t} &= a_{0y}\left(3\frac{\partial\eta}{\partial y} - \xi'\right) + 2a_0\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2},\\
\frac{\delta a_{0x}}{\delta t} &= 2a_{0x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + a_{0y}\frac{\partial\eta}{\partial x} + a_0\left(2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} - \xi''\right),\\
\frac{\delta\beta}{\delta t} &= -2a_{0x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \beta\left(\xi' + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right) - 2a_0\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

En combinant ceci avec (9), on est conduit à poser, pour faire disparaître les dérivées du second ordre de ξ et η:

$$a'_{0y} = a_{0y} - 2a_0a_1, \qquad a'_{0x} = a_{0x} + a_0b_1, \qquad \beta' = \beta + 2a_0b_0$$

et on a:

$$(10)\qquad \begin{aligned}
\frac{\delta a'_{0y}}{\delta t} &= a'_{0y}\left(3\frac{\partial\eta}{\partial y} - \xi'\right) + 6a_0^2\frac{\partial\eta}{\partial x},\\
\frac{\delta a'_{0x}}{\delta t} &= 2a'_{0x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + a'_{0y}\frac{\partial\eta}{\partial x},\\
\frac{\delta\beta'}{\delta t} &= -2a'_{0x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \beta'\left(\xi' + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right),
\end{aligned}$$

transformations auxquelles j'ajouterai, pour avoir les paramètres différentiels, les suivantes, où φ est supposé être un invariant:

$$\frac{\delta\varphi_x}{\delta t} = \varphi_x \xi' + \varphi_y \frac{\partial\eta}{\partial x}, \qquad \frac{\delta\varphi_y}{\delta t} = \varphi_y \frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

En rapprochant ceci de la première équation (9), on trouve un *invariant du premier ordre:*

$$B = \frac{a_0}{\left(a'_{0x} - \frac{a'^2_{0y}}{12a_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\beta' + \frac{a'_{0x}\,a'_{0y}}{3a_0^2} - \frac{a'^3_{0y}}{54a_0^4}\right)$$

et deux *paramètres différentiels:*

$$\Delta_x \varphi = \frac{a_0}{a'^2_{0x} - \frac{a'_{0y}}{12a_0^2}} \left(\varphi_x - \frac{a'_{0y}}{6a_0^2}\varphi_y\right), \qquad \Delta_y \varphi = \frac{\varphi_y}{\left(a'_{0x} - \frac{a'^2_{0y}}{12a_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour le second ordre, on rencontre, en prolongeant la transformation (9), les 6 dérivées du 4^me ordre de ξ et η, lesquelles donnent 6 équations distinctes, de sorte que les 9 dérivées du second ordre de a_1, b_1, b_0 figurent dans tout invariant par 3 de leurs combinaisons. Nous prendrons pour ces combinaisons, $\Delta_x B$, $\Delta_y B$, qui sont des invariants et k, qui donne:

$$\frac{\delta k}{\delta t} = k\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} + 2\xi'\right). \tag{11}$$

Quant aux dérivées de a_0, il suffit d'en considérer deux seulement, en vertu de la relation $h = 0$. Nous poserons:

$$a'_{0y^2} = \frac{\partial}{\partial y} a'_{0y} = a_{0y^2} - 2a_0 a_{1y} - 2a_1 a_{0y},$$

$$a'_{0xy} = \frac{\partial}{\partial y} a'_{0x} = a_{0xy} + a_0 b_{1y} + b_1 a_{0y},$$

et on a:

$$\frac{\delta}{\delta t} a'_{0y^2} = a'_{0y^2}\left(4\frac{\partial \eta}{\partial y} - \xi'\right) + 3a'_{0y}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + 12 a_0(a'_{0y} + 2a_0 a_1)\frac{\partial \eta}{\partial x} + 6a_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\delta}{\delta t} a'_{0xy} = 3a'_{0xy}\frac{\partial \eta}{\partial y} + a'_{0y^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + 2a'_{0x}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + a'_{0y}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}.$$

Ceci conduit à poser:

$$a''_{0y^2} = a'_{0y^2} - 3a_1 a'_{0y} + 3a_0^2 b_1,$$

$$a''_{0xy} = a'_{0xy} - 2a_1 a'_{0x} + \frac{1}{2} b_1 a'_{0y},$$

et on a:

$$\frac{\delta}{\delta t} a''_{0y^2} = a''_{0y^2}\left(4\frac{\partial \eta}{\partial y} - \xi'\right) + 21 a_0 a'_{0y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + 3a_0^2 \xi'',$$

$$\frac{\delta}{\delta t} a''_{0xy} = 3a''_{0xy}\frac{\partial \eta}{\partial y} + a''_{0y^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + 6a_0 a'_{0x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} a'_{0y}\xi''.$$

Les termes en ξ'' interviennent ici, de sorte qu'il faut introduire l'expression:

$$a''_{0xy} - \frac{a'_{0y}\, a''_{0y^2}}{6a_0^2}$$

qui donne:

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(a''_{0xy} - \frac{a'_{0y}\, a''_{0y^2}}{6a_0^2}\right) = 3\left(a''_{0xy} - \frac{a'_{0y}\, a''_{0y^2}}{6a_0^2}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} + \left(6a_0 a'_{0x} - \frac{7}{2}\frac{a'^2_{0y}}{a_0}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

et cette formule, combinée avec (9), (10) et (11) conduit à deux nouveaux *invariants du second ordre:*

$$C = \frac{a_0^2}{\left(a'_{0x} - \frac{a'^2_{0y}}{12a_0^2}\right)^{\frac{5}{2}}} k$$

et

$$D = \frac{1}{\left(a'_{0x} - \frac{a'^2_{0y}}{12a_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(a''_{0xy} - \frac{a'_{0y}\, a''_{0y^2}}{6a_0^2} - \frac{a'_{0x}\, a'_{0y}}{a_0} + \frac{a'^3_{0y}}{4a_0^3}\right),$$

de sorte qu'il y a 4 *invariants du second ordre:*

$$\Delta_x B\,,\ \Delta_y B\,,\ C\,,\ D.$$

On voit en outre que la transformation infinitésimale (9), prolongée au second ordre, conduit en considérant les dérivées des premier, second, troisième et 4^{me} ordre de ξ et η à des équations qui sont *indépendantes.* Elles restent, a fortiori, indépendantes, lorsqu'on prolonge ensuite la transformation à l'ordre suivant; les 7 dérivées du 5^{me} ordre de ξ et η donnent en outre, de par la manière dont elles figurent dans la transformation, des équations indépendantes entre elles et des précédentes; et comme il faut ajouter comme nouvelles variables les 12 dérivées du 3^{me} ordre de a_1, b_1, b_0, et les 2 dérivées a_{0y^3}, a_{0xy^2} de a_0, on obtient ainsi 7 invariants du 3^{me} ordre. Plus généralement pour l'ordre n, on a encore pour déterminer les invariants, un système complet d'équations *indépendantes,* lequel comprend $n + 4$ équations de plus que le système d'ordre $n - 1$, et $3(n + 1) + 2 = 3n + 5$ variables de plus; ce qui donne donc, à partir de $n = 3$, $2n + 1$ invariants distincts du $n^{ième}$ ordre.

Or, dans les 4 invariants du second ordre, D, $\Delta_y B$, $\Delta_x B$, C figurent respectivement les expressions $a_{0y^2}, \beta_y, \beta_x$ et k, chacune d'elles entrant dans l'invariant correspondant, sans figurer dans ceux qui le précèdent. La même remarque pourra s'appliquer aux invariants du 3^{me} ordre, qu'on en déduira à l'aide des paramètres différentiels, $\Delta_y D$, $\Delta_x D$, $\Delta_{y^2} B$, $\Delta_{xy} B$, $\Delta_{x^2} B$, $\Delta_y C$, $\Delta_x C$ relativement aux expressions: a_{0y^3}, a_{0xy^2}, $\beta_{y^2}, \beta_{xy}, \beta_{x^2}, k_y, k_x$; et ainsi de suite, de sorte que l'on obtient ainsi pour l'ordre n, en ne considérant que les dérivées a_{0y^n} et $a_{0xy^{n-1}}$ de a_0:

$$2 + n + n - 1 = 2n + 1$$

invariants distincts, c'est-à-dire tous les invariants cherchés.

2. Considérons, par exemple, une équation:

$$y'' = a_0 y'^3 - a_1 y'^2 + b_1 y' - b_0, \tag{12}$$

dont les coefficients seraient fonctions d'une seule variable, x ou y.

Dans ce cas, si l'invariant B n'est pas constant, tous les invariants du second ordre s'expriment en fonction de B:

$$(13) \quad \Delta_y B = f_1(B), \qquad \Delta_x B = f_2(B), \qquad C = f_3(B), \qquad D = f_4(B),$$

et réciproquement, toute équation dont les invariants satisfont à ces relations (13) peut se ramener à la forme (12).

Si B était constant et égal à B_0, sans que C et D, C par exemple, le soient tous les deux, les équations homologues de (12) sont définies par les relations:

$$(14) \quad B = B_0, \qquad D = \varphi_1(C), \qquad \Delta_y C = \varphi_2(C), \qquad \Delta_x C = \varphi_3(C).$$

Si enfin, B, C et D sont tous les trois constants, et égaux à B_0, C_0, D_0 les relations:

$$(15) \qquad B = B_0, \qquad C = C_0, \qquad D = D_0$$

suffisent pour définir les équations homologues de (12).

Réciproquement, je dis qu'une équation (1) dont les invariants satisfont à un système de relations ayant l'une des formes (13), (14), (15), c'est-à-dire, qui a un invariant distinct au plus, est homologue d'une équation de la forme (12) où les coefficients sont fonctions d'une seule variable.

Regardons, en effet, dans le système (13), ou (14), ou (15), a_0, a_1, b_1, b_0 comme fonctions d'une seule variable x, ou y; on obtient ainsi un système de 4 équations différentielles ordinaires au plus par rapport à 4 inconnues; et toute solution de ces équations donne des valeurs de a_0, a_1, b_1, b_0, fonctions d'une seule variable, qui répondent à la question.

Voici, comment, dans le cas général, on pourra ramener une pareille équation à la forme (12). Ayant annulé la quantité h, à l'aide d'une nouvelle variable x_1, prenons comme nouvelle fonction y_1, l'invariant B lui-même:

$$y_1 = B$$

ou encore C ou D, pourvu que l'invariant choisi ne se réduise pas à une fonction de x_1 seulement. Cela revient à mettre l'équation (1) sous une forme réduite:

$$y_1'' = A_0 y_1'^3 - A_1 y_1'^2 + B_1 y_1' - B_0,$$

qui ne se conserve que par les transformations du groupe:

$$\delta x_1 = -\xi(x_1)\delta t.$$

Cette transformation donne:

$$\delta A_0 = -A_0 \xi' \delta t, \qquad \delta B_0 = 2 B_0 \xi' \delta t,$$
$$\delta A_1 = 0, \qquad \delta B_1 = (B_1 \xi' + \xi'')\delta t,$$

puis

$$\delta \frac{\partial A_0}{\partial x_1} = -A_0 \xi'' \delta t, \qquad \delta \frac{\partial A_0}{\partial y_1} = -\frac{\partial A_0}{\partial y_1} \xi' \delta t,$$
$$\delta \frac{\partial B_1}{\partial y_1} = \frac{\partial B_1}{\partial y_1} \xi' \delta t,$$

et admet donc pour invariants, les expressions:

$$A_1 \,, \; B_0 A_0^2 \,, \; \frac{1}{A_0}\frac{\partial A_0}{\partial y_1} \,, \; \frac{\partial A_0}{\partial x_1} + A_0 B_1 \,, \; A_0 \frac{\partial B_1}{\partial y_1}.$$

Ces invariants, calculés avec les variables primitives, x et y, donnent des invariants de l'équation proposée et par suite sont tous des fonctions de B, c'est-à-dire de y_1. On aura donc, en désignant par des Y des fonctions de y_1 seulement, et par des X des fonctions de x_1 seulement:

$$A_1 = Y_1$$

puis:

$$A_0 = Y_0 X_0,$$

$$B_0 = \frac{Y_2}{Y_0^2 X_0^2},$$

$$B_1 = \frac{1}{Y_0 X_0}(Y_3 - Y_0 X_0').$$

Avec les variables x_1 et y_1, l'équation proposée est donc de la forme:

$$y_1'' = Y_0 X_0 y_1'^3 - Y_1 y'^2 + \frac{1}{Y_0 X_0}(Y_3 - Y_0 X_0')y' - \frac{Y_2}{Y_0^2 X_0^2}$$

ou, comme on sait:

$$x_1'' = \frac{Y_2}{Y_0^2 X_0^2} x_1'^3 - \frac{1}{Y_0 X_0}(Y_3 - Y_0 X_0')x_1'^2 + Y_1 x_1' - Y_0 X_0.$$

En prenant comme nouvelle variable x, une fonction x_2 de x_1 seulement, on a:

$$x_2' = \frac{dx_2}{dx_1} x_1'$$

et

$$x_2'' = \frac{dx_2}{dx_1} x_1'' + \frac{d^2 x_2}{dx_1^2} x_1'^2$$

et cette équation devient:

$$x_2'' = \frac{Y_2}{Y_0^2 X_0^2} \frac{dx_2}{dx_1} x_1'^3 - \left[\frac{1}{Y_0 X_0}(Y_3 - Y_0 X_0')\frac{dx_2}{dx_1} - \frac{d^2 x_2}{dx_1^2}\right] x_1'^2$$

$$+ Y_1 \frac{dx_2}{dx_1} x_1' - Y_0 X_0 \frac{dx_2}{dx_1}.$$

Il suffit alors de prendre la fonction x_2 de x_1, telle que l'on ait:

$$\frac{dx_2}{dx_1} X_0 = 1$$

d'où

$$\frac{d^2 x_2}{dx_1^2} X_0 + \frac{dx_2}{dx_1} X_0' = 0,$$

pour que l'équation devienne:

$$x_2'' = \frac{Y_2}{Y_0^2} x_2'^3 - \frac{Y_3}{Y_0} x_2'^2 + Y_1 x_2' - Y_0$$

où les coefficients sont bien fonctions de y_1 seulement.

On voit que la réduction à cette forme se fait à l'aide de deux quadratures successives, la première pour déterminer x_1, en fonction de x et y, la seconde pour déterminer x_2 en fonction de x_1.

L'intégration de l'équation proposée s'achève par l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, de la forme:

$$\frac{du}{dx} = A_0 u^3 - A_1 u^2 + B_1 u - A_0$$

où les coefficients A sont fonctions de x, suivie ensuite d'une nouvelle quadrature.