LA MÉTHODE DE NEUMANN ET LE PROBLÈME DE DIRICHLET

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

Introduction.

§ 1. *Simple et double couche.*

Le problème de DIRICHLET consiste à trouver une fonction V qui à l'intérieur d'un certain domaine reste finie et continue ainsi que ses dérivées, et satisfait de plus à l'équation de LAPLACE

$$\Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

et qui sur la frontière de ce domaine prenne des valeurs données à l'avance.

Si le domaine s'étend à l'infini, cette fonction V devra de plus s'annuler à l'infini.

Dans ce qui suivra je désignerai sous le nom de *fonction harmonique* toute fonction finie et continue ainsi que ses dérivées, satisfaisant à l'équation de LAPLACE et s'annulant à l'infini, de sorte que le problème de DIRICHLET peut s'énoncer ainsi:

Trouver une fonction harmonique dans un certain domaine prenant des valeurs données sur la frontière de ce domaine.

Parmi les méthodes qui donnent la solution de ce problème, nous distinguerons celle de NEUMANN qui est fondée sur les propriétés des doubles couches.

Considérons une surface S que je supposerai fermée. Supposons d'abord une certaine quantité de matière attirante répandue sur cette surface; son potentiel au point x, y, z aura pour expression:

$$W = \int \frac{\mu' d\omega'}{r}$$

où $d\omega'$ est un élément de la surface S ayant pour centre de gravité x', y', z'; où μ' est la densité de la matière attirante de telle sorte que la quantité de matière attirante contenue dans l'élément $d\omega'$ soit égale à $\mu' d\omega'$; enfin r est la distance des points x, y, z et x', y', z'.

C'est ce qu'on appelle le potentiel d'une simple couche.

Ce potentiel W est harmonique dans tout l'espace sauf sur la surface S; quand on franchit S, W est continu, mais ses dérivées ne le sont pas.

Je représenterai par $\frac{dW}{dn}$ la dérivée de W estimée suivant la normale de sorte que

$$\frac{dW}{dn} = \alpha \frac{dW}{dx} + \beta \frac{dW}{dy} + \gamma \frac{dW}{dz},$$

α, β et γ étant les cosinus directeurs de la normale *extérieure* à la surface S.

Je désignerai par V la valeur du potentiel W en un point intérieur à S mais très voisin de S et par V' sa valeur en un point extérieur à S et très voisin de S. La fonction W étant continue, on aura sur S

$$V = V'.$$

De même nous distinguerons la valeur de $\frac{dW}{dn}$ en un point très voisin de x', y', z', et intérieur à S; nous l'appellerons $\frac{dV}{dn}$.

Nous distinguerons d'autre part la valeur de $\frac{dW}{dn}$ en un point très voisin de x', y', z' et extérieur à S; nous l'appellerons $\frac{dV'}{dn}$. On a alors:

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV'}{dn} + 4\pi\mu'.$$

Telles sont les propriétés bien connues du potentiel d'une simple couche.

Soit maintenant:

$$W = \int \mu' d\sigma';$$

$d\sigma'$ est l'angle solide sous lequel l'élément $d\omega'$ est vu du point x, y, z, cet angle solide étant regardé comme positif quand l'élément $d\omega'$ est vu par le côté interne. Quant à μ' c'est une certaine fonction de x', y', z' que l'on appelle la densité de la double couche.

On dit alors que W est le potentiel d'une double couche et cette expression est justifiée parce qu'on peut le regarder comme le potentiel dû à deux couches attirantes infiniment rapprochées l'une de l'autre et telle qu'en deux points correspondants de ces deux couches les densités soient égales et de signe contraire et d'ailleurs très grandes.

Nous conserverons aux notations V, V', $\frac{dV}{dn}$, $\frac{dV'}{dn}$ le même sens que plus haut et nous verrons alors que le potentiel W jouit des propriétés suivantes:

1° W est harmonique dans tout l'espace sauf sur la surface S.

2° On a sur la surface S:

$$V = V' + 4\pi\mu', \qquad \frac{dV}{dn} = \frac{dV'}{dn}.$$

On voit qu'il y a un remarquable contraste entre les propriétés de la simple couche et celles de la double couche, dans un cas c'est W qui est continue, et dans l'autre c'est $\frac{dW}{dn}$.

§ 2. *Méthode de Neumann.*

Soit Φ une fonction donnée en tous les points de la surface S; soit λ un paramètre auquel je me réserve de donner différentes valeurs.

Proposons-nous de trouver une double couche dont le potentiel W satisfasse à la condition suivante:

$$V - V' = \lambda(V + V') + 2\Phi; \tag{1}$$

c'est ce que j'appellerai le *problème de Neumann.*

Si dans l'équation (1) on fait $\lambda = -1$; elle se réduit à

$$V = \Phi.$$

A l'intérieur de la surface S, le potentiel W est une fonction harmonique, et la limite de cette fonction, quand on se rapproche de la surface S est la fonction donnée Φ.

Faisons maintenant $\lambda = 1$, l'équation (1) deviendra:

$$V' = -\Phi.$$

A l'extérieur de S, la fonction W est harmonique et sa limite quand on se rapproche de la surface S est la fonction donnée $-\Phi$.

Le problème de Dirichlet, soit pour un domaine intérieur à S, soit pour un domaine extérieur à S n'est donc qu'un cas particulier du problème de Neumann.

Cela posé, on peut résoudre le problème de Neumann par des séries procédant suivant les puissances croissantes de λ. Soit

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \dots \tag{2}$$

et de même:

$$V = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \dots,$$

$$V' = V'_0 + \lambda V'_1 + \lambda^2 V'_2 + \dots.$$

Soit enfin:

$$V + V' = 2U, \qquad V_i + V'_i = 2U_i.$$

En égalant dans l'équation (1) les coëfficients des puissances semblables de λ il viendra:

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} &V_0 - V'_0 = 2\Phi, \\ &V_1 - V'_1 = V_0 + V'_0 = 2U_0, \\ &V_2 - V'_2 = V_1 + V'_1 = 2U_1, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

cela montre que W_0 est le potentiel d'une double couche dont la densité est $\frac{\Phi}{2\pi}$; que W_1 est le potentiel d'une double couche dont la densité est $\frac{U_0}{2\pi}$; que W_2 est le potentiel d'une double couche dont la densité est $\frac{U_1}{2\pi}$, etc.

On peut donc calculer successivement les différents termes de la série (2). Il reste à savoir si cette série est convergente.

Dans le cas où la surface S est convexe, NEUMANN a démontré cette convergence, ou plutôt il a montré qu'on peut toujours trouver une constante C telle que la série:

$$(W_0 - C) + \lambda(W_1 - C) + \lambda^2(W_2 - C) + \dots \tag{2'}$$

converge pour toutes les valeurs de λ telles que $|\lambda| \leqq 1$.

Soit G_i la plus grande et H_i la plus petite valeur de U_i; il est clair d'abord que:

$$G_i > G_{i+1} > H_{i+1} > H_i. \tag{3}$$

NEUMANN montre de plus que:

$$G_{i+1} - H_{i+1} < \alpha(G_i - H_i),$$

α étant une constante plus petite que 1 qui ne dépend que de la configuration de la surface S.

Il est aisé d'en conclure que l'on peut déterminer la constante C de façon que la série (2') converge.

La méthode de NEUMANN est-elle encore applicable quand la surface S n'est pas convexe?

On pourrait d'abord être tenté de répondre négativement. Les inégalités (3) qui semblent jouer un rôle essentiel ne sont plus vraies en effet quand la surface cesse d'être convexe.

Soit $N + 1$ le maximum du nombre des points d'intersection d'une droite quelconque avec la surface fermée S. Ce nombre N, qui a une certaine importance, est égal à 1 dans le cas d'une surface convexe. Cela posé, nous avons:

$$U_{i+1} = \int \frac{U'_i d\sigma'}{2\pi};$$

U_{i+1} est la valeur de la fonction W_{i+1} en un point x, y, z situé sur la surface S elle-même; (laquelle valeur, d'après une propriété bien connue de la double couche est moyenne arithmétique entre les limites V_{i+1} et V'_{i+1} vers lesquelles tend W_{i+1} quand on se rapproche du point x, y, z, soit par l'intérieur, soit par l'extérieur).

$d\omega'$ est un élément de la surface S ayant pour centre de gravité

x', y', z'; U_i' c'est la valeur de la fonction U_i au point x', y', z'; enfin $d\sigma'$ est l'angle solide sous lequel $d\omega'$ est vu du point x, y, z.

Soit M_i la plus grande valeur de $|U_i|$, c'est à dire la plus grande des deux quantités $|G_i|$ et $|H_i|$; on aura évidemment

$$M_{i+1} < M_i \int \frac{|d\sigma'|}{2\pi} < NM_i$$

d'où:

$$(4) \qquad |G_i| < M_0 N^i; \qquad |H_i| < M_0 N^i; \qquad |U_i| < M_0 N^i;$$

M_0 étant une constante; nous nous servirons des inégalités (4) dans la suite; mais on voit tout de suite qu'elles ne sauraient remplacer les inégalités (3) et on peut être porté à croire que la série (2') ne converge plus.

Contrairement à ces prévisions, *la méthode de Neumann est encore applicable quand même la surface S n'est pas convexe.*

Etablir ce point est le but du présent travail.

CHAPITRE I.

Les intégrales J_m.

§ 1. *Définition des intégrales J_m.*

Considérons l'intégrale:

$$J_{i.k} = \int \left(\frac{dW_i}{dx}\frac{dW_k}{dx} + \frac{dW_i}{dy}\frac{dW_k}{dy} + \frac{dW_i}{dz}\frac{dW_k}{dz} \right) d\tau,$$

étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ du domaine intérieur à S.

Considérons de même l'intégrale:

$$J'_{i.k} = \int \left(\frac{dW_i}{dx}\frac{dW_k}{dx} + \frac{dW_i}{dy}\frac{dW_k}{dy} + \frac{dW_i}{dz}\frac{dW_k}{dz} \right) d\tau,$$

étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ du domaine extérieur à S.

Il résulte de cette définition que

$$J_{i.k} = J_{k.i}, \qquad J'_{i.k} = J'_{k.i}.$$

D'autre part le théorème de GREEN nous apprend que:

$$J_{i.k} = \int V_i \frac{dV_k}{dn} d\omega = \int V_k \frac{dV_i}{dn} d\omega$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface S. De même:

$$J'_{i.k} = -\int V'_i \frac{dV'_k}{dn} d\omega = -\int V'_i \frac{dV_k}{dn} d\omega = -\int V'_k \frac{dV_i}{dn} d\omega.$$

Reprenons l'équation

$$V_m - V'_m = V_{m-1} + V'_{m-1}$$

qui est l'une des équations (A) du paragraphe précédent.

Multiplions la par $\frac{dV_p}{dn} d\omega$ et intégrons; il viendra:

$$(1) \qquad J_{m.p} + J'_{m.p} = J_{m-1.p} - J'_{m-1.p}.$$

On aura de même

$$J_{p+1.m-1} + J'_{p+1.m-1} = J_{p.m-1} - J'_{p.m-1},$$

ou en permutant les indices, ce qui est permis,

$$J_{m-1.p+1} + J'_{m-1.p+1} = J_{m-1.p} - J'_{m-1.p}$$

d'où:

$$(2) \qquad J_{m.p} + J'_{m.p} = J_{m-1.p+1} + J'_{m-1.p+1}.$$

D'autre part:

$$J_{m-1.p+1} + J'_{m-1.p+1} = J_{m-2.p+1} - J'_{m-2.p+1}$$

d'où:

$$J_{m-1.p} - J'_{m-1.p} = J_{m-2.p+1} - J'_{m-2.p+1}$$

ou en changeant m en $(m + 1)$

$$(3) \qquad J_{m.p} - J'_{m.p} = J_{m-1.p+1} - J'_{m-1.p+1}.$$

La comparaison des équations (2) et (3) nous donne:

$$J_{m.p} = J_{m-1.p+1} = J_{m-2.p+2} = \ldots = J_{0.m+p},$$
$$J'_{m.p} = J'_{m-1.p+1} = J'_{m-2.p+2} = \ldots = J'_{0.m+p}.$$

On voit donc que les intégrales J et J' *ne dépendent que de la somme* des deux indices m et p, ce qui nous permet de simplifier la notation en écrivant:

$$J_{m.p} = J_{m+p}$$

avec un seul indice. Avec cette nouvelle notation l'équation (1) devient:

$$J_m + J'_m = J_{m-1} - J'_{m-1}. \tag{4}$$

§ 2. *Propriétés des intégrales* J_m.

D'après la définition de l'intégrale $J_{i.k}$, cette intégrale doit être positive quand les deux indices sont égaux puisque la quantité sous le signe $\int$ devient une somme de carrés. Il en est de même pour l'intégrale $J'_{i.k}$.

On a donc:

$$J_{m.m} > 0, \qquad J'_{m.m} > 0$$

ou (avec la nouvelle notation à un seul indice)

$$J_{2m} > 0, \qquad J'_{2m} > 0.$$

Les intégrales d'indice pair sont donc essentiellement positives; il peut n'en être pas de même des intégrales d'indice impair.

Supposons que dans la série d'équations qui définissent les fonctions W_0, W_1, etc.; on change Φ en $\alpha\Phi + \beta U_{q-1}$, α et β étant deux constantes quelconques; qu'arrivera-t-il?

W_0 se changera en $\alpha W_0 + \beta W_q$; V_0 en $\alpha V_0 + \beta V_q$; V'_0 en $\alpha V'_0 + \beta V'_q$; U_0 en $\alpha U_0 + \beta U_q$; etc. et en général W_i en $\alpha W_i + \beta W_{i+q}$.

L'intégrale

$$J_{i+k} = \int V_i \frac{dV_k}{dn} d\omega$$

se changera en

$$\int (\alpha V_i + \beta V_{i+q})\left(\alpha \frac{dV_k}{dn} + \beta \frac{dV_{k+q}}{dn}\right) d\omega,$$

c'est à dire en:

$$\alpha^2 J_{i+k} + 2\alpha\beta J_{i+k+q} + \beta^2 J_{i+k+2q}.$$

Si l'indice $i + k$ est pair et égal à $2m$, J_{2m} se changera en:

$$\alpha^2 J_{2m} + 2\alpha\beta J_{2m+q} + \beta^2 J_{2m+2q}, \tag{1}$$

de sorte que l'expression (1) devra être positive.

De même J'_{2m} se changera en

$$\alpha^2 J'_{2m} + 2\alpha\beta J'_{2m+q} + \beta^2 J'_{2m+2q} \tag{2}$$

de sorte que l'expression (2) devra aussi être positive. L'expression (1) étant positive quels que soient α et β, sera une forme quadratique définie positive en α et β.

On aura donc:

$$J^2_{2m+q} < J_{2m} J_{2m+2q}. \tag{3}$$

De même l'expression (2) étant toujours positive, ainsi que la somme de (1) et de (2) on aura:

$$J'^2_{2m+q} < J'_{2m} J'_{2m+2q},$$

$$(J_{2m+q} + J'_{2m+q})^2 < (J_{2m} + J'_{2m})(J_{2m+2q} + J'_{2m+2q}).$$

En faisant $q = 2$ et remarquant que les J d'indice pair sont positifs, on trouve:

$$\frac{J_{2m+2}}{J_{2m}} < \frac{J_{2m+4}}{J_{2m+2}}; \qquad \frac{J'_{2m+2}}{J'_{2m}} < \frac{J'_{2m+4}}{J'_{2m+2}}. \tag{4}$$

En faisant $q = 1$, on trouve:

$$\frac{|J_{2m+1}|}{J_{2m}} < \frac{J_{2m+2}}{|J_{2m+1}|}; \qquad \frac{|J'_{2m+1}|}{J'_{2m}} < \frac{J'_{2m+2}}{|J'_{2m+1}|}. \tag{5}$$

Pour aller plus loin, partons de l'inégalité:

$$\alpha^2 J_{2m} + 2\alpha\beta J_{2m+1} + \beta^2 J_{2m+2} > 0.$$

Les deux équations

$$J_{2m+2} + J'_{2m+2} = J_{2m+1} - J'_{2m+1},$$
$$J_{2m} - J'_{2m} = J_{2m+1} + J'_{2m+1}$$

nous donnent:

$$2J_{2m+1} = (J_{2m} + J_{2m+2}) - (J'_{2m} - J'_{2m+2}).$$

L'inégalité

$$4J^2_{2m+1} - 4J_{2m}J_{2m+2} < 0$$

devient alors:

$$(J_{2m} + J_{2m+2})^2 + (J'_{2m} - J'_{2m+2})^2 - 4J_{2m}J_{2m+2}$$
$$- 2(J_{2m} + J_{2m+2})(J'_{2m} - J'_{2m+2}) < 0.$$

Or:

$$(J_{2m} + J_{2m+2})^2 - 4J_{2m}J_{2m+2} = (J_{2m} - J_{2m+2})^2 > 0,$$
$$(J'_{2m} - J'_{2m+2})^2 > 0$$

on a donc à fortiori:

$$2(J_{2m} + J_{2m+2})(J'_{2m} - J'_{2m+2}) > 0,$$

et puisque

$$J_{2m} > 0, \qquad J_{2m+2} > 0$$

on en conclut:

(6) $$J'_{2m} > J'_{2m+2}.$$

De même on a:

$$4J'^2_{2m+1} - 4J'_{2m}J'_{2m+2} < 0,$$
$$2J'_{2m+1} = -(J'_{2m} + J'_{2m+2}) + (J_{2m} - J_{2m+2})$$

d'où:

$$(J'_{2m} + J'_{2m+2})^2 + (J_{2m} - J_{2m+2})^2 - 4J'_{2m}J'_{2m+2}$$
$$- 2(J'_{2m} + J'_{2m+2})(J_{2m} - J_{2m+2}) < 0,$$

d'où à fortiori

$$2(J'_{2m} + J'_{2m+2})(J_{2m} - J_{2m+2}) > 0,$$

d'où enfin:

$$J_{2m} > J_{2m+2}. \tag{6'}$$

Nous pouvons donc résumer ces premiers résultats dans les formules suivantes:

$$\begin{gathered}
\frac{J_2}{J_0} < \frac{J_4}{J_2} < \frac{J_6}{J_4} < \ldots < 1, \\
\frac{J'_2}{J'_0} < \frac{J'_4}{J'_2} < \frac{J'_6}{J'_4} < \ldots < 1, \\
\frac{J_2 + J'_2}{J_0 + J'_0} < \frac{J_4 + J'_4}{J_2 + J'_2} < \ldots < 1.
\end{gathered} \tag{7}$$

D'autre part la comparaison des formules (5), (6) et (6') nous donne:

$$|J_{2m+1}| < J_{2m}, \qquad |J'_{2m+1}| < J'_{2m}. \tag{8}$$

CHAPITRE II.

Etude du rapport $\frac{J}{J'}$.

§ 1. *Enoncé du problème.*

Soit W le potentiel d'une simple ou d'une double couche répandue sur la-surface S; considérons les deux intégrales:

$$J = \int \left(\frac{dW^2}{dx^2} + \frac{dW^2}{dy^2} + \frac{dW^2}{dz^2} \right) d\tau$$

étendue à l'intérieur de S; et

$$J' = \int \left(\frac{dW^2}{dx^2} + \frac{dW^2}{dy^2} + \frac{dW^2}{dz^2} \right) d\tau$$

étendue à l'extérieur de S.

L'intégrale J' ne peut s'annuler que si W est constant à l'extérieur de S; et comme W est nul à l'infini, cela ne peut arriver que si W est identiquement nul à l'extérieur de S. Dans le cas de la simple couche, il faut pour cela que W soit identiquement nul; car on a alors:

$$V = V' = 0$$

et par conséquent $W = 0$ à l'intérieur de S. Dans le cas de la double couche, il faut pour cela que la densité de la double couche soit constante, et W constant à l'intérieur de S. Dans l'un et l'autre cas on aura:

$$J = 0.$$

Ainsi J' ne peut s'annuler sans que J s'annule.

D'autre part l'intégrale J ne peut s'annuler que si W est constant à l'intérieur de S. Cela arrive dans le cas de la double couche si la densité de cette double couche est constante ce qui entraine pour conséquences:

$$W = 0 \text{ à l'extérieur de } S$$

et

$$J' = 0.$$

Cela arrive d'autre part, dans le cas de la simple couche, si la densité de cette simple couche est proportionnelle à celle que prendrait une charge électrique en équilibre sur la surface S regardée comme conductrice. On aura alors en général

$$J' > 0.$$

En résumé le rapport $\frac{J}{J'}$ est essentiellement positif; dans le cas de la double couche, il ne peut ni s'annuler, ni devenir infini; dans le cas de la simple couche, il peut s'annuler, mais il ne peut pas devenir infini.

Soient maintenant

$$W_1, W_2, \ldots, W_p$$

p potentiels qui seront tous dus, soit à une simple couche, soit à une double couche répandue sur la surface S.

Soit maintenant

$$W = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \ldots + \alpha_p W_p, \tag{1}$$

les α étant des constantes arbitraires.

J et J' seront alors des polynômes entiers et homogènes du second degré par rapport aux indéterminées α, de telle façon que le rapport $\frac{J}{J'}$ sera une fonction homogène de degré o de ces indéterminées α.

J et J' sont des formes quadratiques par rapport aux α et ces formes sont définies positives. Quand donc on fera varier les α sans changer $W_1, W_2, \ldots, W_p$, le rapport $\frac{J}{J'}$ aura un maximum R_1 et un minimum R_2.

Je suppose bien entendu qu'il n'y a entre les W_i aucune relation linéaire à coëfficients constants.

Alors même dans le cas de la simple couche, le maximum R_1 ne peut s'annuler. En effet pour que R_1 fût nul, il faudrait que J restât nul quels que soient les α, c'est à dire que $W_1, W_2, \ldots, W_p$ demeurassent constants à l'intérieur de S. Mais alors le rapport $\frac{W_2}{W_1}$ se réduisait à une constante tant à l'extérieur qu'à l'intérieur de S et cela est impossible puisqu'il ne doit y avoir entre les W_i aucune relation linéaire.

Cela posé, le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant:

Trouver dans le cas de la double couche une limite supérieure et une limite inférieure du rapport $\frac{J}{J'}$.

Trouver dans le cas de la simple couche une limite supérieure de ce rapport.

Trouver dans les deux cas une limite supérieure de R_2 et une limite inférieure de R_1.

Est-il possible de trouver ces limites, les limites supérieures étant bien entendu finies, et les limites inférieures positives et différentes de o?

Les aperçus qui précèdent peuvent rendre la chose vraisemblable, mais non l'établir rigoureusement. La démonstration rigoureuse sera l'objet du présent chapitre.

§ 2. *Comparaison des cas de la simple et de la double couche.*

Soient W_1 et W_2 deux potentiels dûs le premier à une simple couche, le second à une double couche.

Je désignerai par V_1, V_1', J_1, J_1' et par V_2, V_2', J_2, J_2' les valeurs de V, V', J, J' correspondant respectivement à W_1 et à W_2. On aura donc:

$$J_1 = \int V_1 \frac{dV_1}{dn} d\omega, \qquad J_1' = -\int V_1' \frac{dV_1'}{dn} d\omega,$$

$$J_2 = \int V_2 \frac{dV_2}{dn} d\omega, \qquad J_1' = -\int V_2' \frac{dV_2'}{dn} d\omega,$$

$$V_1 = V_1', \qquad \frac{dV_2}{dn} = \frac{dV_2'}{dn}.$$

Je désignerai par K l'intégrale

$$\int \left(\frac{dW_1}{dx} \frac{dW_2}{dx} + \frac{dW_1}{dy} \frac{dW_2}{dy} + \frac{dW_1}{dz} \frac{dW_2}{dz} \right) d\tau$$

étendue à l'intérieur de S et par K' la même intégrale étendue à l'extérieur de S.

On aura donc:

$$K = \int V_1 \frac{dV_2}{dn} d\omega = \int V_2 \frac{dV_1}{dn} d\omega,$$

$$K' = -\int V_1' \frac{dV_2'}{dn} d\omega = -\int V_2' \frac{dV_1'}{dn} d\omega$$

et si l'on observe que $V_1' = V_1$, $\frac{dV_2'}{dn} = \frac{dV_2}{dn}$, on en conclura que [1]

$$K = -K'.$$

On connaît l'inégalité de Lagrange:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 < (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2).$$

[1] Il peut arriver que l'on sache que la fonction W_1 est harmonique à l'intérieur et à l'extérieur de S et tend uniformément vers une même limite $V_1 = V_1'$ quand on se rapproche de S; mais qu'on ne sache pas si $\frac{dV_1}{dn}$. $\frac{dV_1'}{dn}$ ont des valeurs finies et déterminées. On ne peut alors affirmer que W_1 soit effectivement le potentiel d'une simple couche. Le théorème n'en est pas moins applicable.

On en déduit l'inégalité de SCHWARZ

$$\left[\int \varphi\phi d\tau\right]^2 < \int \varphi^2 d\tau \int \phi^2 d\tau.$$

On pourrait en déduire également:

$$\left[\int \sum \frac{dW_1}{dx}\frac{dW_2}{dx} d\tau\right]^2 < \int \sum \left(\frac{dW_1}{dx}\right)^2 d\tau \int \sum \left(\frac{dW_2}{dx}\right)^2 d\tau.$$

En étendant les intégrations à l'intérieur de S cela peut s'écrire:

(1) $$K^2 < J_1 J_2,$$

et en les étendant à l'extérieur de S

(2) $$K'^2 < J_1' J_2'.$$

Si nous supposons que l'on a $V_2 = V_1$, on aura $W_1 = W_2$ à l'intérieur de S et par conséquent:

$$J_1 = J_2 = K$$

d'où:

$$K'^2 = K^2 = J_1^2 = J_2^2 = J_1 J_2.$$

L'inégalité (2) devient alors:

(2') $$\frac{J_1}{J_1'} < \frac{J_2'}{J_2}.$$

Si nous supposons que l'on a $V_2' = V_1'$, on aura $W_1 = W_2$ à l'extérieur de S et par conséquent

$$J_1' = J_2' = K'$$

d'où:

$$K^2 = K'^2 = J_1'^2 = J_2'^2 = J_1' J_2'.$$

L'inégalité (1) devient alors

(1') $$\frac{J_1'}{J_1} < \frac{J_2}{J_2'}.$$

Etant donnée une double couche quelconque dont le potentiel est égal à W_2, on peut toujours trouver une simple couche dont le potentiel W_1 soit égal à W_2 à l'intérieur de S (ou bien à l'extérieur de S).

Etant donnée une simple couche dont le potentiel est W_1, on peut trouver une double couche dont le potentiel W_2 soit égal à W_1 à l'intérieur de S.

On ne peut pas en général trouver une double couche dont le potentiel W_2 soit égal à W_1 à l'extérieur de S; mais on peut en trouver une telle que l'on ait en tout point infiniment voisin de S mais extérieur à S:

$$W_2 = W_1 + \text{const.}$$

c'est à dire

$$V_2' = V_1' + \text{const.}$$

Après avoir énoncé ces propositions voyons dans quelle mesure elles peuvent être regardées comme démontrées.

La première peut être rigoureusement démontrée. La méthode de Schwarz, la méthode du balayage, et en général les méthodes autres que celle de Neumann, permettent de démontrer le principe de Dirichlet pour une surface quelconque, convexe ou non convexe.

Il existera donc une fonction W_3, harmonique à l'extérieur de S et se réduisant à V_2 sur la surface S (ce qui s'écrit $V_3' = V_2$).

Définissons alors W_1 de la manière suivante:

$$W_1 = W_2 \text{ à l'intérieur de } S,$$

$$W_1 = W_3 \text{ à l'extérieur de } S.$$

On aura alors

$$V_1 = V_2; \qquad V_1' = V_3' = V_2; \quad \text{d'où} \quad V_1 = V_1'.$$

W_1 est donc bien le potentiel d'une simple couche et se réduit à W_2 à l'intérieur de S.

On démontrerait de même qu'on peut trouver une simple couche telle que $W_1 = W_2$ à l'extérieur de S.

Passons au second problème, où l'on se donne W_1 et où on se propose de déterminer la double couche qui engendre W_2 de telle façon que $W_2 = W_1$ à l'intérieur de S ou que $V_2' = V_1' +$ const.

Les deux propositions relatives à ce problème ne peuvent être regardées comme démontrées que dans le cas où la méthode de Neumann et applicable, c'est à dire, jusqu'à nouvel ordre, pour les surfaces convexes seulement.

Soient M_1 et m_1 la limite supérieure et la limite inférieure du rapport $\frac{J_1}{J'_1}$; soient M'_1 et m'_1 la limite supérieure et la limite inférieure du rapport $\frac{J_2}{J'_2}$.

Supposons maintenant que nous considérions p simples couches ayant respectivement pour potentiels

$$W_1^1, W_2^1, \ldots, W_p^1$$

et soit, comme dans le paragraphe précédent

$$W_1 = \alpha_1 W_1^1 + \alpha_2 W_2^1 + \ldots + \alpha_p W_p^1,$$

les α étant des constantes indéterminées.

Le rapport $\frac{J_1}{J'_1}$ quand nous ferons varier les α sans toucher aux W_i^1, aura un maximum R_1 et un minimum R_2. (J'observe en passant que R_1 et R_2 ne changeront pas quand on remplacera les W_i^1 par p combinaisons linéaires quelconques des W_i^1.)

Nous pouvons maintenant faire varier la densité des p simples couches qui engendrent les potentiels W_i^1; on voit alors que R_1 aura une limite inférieure m_p et R_2 une limite supérieure M_p.

Considérons de même p doubles couches ayant pour potentiels

$$W_1^2, W_2^2, \ldots, W_p^2$$

et soit:

$$W_2 = \alpha_1 W_1^2 + \alpha_2 W_2^2 + \ldots + \alpha_p W_p^2.$$

Le rapport $\frac{J_2}{J'_2}$ quand on fera varier les α aura un maximum R'_1 et un minimum R'_2. Si on fait ensuite varier la densité des p doubles couches, R'_1 aura une limite inférieure m'_p et R'_2 une limite supérieure M'_p.

Les nombres m_p, M_p, m'_p, M'_p dépendent évidemment du nombre p, et il est clair qu'ils ne dépendent que de ce nombre p et de la surface S.

On aura d'ailleurs:

$$m_1 = 0, \qquad m_1 < m_2 < m_3 < \ldots,$$
$$M_1 > M_2 > M_3 > \ldots.$$

On voit aisément que $m_1 = 0$. Dans le cas de $p = 1$, on a en effet simplement

$$W_1 = \alpha_1 W_1^1.$$

Pour que $R_1 = R_2$ atteigne sa limite inférieure, il suffit de donner à la simple couche qui engendre W_1^1 une densité proportionnelle à celle que prendrait l'électricité en équilibre sur la surface S supposée conductrice.

On aurait alors $W_1^1 = \text{const.}$ à l'intérieur de S et par conséquent

$$J_1 = 0, \qquad J_1' > 0$$

et enfin

$$\frac{J_1}{J_1'} = R_1 = R_2 = 0$$

d'où

$$m_1 = 0.$$

On trouverait des inégalités analogues dans le cas de la double couche, à savoir:

$$m_1' < m_2' < m_3' < \ldots,$$

$$M_1' > M_2' > M_3' > \ldots.$$

Mais avant d'aller plus loin une remarque est nécessaire au sujet de la définition des nombres m_p' et M_p'. Supposons que W_2 soit un potentiel engendré par une double couche de densité constante; W_2 sera constant à l'intérieur de S et nul à l'extérieur de S. On aura donc

$$J_2 = J_2' = 0$$

de sorte que le rapport $\frac{J_2}{J_2'}$ se présente dans ce cas sous une forme indéterminée. Soit maintenant de nouveau:

$$W_2 = \alpha_1 W_1^2 + \alpha_2 W_2^2 + \ldots + \alpha_p W_p^2$$

et supposons que W_1^2 soit engendré par une double couche de densité constante. On aura alors tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de S

$$\frac{dW_1^2}{dx} = \frac{dW_1^2}{dy} = \frac{dW_1^2}{dz} = 0,$$

ce qui prouve que ni les dérivées de W_2 par rapport à x, y, z, ni par conséquent J_2 et J'_2 ne peuvent dépendre de α_1.

Il résulte de là que les valeurs de R'_1 et de R'_2 correspondant aux p potentiels

$$W_1^2, W_2^2, \ldots, W_p^2$$

ne diffèrent pas des valeurs de R'_1 et de R'_2 correspondant aux $p-1$ potentiels

$$W_2^2, W_3^2, \ldots, W_p^2.$$

Soit encore

$$W_2 = \alpha_1 W_1^2 + \alpha_2 W_2^2 + \ldots + \alpha_p W_p^2$$

mais ne supposons plus que W_1^2 soit engendré par une double couche de densité constante. Désignons d'autre part par W_0^2 un potentiel engendré par une double couche de densité constante.

Choisissons

$$W_1^2, W_2^2, \ldots, W_p^2$$

de telle façon que R'_1 atteigne sa limite inférieure m'_p; je dis qu'on peut toujours supposer

$$W_1^2 = W_0^2.$$

En effet s'il n'en était pas ainsi, nous pourrions observer que le R'_1 relatif aux p potentiels

$$W_1^2, W_2^2, \ldots, W_p^2$$

ne peut être plus petit que le R'_1 relatif aux $p-1$ potentiels

$$W_2^2, \ldots, W_p^2$$

lequel est égal au R'_1 relatif aux p potentiels

$$W_0^2, W_2^2, \ldots, W_p^2.$$

En remplaçant W_1^2 par W_0^2 on n'a donc pu augmenter R'_1 qui est resté égal à sa limite inférieure m'_p.

De même si nous choisissons les W_i^2 de telle façon que R'_2 atteigne sa limite supérieure M'_p, nous pourrons toujours supposer que ce choix a été fait de telle façon que

$$W_1^2 = W_0^2,$$

car on pourrait toujours remplacer W_1^2 par W_0^2 sans que R_2' cesse d'être égal à sa limite supérieure.

Ce raisonnement suppose, il est vrai, qu'il n'y a pas de relation linéaire entre

$$W_0^2, W_2^2, \ldots, W_p^2,$$

mais s'il y en avait une, on remplacerait W_2^2 par W_1^2 par exemple et il ne saurait alors y avoir de relation linéaire entre

$$W_0^2, W_1^2, W_3^2, W_4^2, \ldots, W_p^2$$

puisqu'il n'y en a pas par hypothèse entre

$$W_1^2, W_2^2, \ldots, W_p^2.$$

Il résulte encore de là que

$$m_2' < \frac{J_2}{J_2'} < M_2'.$$

Prenons d'abord p simples couches ayant pour potentiels

$$(3) \qquad W_1^1, W_2^1, \ldots, W_p^1$$

et p doubles couches ayant pour potentiels

$$(4) \qquad W_1^2, W_2^2, \ldots, W_p^2$$

et soit

$$W_1 = \alpha_1 W_1^1 + \ldots + \alpha_p W_p^1,$$

$$W_2 = \alpha_1 W_1^2 + \ldots + \alpha_p W_p^2.$$

Formons les rapports $\frac{J_1}{J_1'}, \frac{J_2}{J_2'}$, leurs maxima R_1 et R_1' et leurs minima R_2 et R_2'.

Cela posé, choisissons d'abord les W_i^2 de telle façon que R_2' atteigne sa limite supérieure M_p'; nous pourrons alors supposer

$$W_1^2 = W_0^2,$$

ce qui montre qu'on aura

$$W_1^2 = \text{const.}$$

à l'intérieur de S. Nous pourrons ensuite trouver p simples couches dont les potentiels W_i^1 satisfassent *à l'intérieur de* S à la condition

$$W_i^1 = W_i^2.$$

Cela nous montre en passant que la simple couche qui engendre W_1^1 a sa densité proportionnelle à celle de l'électricité en équilibre.

Il viendra alors:

$$\frac{J_1}{J_1'} < \frac{J_2'}{J_2}$$

d'où:

$$R_1 < \frac{1}{R_2'};$$

or

$$R_2' = M_p', \qquad m_p < R_1$$

d'où:

(6) $$m_p \leqq \frac{1}{M_p'}.$$

Choisissons maintenant les W_i^1 de telle façon que R_2 atteigne sa limite supérieure M_p. On pourra *au moins si S est convexe* trouver p doubles couches telles qu'à l'intérieur de S on ait

$$W_i^2 = W_i^1.$$

On aura encore:

$$\frac{J_1}{J_1'} < \frac{J_2'}{J_2}$$

d'où:

$$R_2 < \frac{1}{R_1'}.$$

Or

$$R_1 = M_p; \qquad R_1' > m_p'$$

d'où:

(7) $$M_p < \frac{1}{m_p}.$$

Choisissons maintenant les W_i^2 de telle façon que R_1' atteigne sa limite

m'_p; nous pourrons trouver p simples couches telles que l'on ait *à l'extérieur de S*

$$W_i^1 = W_i^2.$$

On aura alors:

$$\frac{J_1}{J'_1} > \frac{J'_2}{J_2}$$

d'où:

$$R_2 > \frac{1}{R'_1};$$

or

$$R'_1 = m'_p, \quad R_2 < M_p$$

d'où:

$$m'_p \geqq \frac{1}{M_p}. \tag{8}$$

Si la surface S est convexe les relations (6), (7), (8), sont vraies à la fois et on en conclut:

$$M_p = \frac{1}{m'_p}.$$

Si la surface S n'est pas convexe les relations (6) et (8) sont encore vraies, mais les relations (7) ne peuvent être regardées comme démontrées; on a alors

$$M'_p \leqq \frac{1}{m_p},$$

$$m'_p \geqq \frac{1}{M_p}.$$

§ 3. *Cas de la sphère.*

On peut très facilement calculer toutes ces quantités quand la surface S est une sphère. Nous supposerons pour simplifier l'écriture que le rayon de cette sphère a été pris pour l'unité de longueur, le centre de la sphère pour origine et nous poserons:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Un polynôme sphérique d'ordre n

$$\Pi_p = X_p r^n$$

est un polynôme homogène d'ordre n en x, y, z, qui satisfait à l'équation de LAPLACE et X_p qui est une fonction homogène d'ordre 0 en x, y, z, s'appellera une fonction sphérique d'ordre n.

Parmi les fonctions sphériques d'ordre n j'en choisirai $2n + 1$ que j'appellerai fondamentales et que je désignerai par

$$X_p, \qquad [p = n^2 + 1, n^2 + 2, \ldots, (n + 1)^2].$$

Toutes les autres fonctions sphériques d'ordre n en seront des combinaisons linéaires.

Je choisirai les fonctions fondamentales de telle façon que

$$\int X_p^2 d\omega = 1, \qquad \int X_p X_q d\omega = 0 \qquad (p \gtrless q).$$

Les intégrales sont étendues à la surface de la sphère.

Cela posé, considérons une simple couche et choisissons-la de telle sorte qu'à l'intérieur de S on ait:

$$W_1 = \Sigma \beta_p X_p r^n \quad (n \text{ étant l'ordre de } X_p).$$

On aura alors à l'extérieur de S

$$W_1 = \Sigma \beta_p X_p r^{-(n+1)}$$

et par conséquent:

$$V_1 = V_1' = \Sigma \beta_p X_p, \qquad \frac{dV_1}{dn} = \Sigma n \beta_p X_p, \qquad \frac{dV_1'}{dn} = -\Sigma(n + 1)\beta_p X_p.$$

On en déduit:

$$J_1 = \Sigma n \beta_p^2; \qquad J_1' = \Sigma(n + 1)\beta_p^2.$$

Cela nous montre d'abord que J_1 est toujours plus petit que J_1'; et on voit tout de suite que:

$$m_1 = 0, \qquad m_2 = m_3 = m_4 = \frac{1}{2}, \qquad m_5 = m_6 = \ldots = m_9 = \frac{2}{3} \text{ etc.}$$

et en général:

$$m_p = \frac{n}{n + 1} \quad [\text{où } n^2 < p \leqq (n + 1)^2].$$

D'autre part on a:

$$M_p = 1.$$

Pour nous en rendre compte supposons que les β_p soient des fonctions linéaires de q constantes arbitraires

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q,$$

J_1 et J_1' seront des polynômes du second degré par rapport aux α. Le rapport $\frac{J_1}{J_1'}$ considéré comme fonction des α aura un maximum R_1 et un minimum R_2.

Il est clair que R_1 atteindra sa limite inférieure m_q quand on fera

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \beta_q = \alpha_q, \quad \beta_p = 0 \quad (p > q).$$

Quant à R_2, il peut approcher autant qu'on veut de 1. Soit en effet pour un entier k quelconque

$$\beta_p = 0 \quad (p \leqq k); \qquad \beta_p = 0 \quad (p > k + q),$$

$$\beta_{k+h} = \alpha_h. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,q)}$$

Le minimum R_2 est égal à

$$\frac{n}{n+1} \qquad [n^2 < k + 1 \leqq (n+1)^2];$$

on peut donc prendre k assez grand pour que ce minimum soit aussi voisin que l'on veut de 1.

Considérons maintenant une double couche telle qu'à l'intérieur de S on ait:

$$W_2 = \Sigma \beta_p X_p r^n.$$

On aura:

$$V_2 = \Sigma \beta_p X_p, \qquad \frac{dV_2}{dn} = \frac{dV_2'}{dn} = \Sigma n \beta_p X_p$$

d'où: à l'extérieur de S

$$W_2 = -\sum \frac{n}{n+1} \beta_p X_p r^{-(n+1)}$$

et

$$V_2' = -\sum \frac{n}{n+1} \beta_p X_p.$$

On en déduit:

$$J_2 = \Sigma n \beta_p^2, \qquad J_2' = \sum \frac{n^2}{n+1} \beta_p^2.$$

On en déduit:

$$M_p' = \frac{1}{m_p} = \frac{n+1}{n} \quad [\text{où } n^2 < p \leqq (n+1)^2],$$

$$m_p' = 1.$$

Ceci entraîne les inégalités suivantes les plus importantes à notre point de vue:

$$2 > \frac{J_2}{J_2'} > 1.$$

§ 4. *Surfaces simplement connexes.*

Nous allons maintenant examiner le cas où la surface S est une surface simplement connexe quelconque sans point singulier.

On peut alors trouver une transformation qui jouisse des propriétés suivantes:

Soit M le point donné de coordonnées x, y, z; soit M' son transformé de coordonnées x', y', z'.

1°. A tout point M de l'espace correspondra un point M' et un seul, et inversement.

2°. Les coordonnées x', y', z' de M' seront des fonctions continues de x, y, z; ces fonctions auront des dérivées des deux premiers ordres et ces dérivées seront finies et continues.

3°. Inversement x, y, z seront des fonctions continues de x', y', z' et les dérivées des deux premiers ordres de ces fonctions seront également finies et continues.

4°. Quand le point M décrira la surface S, le point M' décrira la sphère S' qui a pour équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

5°. Lorsque x, y, z sont très grands, $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ sont des fonctions continues de $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$; ces fonctions ont des dérivées des deux premiers ordres, qui restent finies et continues, même quand une ou plusieurs des trois quantités $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ s'annule. Enfin quand $x^2 + y^2 + z^2$ croît indéfiniment, $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ ainsi que les dérivées des deux premiers ordres de x', y', z' par rapport à x, y, z tendent *uniformément* vers 0, excepté $\frac{dx'}{dx}$, $\frac{dy'}{dy}$, $\frac{dz'}{dz}$ qui tendent uniformément vers 1.

En d'autres termes, si $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est un infiniment grand du 1^er ordre, x', y', z' seront égaux à x, y, z aux infiniment petits près du 2^d ordre.

Il est clair qu'on pourra toujours satisfaire à ces différentes conditions et cela d'une infinité de manières; le choix de la transformation comportera encore un très large degré d'arbitraire.

Soit maintenant p simples couches répandues à la surface de S et ayant respectivement pour potentiels:

$$W_1^1, \dots, W_p^1.$$

Soit

$$W_1 = \alpha_0 W_0^1 + \alpha_1 W_1^1 + \dots + \alpha_p W_p^1$$

et formons le rapport $\frac{J_1}{J_1'}$.

Nous aurons

$$J_1 = \int \sum \left(\frac{dW_1}{dx}\right)^2 dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale étant étendue à l'intérieur de S et J_1' étant égal à la même intégrale étendue à l'extérieur de S.

Mais les intégrales J_1 (et J_1') qui sont ici exprimées en fonctions de x, y et z, peuvent également s'exprimer en fonctions de x', y' et z'.

Les dérivées $\frac{dW_1}{dx}, \frac{dW_1}{dy}, \frac{dW_1}{dz}$ sont en effet des fonctions linéaires des dérivées $\frac{dW_1}{dx'}, \frac{dW_1}{dy'}, \frac{dW_1}{dz'}$ dont les coëfficients sont des fonctions données de x', y', z', puisque nous connaissons x, y, z en fonctions de x', y', z'. De même le jacobien de x, y, z par rapport à x', y', z' sera une fonction connue de x', y', z'.

Nous pouvons donc écrire:

$$J_1 = \int \Phi \, dx' dy' dz',$$

Φ étant un polynôme homogène du 2^d degré par rapport à

$$\frac{dW_1}{dx'}, \frac{dW_1}{dy'}, \frac{dW_1}{dz'}$$

dont les coëfficients sont des fonctions données de x', y', z'.

L'intégrale J_1 doit être étendue à l'intérieur de la sphère S'. Quant à J'_1 ce serait la même intégrale étendue à l'extérieur de S'.

Le polynôme du 2^d degré Φ est évidemment une forme quadratique définie positive dont les coëfficients sont des fonctions continues de x', y' et z'.

Quand x, y, z (ou ce qui revient au même x', y', z') croissent indéfiniment, les coëfficients de cette forme Φ tendent vers des limites finies et déterminées: les coëfficients des termes rectangles tendent uniformément vers 0 et ceux des termes carrés tendent uniformément vers 1. Cela tient à ce que les dérivées des x par rapport aux x' tendent vers 0 et vers 1.

Si nous regardons pour un instant x', y', z' comme des paramètres et $\frac{dW_1}{dx'}, \frac{dW_1}{dy'}, \frac{dW_1}{dz'}$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace, l'équation

$$\Phi = 1$$

représente un ellipsoide. Les axes de cet ellipsoide sont des fonctions continues de x', y', z'; pour aucune valeur finie de x', y', z' il ne peut arriver que l'un des axes s'annule ou devienne infini; quand x', y', z' croissent indéfiniment, les trois axes tendent uniformément vers 1.

Il résulte de là que l'on peut assigner une limite supérieure et une limite inférieure (indépendantes de x', y', z') à ces trois axes, et par conséquent que l'on peut trouver deux nombres μ et μ', tels que l'on ait pour pour toutes les valeurs de x', y', z', et quels que soient $\frac{dW_1}{dx'}, \frac{dW_1}{dy'}, \frac{dW_1}{dz'}$:

$$(1) \qquad \mu' \sum \left(\frac{dW_1}{dx'}\right)^2 > \Phi > \mu \sum \left(\frac{dW_1}{dx'}\right)^2.$$

Soit maintenant W_3 le potentiel d'une simple couche répandue à la surface de la sphère S'.

Ce potentiel W_3 est une fonction de x', y', z', qui tant à l'extérieur qu'à l'intérieur de S' satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 W_3}{dx'^2} + \frac{d^2 W_3}{dy'^2} + \frac{d^2 W_3}{dz'^2} = 0.$$

On peut évidemment choisir la densité de cette simple couche de telle façon qu'à la surface de S' on ait

$$W_3 = W_1$$

et en effet on sait résoudre le problème de Dirichlet en ce qui concerne la sphère.

Formons l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{dW_3}{dx'}\right)^2 dx'\,dy'\,dz'.$$

Cette intégrale étendue à l'intérieur de S' s'appellera J_3; étendue à l'extérieur de S', elle s'appellera J_3'.

Considérons également l'intégrale

$$(2) \qquad \int \sum \left(\frac{dW_3}{dx}\right)^2 dx\,dy\,dz$$

qu'on calculerait en supposant que W_3 est exprimée en fonction de x, y, z, au lieu de l'être en fonction de x', y', z'. Cette intégrale est égale à

$$(3) \qquad \int \Phi_3\, dx'\,dy'\,dz'$$

où Φ_3 n'est autre chose que Φ où je suppose que W_1 ait été remplacé par W_3.

L'intégrale (2) étendue à l'intérieur de S (ou ce qui revient au même l'intégrale (3) étendue à l'intérieur de S') s'appellera K_3; étendue à l'extérieur de S, elle s'appellera K_3'.

De même j'appellerai K_1 et K_1' l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{dW_1}{dx'}\right)^2 dx'\,dy'\,dz'$$

étendue soit à l'intérieur de S', soit à l'extérieur de S'.

Comme on a

$$\Delta W_1 = \sum \frac{d^2 W_1}{dx^2} = 0$$

et qu'on n'a pas:

$$\sum \frac{d^2 W_3}{dx^2} = 0$$

comme $W_1 = W_3$ à la surface de S on aura

$$\int \sum \left(\frac{dW_1}{dx}\right)^2 dx\,dy\,dz < \int \sum \left(\frac{dW_3}{dx}\right)^2 dx\,dy\,dz$$

ou

$$J_1 < K_3;$$

on trouverait de même

$$J_1' < K_3'.$$

D'autre part W_3 satisfait à l'équation

$$\sum \frac{d^2 W_3}{dx'^2} = 0$$

tandis que W_1 ne satisfait pas à

$$\sum \frac{d^2 W_1}{dx'^2} = 0.$$

Comme d'autre part $W_1 = W_3$ à la surface de S', on aura

$$\int \sum \left(\frac{dW_3}{dx'}\right)^2 dx'\,dy'\,dz' < \int \sum \left(\frac{dW_1}{dx'}\right)^2 dx'\,dy'\,dz'$$

ou

$$J_3 < K_1.$$

De même

$$J_3' < K_1'.$$

D'autre part les inégalités (1) nous donnent:

$$\begin{aligned}
\mu' K_1 &> J_1 > \mu K_1, \\
\mu' K_1' &> J_1' > \mu K_1', \\
\mu' J_3 &> K_3 > \mu J_3, \\
\mu' J_3' &> K_3' > \mu J_3'.
\end{aligned}$$

La comparaison de ces inégalités nous donne:

$$J_1 > \mu K_1 > \mu J_3,$$
$$J_1 < K_3 < \mu' J_3,$$
$$J_1' > \mu K_1' > \mu J_3',$$
$$J_1' < K_3' < \mu' J_3'$$

d'où enfin

$$\frac{\mu}{\mu'} \frac{J_3}{J_3'} < \frac{J_1}{J_1'} < \frac{\mu'}{\mu} \frac{J_3}{J_3'}.$$

Supposons maintenant que l'on fasse varier les α sans toucher aux p potentiels $W_1^1, W_2^1, \ldots, W_p^1$.

Alors le rapport $\frac{J_1}{J_1'}$ a un certain maximum que nous avons appelé R_1 et un certain minimum que nous avons appelé R_2. De même le rapport $\frac{J_3}{J_3'}$ aura un certain maximum r_1 et un minimum r_2.

Si une quantité est toujours plus grande qu'une autre, le maximum de la première sera plus grand que le maximum de la seconde et le minimum de la première plus grand que le minimum de la seconde. On aura donc:

$$\frac{\mu}{\mu'} r_1 < R_1 < \frac{\mu'}{\mu} r_1,$$

$$\frac{\mu}{\mu'} r_2 < R_2 < \frac{\mu'}{\mu} r_2.$$

Faisons varier maintenant les potentiels W_i^1, R_1 aura une limite inférieure m_p et R_2 une limite supérieure M_p. J'appellerai de même m_p^* et M_p^* la limite inférieure de r_1 et la limite supérieure de r_2. En appliquant le même principe, j'arriverai aux inégalités:

$$\frac{\mu}{\mu'} m_p^* < m_p < \frac{\mu'}{\mu} m_p^*,$$

$$\frac{\mu}{\mu'} M_p^* < M_p < \frac{\mu'}{\mu} M_p^*.$$

Mais nous savons calculer les nombres m_p^* et M_p^* pour la sphère. Nous avons trouvé dans le numéro précédent:

$$m_p^* = \frac{n}{n+1}, \quad [\text{où } n^2 < p \leqq (n+1)^2]$$

$$M_p^* = 1.$$

On a donc:

$$\frac{\mu}{\mu'} \frac{n}{n+1} < m_p < \frac{\mu'}{\mu} \frac{n}{n+1},$$

$$\frac{\mu}{\mu'} < M_p < \frac{\mu'}{\mu}.$$

Soient maintenant p doubles couches ayant pour potentiels

$$W_1^2, \ldots, W_p^2$$

et posons:

$$W_2 = \alpha_1 W_1^2 + \ldots + \alpha_p W_p^2$$

et formons le rapport $\frac{J_2}{J_2'}$; ce rapport, quand on fera varier les α, aura un maximum R_1' et un minimum R_2'. R_1', quand on fera varier les potentiels, aura une limite inférieure m_p' et R_2' aura une limite supérieure M_p'.

Nous avons trouvé à la fin du § 2:

$$M_p' \leqq \frac{1}{m_p}, \qquad m_p' \geqq \frac{1}{M_p}.$$

Il résulte de là

$$M_p' < \frac{\mu'}{\mu} \frac{n+1}{n}, \qquad m_p' > \frac{\mu}{\mu'}.$$

Or on a toujours comme je l'ai expliqué

$$M_2' > \frac{J_2}{J_2'} > m_2'$$

d'où finalement

$$\frac{2\mu'}{\mu} > \frac{J_2}{J_2'} > \frac{\mu}{\mu'}.$$

§ 5. *Couches de masse nulle.*

Supposons que W_1 soit un potentiel dû à une simple couche dont la masse totale est nulle, et formons le rapport $\frac{J_1}{J_1'}$; je dis que nous aurons:

$$\frac{J_1}{J_1'} > m_2.$$

Soit en effet W_0 un potentiel dû à une simple couche dont la densité soit proportionnelle à celle que prendrait l'électricité en équilibre sur la surface S supposée conductrice. On aura par conséquent

$$W_0 = \text{const.} \quad \text{à l'intérieur de } S; \quad J_0 = 0.$$

Soit maintenant

$$W = \alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1,$$

α_0 et α_1 étant deux indéterminées et formons les intégrales J et J' relatives au potentiel W, intégrales qui ont pour expressions

$$\int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau.$$

Considérons également l'intégrale

$$\int \sum \frac{dW_1}{dx} \frac{dW_2}{dx} d\tau$$

que nous appellerons K quand elle sera étendue à l'intérieur de S et K' quand elle sera étendue à l'extérieur de S.

On aura:

$$J = \alpha_0^2 J_0 + 2\alpha_0\alpha_1 K + \alpha_1^2 J_1,$$

$$J' = \alpha_0^2 J_0' + 2\alpha_0\alpha_1 K' + \alpha_1^2 J_1',$$

$$K = \int V_0 \frac{dV_1}{dn} d\omega, \qquad K' = -\int V_0' \frac{dV_1'}{dn} d\omega.$$

Les deux intégrales K et K' sont étendues à tous les éléments $d\omega$ de la surface S; sur cette surface

$$V_0 = V_0' = \text{const.}$$

La masse totale de la simple couche étant nulle on aura

$$\int \frac{dV_1}{dn} d\omega = \int \frac{dV'_1}{dn} d\omega = 0.$$

On en déduit

$$K = K' = 0$$

d'où

$$J = \alpha_1^2 J_1, \qquad J' = \alpha_0^2 J'_0 + \alpha_1^2 J'_1,$$

$$\frac{J}{J'} = \frac{\alpha_1^2 J_1}{\alpha_0^2 J'_0 + \alpha_1^2 J'_1}.$$

Le maximum R_1 de $\frac{J}{J'}$ sera donc égal à $\frac{J_1}{J'_1}$ et comme la limite inférieure de R_1 est m_2, on aura:

$$\frac{J_1}{J'_1} > m_2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Pour démontrer ce résultat on est obligé de s'appuyer sur l'existence de la fonction W_0, c'est à dire sur la possibilité de résoudre le problème de la distribution électrique, c'est à dire en définitive sur le principe de Dirichlet, supposé démontré par des méthodes indépendantes de celle de Neumann.

Nous pouvons cependant sans nous appuyer sur ce principe trouver une limite inférieure du rapport $\frac{J_1}{J'_1}$.

Reprenons la transformation du § 3; nous aurons

$$J_1 = \int \Phi dx' dy' dz'$$

l'intégrale étant étendue à l'intérieur de la sphère S. Désignons maintenant par K_1 et K'_1, l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{dW_1}{dx'}\right)^2 dx' dy' dz'$$

étendue soit à l'intérieur de S', soit à l'extérieur de S'. Nous aurons encore:

$$\mu' K_1 > J_1 > \mu K_1,$$

$$\mu' K'_1 > J'_1 > \mu K'_1.$$

Remplaçons W_1 par une fonction quelconque W_3, soit Φ_3 ce que devient Φ par cette substitution.

Considérons les intégrales

$$\int \sum \left(\frac{dW_3}{dx'}\right)^2 dx'\,dy'\,dz', \qquad \int \Phi_3 dx'\,dy'\,dz'$$

que nous appellerons J_3 et K_3 quand on les étend à l'intérieur de S', J'_3 et K'_3 quand on les étend à l'extérieur de S'.

Nous aurons encore:

$$\mu' J_3 > K_3 > \mu J_3,$$

$$\mu' J'_3 > K'_3 > \mu J'_3.$$

Je vais maintenant choisir W_3; ce sera le potentiel d'une simple couche de masse totale nulle répandue à la surface de la sphère S'; à la surface de cette sphère, ce potentiel devra satisfaire à la condition

$$W_3 = W_1 + C.$$

C étant une constante.

Comme on sait resoudre, à l'aide des fonctions sphériques, le problème de Dirichlet pour la sphère, on pourra déterminer la fonction W_3 de façon à satisfaire à ces conditions.

Je vais chercher à démontrer que

$$J'_1 < K'_3, \qquad J_3 < K_1.$$

Posons

$$W_3 = W_1 + R.$$

Il viendra:

$$K'_3 - J'_1 = 2\int \sum \frac{dR}{dx}\frac{dW_1}{dx}d\tau + \int \sum \left(\frac{dR}{dx}\right)^2 d\tau. \tag{1}$$

Les intégrales sont étendues à l'extérieur de S.

La fonction W_1 étant harmonique à l'extérieur de S, le théorème de Green nous donne:

$$\int \sum \frac{dR}{dx}\frac{dW_1}{dx}d\tau = -\int R\frac{dW_1}{dn}d\omega; \tag{2}$$

R étant constant à la surface de S, le second membre de (2) se réduit à

$$-R\int \frac{dW_1}{dn}\,d\omega$$

ou à 0 puisque la masse totale de la couche qui engendre W_1 est nulle.

On a donc:

$$K_3' - J_1' = \int \sum \left(\frac{dR}{dx}\right)^2 d\tau > 0.$$

C. Q. F. D.

D'autre part il vient:

$$K_1 - J_3 = -2\int \sum \frac{dR}{dx'}\frac{dW_3}{dx'}\,dx'\,dy'\,dz' + \int \sum \left(\frac{dR}{dx'}\right)^2 dx'\,dy'\,dz',$$

les intégrales étant étendues à l'intérieur de S'. On trouve ensuite:

$$\int \sum \frac{dR}{dx'}\frac{dW_3}{dx'}\,dx'\,dy'\,dz' = 0,$$

puisque R se réduit à une constante à la surface de S' et que la simple couche qui engendre W_3 a sa masse totale nulle. La démonstration est d'ailleurs la même que plus haut.

On en conclut:

$$K_1 - J_3 = \int \sum \left(\frac{dR}{dx'}\right)^2 dx'\,dy'\,dz' > 0.$$

C. Q. F. D.

D'ailleurs d'après le § 1, relatif à la sphère, comme la masse totale qui engendre W_3 est nulle on a:

$$\frac{J_3}{J_3'} > \frac{1}{2}$$

d'où enfin:

$$J_1' < K_3' < \mu' J_3' < 2\mu' J_3 < 2\mu' K_1 < \frac{2\mu'}{\mu} J_1.$$

On voit donc sans avoir à s'appuyer sur la principe de Dirichlet que $\frac{J_1}{J_1'}$ a une limite inférieure $\frac{\mu}{2\mu'}$ qui n'est pas nulle. Mais nous ne saurions sans le recours de ce principe démontrer que cette limite est précisement égale à m_2, ce qui d'ailleurs n'est pas utile pour notre objet.

§ 6. *Résumé.*

Nous pouvons assigner une limite supérieure et une limite inférieure au rapport

$$\frac{J_1}{J_1'},$$

J_1 et J_1' étant les deux intégrales relatives au potentiel d'une simple couche répandue sur la surface S.

La limite inférieure est $m_1 = 0$; la limite supérieure est finie.

Si nous assujettissons la simple couche à la condition que sa masse totale soit nulle, nous pouvons assigner au rapport $\frac{J_1}{J_1'}$ une limite inférieure qui n'est pas nulle.

Nous pouvons également assigner une limite supérieure et une limite inférieure au rapport

$$\frac{J_2}{J_2'},$$

J_2 et J_2' étant les deux intégrales relatives au potentiel d'une double couche répandue sur la surface S.

La limite supérieure est $\frac{1}{m_2}$ et est finie; la limite inférieure n'est pas nulle.

Pour établir les théorèmes relatifs au rapport $\frac{J_2}{J_2'}$, nous avons dû nous appuyer (cf. § 2, in fine) sur le principe de Dirichlet, d'après lequel le problème de Dirichlet comporte toujours une solution. Pour cela il nous faut supposer que ce principe a été démontré, *indépendamment de la méthode de Neumann* par d'autres méthodes qui permettent comme on le sait de le démontrer rigoureusement dans toute sa généralité, par les méthodes alternantes de M. Schwarz, ou par la méthode du balayage de Poincaré.

Au contraire pour établir les théorèmes relatifs au rapport $\frac{J_1}{J_1'}$, il n'est pas nécessaire de supposer connu le principe de Dirichlet.

Tous ces théorèmes ne sont d'ailleurs démontrés que pour les surfaces simplement connexes; mais la démonstration développée dans le paragraphe précédent permettrait dès qu'on les aurait démontrés pour une surface particulière de les étendre à toutes les surfaces qui ont les mêmes connexions.

Si on les démontrait pour le tore, ils seraient vrais pour toutes les surfaces fermées triplement connexes.

Il est aisé de les démontrer pour un domaine compris entre deux sphères concentriques; il suffit pour cela de faire encore usage des fonctions sphériques ce qui conduit à une analyse analogue à celle du § 3.

Ils sont donc vrais pour tout domaine limité par deux surfaces simplement connexes.

J'ajouterai que la nature même de la question fait présumer qu'ils sont vrais dans tous les cas.

Notre démonstration suppose également que la surface S a partout un plan tangent et des rayons de courbure finis, sans quoi la transformation du début du § 4 ne pourrait pas se faire. Il serait sans doute possible de se débarrasser de cette restriction; je ne l'ai pas essayé.

CHAPITRE III.

Le rapport $\frac{J_{2m+2}}{J_{2m}}$.

Reprenons les intégrales J_m et J'_m définies au chapitre I. De l'analyse du chapitre II on peut conclure qu'il existe un nombre μ, positif et plus grand que 1, ne dépendant que de la configuration de la surface S et jouissant de la propriété suivante: on a pour un indice pair $2m$:

$$(1) \qquad J_{2m} < \mu J'_{2m}; \qquad J'_{2m} < \mu J_{2m}.$$

Voyons quelles sont les conséquences de ces inégalités.

Supposons que comme au § 2 du chapitre I nous changions Φ en $\alpha\Phi + \beta U_{q-1}$, J_{2m} et J'_{2m} se changeront en

$$\alpha^2 J_{2m} + 2\alpha\beta J_{2m+q} + \beta^2 J_{2m+2q},$$
$$\alpha^2 J'_{2m} + 2\alpha\beta J'_{2m+q} + \beta^2 J'_{2m+2q}.$$

Les inégalités (1) subsisteront ce qui donne en supposant $q = 1$:

$$(2)\qquad \alpha^2(J_{2m} - \mu J'_{2m}) + 2\alpha\beta(J_{2m+1} - \mu J'_{2m+1}) + \beta^2(J_{2m+2} - \mu J'_{2m+2}) > 0,$$
$$\alpha^2(J'_{2m} - \mu J_{2m}) + 2\alpha\beta(J'_{2m+1} - \mu J_{2m+1}) + \beta^2(J'_{2m+2} - \mu J_{2m+2}) > 0$$

ou en changeant β en $-\beta$

$$(3)\qquad \alpha^2(J'_{2m} - \mu J_{2m}) - 2\alpha\beta(J'_{2m+1} - \mu J_{2m+1}) + \beta^2(J'_{2m+2} - \mu J_{2m+2}) > 0.$$

Additionnons (2) et (3), il viendra:

$$\alpha^2(1 - \mu)(J_{2m} + J'_{2m}) + 2\alpha\beta(1 + \mu)(J_{2m+1} - J'_{2m+1})$$
$$+ \beta^2(1 - \mu)(J_{2m+2} + J'_{2m+2}) > 0.$$

Comme cette inégalité doit avoir lieu quels que soient α et β, il faut que l'on ait:

$$(1 + \mu)^2(J_{2m+1} - J'_{2m+1})^2 < (1 - \mu)^2(J_{2m} + J'_{2m})(J_{2m+2} + J'_{2m+2}).$$

Mais:

$$J_{2m+1} - J'_{2m+1} = J_{2m+2} + J'_{2m+2}$$

il vient donc puisque $J_{2m+2} + J'_{2m+2}$ et $J_{2m} + J'_{2m}$ sont essentiellement positifs:

$$\frac{J_{2m+2} + J'_{2m+2}}{J_{2m} + J'_{2m}} < \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu}\right)^2.$$

Nous pouvons donc conclure de là qu'il existe un nombre A tel que

$$J_{2m} + J'_{2m} < A\left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu}\right)^{2m}.$$

Si nous posons:

$$\left|\frac{1 - \mu}{1 + \mu}\right| = L$$

nous voyons que L sera plus petit que 1 puisque μ est positif; on aura:

$$J_{2m} + J'_{2m} < AL^{2m}$$

et a fortiori:

$$J_{2m} < AL^{2m}; \qquad J'_{2m} < AL^{2m}.$$

Il résulte de là que les séries

$$(4) \qquad \begin{aligned} &J_0 + \lambda^2 J_2 + \lambda^4 J_4 + \ldots, \\ &J'_0 + \lambda^2 J'_2 + \lambda^4 J'_4 + \ldots \end{aligned}$$

convergent toutes les fois que:

$$|\lambda L| < 1$$

et en particulier pour

$$\lambda = \pm 1.$$

Des inégalités (1) on peut encore déduire:

$$\left|\frac{J_{2m} - J'_{2m}}{J_{2m} + J'_{2m}}\right| < \left|\frac{1 - \mu}{1 + \mu}\right| = L.$$

Or

$$J_{2m} - J'_{2m} = J_{2m+1} + J'_{2m+1}$$

on en déduit:

$$\left|\frac{J_{2m+1} + J'_{2m+1}}{J_{2m} + J'_{2m}}\right| < L$$

et

$$|J_{2m+1} + J'_{2m+1}| < AL^{2m+1}.$$

D'ailleurs:

$$J_{2m+1} - J'_{2m+1} = J_{2m+2} + J'_{2m+2} < AL^{2m+2}$$

d'où:

$$|J_{2m+1}| < A\frac{1 + L}{2}L^{2m+1} < AL^{2m+1}$$

et de même

$$|J'_{2m+1}| < AL^{2m+1}.$$

CHAPITRE IV.

L'intégrale $\int (V - C)^2 d\omega$.

§ 1. *Enoncé du problème.*

Soit W une fonction harmonique à l'intérieur de S, se réduisant à V à la surface de S. Soit J l'intégrale

$$J = \int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau$$

étendue à l'intérieur de S. On pourrait se proposer de trouver une limite supérieure du rapport

$$\frac{\int V^2 d\omega}{J},$$

l'intégrale du numérateur étant étendue aux éléments $d\omega$ de la surface S.

Sous cette forme le problème ne comporterait pas de solution; car si W se réduit à une constante différente de o, J s'annule et l'intégrale du numérateur ne s'annule pas.

Mais il n'en est plus de même si on impose à V une condition, à savoir de satisfaire à la relation

$$\int V d\omega = 0.$$

Dans ce cas, notre rapport aura, comme nous allons le voir, une limite supérieure.

On peut encore énoncer le problème d'une autre manière. Considérons l'intégrale

$$K = \int (V - C)^2 d\omega$$

où C est une constante arbitraire. Nous choisirons cette constante de telle façon que K soit minimum, ce qui entraîne la condition:

$$\int (V - C) d\omega = 0.$$

Le problème consiste à chercher une limite supérieure du rapport du minimum de K à l'intégrale J.

Soit de même W une fonction harmonique à l'extérieur de S, se réduisant à V' à la surface de S; soit J' l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau$$

étendue à l'extérieur de S.

Considérons maintenant l'intégrale

$$K' = \int (V' - C)^2 d\omega,$$

C étant une constante déterminée de telle sorte que

$$\int (V' - C) d\omega = 0,$$

c'est à dire de telle sorte que K' soit minimum.

On peut se proposer de déterminer une limite supérieure du rapport $\frac{K'}{J'}$.

§ 2. *Cas de la sphère.*

Supposons que S soit une sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine, et reprenons les notations du § 3, chapitre II.

Soit alors W une fonction harmonique à l'intérieur de S; nous pourrons écrire:

$$W = \Sigma \beta_p X_p r^n$$

et à la surface de S:

$$V = \Sigma \beta_p X_p.$$

On en déduit:

$$J = \Sigma n \beta_p^2.$$

Introduisons une constante C qui doit être déterminée de telle sorte que:

$$\int (V - C) d\omega = 0;$$

cela revient à supposer

$$C = \beta_0 X_0$$

d'où:

$$V - C = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots$$

et

$$\int (V - C)^2 d\omega = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots,$$

ce que j'écrirai

$$\int (V - C)^2 d\omega = \Sigma \beta_p^2,$$

en convenant que sous le signe Σ l'indice p doit prendre les valeurs $1, 2, \dots,$ ad inf. et ne pas prendre la valeur 0.

De même dans la formule

$$J = \Sigma n \beta_p^2$$

on peut supposer que l'indice p prend les valeurs $1, 2, \dots,$ et ne prend pas la valeur 0; car pour $p = 0$, le coëfficient est aussi égal à 0 et le terme correspondant disparaît.

Il vient alors:

$$\frac{\int (V - C)^2 d\omega}{J} = \frac{\Sigma \beta_p^2}{\Sigma n \beta_p^2} < 1.$$

Soit maintenant W une fonction harmonique à l'extérieur de S; nous pourrons écrire:

$$W = \Sigma \beta_p X_p r^{-(n+1)}$$

et à la surface de S

$$V' = \Sigma \beta_p X_p.$$

On en déduit

$$J' = \Sigma (n + 1) \beta_p^2.$$

Introduisons une constante C qui doit satisfaire à

$$\int (V' - C) d\omega = 0.$$

Cela revient à supposer

$$C = \beta_0 X_0.$$

On aura alors:

$$\int (V' - C)^2 d\omega = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots$$

et

$$\int V'^2 d\omega = \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots$$

d'où enfin:

$$\int (V' - C)^2 d\omega < \int V'^2 d\omega < J'.$$

§ 3. *Surfaces simplement connexes.*

Reprenons la transformation du § 4, chapitre II.

Soit W une fonction harmonique à l'intérieur de S, et soit:

$$K_1 = \int (V - C_1)^2 d\omega,$$

la constante C_1 étant choisie de telle sorte que K_1 soit minimum, c'est à dire que

$$\int (V - C_1) d\omega = 0.$$

Soit $d\omega'$ l'élément de S' qui correspond à l'élément $d\omega$ de S; soit:

$$\frac{d\omega}{d\omega'} = \phi;$$

ϕ sera une fonction des coordonnées du centre de gravité de l'élément $d\omega$; cette fonction essentiellement positive aura un maximum h et un minimum h'.

Nous aurons ensuite:

$$J_1 = \int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau,$$

l'intégrale étant étendue à l'intérieur de S, ou ce qui revient au même:

$$J_1 = \int \Phi \, dx' \, dy' \, dz',$$

l'intégrale étant étendue à l'intérieur de la sphère S'.

On aura d'ailleurs comme au § 4, chapitre II:

$$\mu' \sum \left(\frac{dW}{dx'}\right)^2 < \Phi < \mu \sum \left(\frac{dW}{dx'}\right)^2, \tag{1}$$

ces inégalités restant vraies quand on remplace W par une fonction quelconque.

Soit ensuite W_3 une fonction de x', y', z' définie par les conditions suivantes:

Elle sera harmonique à l'intérieur de la sphère S', et à la surface de cette sphère on aura:

$$W_3 = W = V.$$

On saura déterminer cette fonction puisqu'on sait résoudre le problème de Dirichlet en ce qui concerne la sphère.

On aura alors en vertu des inégalités (1):

$$J_1 > \mu' \int \sum \left(\frac{dW}{dx'}\right)^2 dx' dy' dz'.$$

Mais la fonction W_3 étant harmonique, on aura

$$(2) \qquad \int \sum \left(\frac{dW}{dx'}\right)^2 dx' dy' dz' > \int \sum \left(\frac{dW_3}{dx'}\right)^2 dx' dy' dz',$$

d'où si je désigne par J_3 l'intégrale du second membre de (2):

$$J_1 > \mu' J_3.$$

Soit maintenant C_3 une constante choisie de telle sorte que:

$$\int (W_3 - C_3) d\omega' = 0$$

et soit

$$K_3 = \int (W_3 - C_3)^2 d\omega' = \int (V - C_3)^2 d\omega,$$

il viendra en vertu du paragraphe précédent:

$$K_3 < J_3.$$

D'autre part:

$$\int (V - C_3)^2 d\omega = \int (V - C_3)^2 \psi d\omega' < h \int (V - C_3)^2 d\omega'$$

et comme C_1 a été choisi de telle sorte que K_1 soit minimum:

$$K_1 = \int (V - C_1)^2 d\omega < \int (V - C_3)^2 d\omega,$$

d'où finalement:

$$K_1 < hK_3.$$

On déduit de là:

$$\frac{K_1}{J_1} < \frac{h}{\mu}.$$

Nous obtenons donc une limite supérieure du rapport $\frac{K_1}{J_1}$.

Soit maintenant W une fonction harmonique à l'extérieur de S et se réduisant à V' à la surface de S.

Soit C_1 une constante telle que

$$\int (V' - C_1) d\omega = 0$$

et soit:

$$K_1' = \int (V' - C_1)^2 d\omega.$$

Soit:

$$J_1' = \int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau = \int \Phi dx' dy' dz',$$

les intégrales étant étendues la première à l'extérieur de S, la seconde à l'extérieur de S'.

Soit maintenant W_3 une fonction de x', y', z' harmonique à l'extérieur de S' et se réduisant à $W = V'$ à la surface de cette sphère.

Considérons l'intégrale

$$J_3' = \int \sum \left(\frac{dW_3}{dx'}\right)^2 dx' dy' dz'$$

étendue à l'extérieur de S' et l'intégrale:

$$K_3' = \int (W_3 - C_3)^2 d\omega' = \int (V' - C_3)^2 d\omega',$$

C_3 étant choisi de façon que

$$\int (V' - C_3) d\omega' = 0.$$

On aura encore pour les mêmes raisons que plus haut

$$K_3' < J_3' < \frac{J_1'}{\mu},$$

$$K_1' = \int (V' - C_1)^2 d\omega < \int (V' - C_3)^2 d\omega < hK_3',$$

d'où finalement:

$$\frac{K_1'}{J_1'} < \frac{h}{\mu}.$$

§ 4. *Application au problème de Neumann.*

Reprenons les notations de l'introduction et du chapitre I, soit:

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \dots.$$

Soit une constante C telle que

$$\int (V_m - C) d\omega = 0,$$

on aura en vertu du paragraphe précédent:

$$\int (V_m - C)^2 d\omega < \frac{h}{\mu} J_{2m}.$$

Soit de même C' une constante telle que:

$$\int (V_m' - C') d\omega = 0,$$

on aura encore

$$\int (V_m' - C')^2 d\omega < \frac{h}{\mu} J_{2m}'.$$

Si nous considérons le principe de Dirichlet comme préalablement démontré et si nous admettons par conséquent les résultats du § 1, chapitre III, nous pourrons écrire:

$$\int (V_m - C)^2 d\omega < \frac{hA}{\mu} L^{2m}; \qquad \int (V_m' - C')^2 d\omega < \frac{hA}{\mu} L^{2m}.$$

Soit maintenant C_m une constante telle que:

$$\int (U_m - C_m) d\omega = 0.$$

Comme

$$U_m = \frac{V_m + V_m'}{2},$$

on aura:

$$C_m = \frac{C + C'}{2}.$$

Posons alors:

$$\Omega_m = \int (U_m - C_m)^2 d\omega.$$

Il vient:

$$4\Omega_m = \int (V_m - C)^2 d\omega + \int (V'_m - C')^2 d\omega + 2\int (V_m - C)(V'_m - C') d\omega.$$

Or en vertu de l'inégalité de SCHWARZ:

$$\left[\int (V_m - C)(V'_m - C) d\omega\right]^2 < \int (V_m - C)^2 d\omega \int (V'_m - C')^2 d\omega < \frac{h^2 A^2}{\mu'^2} L^{4m}.$$

On a donc finalement

$$\Omega_m < \frac{hA}{\mu'} L^{2m}.$$

CHAPITRE V.

Convergence de la série de Neumann.

§ 1. *Démonstration.*

Admettons que le principe de DIRICHLET ait été préalablement établi par des méthodes indépendantes de celle de NEUMANN.

Il résulte alors du chapitre précédent que l'intégrale

$$\Omega_m = \int (U_m - C_m)^2 d\omega$$

est plus petite que

$$BL^{2m},$$

B étant un nombre positif que j'ai désigné par $\frac{hA}{\mu'}$ dans le chapitre précédent mais que je représente maintenant par une seule lettre.

Je me propose maintenant de trouver une limite supérieure de $|W_m|$ et par conséquent du terme général de la série de Neumann.

Nous adopterons les notations suivantes, que nous avons déjà employées dans l'introduction.

Soit $d\omega'$ un élément de la surface S ayant pour centre de gravité un point M' dont les coordonnées sont x', y', z'; soit $d\sigma'$ l'angle solide sous lequel $d\omega'$ est vu du point M dont les coordonnées sont x, y, z.

W_m sera la valeur de la fonction W_m au point x, y, z qui pourra être extérieur ou intérieur à la surface S. Lorsque le point x, y, z viendra sur la surface S, la valeur de la fonction W_m en ce point x, y, z s'appellera U_m, tandis que je désignerai par U'_m la valeur de cette fonction au point x', y', z' qui est toujours sur la surface.

On aura alors:

$$W_{m+1} = \int \frac{U'_m d\sigma'}{2\pi}.$$

D'autre part on aura:

$$\int \frac{d\sigma'}{2\pi} = 2, 1 \text{ ou } 0,$$

selon que le point x, y, z sera intérieur à S, sur la surface S elle-même, ou enfin extérieur à S.

Si donc le point x, y, z est extérieur à S, on aura:

$$W_{m+1} - 2C_m = \int \frac{(U'_m - C_m) d\sigma'}{2\pi}.$$

S'il est sur S on aura:

$$W_{m+1} - C_m = U_{m+1} - C_m = \int \frac{(U'_m - C_m) d\sigma'}{2\pi}.$$

Si enfin il est extérieur à S, on aura:

$$W_{m+1} = \int \frac{(U'_m - C_m) d\sigma'}{2\pi}.$$

Dans tous les cas l'inégalité de Schwarz nous donnera:

$$(1) \qquad \left[\int \frac{U'_m - C_m}{2\pi} \frac{d\sigma'}{d\omega'} d\omega'\right]^2 < \int (U'_m - C_m)^2 d\omega' \int \left(\frac{d\sigma'}{2\pi d\omega'}\right)^2 d\omega'.$$

Le second membre de cette inégalité est le produit de deux intégrales; la première de ces intégrales n'est autre chose que Ω_m; étudions la seconde.

On a:

$$\frac{d\sigma'}{d\omega'} = \frac{\cos\varphi}{r^2},$$

r étant le distance des points x', y', z' et x, y, z, et φ l'angle que fait la droite qui joint ces deux points avec la normale à l'élément $d\omega'$.

On aura donc:

$$\int \left(\frac{d\sigma'}{2\pi d\omega'}\right)^2 d\omega' < \int \frac{d\omega'}{4\pi^2 r^4}.$$

Si le point x, y, z n'est pas sur la surface S, r ne s'annulera pas et l'intégrale du second membre sera finie; je l'appelle D.

On aura donc:

$$\left[\int \frac{U'_m - C_m}{2\pi} d\sigma'\right]^2 < (BL^{2m})D.$$

Si le point x, y, z est intérieur à S on aura donc:

$$|W_{m+1} - 2C_m| < L^m\sqrt{BD}.$$

Si le point x, y, z est extérieur à S, on aura:

$$|W_{m+1}| < L^m\sqrt{BD}.$$

Dans les deux cas D est un nombre positif fini qui dépend de la position du point x, y, z, mais qui croît indéfiniment quand ce point x, y, z se rapproche indéfiniment de la surface S.

Quand le point x, y, z est sur la surface S, nous ne savons rien encore.

Cela suffit pour nous montrer que la série de Neumann converge tant à l'intérieur de S qu'à l'extérieur de S. Pour un point extérieur la série

$$W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \dots$$

converge pour $|\lambda| \leqq 1$ puisque le terme général

$$\lambda^{m+1} W_{m+1}$$

est plus petit en valeur absolue que le terme correspondant

$$\lambda^{m+1} L^m \sqrt{BD}$$

d'une progression géométrique dont la raison $L\lambda$ est plus petite que 1 en valeur absolue.

Pour un point intérieur la série que nous venons de considérer ne convergerait plus, mais la série:

$$W_0 + \lambda(W_1 - 2C_0) + \lambda^2(W_2 - 2C_1) + \ldots$$

serait convergente.

C'est un résultat analogue à celui qu'avait obtenu NEUMANN dans le cas des surfaces convexes, car il avait envisagé la série:

$$(W_0 - C) + \lambda(W_1 - C) + \lambda^2(W_2 - C) + \ldots,$$

C étant une constante.

Ces résultats toutefois ne sauraient nous suffire. En effet nous n'avons démontré ni la convergence pour les points de la surface S elle-même, ni l'uniformité de la convergence. Nous ne saurions donc conclure que la somme de la série satisfait bien aux conditions du problème de DIRICHLET.

Il est donc nécessaire d'étudier le cas où le point x, y, z vient sur la surface S. Le raisonnement qui précède se trouve en défaut; car l'intégrale

$$\int \left(\frac{d\sigma'}{2\pi d\omega'}\right)^2 d\omega'$$

ne reste pas finie. Il n'en serait pas de même dans le plan; cette intégrale resterait finie, pourvu que la courbe qui joue le rôle de la surface S ait son rayon de courbure fini.

Mais dans l'espace une démonstration spéciale est nécessaire.

On a alors

$$(2) \qquad U_{m+1} - C_m = \int \frac{U'_m - C_m}{2\pi} \frac{d\sigma'}{d\omega'} d\omega',$$

l'intégrale étant étendue à la surface S tout entière.

Soit Σ un cylindre de revolution de rayon ρ ayant pour axe la normale à S dont le pied est le point M qui a pour coordonnées x, y, z.

Décomposons l'intégrale du second membre de (2) en deux parties; la première partie que j'appellerai H sera étendue à la portion de la surface S qui est extérieure à Σ; la seconde partie que j'appellerai H' sera étendue à la portion de la surface S qui est intérieure à Σ. On aura donc:

$$U_{m+1} - C_m = H + H'.$$

On aura en vertu de l'inégalité de SCHWARZ

$$(3) \qquad H^2 < \int (U'_m - C_m)^2 d\omega' \int \left(\frac{d\sigma}{2\pi d\omega'}\right)^2 d\omega'.$$

Les intégrales du second membre de (3) sont les mêmes que celles du second membre de (1); mais elles doivent être étendues seulement à la portion de S extérieure à Σ. Elles sont donc plus petites que les intégrales correspondantes du second membre de (1).

La première de ces intégrales est plus petite que Ω_m et par conséquent que BL^{2m}.

La seconde est finie; mais elle dépend de ρ et croît indéfiniment quand ρ tend vers 0.

Il s'agit d'en trouver une limite supérieure.

Nous supposerons qu'en tous les points de la surface S il y a un plan tangent et que les deux courbures principales sont finies.

On pourra alors trouver un nombre R tel qu'on puisse construire une sphère de rayon R qui en un point quelconque de S soit tangente à cette surface et soit tout entière à l'intérieur de cette surface.

Soient maintenant M et M' deux points quelconques de la surface S, r leur distance, θ l'angle du plan tangent en M avec le plan tangent en M'.

Si comme nous le supposons, les courbures principales sont partout finies, on pourra assigner une limite supérieure au rapport:

$$\frac{\theta}{r}.$$

Soit:

$$\frac{\theta}{r} < E;$$

E est une constante indépendante de la position des points M et M' et dépendant seulement de la forme de la surface S.

Si nous posons:

$$\rho_0 = \frac{\pi}{4E}$$

toutes les fois que

$$r < \rho_0$$

nous aurons:

$$\theta < \frac{\pi}{4}.$$

Cela va nous permettre de trouver une limite supérieure de l'intégrale

$$\int \left(\frac{d\sigma}{2\pi d\omega'}\right)^2 d\omega'.$$

Cette intégrale doit être étendue à la portion de S qui est extérieure à Σ, c'est à dire à la portion de S définie par l'inégalité

$$\alpha > \rho.$$

Je désigne par α la projection de la droite $MM' = r$ sur le plan tangent au point M.

Mais il faut encore la décomposer en deux parties, la première partie sera étendue à la portion de S définie par

$$r > \rho_0$$

et la seconde partie à la portion de S définie par

$$\rho_0 > r > \alpha > \rho.$$

La première partie sera plus petite que

$$\int \frac{d\omega'}{4\pi^2 r^4} < \int \frac{d\omega'}{4\pi^2 \rho_0^4} < \frac{S^2}{4\pi^2 \rho_0^4},$$

S étant l'aire totale de la surface S.

Pour évaluer la seconde partie employons un système particulier de coordonnées.

Au point M dont les coordonnées sont x, y, z, menons le plan tangent à S. Projetons sur ce plan le point M', centre de gravité de $d\omega'$; soit m' cette projection. Rapportons ce point m' dans le plan tangent à un système de coordonnées polaires α et β en prenant pour pôle le point M.

Alors α est le rayon vecteur $m'M$; c'est le projection de r de sorte que:

$$\alpha < r.$$

La projection de l'élément $d\omega'$ sur le plan tangent aura pour aire

$$\alpha d\alpha d\beta,$$

de sorte que nous aurons

$$d\omega' = \frac{\alpha d\alpha d\beta}{\cos\theta}$$

et puisque dans cette portion de S où $r < \rho_0$ on a:

$$\theta < 45°,$$

on aura:

$$d\omega' < \alpha\sqrt{2}\, d\alpha d\beta.$$

Menons maintenant une sphère de rayon R, tangente à S en M' et tout entière intérieure à S.

La droite MM' coupe cette sphère en P et comme la sphère est intérieure à S on a

$$MP < MM'.$$

D'autre part

$$MM' = r, \qquad MP = 2R|\cos\varphi|$$

d'où:

$$\left|\frac{d\sigma}{d\omega'}\right| = \frac{|\cos\varphi|}{r^2} < \frac{1}{2Rr}.$$

La seconde partie de notre intégrale

$$\int\left(\frac{d\sigma}{2r d\omega'}\right)^2 d\omega'$$

sera donc plus petite que

$$\int\frac{\sqrt{2}}{4\pi^2}\frac{\alpha d\alpha d\beta}{4R^2r^2} < \int\frac{\sqrt{2}}{4\pi^2}\frac{d\alpha\, d\beta}{\alpha}.$$

Il faut intégrer par rapport à β depuis 0 jusqu'à 2π, par rapport à α

depuis ρ jusqu'à une valeur qui correspond à la condition $r=\rho_0$ et qui est par conséquent plus petite que ρ_0 puisque α est plus petit que r. L'intégrale sera donc certainement plus petite que

$$\frac{\sqrt{2}}{8\pi R^2}\log\frac{\rho_0}{\rho}.$$

Je déduis de là l'inégalité:

$$H^2 < BL^{2m}\left(\frac{S^2}{4\pi^2\rho_0^4}+\frac{\sqrt{2}}{8\pi R^2}\log\frac{\rho_0}{\rho}\right).$$

J'écrirai cela sous la forme:

$$H < L^m\sqrt{P-Q\log\rho},$$

P et Q étant des nombres qui ne dépendent, ni de m, ni de ρ, mais seulement de ρ_0 et de la forme de la surface S.

Etudions maintenant

$$H' = \int (U'_m - C_m)\frac{d\sigma}{2\pi d\omega'}\,d\omega'.$$

Nous avons trouvé à la fin de l'introduction

$$|U_m| < M_0 N^m.$$

Comme on a

$$\int (U_m - C_m)d\omega' = 0$$

et que C_m est pour ainsi dire la valeur moyenne de U_m, on aura aussi

$$|C_m| < M_0 N^m$$

et par conséquent:

$$|U_m - C_m| < 2M_0N^m;$$

il vient donc:

$$|H'| < 2M_0N^m\int\frac{1}{4\pi Rr}\sqrt{2}\,\alpha d\alpha d\beta < 2M_0N^m\int\frac{\sqrt{2}\,d\alpha d\beta}{4\pi R}.$$

Il faut intégrer par rapport à β de 0 à 2π, par rapport à α de 0 à ρ, ce qui donne:

$$|H'| < M_0N^m\sqrt{2}\frac{\rho}{R}.$$

Il en résulte

$$| U_{m+1} - C_m | < L^m \sqrt{P - Q \log \rho} + M_0 N^m \sqrt{2} \frac{\rho}{R}.$$

Cette inégalité doit avoir lieu quel que soit ρ; prenons

$$\rho = \left(\frac{L}{N}\right)^m;$$

il vient:

$$(4) \qquad | U_{m+1} - C_m | < L^m \sqrt{P + mQ \log \frac{N}{L}} + L^m \frac{M_0 \sqrt{2}}{R}.$$

Le second membre de l'inégalité (4) n'est pas le terme général d'une progression géométrique décroissante de raison L, car le nombre m figure encore dans le radical

$$\sqrt{P + mQ \log \frac{N}{L}},$$

mais c'est le terme général d'une série convergente.

Si même L_1 est un nombre quelconque plus petit que 1, mais plus grand que L, on peut toujours trouver un nombre A_1 tel que le second membre de (4) soit plus petit que

$$A_1 L_1^m$$

d'où:

$$| U_{m+1} - C_m | < A_1 L_1^m.$$

La série

$$(5) \qquad U_0 + (U_1 - C_0) + (U_2 - C_1) + \ldots + (U_{m+1} - C_m) + \ldots$$

est donc absolument convergente; et de plus, comme les nombres L, M_0, P, Q, N, R qui figurent dans l'intégrale (4) ne dépendent pas de la position du point M sur la surface S, la convergence est uniforme.

§ 2. *Uniformité de la convergence.*

Il résulte du paragraphe précédent que la série

$$U_0 + (U_1 - C_0) + (U_2 - C_1) + \ldots$$

est absolument et uniformément convergente; il est aisé de voir qu'il en est de même de la série:

$$(1) \qquad (U_0 - C) + (U_1 - C) + (U_2 - C) + \dots$$

où C est une constante convenablement choisie.

Nous avons trouvé en effet:

$$|U_{m+1} - C_m| < A_1 L_1^m.$$

En tenant compte de la relation

$$\int (U_{m+1} - C_{m+1}) d\omega' = 0$$

qui exprime que C_{m+1} est la valeur moyenne de U_{m+1}, on en déduit:

$$|C_{m+1} - C_m| < A_1 L_1^m.$$

La série

$$C_0 + (C_1 - C_0) + (C_2 - C_1) + \dots$$

est donc absolument convergente; j'appelle sa somme C; le reste de la série

$$(C_{m+1} - C_m) + (C_{m+2} - C_{m+1}) + \dots = C - C_m$$

est plus petit que

$$\frac{A_1}{1 - L_1} L_1^m$$

et par conséquent

$$|U_{m+1} - C| < |U_{m+1} - C_m| + |C - C_m| < A_1 L_1^m \left(1 + \frac{1}{1 - L_1}\right).$$

Cela démontre la convergence de la série (1).

De l'inégalité précédente je déduis

$$|U_m - C| < A_1 L_1^{m-1} \left(1 + \frac{1}{1 - L_1}\right),$$

ce que je puis écrire

$$|U_m - C| < B_1 L_1^m,$$

B_1 étant un nombre positif.

Envisageons maintenant les égalités

$$W_{m+1} = \int (U_m - C) \frac{d\sigma'}{2\pi},$$

$$W_{m+1} - 2C = \int (U_m - C) \frac{d\sigma'}{2\pi},$$

qui sont vraies, la première quand le point x, y, z est extérieur à S, la seconde quand il est intérieur à S.

On en déduit

$$|W_{m+1}| < B_1(N+1)L_1^m$$

pour un point extérieur et

$$|W_{m+1} - 2C| < B_1(N+1)L_1^m$$

pour un point intérieur.

N est toujours le nombre défini à la fin de l'introduction.

Il résulte de là que la série

$$\Sigma W_m$$

est convergente dans tout l'espace extérieur à S et que *dans tout ce domaine la convergence est absolue et uniforme.*

De même la série:

$$\Sigma(W_m - 2C)$$

est convergente dans tout l'espace intérieur à S et dans tout ce domaine la convergence est absolue et uniforme.

Soit donc d'abord un point extérieur à S et posons:

$$W = W_0 + W_1 + \ldots W_m + \ldots.$$

La série du second membre étant convergente définit une fonction de x, y, z que j'appelle W; il me reste à montrer que cette fonction satisfait aux conditions du problème de Dirichlet.

D'abord elle a des dérivées de tous les ordres.

Nous avons en effet

$$W_{m+1} = \int (U_m - C) \frac{d\sigma'}{2\pi},$$

ce que je puis écrire:

$$W_{m+1} = \int (U_m - C) F d\omega',$$

F étant une fonction de x, y, z, x', y', z' qui ne cesse d'être holomorphe que quand les points x, y, z et x', y', z' se confondent.

Soit alors DW une dérivée d'ordre quelconque de W prise par rapport à x, y, z. Il viendra en différentiant sous le signe $\int$:

$$DW_{m+1} = \int (U_m - C) DF d\omega'.$$

Dans tout domaine qui est tout entier extérieur à S, on pourra assigner à $|DF|$ une limite supérieure que j'appellerai H; d'où l'on déduit:

$$|DW_{m+1}| < B_1 . L_1^m . H.$$

Nous en déduirons que la série

$$DW_0 + DW_1 + DW_2 + \dots$$

est uniformément convergente, non pas dans tout l'espace extérieur à S, mais dans tout domaine tout entier extérieur à S.

Elle a donc pour somme DW.

On aura par exemple:

$$\Delta W = \Delta W_0 + \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots$$

et comme

$$\Delta W_m = 0$$

on aura aussi:

$$\Delta W = 0.$$

Il reste à démontrer que W tend uniformément vers $C - \Phi$ quand le point x, y, z se rapproche indéfiniment de S.

Construisons une série de surfaces s'enveloppant mutuellement et enveloppant S; soient $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ ces surfaces et supposons que quand n croît indéfiniment la plus courte distance de S et de S_n tende vers 0.

Ces surfaces $S_1, S_2, \dots, S_n$ peuvent d'ailleurs être quelconques.

Je dis que je puis prendre n assez grand pour que $|W + \Phi - C|$ soit plus petit qu'une quantité donnée ε toutes les fois que le point x, y, z est compris entre S_n et S.

C'est là ce que j'entends quand je dis que W tend *uniformément* vers $C - \Phi$.

Nous pouvons écrire:

$$W = (W_0 + W_1 + W_2 + \ldots + W_m) + (W_{m+1} + W_{m+2} + \ldots).$$

La série étant uniformément convergente, nous pouvons d'abord prendre m assez grand pour que

$$|W_{m+1} + W_{m+2} + \ldots| < \frac{\varepsilon}{3},$$

assez grand en même temps pour que

$$|U_m - C| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le nombre m est désormais fixé; nous prendrons maintenant n assez grand pour que, toutes les fois que x, y, z est entre S et S_n, la différence de

$$W_0 + W_1 + W_2 + \ldots + W_m$$

et de sa limite:

$$V'_0 + V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_m$$

soit plus petite que $\frac{\varepsilon}{3}$.

Or

$$V'_0 + V'_1 + \ldots + V'_m = U_m - \Phi.$$

Il est donc clair que si toutes ces conditions sont remplies à la fois, la différence de W et de $C - \Phi$ sera plus petite que ε.

C. Q. F. D.

Considérons maintenant un point intérieur à S et posons:

$$W = (W_0 - 2C) - (W_1 - 2C) + (W_2 - 2C) - \ldots.$$

Nous avons vu que la série qui figure dans le second membre de cette équation est convergente.

On démontrerait comme plus haut que W a des dérivées de tous les ordres.

On trouverait de même:

$$\Delta W = \Delta(W_0 - 2C) - \Delta(W_1 - 2C) + \Delta(W_2 - 2C) - \ldots$$

et on en déduirait

$$\Delta W = 0.$$

La somme des $m+1$ premiers termes de la série (où je suppose par exemple m impair)

$$(W_0 - 2C) - (W_1 - 2C) + (W_2 - 2C) - \ldots - (W_m - 2C)$$

tend vers

$$(V_0 - V_1 + V_2 - V_3 + \ldots - V_m)$$

quand le point x, y, z se rapproche indéfiniment de la surface S.

Je supposerai m impair pour fixer les idées; on a alors:

$$V_0 - V_1 + V_2 - \ldots - V_m = \Phi - U_m$$

et cette expression tend vers $\Phi - C$ quand m croît indéfiniment.

Le reste de la démonstration se poursuivrait comme dans le cas du point extérieur et on verrait que W tend uniformément vers $\Phi - C$.

La fonction $W + C$ nous fournit alors la solution du problème de Dirichlet.

On remarquera que quand m croît indéfiniment, U_m tend uniformément vers C.

CHAPITRE VI.

Les fonctions fondamentales.

§ 1. *Définition des fonctions fondamentales.*

Jusqu'ici j'ai cherché à être parfaitement rigoureux. Je crois utile maintenant de rattacher ce qui précède à d'autres considérations et pour cela de pénétrer dans un domaine que j'ai mal exploré et où je devrai me contenter de simples aperçus.

Soit W le potentiel d'une simple couche, formons les intégrales J et J' définies plus haut qui ont l'une et l'autre pour expression

$$\int \sum \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 d\tau$$

et qui doivent être étendues la première à l'intérieur de S, la seconde à l'extérieur de S.

Le rapport $\frac{J}{J'}$ étant essentiellement positif, aura un minimum; ce minimum sera d'ailleurs nul et il est clair qu'il sera atteint quand la densité de la simple couche sera proportionnelle à celle de l'électricité en équilibre sur S.

La valeur correspondante de W sera Φ_0; comme le rapport $\frac{J}{J'}$ ne change pas quand on multiplie W par un facteur constant, Φ_0 ne sera défini qu'à un facteur constant près.

Je profiterai de ce facteur constant arbitraire pour que J' soit égal à 1 et la valeur correspondante de J qui est égale à 0, je l'appellerai λ_0.

A la surface de S, Φ_0 est une constante; quant à la dérivée $\frac{d\Phi_0}{dn}$, elle est discontinue quand on traverse S. Nous devons donc distinguer la valeur $\frac{d\Phi_0}{dn}$ qui correspond à l'intérieur de S et qui est d'ailleurs nulle et la valeur $\frac{d\Phi_0'}{dn}$ qui correspond à l'extérieur de S.

Soit maintenant W le potentiel d'une autre simple couche. On aura par le théorème de Green

$$\int_S W \frac{d\Phi_0'}{dn} d\omega = \int_S \Phi_0 \frac{dW'}{dn} d\omega.$$

J'impose à W la restriction

$$\int W \frac{d\Phi_0'}{dn} d\omega = \int \Phi_0 \frac{dW'}{dn} d\omega = 0.$$

Alors J ne peut plus s'annuler et $\frac{J}{J'}$ admet un nouveau minimum qui n'est pas nul et que j'appelle λ_1. J'appelle Φ_1 la valeur de W correspondante.

Pour voir dans quelles conditions ce minimum peut être atteint il faut appliquer le calcul des variations qui donne:

$$\frac{d\Phi_1}{dn} = -\lambda_1 \frac{d\Phi'_1}{dn};$$

Φ_1 n'étant défini qu'à un facteur constant près, je puis choisir ce facteur de telle façon que

$$J' = 1, \qquad J = \lambda_1.$$

Pour aller plus loin, imposons à W une nouvelle restriction, à savoir:

$$\int W \frac{d\Phi'_1}{dn} d\omega = 0.$$

Le rapport $\frac{J}{J'}$ aura un nouveau minimum plus grand que λ_1 et que j'appelle λ_2.

Ce minimum sera atteint pour

$$W = \Phi_2.$$

Le calcul des variations nous apprend que Φ_2 est le potentiel d'une simple couche tel que

$$\frac{d\Phi_2}{dn} = -\lambda_2 \frac{d\Phi'_2}{dn}.$$

D'autre part on peut supposer

$$J' = 1, \qquad J = \lambda_2$$

et ainsi de suite.

Cet aperçu nous porte à penser qu'il existe une série de fonctions que j'appelle *fondamentales,*

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$$

et une série de nombres positifs:

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_3, \ldots$$

jouissant des propriétés suivantes:

1°. On a:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots .$$

2°. Les fonctions Φ_i sont des potentiels de simples couches et l'on a:

$$\frac{d\Phi_i}{dn} = -\lambda_i \frac{d\Phi_i'}{dn}.$$

3°. On aura:

$$\int \Phi_i \frac{d\Phi_k'}{dn} d\omega = \int \Phi_k \frac{d\Phi_i'}{dn} d\omega = 0$$

et par conséquent

$$\int \Phi_i \frac{d\Phi_k}{dn} d\omega = \int \Phi_k \frac{d\Phi_i}{dn} d\omega = 0.$$

4°. On aura:

$$\int \sum \left(\frac{d\Phi_i'}{dx}\right)^2 d\tau = 1; \qquad \int \sum \left(\frac{d\Phi_i'}{dx}\frac{d\Phi_k'}{dx}\right) d\tau = 0,$$

les intégrales étant étendues à l'extérieur de S; et en effet d'après le théorème de GREEN, la seconde de ces intégrales n'est autre chose que

$$\int \Phi_i \frac{d\Phi_k'}{dn} d\omega.$$

5°. On aura:

$$\int \sum \left(\frac{d\Phi_i}{dx}\right)^2 d\tau = 1; \qquad \int \sum \left(\frac{d\Phi_i}{dx}\frac{d\Phi_k}{dx}\right) d\tau = 0,$$

les intégrales étant étendues à l'intérieur de S.

Soit maintenant φ le potentiel d'une simple couche satisfaisant à la condition

$$\frac{d\varphi}{dn} = -\lambda \frac{d\varphi'}{dn}.$$

Je dis que λ est un nombre réel positif qui figure dans la série λ_0, λ_1, λ_2, ...

Si en effet il existe une autre simple couche dont le potentiel ψ satisfasse à la condition

$$\frac{d\psi}{dn} = -\mu \frac{d\psi'}{dn}, \qquad (\mu \gtrless \lambda)$$

le théorème de GREEN nous donnera:

$$\int \psi \frac{d\varphi'}{dn} d\omega - \int \varphi \frac{d\psi'}{dn} d\omega = 0,$$

et

$$\int \psi \frac{d\varphi}{dn} d\omega - \int \varphi \frac{d\psi}{dn} d\omega = 0;$$

ou:

$$\lambda \int \psi \frac{d\varphi'}{dn} d\omega - \mu \int \varphi \frac{d\psi'}{dn} d\omega = 0$$

d'où enfin

$$\int \psi \frac{d\varphi'}{dn} d\omega = \int \varphi \frac{d\psi'}{dn} d\omega = \int \psi \frac{d\varphi}{dn} d\omega = 0.$$

Nous en concluons que l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\right) d\tau$$

est nulle, soit qu'on l'étende à l'extérieur de S, soit qu'on l'étende à l'intérieur de S.

Je dis qu'il en résulte que λ est réel; si en effet λ était imaginaire, nous pourrions supposer φ et ψ, λ et μ imaginaires conjugués et l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\right) d\tau$$

devrait être positive tandis que nous venons de voir qu'elle est nulle.

Si maintenant nous désignons par j et j' les valeurs de l'intégrale:

$$\int \sum \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 d\tau$$

étendue soit à l'intérieur de S, soit à l'extérieur de S, on aura

$$j = \lambda j',$$

ce qui montre que λ ne peut être négatif.

Si λ est positif il devra ou bien figurer dans la série

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

ou bien être compris entre deux termes de la série; ou bien être plus grand que tous les λ_i si les λ_i ne peuvent pas croître indéfiniment.

Nous devons exclure la seconde de ces hypothèses.

Si on avait en effet

$$\lambda_i < \lambda < \lambda_{i+1}$$

on aurait:

$$(\alpha) \qquad \int \varphi \frac{d\Phi_i'}{dn} d\omega = 0$$

et le rapport $\frac{J}{J'}$ serait égal à λ quand on y ferait $W = \varphi$ et à λ_{i+1} quand on y ferait $W = \Phi_{i+1}$; il serait donc plus grand dans le second cas que dans le premier; or cela est impossible puisque la fonction Φ_{i+1} est par définition de toutes celles qui satisfont aux conditions (α) celle qui rend ce rapport minimum.

Nous verrons plus loin les raisons qui me portent à penser que la troisième hypothèse doit être également rejetée.

Soit donc

$$\lambda = \lambda_i.$$

De deux choses l'une; ou bien un seul des nombres de la série $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ sera égal à λ_i de telle sorte que:

$$\lambda_{i-1} < \lambda_i < \lambda_{i+1},$$

le signe d'inégalité excluant l'égalité; alors φ sera égal à Φ_i à un facteur constant près.

Ou bien on aura par exemple:

$$\lambda_{i-1} < \lambda_i = \lambda_{i+1} = \lambda_{i+2} = \ldots = \lambda_{i+n} < \lambda_{i+n+1}.$$

Dans ce cas φ sera une combinaison linéaire de

$$\Phi_i\,,\ \Phi_{i+1}\,,\ \ldots\,,\ \Phi_{i+n}.$$

Il est inutile d'insister sur le peu de rigueur du raisonnement qui précède bien qu'on en ait souvent employé d'analogues en physique mathématique.

Je dois pourtant indiquer ce que sont les fonctions fondamentales dans les cas les plus simples.

Si la surface S est une sphère, la fonction fondamentale sera égale à

$$Xr^n$$

à l'intérieur de S et à

$$Xr^{-(n+1)}$$

à l'extérieur, X étant une fonction sphérique d'ordre n.

Si la surface S est un ellipsoïde, les fonctions fondamentales ne sont autre chose que les fonctions de Lamé.

Si on appelle $\rho\,,\mu\,,\nu$ les coordonnées elliptiques d'un point et si $f(\rho)$ et $f_1(\rho)$ sont deux fonctions de ρ, dites fonctions de Lamé, il existe une simple couche dont le potentiel Φ est égal à l'intérieur de S au produit

$$f(\rho)f(\mu)f(\nu)$$

et à l'extérieur au produit

$$f_1(\rho)f(\mu)f(\nu).$$

Si alors nous désignons par f' et f_1' les dérivées de f et f_1; si $\rho=\rho_0$ est l'équation de l'ellipsoïde S, on aura:

$$\frac{d\Phi}{dn}=\frac{f'(\rho_0)}{f_1'(\rho_0)}\frac{d\Phi'}{dn},$$

ce qui montre que Φ est bien une fonction fondamentale.

§ 2. *Développements en série.*

Soit F une fonction quelconque des coordonnées d'un point sur S; diverses analogies peuvent porter à penser que F peut se développer en série procédant suivant les fonctions fondamentales.

On aurait alors:

$$F = A_0 \Phi_0 + A_1 \Phi_1 + A_2 \Phi_2 + \ldots,$$

les A étant des coëfficients constants.

Si on admet la possibilité du développement, le calcul des coëfficients A est facile.

Pour calculer A_i, multiplions par $\frac{d\Phi'_i}{dn} d\omega$ et intégrons, il viendra en vertu des propriétés des fonctions fondamentales:

$$\int F \frac{d\Phi'_i}{dn} d\omega = A_i \int \Phi_i \frac{d\Phi'_i}{dn} d\omega = - A_i.$$

Une fois que l'on connaîtrait les fonctions fondamentales, il serait aisé de résoudre le problème de DIRICHLET.

Soit W la somme de la série

$$A_0 \Phi_0 + A_1 \Phi_1 + \ldots$$

calculée pour des points x, y, z non situés sur la surface S. La fonction W serait le potentiel d'une simple couche et W se réduirait à la fonction donnée F sur la surface S.

Formons maintenant les intégrales J et J'.

En tenant compte des relations:

$$\int \sum \left(\frac{d\Phi_i}{dx}\right)^2 d\tau = \lambda_i, \qquad \int \sum \left(\frac{d\Phi_i}{dx}\frac{d\Phi_k}{dx}\right) d\tau = 0$$

on trouve:

$$J = A_0^2 \lambda_0 + A_1^2 \lambda_1 + A_2^2 \lambda_2 + \ldots.$$

On trouverait de même:

$$J' = A_0^2 + A_1^2 + \ldots$$

d'où

$$\frac{J}{J'} = \frac{A_0^2 \lambda_0 + A_1^2 \lambda_1 + A_2^2 \lambda_2 + \ldots}{A_0^2 + A_1^2 + \ldots}.$$

Le potentiel d'une simple couche est représenté par la même série

$$A_0 \Phi_0 + A_1 \Phi_1 + \ldots$$

à l'intérieur et à l'extérieur de S.

Il n'en est pas de même du potentiel d'une double couche. Soit W le potentiel d'une double couche et supposons que l'on ait à l'intérieur de S:

$$W = A_0 \Phi_0 + A_1 \Phi_1 + \ldots$$

et à l'extérieur de S:

$$W = B_0 \Phi + B_1 \Phi_1 + \ldots$$

il viendra:

$$\frac{dV}{dn} = A_0 \frac{d\Phi_0}{dn} + A_1 \frac{d\Phi_1}{dn} + \ldots,$$

$$\frac{dV'}{dn} = B_0 \frac{d\Phi_0'}{dn} + B_1 \frac{d\Phi_1'}{dn} + \ldots.$$

Comme

$$\frac{d\Phi_i}{dn} = -\lambda_i \frac{d\Phi_i'}{dn}$$

je puis écrire:

$$\frac{dV}{dn} = -A_0\lambda_0 \frac{d\Phi_0'}{dn} - A_1\lambda_1 \frac{d\Phi_1'}{dn} - \ldots$$

et comme le potentiel d'une double couche est caractérisé par la condition:

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV'}{dn},$$

il viendra:

$$B_i = -A_i\lambda_i.$$

On aura en particulier

$$B_0 = 0$$

puisque λ_0 est nul.

On conclut de là:

$$J' = B_0^2 + B_1^2 + \ldots = A_0^2\lambda_0^2 + A_1^2\lambda_1^2 + \ldots,$$

$$J = A_0^2\lambda_0 + A_1^2\lambda_1 + \ldots$$

d'où:

$$\frac{J}{J'} = \frac{\Sigma A_i^2 \lambda_i}{\Sigma A_i^2 \lambda_i^2}.$$

Dans le cas de la simple couche, nous avons trouvé la formule

$$\frac{J}{J'} = \frac{A_0^2 \lambda_0 + A_1^2 \lambda_1 + \dots}{A_0^2 + A_1^2 + \dots}.$$

Nous en concluons

$$\frac{J}{J'} < \lim \lambda_p \quad (\text{pour } p = \infty).$$

En d'autres termes on ne peut avoir quel que soit p

$$\frac{J}{J'} > \lambda_p.$$

Si donc les développements en séries qui précèdent sont légitimes, il ne peut pas, ainsi que je l'ai dit plus haut, exister de simple couche dont le potentiel ψ satisfasse à la condition:

$$\frac{d\psi}{dn} = -\lambda \frac{d\psi'}{dn},$$

λ étant un nombre plus grand que tous les λ_p.

§ 3. *Application au problème de Neumann.*

Soit à trouver une double couche dont le potentiel W satisfasse à la condition:

$$(1) \qquad V - V' = \lambda(V + V') + 2\Phi.$$

Développons Φ en série procédant suivant les fonctions fondamentales et soit:

$$\Phi = \Sigma C_i \Phi_i.$$

Supposons de même que W soit développé en une série de même forme, de telle sorte que l'on aura à l'intérieur de S:

$$W = \Sigma A_i \Phi_i$$

et à l'extérieur de S:

$$W = -\Sigma A_i \lambda_i \Phi_i.$$

La condition (1) devient alors:

$$\Sigma A_i \Phi_i(1 + \lambda_i) = \lambda \Sigma A_i \Phi_i(1 - \lambda_i) + 2\Sigma C_i \Phi_i$$

d'où en identifiant:

$$A_i = \frac{2C_i}{(1 + \lambda_i) - \lambda(1 - \lambda_i)}.$$

On a donc à l'intérieur de S:

$$W = \sum \frac{2C_i \Phi_i}{(1 + \lambda_i) - \lambda(1 - \lambda_i)}$$

et à l'extérieur de S:

$$W = -\sum \frac{2C_i \lambda_i \Phi_i}{(1 + \lambda_i) - \lambda(1 - \lambda_i)}.$$

Mais:

$$\frac{1}{(1 + \lambda_i) - \lambda(1 - \lambda_i)} = \frac{1}{1 + \lambda_i} + \lambda \frac{1 - \lambda_i}{(1 + \lambda_i)^2} + \ldots + \lambda^m \frac{(1 - \lambda_i)^m}{(1 + \lambda_i)^{m+1}} + \ldots.$$

Comme on a d'autre part

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \ldots,$$

on devra avoir à l'intérieur de S:

$$W_m = \sum \frac{2C_i \Phi_i}{1 + \lambda_i} \left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^m$$

et à l'extérieur de S:

$$W_m = -\sum \frac{2C_i \lambda_i \Phi_i}{1 + \lambda_i} \left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^m.$$

Il est aisé de déduire de là les valeurs des intégrales que dans le chapitre I nous avons appelées $J_{m.p}$; on trouve:

$$J_{m.p} = \sum \left(\frac{2C_i}{1 + \lambda_i}\right)^2 \lambda_i \left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^{m+p}$$

et

$$J'_{m.p} = \sum \left(\frac{2C_i}{1 + \lambda_i}\right)^2 \lambda_i^2 \left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^{m+p}.$$

Toutes les propriétés de ces intégrales, rigoureusement établies plus haut, sont des conséquences immédiates de ces formules qui ne sont malheureusement elles-mêmes qu'hypothétiques.

On voit d'abord que $J_{m.p}$ et $J'_{m.p}$ ne dépendent que de la somme $m + p$, ce qui permet d'appliquer la notation à un seul indice.

Les formules qui lient J_m, J'_m, J_{m-1}, J'_{m-1}, les inégalités auxquelles satisfont ces intégrales se déduisent aussi immédiatement des formules.

On voit par exemple pourquoi J_{2m} est toujours positif, tandis que nous ne savons rien du signe de J_{2m+1}.

Si tous les

$$\left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)$$

étaient positifs, c'est à dire si tous les λ_i étaient plus petits que 1, nous pourrions affirmer que J_{2m+1} est toujours positif. C'est ce qui arrive pour la sphère, mais on ne saurait affirmer qu'il en soit toujours ainsi.

Les inégalités:

$$\frac{J_2}{J_0} < \frac{J_4}{J_2} < \ldots < 1$$

résultent également des formules. Quant à la limite de $\frac{J_{2m+2}}{J_{2m}}$ pour m infini, c'est la plus grande des quantités

$$\left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^2,$$

lesquelles quantités sont essentiellement plus petites que 1.

En rattachant ainsi à des considérations qui ne reposent que sur de fragiles aperçus, des conséquences que je suis parvenu par une autre voie à démontrer rigoureusement, j'ai voulu simplement faire comprendre quelle a été la marche de ma pensée et comment j'ai été conduit au résultat.

Mais on peut se poser le problème d'une autre manière; peut-on s'appuyer sur les différentes propositions établies au début de ce travail pour démontrer l'existence des fonctions fondamentales.

Je n'ai pu encore y réussir, mais il est évident qu'on peut tenter de le faire par des procédés analogues à celui que j'ai employé dans mon mémoire sur les équations de la physique mathématique inséré aux Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (1894).

Considérons le développement

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \dots.$$

D'après ce que nous avons vu, ce développement converge à l'intérieur d'un cercle de centre 0 et de rayon plus grand que 1. Il définit à l'intérieur de ce cercle un élément de fonction $\varphi(\lambda)$, et on peut définir cette fonction $\varphi(\lambda)$ en dehors de ce cercle par le procédé de la continuation analytique.

Etudions cette fonction $\varphi(\lambda)$.

Je dis d'abord qu'elle doit être uniforme; si en effet elle ne l'était pas, il existerait pour une même valeur de λ, deux potentiels W_1 et W_2 qui satisferaient à la fois à la condition (1) de sorte qu'on aurait:

$$V_1 - V_1' = \lambda(V_1 + V_1') + 2\Phi,$$

$$V_2 - V_2' = \lambda(V_2 + V_2') + 2\Phi.$$

De plus cela devrait avoir lieu pour toutes les valeurs de λ comprises à l'intérieur d'un certain domaine; cela aurait donc lieu pour des valeurs imaginaires de λ et pas seulement pour des valeurs réelles.

Si je pose

$$W = W_1 - W_2$$

on aura

$$V - V' = \lambda(V + V') \quad \text{ou} \quad V' = V\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

et comme W est le potentiel d'une double couche:

$$\frac{dV'}{dn} = \frac{dV}{dn}.$$

Soit maintenant φ une fonction qui soit égale à W à l'intérieur de S et à:

$$W\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$$

à l'extérieur; on aura

$$\varphi = \varphi'$$

ce qui montre que φ est le potentiel d'une simple couche. Il vient ensuite:

$$\frac{d\varphi'}{dn} = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}\frac{d\varphi}{dn}$$

ce qui montre que φ est une fonction fondamentale; mais comme nous l'avons vu cela ne peut avoir lieu que si le multiplicateur $\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}$ est réel. Cette circonstance ne peut donc pas se produire pour des valeurs imaginaires de λ.

C. Q. F. D.

Diverses analogies me portent à penser que la fonction $\varphi(\lambda)$ ne peut avoir de points singuliers que sur l'axe des quantités réelles; mais on peut supposer que ces points singuliers sont des pôles ou bien des points singuliers essentiels, ou bien qu'ils forment des lignes singulières.

Nous allons voir comment ces diverses hypothèses se rattachent à celles que l'on peut faire au sujet des quantités que nous avons appelées m'_p et M'_p au chapitre II.

Supposons d'abord que les quantités λ_i forment une seule série telle que:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots,$$

$$\lim \lambda_p = \Lambda \quad \text{pour} \quad p = \infty.$$

C'est là l'hypothèse la plus simple et celle que d'après certaines analogies nous avons adoptée jusqu'ici.

Reprenons alors la formule

$$\frac{J}{J'} = \frac{A_0^2\lambda_0 + A_1^2\lambda_1 + \ldots}{A_0^2\lambda_0^2 + A_1^2\lambda_1^2 + \ldots}$$

relative à une double couche: J'observe d'abord que λ_0 étant nul cette formule peut s'écrire:

$$\frac{J}{J'} = \frac{A_1^2\lambda_1 + \ldots}{A_1^2\lambda_1^2 + \ldots}.$$

Si nous posons (Cf. chapitre II, § 1 et 2)

$$(2) \qquad W = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \ldots + \alpha_p W_p$$

les W_i étant des potentiels de doubles couches données et les α des coëfficients arbitraires, nous pourrons disposer des α de façon à faire disparaître les coëfficients

$$A_0, A_1, \ldots, A_{p-2},$$

de sorte que nous aurons:

$$\frac{J}{J'} = \frac{A_{p-1}^2 \lambda_{p-1} + \ldots}{A_{p-1}^2 \lambda_{p-1}^2 + \ldots}$$

d'où:

$$\frac{J}{J'} \leqq \frac{1}{\lambda_{p-1}}.$$

On a donc:

$$M'_p = \frac{1}{\lambda_{p-1}}.$$

Pour calculer m'_p supposons que dans la formule (2) on détermine les W_i de façon qu'à l'intérieur de S

$$W_1 = \Phi_{q+1}, \qquad W_2 = \Phi_{q+2}, \quad \ldots, \quad W_p = \Phi_{q+p},$$

il vient:

$$\frac{J}{J'} = \frac{\alpha_1^2 \lambda_{q+1} + \alpha_2^2 \lambda_{q+2} + \ldots + \alpha_p^2 \lambda_{q+p}}{\alpha_1^2 \lambda_{q+1}^2 + \alpha_2^2 \lambda_{q+2}^2 + \ldots + \alpha_p^2 \lambda_{q+p}^2}$$

d'où:

$$R'_1 = \frac{1}{\lambda_{q+1}}.$$

Donc R'_1 est toujours plus grand que $\frac{1}{A}$ et on peut prendre q assez grand pour qu'il diffère aussi peu qu'on le veut de $\frac{1}{A}$.

On a donc:

$$m'_p = \frac{1}{A}.$$

Mais on peut encore faire d'autres hypothèses; on peut supposer que les λ_i au lieu de former une seule série en forment deux ou trois.

Ceux de la 1ère série satisfont aux conditions

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots,$$
$$\lim \lambda_p = A \quad \text{pour} \quad p = \infty.$$

Ceux de la 2e série satisfont aux conditions

$$0 = \lambda'_1 > \lambda'_2 > \ldots,$$
$$\lim \lambda'_p = A' \quad \text{pour} \quad p = \infty.$$

On a d'ailleurs:

$$A \leqq A'.$$

Si $A < A'$ on peut supposer encore qu'il existe une troisième série de quantités analogues aux λ_i et qui sont toutes comprises entre A et A'.

Dans ce cas on a:

$$M'_p = \frac{1}{\lambda_{p-1}}, \qquad m'_p = \frac{1}{\lambda'_p}.$$

Si d'une manière quelconque, par exemple en perfectionnant les procédés du chapitre II, on parvenait à démontrer que

$$\lim m'_p = M'_p \quad \text{pour} \quad p = \infty$$

on pourrait pas les procédés de mon mémoire des Rendiconti cité plus haut, démontrer les résultats suivants:

La fonction $\varphi(\lambda)$ n'a que des pôles et un seul point singulier essentiel qui est rejeté à l'infini si l'on suppose

$$\lim m'_p = \lim M'_p = 1.$$

Si l'on considère un de ces pôles, le résidu correspondant regardé comme fonction de x, y et z est une fonction fondamentale.

CHAPITRE VII.

La méthode de Robin.

§ 1. *La méthode de Robin et les fonctions fondamentales.*

M. Robin a récemment imaginé une méthode qui permet de résoudre le problème de la distribution électrique, et qui semble d'abord, comme celle de Neumann, n'être applicable qu'aux surfaces convexes.

Il peut être intéressant de voir comment cette méthode se rattache aux considérations précédentes.

Admettons d'abord l'existence des fonctions fondamentales et la possibilité des développements en séries dont il a été question dans le chapitre précédent.

Soit W le potentiel d'une *simple* couche satisfaisant à la condition suivante

$$\frac{dV}{dn} - \frac{dV}{dn} = \lambda\left(\frac{dV}{dn} + \frac{dV'}{dn}\right) + 2\Phi. \tag{1}$$

Si nous cherchons à développer W suivant les puissances de λ, de sorte que

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \cdots \tag{2}$$

il viendra:

$$\frac{dV_0}{dn} - \frac{dV'_0}{dn} = 2\Phi,$$

$$\frac{dV_1}{dn} - \frac{dV'_1}{dn} = \frac{dV_0}{dn} + \frac{dV'_0}{dn},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ce qui montre que W_0 est le potentiel d'une simple couche de densité $\frac{-\Phi}{2\pi}$, W_1 le potentiel d'une simple couche de densité

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV_0}{dn} + \frac{dV'_0}{dn}\right)$$

etc.

Supposons maintenant que Φ soit développable en série sous la forme:

$$\Phi = C_0 \frac{d\Phi'_0}{dn} + C_1 \frac{d\Phi'_1}{dn} + \dots.$$

Soit ensuite

$$W = A_0 \Phi_0 + A_1 \Phi_1 + \dots$$

d'où:

$$\frac{dV'}{dn} = \sum A_i \frac{d\Phi'_i}{dn}, \qquad \frac{dV}{dn} = -\sum A_i \lambda_i \frac{d\Phi'_i}{dn},$$

de sorte que la relation (1) devient:

$$-\sum A_i \frac{d\Phi'_i}{dn}(1 + \lambda_i) = \lambda \sum A_i \frac{d\Phi'_i}{dn}(1 - \lambda_i) + 2 \sum C_i \frac{d\Phi'_i}{dn}$$

d'où:

$$A_i = \frac{-2C_i}{(1 + \lambda_i) + \lambda(1 - \lambda_i)}.$$

On a donc:

$$W = -2 \sum \frac{C_i \Phi_i}{(1 + \lambda_i) + \lambda(1 - \lambda_i)}$$

et par conséquent:

$$W_m = -2 \sum \frac{C_i \Phi_i}{1 + \lambda_i} \left(\frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i + 1}\right)^m$$

ou:

$$(-1)^{m+1} W_m = \sum \frac{2C_i \Phi_i}{1 + \lambda_i} \left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^m.$$

Quand m croît indéfiniment, tous les facteurs

$$\left(\frac{1 - \lambda_i}{1 - \lambda_i}\right)^m$$

tendent vers o à l'exception du facteur

$$\left(\frac{1 - \lambda_0}{1 + \lambda_0}\right)^m$$

qui reste égal à 1. On a donc pour $m = \infty$

$$\lim (-1)^{m+1} W_m = 2C_0 \Phi_0.$$

On voit donc que si m est très grand W_m diffère très peu du potentiel d'une simple couche dont la densité est proportionnelle à celle de l'électricité en équilibre sur la surface S.

C'est là le principe de la méthode de ROBIN.

Rapprochons-le du principe de la méthode de NEUMANN.

Pour le potentiel d'une double couche satisfaisant à la condition:

$$V - V' = \lambda(V + V') + 2\Phi$$

nous avons trouvé à l'intérieur de S:

$$W = \sum \frac{2C_i \Phi_i}{(1 + \lambda_i) - \lambda(1 - \lambda_i)}$$

d'où:

$$W_m = \sum \frac{2C_i \Phi_i}{1 + \lambda_i} \left(\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}\right)^m.$$

A l'extérieur de S, C_i doit être remplacé par $- C_i\lambda_i$.

On a donc pour $m = \infty$ à l'intérieur de S

$$\lim W_m = 2C_0 \Phi_0 = \text{const.}$$

et à l'extérieur de S

$$\lim W_m = - 2C_0\lambda_0 \Phi_0 = 0.$$

De ces deux formules, il serait aisé de déduire tous les théorèmes de NEUMANN.

Revenons à la méthode de ROBIN. Si nous supposons que la fonction Φ donnée qui figure dans la relation (1) soit telle que $C_0 = 0$, c'est à dire telle que

$$\int \Phi d\omega = 0,$$

on a pour m infini:

$$\lim W_m = 0.$$

On voit de plus que la série

$$W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \dots$$

converge pour

$$|\lambda| \leqq 1.$$

Or pour $\lambda = 1$ la relation (1) devient:

$$\frac{dV'}{dn} = -\Phi.$$

Pour $\lambda = -1$, elle devient:

$$\frac{dV}{dn} = \Phi.$$

On voit donc que la méthode de ROBIN permet de trouver une fonction harmonique soit à l'extérieur de S, soit à l'intérieur de S, étant donnée la valeur de la dérivée $\frac{dV}{dn}$ en tous les points de S.

§ 2. *La méthode de Robin et le problème de Neumann.*

Ce qui précède nous fait déjà prévoir que la méthode de ROBIN est applicable à toutes les surfaces simplement connexes. Mais l'aperçu du numéro précédent n'a aucun caractère de rigueur. Rapprochons donc d'une autre manière la méthode de ROBIN et celle de NEUMANN.

Soit w le potentiel d'une simple couche satisfaisant à la condition

$$\frac{dv}{dn} - \frac{dv'}{dn} = \lambda\left(\frac{dv}{dn} + \frac{dv'}{dn}\right) + 2\varphi. \tag{1}$$

Je pose d'ailleurs

$$w = w_0 + \lambda w_1 + \lambda^2 w_2 + \dots$$

Soit maintenant W le potentiel d'une double couche satisfaisant à

$$V - V' = \lambda(V + V') + 2\Phi \tag{2}$$

et développable sous la forme

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \dots$$

Je suppose que la fonction φ soit donnée, nous calculerons $w_0, w_1, \dots$ par récurrence à l'aide des formules:

$$\frac{dv_0}{dn} - \frac{dv_0'}{dn} = 2\varphi,$$

$$\frac{dv_1}{dn} - \frac{dv_1'}{dn} = \frac{dv_0}{dn} + \frac{dv_0'}{dn},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Nous savons que la méthode de NEUMANN, applicable à toutes les surfaces simplement connexes, nous permet de trouver une double couche dont le potentiel W satisfasse à la condition

$$V = \text{fonction donnée.}$$

Nous pourrons donc choisir W_0 de cette façon que

$$V_0 = v_0$$

d'où

$$W_0 = w_0 \quad (\text{à l'intérieur de } S)$$

et

$$\frac{dV_0}{dn} = \frac{dv_0}{dn}.$$

On calculera ensuite par récurrence W_1, W_2, etc. à l'aide des formules:

$$V_1 - V_1' = V_0 + V_0',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Posons

$$2u_0 = \frac{dv_0}{dn} + \frac{dv_0'}{dn}, \qquad 2U_0 = V_0 + V_0',$$

et soient u_0', U_0' les valeurs de u_1 et U_1 au point x', y', z'; soit r la distance des points $x, y, z,\ x', y', z'$; conservons aux notations $d\omega'$ et $d\sigma'$ le même sens que plus haut; soient α', β', γ' les cosinus directeurs de $d\omega'$; soit enfin, pour une fonction quelconque f de x', y', z':

$$\frac{df}{dn'} = \alpha'\frac{df}{dx'} + \beta'\frac{df}{dy'} + \gamma'\frac{df}{dz'};$$

il viendra:

$$(3) \qquad w_1 = \int \frac{u_0' d\omega'}{2\pi r}; \qquad W_1 = \int \frac{U_0' d\sigma'}{2\pi} = \int \frac{U_0' d\omega'}{2\pi} \frac{d\frac{1}{r}}{dn'}.$$

Tenons compte maintenant des relations:

$$V_0 = v_0 = v_0', \qquad \frac{dV_0'}{dn} = \frac{dV_0}{dn} = \frac{dv_0}{dn}$$

d'où l'on déduit:

$$2u_0 = \frac{dV_0'}{dn} + \frac{dv_0'}{dn}, \qquad 2U_1 = v_0' + V_0'.$$

Si donc nous posons à l'extérieur de S:

$$W_0 + w_0 = T$$

et si T' est la valeur de T au point x', y', z', on aura à la surface de S:

$$T' = 2U_0'; \qquad \frac{dT'}{dn'} = 2u_0'.$$

Or le théorème de Green nous donne quand le point x, y, z est intérieur à S:

$$\int \frac{dT'}{dn'} \frac{d\omega'}{r} = \int T' d\omega' \frac{d\frac{1}{r}}{dn'}.$$

On aura donc à l'intérieur de S

$$W_1 = -w_1.$$

On trouverait de même par récurrence à l'intérieur de S:

$$W_2 = w_2, \qquad W_3 = -w_3\ , \quad \ldots .$$

Mais nous savons que la série:

$$(W_0 - 2C) + (W_1 - 2C) + \ldots + (W_m - 2C) + \ldots$$

converge absolument et uniformément si la constante C est convenablement choisie.

Il en sera donc de même à l'intérieur de S de la série

$$(w_0 - 2C) + (w_1 - 2C) + \ldots + (w_m - 2C) + \ldots .$$

Si

$$\int \varphi d\omega = 0,$$

la constante C est nulle.

Nous désignerons l'intégrale

$$\int \sum \frac{dw_m}{dx} \frac{dw_p}{dx} d\tau$$

par $j_{m.p}$ ou par $j'_{m.p}$ suivant qu'elle sera étendue à l'intérieur ou à l'extérieur de S.

On verrait comme au chapitre I que ces intégrales ne dépendent que de la somme des indices m et p, ce qui nous permettra de remplacer la notation $j_{m.p}$, $j'_{m.p}$ par la notation à un seul indice j_{m+p}, j'_{m+p}.

Nous trouverions ensuite

$$j_m + j'_m = j_{m-1} - j'_{m-1}.$$

De plus j_{2m}, j'_{2m} sont positifs et on peut assigner une limite supérieure et inférieure au rapport:

$$\frac{j_{2m}}{j'_{2m}}$$

pourvu que $\int \varphi d\omega = 0$ *et que par conséquent la simple couche qui engendre* w_m *ait sa masse totale nulle* (Cf. chapitre II, § 5).

On tirera donc de là les mêmes conclusions qu'en ce qui concerne la méthode de Neumann et on aura:

$$j_{2m} + j'_{2m} < BL^{2m}, \qquad (L < 1)$$

B étant un nombre donné.

Nous avons d'ailleurs:

$$j_{2m} = J_{2m} < AL^{2m}$$

et comme nous pouvons assigner une limite supérieure M au rapport

$$\frac{j'_{2m}}{j_{2m}},$$

nous aurons

$$j'_{2m} < AML^{2m}.$$

Nous savons que si les constantes C, D et L_1 $(L_1 < 1)$ sont convenablement choisies on aura:

$$|W_m - 2C| < DL_1^m.$$

On a donc à l'intérieur de S

$$|w_m - 2C| < DL_1^m.$$

Si

$$\int \varphi d\omega = 0,$$

la constante C est nulle et on aura à l'intérieur de S:

$$|w_m| < DL_1^m.$$

On aura donc sur S

$$|v_m| = |v'_m| < DL_1^m$$

et comme $|w_m|$ ne peut atteindre son maximum que sur S, on aura à l'extérieur de S

$$|w_m| < DL_1^m.$$

Donc la série

$$w_0 + \lambda w_1 + \ldots$$

converge absolument et uniformément pour $|\lambda| \leqq 1$. *La méthode de Robin est donc comme celle de Neumann applicable à toutes les surfaces simplement connexes.*

Résumé.

Nous savons que la méthode dite du balayage permet de démontrer le principe de Dirichlet dans le cas général.

Mais si cette méthode est très-bonne comme procédé de démonstration, elle est inférieure comme procédé de calcul à celle de Neumann. Celle-ci malheureusement n'était jusqu'ici applicable qu'aux surfaces convexes.

En m'appuyant sur le principe de Dirichlet supposé démontré par la méthode de balayage, j'ai montré que la méthode de Neumann (de même que celle de Robin) conduit à la solution du problème de Dirichlet aux conditions suivantes:

1°. Si la surface S est simplement connexe.

2°. Si cette surface a partout un plan tangent et deux rayons de courbure principaux déterminés.

3°. Si la fonction donnée Φ a des dérivées de tous les ordres.

Toutes ces restrictions sont probablement inutiles et tout porte à penser que le théorème est vrai dans tous les cas. Mais je ne l'ai démontré qu'avec ces restrictions.

Après avoir établi ces résultats d'une façon rigoureuse, j'ai cru devoir dans les deux derniers chapitres, donner une idée des aperçus qui m'avaient d'abord conduit à les deviner. J'ai pensé que, malgré leur peu de rigueur, ils pouvaient être utiles comme procédés d'investigation, puisque je m'en étais déjà servi une fois avec succès.