SUR UNE PROPRIÉTÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES INTÉGRABLES À L'AIDE DES FONCTIONS MÉROMORPHES DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

PAR

MICHEL PETROVITCH

à BELGRADE.

Etant donné un type général d'équations différentielles

$$(1) \qquad F(y, y', y'', \ldots, y^{(p)}) = 0$$

d'un ordre quelconque, ne contenant pas x explicitement, on peut se proposer à préciser les équations appartenant à un tel type, qui peuvent être satisfaites par des fonctions méromorphes doublement périodiques. J'indiquerai ici une propriété de telles équations qui permet, sans entrer dans des études plus approfondies, de simplifier le problème en question et qui se traduit par une règle très simple et pratique.

Supposons l'équation écrite sous la forme

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{i=s} P_i y^{m_{0i}} y'^{m_{1i}} y''^{m_{2i}} \ldots y^{(p)m_{pi}} = 0$$

où les m sont des entiers positifs, tels qu'on n'ait pas à la fois pour deux indices i et j différents

$$m_{0i} = m_{0j}, \quad m_{1i} = m_{1j}, \quad \ldots, \quad m_{pi} = m_{pj}$$

et les P_i sont des constantes.

Formons les $2s$ nombres entiers et positifs suivants

$$(3) \qquad \begin{aligned} M_i &= m_{0i} + m_{1i} + \ldots + m_{pi}, \\ N_i &= m_{1i} + 2m_{2i} + \ldots + pm_{pi}. \end{aligned}$$

Traçons dans le plan deux axes, celui des M et des N, et marquons les s points (M_i, N_i) en ayant soin d'inscrire à côté de chacun d'eux son indice. Si deux on plusieurs points coïncident, on mettra à côté d'un tel point multiple les indices de tous les points qui y sont confondus.

Construisons la ligne polygonale Π concave vers OM, contenant à son intérieur ou sur sa périphérie tous les points (M_i, N_i) et fermée par des droites perpendiculaires à l'axe ON, dans le cas où il n'y a pas de sommets sur cet axe. Posons pour abréger

$$
\begin{aligned}
\gamma_{0i} &= m_{1i} + m_{2i} + \ldots + m_{pi}, \\
\gamma_{1i} &= m_{2i} + m_{3i} + \ldots + m_{pi}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\gamma_{hi} &= m_{h+1,i} \qquad + \ldots + m_{pi}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

et ensuite

$$
A_i = \lambda^{\gamma_{0i}}(\lambda - 1)^{\gamma_{1i}}(\lambda - 2)^{\gamma_{2i}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1,i}}
\tag{5}
$$

où λ est un nombre arbitraire.

Il peut arriver que la ligne polygonale Π présente un ou plusieurs sommets dans lesquels deux ou plusieurs points (M_i, N_i) coïncident; nous les appellerons alors les *sommets multiples.* Envisageons un tel sommet multiple et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les indices des termes de F qui y sont confondus. Formons l'équation

$$
A_{\alpha_1} P_{\alpha_1} + A_{\alpha_2} P_{\alpha_2} + \ldots + A_{\alpha_n} P_{\alpha_n} = 0;
\tag{6}
$$

elle sera une équation en λ de la forme

$$
\lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + a_2 \lambda^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0
$$

que nous appellerons *équation en* λ relative au sommet multiple $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. A chaque sommet multiple correspond une équation en λ définie par (6).

Ceci étant, il peut arriver que l'équation différentielle (1) admet des intégrales méromorphes doublement périodiques. *Dans ce cas elle jouit des propriétés suivantes:*

I. *La ligne polygonale Π a au moins un côté à coefficient angulaire égal à un nombre entier négatif, ou bien elle a au moins un sommet multiple* *tel, que son équation en λ admet comme racines un ou plusieurs nombres entiers négatifs, compris entre les valeurs des coefficients angulaires de deux côtés aboutissant à ce sommet.*

Car une fonction méromorphe doublement périodique ne saurait rester holomorphe dans tout le plan, et au voisinage d'un pôle $x = a$ peut s'écrire

$$y = (x - a)^{\mu} f(x), \tag{7}$$

où μ est un entier négatif et $f(x)$ une fonction holomorphe au voisinage de $x = a$ et ne s'annulant pas pour cette valeur de x. D'autre part j'ai démontré antérieurement (*Thèse de doctorat*) le résultat suivant: si μ a une valeur déterminée, pour que y, définie par (7), puisse satisfaire à une équation différentielle (1), il faut ou bien que μ soit égal à un des coefficients angulaires des côtés de la ligne polygonale Π, correspondant au polygone F, ou bien que μ satisfasse à une des équations en λ relatives aux sommets multiples de Π et soit compris entre les valeurs des coefficients angulaires de deux côtés aboutissant à ce sommet.

La proposition I s'en déduit immédiatement.

II. *Quelle que soit la fraction rationnelle $R(y)$ en y, la transformée*

$$\Phi(z, z', z'', \ldots, z^{(p)}) = 0 \tag{8}$$

de $F = 0$ en $z = R(y)$ jouit des propriétés énoncées dans la proposition I.

Car, y étant une fonction méromorphe doublement périodique, z l'est aussi.

Remarquons en même temps, que si les conditions I ne sont pas remplies pour une transformée (8) correspondant à une fraction rationnelle $R(y)$ ayant plus de deux pôles distincts, *l'équation $F = 0$ n'admet aucune intégrale méromorphe.* Car l'équation $\Phi = 0$ ne satisfaisant pas aux conditions I, son intégrale z, qui sera aussi méromorphe si y l'est, ne saurait devenir infinie pour aucune valeur finie de x. Par suite si a, b, c sont trois pôles distincts de $R(y)$ en y, les trois équations

$$y - a = 0, \qquad y - b = 0, \qquad y - c = 0$$

n'ont pas de racines finies. Par suite, en vertu du théorème connu de M. PICARD, l'intégrale y, supposée méromorphe, se réduirait à une constante.

III. *Si l'on forme une combinaison rationnelle*

$$R(y, y', y'', \ldots, y^{(q)})$$

de y et des ses dérivées successives, telle que la transformée

$$\Psi(z, z', z'', \ldots, z^{(q)}) = 0 \tag{9}$$

de $F = 0$ en

$$z = R(y, y', y'', \ldots, y^{(q)}) \tag{10}$$

ne satisfasse pas aux conditions de la proposition I, *l'équation*

$$R(y, y', y'', \ldots, y^{(q)}) = const. \tag{11}$$

joue le rôle d'intégrale première pour les intégrales méromorphes doublement périodiques de $F = 0$ en ce sens que toute intégrale de telle nature satisfait en même temps à l'équation $R = const.$

Il suffit, pour démontrer la proposition, de remarquer que y étant méromorphe doublement périodique, z le sera aussi et que toute fonction de telle nature n'ayant pas de pôles, se réduit à une constante.

La considération des lignes polygonales Π et des équations en λ correspondantes donne donc un moyen de former d'intégrales premières relatives aux intégrales méromorphes doublement périodiques de l'équation différentielle donnée. Une fois ces intégrales premières connues, la recherche des intégrales en question se ramène à celle des solutions communes à deux équations différentielles données, ce qu'on fera par différentiations et élimination des dérivées successives de y. Si p. ex. $p > q$, on différentiera l'équation $R = const.$ $p - q$ fois par rapport à x et en éliminant $y^{(p)}$ entre

$$F = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^{p-q} R}{dx^{p-q}} = 0 \tag{2}$$

on aura une équation (3) d'un ordre inférieur à p, admettant toutes les solutions communes à (1) et (2). En opérant sur (2) et (3) comme sur (1) et (2), on remplacera l'une de ces équations par une autre d'un ordre moindre et ainsi de suite. On obtiendra ainsi une suite

$$(\Delta) \qquad (1), (2), (3), \ldots, (m-2), (m-1), (m) \ldots$$

d'équations différentielles. Si l'équation $F=0$ admet effectivement d'intégrales méromorphes doublement périodiques ne se réduisant pas à des constantes, on pourra toujours choisir la constante figurant dans l'intégrale première $R=const.$ de sorte que les équations de la suite (Δ) à partir d'un certain rang m se réduisent à des identités. Toute intégrale commune à $F=0$ et $R=const.$ est alors intégrale de l'équation $(m-1)$. Pour que $F=0$ admette d'intégrales méromorphes doublement périodiques, il faut et il suffit que l'équation $(m-1)$ en admette et que parmi ces intégrales il y en ait qui satisfassent à $F=0$. La recherche des intégrales de telle nature se trouve ainsi ramenée à celle relative à une équation d'un ordre moindre.

Si en particulier l'équation $(m-1)$ ne contient que y et y', cette recherche s'achève facilement par les méthodes de Briot et Bouquet.

Ces propositions permettent dans un grand nombre de cas de simplifier la recherche des conditions pour qu'un type donné d'équations différentielles admette d'intégrales méromorphes doublement périodiques.

P. ex. en remarquant que la ligne polygonale de l'équation

$$P(y'') = Q(y)$$

où P et Q sont des polynomes de degrés respectifs m et n, ne peut présenter qu'un seul côté à coefficient angulaire négatif et que ce coefficient est égal à

$$\frac{2m}{n-m},$$

on voit que l'équation ne saurait admettre d'intégrales méromorphes doublement périodiques que si n est de la forme

$$n = m + \frac{2m}{k},$$

où k est un diviseur de $2m$. Elle en admettra effectivement p. ex. si $m = 1$, $n = 2$ ou 3, les coefficients des polynomes P et Q étant quelconques; ou encore si $m = 2$, $n = 4$ ou 6, les coefficients étant convenablement choisis etc.

Plus généralement, pour que l'équation

$$P(y^{(p)}) = Q(y)$$

puisse admettre d'intégrales en question, il faut que n soit de la forme

$$n = m + \frac{mp}{k},$$

où k est un diviseur de mp.

En remarquant aussi que la ligne polygonale de l'équation

$$P(y^{(p)}) = Q(y)y'$$

est à un seul coefficient angulaire et que celui-ci est égal à

$$\frac{mp - 1}{n + 1 - m},$$

on voit que l'existence des intégrales méromorphes doublement périodiques exige qu'on ait

$$n = m - 1 + \frac{mp - 1}{k},$$

k étant un diviseur de $mp - 1$. Elle sera effectivement intégrable par de telles fonctions p. ex. si, les coefficients de P et Q étant quelconques, on a $p = 3$, $m = 1$, $n = 1$ ou 2 etc.

S'il s'agit des équations de Briot et Bouquet

$$F(y, y') = 0,$$

pour qu'une telle équation puisse être intégrable par des fonctions méromorphes doublement périodiques, il faut que sa ligne polygonale admette au moins un côté à coefficient angulaire entier négatif et au moins un à coefficient angulaire entier positif et qu'il n'y ait pas de côtés à coefficient angulaire fractionnaire. Cette proposition simplifie souvent considérablement la question de préciser les équations, appartenant à un type général donné d'équations pouvant admettre d'intégrales de la nature considérée. Elle resulte immédiatement d'une part de ce fait qu'une fonction méromorphe doublement périodique ne saurait rester holomorphe dans tout le plan et doit s'annuler pour un nombre illimité de valeurs de x, et d'autre part de la proposition suivante, que j'ai démontré dans un travail antérieur: pour que y défini par

$$y = (x - a)^{\mu} f(x),$$

où f est une fonction holomorphe au voisinage de $x = a$ et ne s'annulant pas pour cette valeur de x, satisfasse à une équation

$$F(y, y') = 0,$$

il faut et il suffit que μ soit égal à un coefficient angulaire des côtés de la ligne polygonale correspondant à l'équation différentielle considérée.

Remarquons aussi que, d'après cette même proposition, pour qu'une équation de Briot et Bouquet irréductible puisse être intégrable par des fonctions méromorphes en général, il faut que la ligne polygonale de l'équation n'ait aucun côté à coefficient angulaire fractionnaire et qu'elle ait au moins un côté à coefficient angulaire différent de zéro. Car, s'il n'en était pas ainsi, l'équation ne pouvant être intégrable par d'autres fonctions méromorphes que par les fonctions rationnelles ou simplement périodiques et ne pouvant s'annuler ni être infinie pour aucune valeur finie de x, se réduirait à une constante ou bien à une ou plusieurs fonctions de la forme

$$He^{ax},$$

et dans ce dernier cas le premier membre de l'équation serait décomposable en facteurs de la forme

$$y' + ay,$$

où a est une constante.

D'ailleurs si ces conditions nécessaires pour l'existence des intégrales méromorphes sont remplies pour l'équation donnée, mais que la ligne polygonale n'admet aucun côté à coefficient angulaire négatif ou aucun côté à coefficient angulaire positif, ou s'assure aisément si l'équation admet ou non d'intégrales méromorphes. Car dans ce cas l'intégrale ne pouvant être que rationnelle ou simplement périodique, elle ne saurait, dans le premier cas avoir des pôles et dans le second cas des zéros. Par suite, dans le premier cas elle se réduirait à un polynome en x ou en e^{ax} et dans le second cas c'est la transformée de l'équation donnée en $\frac{1}{y}$ qui doit se réduire à un tel polynome et l'on achève facilement la question en déterminant, par la méthode des coefficients indéterminées, le degré et les coefficients d'un tel polynome.

4 mars 1898.