NOTE ZUR THEORIE DER DEFORMATION DER FLÄCHEN

VON

J. WEINGARTEN.
in BERLIN.

In einer interessanten, das Problem der Flächendeformation betreffenden Inauguraldissertation hat Herr Dr. G. HESSENBERG unter Anderem auch diejenige Singularität betrachtet, deren Eintreten in den Entwickelungen meiner Abhandlung *sur la déformation des surfaces* im 20[ten] Bande dieses Journals ausgeschlossen wurde. Diese Singularität tritt ein, wenn unter den Flächen, die ein gegebnes reducirtes Linienelement zulassen, solche existiren können, für die eine der beiden, durch die Kanten des zu Grunde gelegten beweglichen Trieders erzeugten, sphärischen Abbildungen in eine sphärische Curve ausartet. Herr Dr. HESSENBERG zeigt, dass für jede Fläche und auf unendlich viele Weisen reducirte Linienelemente gebildet werden können, mit denen diese Ausartung verbunden ist.

In Rücksicht auf diese Bemerkung erscheint es nothwendig, die sehr einfachen Kriterien des Eintretens dieser Singularität aus den in der erwähnten Abhandlung gegebnen Entwickelungen ausführlich herzuleiten. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst die Gleichungen (15)[1] der erwähnten Abhandlung (Bd. 20. pag. 172 d. J.):

$$(15)\qquad \begin{aligned} \sigma\Delta_2(z) - J(z) &= -\frac{1}{2}\sigma\frac{Q}{Q_1}, \\ J(z) &= \sqrt{\sigma^3}\frac{P_1}{Q_1}, \\ \theta(z) &= -\frac{\sqrt{\sigma}}{2}\frac{P}{Q_1} \end{aligned}$$

[1] Von einem Druckfehler befreit.

denen wir die entsprechenden, auf die Entwickelung der zweiten Fundamentalformel bezüglichen

$$(15') \qquad \begin{aligned} \sigma\Delta_2'(z) - J'(z) &= -\frac{1}{2}\sigma\frac{P}{P_1}, \\ J'(z) &= -\sqrt{\sigma^3}\frac{Q_1}{P_1}, \\ \theta'(z) &= \frac{\sqrt{\sigma}}{2}\frac{Q}{P_1} \end{aligned}$$

hinzufügen.

Die Quadrate der Linienelemente der vermittelst der Cosinus X, Y, Z und der anderen X', Y', Z' gebildeten zwei sphärischen Abbildungen ergaben sich aus den Gleichungen:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \left(\frac{1}{\sigma} + Q^2\right)dz^2 + 2QQ_1 dz d\sigma + Q_1^2 d\sigma^2,$$

$$dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2 = \left(\frac{1}{\sigma} + P^2\right)dz^2 + 2PP_1 dz d\sigma + P_1^2 d\sigma^2.$$

Wird für eine Fläche (ξ, η, ζ), welche ein gegebnes reducirtes Linienelement besitzt, die Grösse P_1 gleich Null, so artet die *zweite* Abbildung in eine sphärische Linie aus; wird dagegen Q_1 gleich Null, so tritt diese Ausartung bei der *ersteu* Abbildung ein. Eine gleichzeitige Ausartung beider Abbildungen kann für keine Fläche (ξ, η, ζ) eintreten, da vermöge der letzten der Gleichungen (10) (l. c. pag. 174)

$$(10) \qquad \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}} = PQ_1 - QP_1$$

ein gleichzeitiges Verschwinden der Grössen P_1 und Q_1 ausgeschlossen ist. Die zweite der obigen Gleichungen (15) zeigt nunmehr sofort, dass unter der Voraussetzung $P_1 = 0$ die Function z der partiellen Differentialgleichung

$$J(z) = 0$$

genügen muss. Aber dieselbe Function genügt auch, da Q_1 von Null verschieden bleibt, der Fundamentalgleichung: (pag. 178 l. c.)

$$(17) \qquad a\sigma + 2\alpha\sigma\Delta_2(z) - \frac{b + 2\alpha\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}J(z) - 2\beta\sqrt{\sigma}\theta(z) = 0.$$

Die mit der Gleichung $P_1 = 0$ verbundene Singularität kann daher nur eintreten, wenn die Grössen a, b, α, β dergestalt angenommen werden, dass die zwei vorstehenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ein gemeinschaftliches Integral z zulassen.

Was nun die Differentialgleichung $J(z) = 0$ anbetrifft, so ist sie der Ausdruck für den Umstand, dass die Curven $z =$ Const. auf der Kugel der ersten Abbildung geodätische Linien, d. h. grösseste Kreise werden.[1] Aus der zweiten Columne der Gleichungen (9) (l. c. pag. 173) ergiebt sich, dass unter der Bedingung $P_1 = 0$ oder $J(z) = 0$ die Cosinus X', Y', Z', welche zur degenerirten Abbildung gehören, Functionen von z allein sein müssen. Daher drückt die Orthogonalitätsbedingung:

$$XX' + YY' + ZZ' = 0$$

unter der angenommenen Bedingung ebenfalls aus, dass die zu $z =$ Const. gehörigen Curven der ersten Abbildung aus grössten Kreisen gebildet sind, und stellt das allgemeine Integral der Gleichung $J(z) = 0$ dar.

Durch Einsetzen der aus diesem Integral entwickelten Differentialquotienten der Function z in die Gleichung (17) könnte man die Bedingung der Coexistenz der Gleichung (17) und der Gleichung $J(z) = 0$ durch eine einfache Rechnung erhalten. Allein es ist bequemer, diese Bedingung aus den in meiner Abhandlung gegebnen Gleichungen zu entnehmen.

Die Gleichung (17) ist keine andere als die durch die Gleichung (16) (l. c. pag. 178) dargestellte Integrabilitätsbedingung

$$(16) \qquad -aQ_1 + bP_1 + \alpha Q - \beta P = 0$$

während die Bedingung $P_1 = 0$ mit der Gleichung $J(z) = 0$ zusammenfällt. Daher ist die Bedingung, dass die Gleichung (17) mit der Gleichung $J(z) = 0$ gleichzeitig bestehe, einfach die folgende:

$$-aQ_1 + \alpha Q - \beta P = 0$$

oder, da P und P_1 nicht gleichzeitig verschwinden können, auch:

$$(\mathrm{P}) \qquad -aQ_1P + \alpha PQ - \beta P^2 = 0.$$

[1] Da $J(z) = \Delta(z)\Delta_2(z) - \frac{1}{2}\Delta(z, \Delta z)$. Vergl. Darboux leçons III pag. 202.

Unter der Voraussetzung $P_1 = 0$ sind die Cosinus X', Y', Z', wie schon bemerkt, Functionen von z allein, und es besteht daher die Gleichung

$$\left(\frac{dX'}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dY'}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dZ'}{dz}\right)^2 = \nu'^2 = \frac{1}{\sigma} + P^2$$

in welcher ν' eine von σ unabhängige Grösse bezeichnet.

Aus den Gleichungen

$$\text{(X)} \qquad \begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= 1, \\ XX' + YY' + ZZ' &= 0, \\ X\frac{\partial X'}{\partial z} + Y\frac{\partial Y'}{\partial z} + Z\frac{\partial Z'}{\partial z} &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \end{aligned}$$

von denen die letzte sich ohne Weiteres aus den Gleichungen (9) (l. c. pag. 173) ergiebt, erhält man auf bekannte Weise:

$$X = \frac{1}{\nu'^2}\left(Y'\frac{\partial Z'}{\partial z} - Z'\frac{\partial Y'}{\partial z}\right)\sqrt{\nu'^2 - \frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{\nu'^2\sqrt{\sigma}}\frac{\partial X'}{\partial z},$$

$$Y = \frac{1}{\nu'^2}\left(Z'\frac{\partial X'}{\partial z} - X'\frac{\partial Z'}{\partial z}\right)\sqrt{\nu'^2 - \frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{\nu'^2\sqrt{\sigma}}\frac{\partial Y'}{\partial z},$$

$$Z = \frac{1}{\nu'^2}\left(X'\frac{\partial Y'}{\partial z} - Y'\frac{\partial X'}{\partial z}\right)\sqrt{\nu'^2 - \frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{\nu'^2\sqrt{\sigma}}\frac{\partial Z'}{\partial z},$$

und falls man diese Werthe in die folgende Gleichung substituirt:

$$X\frac{\partial^2 X'}{\partial z^2} + Y\frac{\partial^2 Y'}{\partial z^2} + Z\frac{\partial^2 Z'}{\partial z^2} = PQ,$$

welche sich durch Differentiation der letzten der Gleichungen (X) und Berücksichtigung der oft erwähnten Gleichungen (9) ergiebt, so findet man:

$$\frac{\vartheta}{\nu'^2}\sqrt{\nu'^2 - \frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\nu''}{\nu'} = PQ,$$

wenn der Abkürzung wegen:

$$\vartheta = \left| X' \frac{dX'}{\partial z} \frac{\partial^2 X'}{\partial z^2} \right|, \qquad \nu'' = \frac{d\nu'}{dz}$$

gesetzt wird. Führt man jetzt den Werth des Productes PQ, ferner den Werth von P^2 und den durch die Gleichung (10) gegebnen Werth von $Q_1 P$ in (P) ein, so stellt sich die Bedingung der Existenz einer gemeinschaftlichen Lösung der Fundamentalgleichung (17) und der Gleichung $J(z) = 0$ in der Form dar:

$$\text{(N)} \qquad -\frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}}a + \alpha\left(\frac{\vartheta}{\nu'^2}\sqrt{\nu'^2 - \frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\nu''}{\nu'}\right) - \beta\left(\nu'^2 - \frac{1}{\sigma}\right) = 0.$$

Unter der Voraussetzung, dass zunächst die Grösse α nicht der Null gleich sei, und unter Einführung der Abkürzungen:

$$\rho_1 = \frac{2\beta\sqrt{\sigma} - a}{2\sigma\alpha}, \qquad \lambda_1 = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\sigma},$$

$$m = \frac{\vartheta}{\nu'^2}, \qquad n = \frac{\nu''}{\nu'}$$

erscheint diese Bedingung in der Gestalt:

$$\text{(N')} \qquad \rho_1 + \lambda_1 \nu'^2 + m\sqrt{\nu'^2\sigma - 1} + n = 0.$$

Die Grössen ν'^2, m, n der vorstehenden Gleichung sind von der Variablen σ unabhängig. Daher ergiebt sich durch Differentiation nach σ:

$$\text{(N'')} \qquad \frac{\partial \rho_1}{\partial \sigma} + \nu'^2\frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} + \frac{m}{2}\frac{\nu'^2}{\sqrt{\nu'^2\sigma - 1}} = 0,$$

und durch Elimination der Function m, nach abermaliger Differentiation in Beziehung auf σ, erscheint schliesslich die Gleichung:

$$(\nu'^2\sigma - 1)\left(\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \sigma^2} + \nu'^2\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \sigma^2}\right) + \frac{\nu'^2}{2}\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial \sigma} + \nu'^2\frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma}\right) = 0.$$

Zum Bestehen der Bedingungsgleichung (N) ist es daher erforderlich, dass die vorstehende quadratische Gleichung für ν'^2 eine von σ unabhängige Wurzel zulasse. Tritt dieser Umstand ein, so folgt durch Integration die Gleichung (N″) zurück. Alsdann bestimmt diese letztere Gleichung die Function m oder vielmehr ϑ als Function der Variablen z. Eine abermalige Integration führt zur Gleichung (N′), aus welcher die Function n bestimmt werden kann.

Aber nur in dem besonderen Falle, dass die so bestimmte Function n sich mit der Function $\frac{\nu''}{\nu'}$ identisch erweist, besteht die ursprüngliche Gleichung (N), und kann die singuläre Bedingung $P_1 = 0$ erfüllt werden. Die Erledigung des Falles, dass die vorstehende quadratische Gleichung für die Function ν'^2 durch jeden Werth dieser Grösse identisch erfüllt würde, bedarf kaum der Andeutung.

Wenn aber die Grösse α als Null vorausgesetzt wird, so giebt die Gleichung (N) ohne Weiteres die Bedingung der Coexistenz der Fundamentalgleichung (17) und der Gleichung $J(z) = 0$ in der Form

$$\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{2\sqrt{\sigma^2}} \frac{a}{\beta} = \nu'^2$$

an. Sind die Functionen a und β geeignet, diese Bedingung durch eine von σ unabhängige Grösse ν'^2 zu erfüllen, so ist damit ν'^2 selbst bestimmt, während die Function ϑ, die ebenfalls von σ unabhängig ist, völlig willkürlich bleibt.

Die Kenntniss der zwei Functionen ν'^2 und ϑ reicht in jedem Falle aus, um auf die Cosinus X', Y', Z' und mit ihnen auf die anderen X, Y, Z zurückzuschliessen. Nach geschehener Ermittelung derselben würden sich die Coordinaten ξ, η, ζ derjenigen Flächen, für welche die Bedingung $P_1 = 0$ eintreten würde, durch die in meiner Abhandlung angegebenen Quadraturen bestimmen.

Eine einfache, schon am angeführten Orte benützte Buchstabenvertauschung in den vorstehenden Rechnungen würde diejenigen Kriterien ergeben, für welche die Gleichung $Q_1 = 0$ erfüllt sein könnte.

Functionen a, b, α, β, welche diese Kriterien erfüllen, sind daher durch die Voraussetzung, dass weder P_1 noch Q_1 für eine der betrachteten Flächen verschwinden dürfen, aus den in meiner Abhandlung gegebnen Entwickelungen ausgeschlossen. Will man solche Functionen zulassen, so würden den durch die Fundamentalgleichungen bestimmten Flächen noch diejenigen hinzuzufügen sein, für welche die betreffende Degeneration der Abbildung eintritt.

Zur vollen Einsicht in das Verhalten der ausgeschlossenen Singularität führt schliesslich die Betrachtung der Transformation, welche die Fundamentalgleichung (17) in die zweite Fundamentalgleichung (17') (l. c.

pag. 181) überführt. Die Formeln diese Transformation vermittelnden Formeln sind an der betreffenden Stelle nicht mitgetheilt worden, ergeben sich aber sofort aus der Combination der oben angegebnen Formeln (15) und (15′) in folgender Gestalt:

$$J(z) = -\frac{\sigma^3}{J'(z)}, \qquad J'(z) = -\frac{\sigma^3}{J(z)},$$

$$\Delta_2(z) = \frac{\sigma(\theta'(z) - \sigma)}{J'(z)}, \qquad \Delta_2'(z) = \frac{\sigma(\theta(z) - \sigma)}{J(z)},$$

$$\theta(z) = \frac{\sigma(J'(z) - \sigma\Delta_2'(z))}{J'(z)}, \qquad \theta'(z) = \frac{\sigma(J(z) - \sigma\Delta_2(z))}{J(z)}.$$

Bezeichnet man durch $A(z)$ die linke Seite der Fundamentalgleichung (17), durch $A'(z)$ diejenige der Fundamentalgleichung (17′) (l. c. pag. 181) so hat man vermöge dieser Transformationsformeln die beiden Identitäten

$$\sigma\sqrt{\sigma}A(z) = -J(z)A'(z),$$

$$\sigma\sqrt{\sigma}A'(z) = J'(z)A(z).$$

Aus ihnen geht hervor, dass jede Function z der Variablen u, v welche $A(z)$ zu Null macht, als Function der Variablen u', v' auch $A'(z)$ zum Verschwinden bringt, wenn diese Function nicht etwa $J(z)$ annulirt, und dass umgekehrt, wenn nicht etwa $J'(z)$ verschwindet, $A'(z)$ mit $A(z)$ gleichzeitig zu Null wird.

Unter der Voraussetzung, dass die Bedingungen, mit denen die Gleichungen $P_1 = 0$ oder $Q_1 = 0$ verträglich sind, ausgeschlossen bleiben, haben daher die Fundamentalgleichungen $A(z) = 0$ und $A'(z) = 0$ den gleichen Umfang an Integralen und bestimmen alle Flächen von dem betreffenden reducirten Linienelement.