SUR L'INTÉGRALE FINIE D'UNE FONCTION ENTIÈRE

PAR

A. HURWITZ

à ZÜRICH.

Je reviens ajourd'hui au mémoire que j'ai publié sous ce titre dans le tome 20 de ce journal pour y ajouter une citation relative à un mémoire important de M. APPELL *sur les fonctions périodiques de deux variables*,[1] dont j'ai eu connaissance récemment par l'obligeance de son illustre auteur. M. APPELL y donne une démonstration du théorème de M. GUICHARD en formant des fonctions entières $\psi_n(z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ satisfaisant aux identités

$$\psi_n(z+1) - \psi_n(z) = z^n$$

et ayant la propriété que la série

$$G(z) = a_0\psi_0(z) + a_1\psi_1(z) + \ldots + a_n\psi_n(z) + \ldots$$

est convergente pour toute valeur de z, si la série

$$H(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

représente une fonction entière. Ainsi, l'idée fondamentale dont je pars dans mon mémoire appartient à M. APPELL. Seulement il y a une différence quant'au développement de l'idée. Les fonctions $\psi_n(z)$ de M. APPELL sont définies par l'intégrale affectée de coupures:

$$\psi_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2n\pi zi} + e^{-2n\pi zi}}{e^{2n\pi zt} + e^{-2n\pi zt}} \cdot \frac{i^{n+1} t^{n+1} e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi zi}} dt,$$

[1] Journal de mathématiques pures et appliquées, quatrième série, t. 7 (1891).

tandis que les fonctions $\psi_n(z)$ dont je me sers et que je désigne par $\psi_{n,n}(z)$ dans mon mémoire ont l'expression suivante:

$$\psi_{n,n}(z) = \varphi_n(z) - \underline{|n}\sum_k \frac{1 - e^{2k\pi iz}}{(2k\pi i)^{n+1}}, \quad (k = +1, -1, +2, -2, .., +n, -n)$$

où $\varphi_n(z)$ désigne la fonction de BERNOULLI. Comme le démontre M. APPELL la fonction $\psi_n(z)$ diffère de $\varphi_n(z)$, de même que la fonction $\psi_{n,n}(z)$, d'un polynôme en $e^{2\pi iz}$ et $e^{-2\pi iz}$; mais les coefficients de ce polynôme se présentent sous la forme d'intégrales définies et ne sont pas susceptibles d'une représentation explicite et simple.

Zürich, janvier 1898.