# SUR LES PROPRIÉTÉS DU POTENTIEL ET SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

## § 1. *Introduction.*

Une courbe de genre $p$ dépend de $3p-3$ modules; les fonctions $\theta$ à $p$ variables qui dérivent d'une courbe algébrique par le procédé de RIEMANN dépendent donc de $3p-3$ paramètres arbitraires. Les fonctions $\theta$ les plus générales de $p$ variables dépendent de

$$\frac{p(p+1)}{2}$$

paramètres arbitraires. Pour $p=2$ et pour $p=3$, les deux nombres sont égaux et l'on a:

$$3p-3=\frac{p(p+1)}{2}.$$

Pour $p>3$, le premier nombre est toujours plus petit que le second. Il y a donc des fonctions $\theta$ qu'on ne peut obtenir par les procédés de RIEMANN.

Nous arrivons donc à cette conclusion que les fonctions définies par RIEMANN ne sont pas les fonctions les plus générales qui ont $p$ variables et $2p$ périodes. Nous sommes ainsi amenés à nous poser la question suivante:

Toutes les fonctions qui ont $p$ variables et $2p$ périodes peuvent-elles être regardées comme un quotient de fonctions $\theta$?

WEIERSTRASS s'est préoccupé de cette question et est arrivé à démontrer que la réponse doit être affirmative.

Mais sa démonstration est restée longtemps inédite et n'était connue que de quelques-uns de ses élèves.

M. PICARD et moi, abordâmes le même problème en 1883, et publiâmes à ce sujet une note dans les Comptes Rendus (décembre 1883). Nous connaissions le résultat de WEIERSTRASS; mais nous ignorions les procédés par lesquels il y était parvenu.

Quand la démonstration de WEIERSTRASS ayant été enfin imprimée (oeuvres complètes, tome 3) je pus en avoir connaissance, je reconnus la complète identité des deux démonstrations.

La démonstration de M. APPELL est au contraire complètement différente de celle de WEIERSTRASS.

Mais elle se rattache à un problème différent, étroitement apparenté à celui qui nous occupe, et dont je dois d'abord dire quelques mots.

Soit une fonction de plusieurs variables; elle est *méromorphe*, c'est à dire que dans le voisinage d'un point quelconque, elle peut être égalée au quotient de deux séries de puissances, convergentes dans une certaine étendue. Est-elle toujours le quotient de deux fonctions entières, c'est à dire de deux séries de puissances, *toujours* convergentes?

La réponse doit être affirmative. C'est ce que j'ai démontré dans le tome 2 des Acta mathematica.

En s'appuyant sur ce résultat et sur les propriétés de certaines équations aux différences finies, M. APPELL a donné une démonstration entièrement nouvelle du théorème de WEIERSTRASS (Journal de Liouville 1891).

Mais en réflechissant sur la démonstration contenue dans mon mémoire cité plus haut du tome 2 des Acta, je me suis aperçu qu'il suffit d'y changer peu de chose pour en tirer une troisième démonstration du théorème de WEIERSTRASS, entièrement différente des deux premières.

C'est cette 3$^e$ démonstration dont je voudrais faire l'objet du présent mémoire.

Je dois m'appuyer sur les propriétés du potentiel dans l'espace à $n$ dimensions. Ces propriétés sont bien connues et je n'aurai le plus souvent qu'à les rappeler. Mais quelques-unes d'entre elles présentent un certain intérêt; on me pardonnera si, à l'occasion, j'y insiste un peu plus qu'il n'est nécessaire pour mon sujet.

C'est ainsi que les §§ 4 et 5 pourraient être supprimés sans que la démonstration en souffrît le moins du monde.

J'observerai que la démonstration que je donne ici est plus simple que celle que j'ai donnée dans le tome 2, où j'ai employé un détour inutile, dans la crainte un peu puérile de redémontrer des théorèmes déjà connus.

## § 2. *Fonctions harmoniques.*

Une fonction $V$ de $n$ variables

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

est dite *harmonique* dans un certain domaine:

1°. Si dans ce domaine elle est finie, continue et possède des dérivées des deux premiers ordres.

2°. Si dans ce domaine ses dérivées du second ordre satisfont à l'équation de LAPLACE:

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx_1^2} + \frac{d^2 V}{dx_2^2} + \ldots + \frac{d^2 V}{dx_n^2} = 0;$$

si le domaine s'étend à l'infini, il faut de plus que la fonction $V$ s'annule à l'infini.

Considérons les $n$ variables $x$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $n$ dimensions; la distance du point mobile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, au point fixe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est égale par définition à

$$r = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}.$$

On voit aisément que

$$r^{2-n}$$

est une fonction harmonique dans tout l'espace sauf au point

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \ldots, \quad x_n = a_n.$$

Pour $n = 3$, c'est à dire dans l'espace ordinaire; on a

$$r^{2-n} = \frac{1}{r};$$

nous retombons donc sur le potentiel newtonien.

Les propriétés du potentiel newtonien sont bien connues; elles peuvent d'ailleurs en général être étendues facilement au cas de $n$ quelconque.

La première de ces propriétés est le theorème de Green exprimé par l'équation:

$$\int\left(V\frac{dU}{d\nu} - U\frac{dV}{d\nu}\right)d\omega = \int(V\Delta U - U\Delta V)d\tau;$$

la seconde intégrale est étendue à tous les éléments $d\tau$ d'un volume $T$ et la première à tous les éléments $d\omega$ de la surface $S$ qui limite ce volume.

La dérivée $\frac{dV}{d\nu}$ représente la dérivée »estimée suivant la normale à l'élément $d\omega$», c'est à dire que l'on a:

$$\frac{dV}{d\nu} = l_1\frac{dV}{dx_1} + l_2\frac{dV}{dx_2} + l_3\frac{dV}{dx_3},$$

$l_1$, $l_2$ et $l_3$ étant les cosinus directeurs de l'élément de surface $d\omega$.

Les fonctions $V$ et $U$ doivent être finies et continues, et posséder des dérivées des deux premiers ordres.

**Théorème 1.** Si $V$ et $U$ sont des fonctions harmoniques, il reste

$$\int\left(V\frac{dU}{d\nu} - U\frac{dV}{d\nu}\right)d\omega = 0.$$

Une autre propriété du potentiel newtonien est la suivante: si un potentiel est dû à des masses attirantes, il est une fonction holomorphe de $x_1$, $x_2$, $x_3$ en tout point situé hors des masses attirantes.

**Théorème 2.** Considérons par exemple une surface attirante; soit $d\omega'$ un élément de cette surface; $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ les coordonnées du centre de gravité de cet élément; $r$ la distance des deux points $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ et $x_1$, $x_2$, $x_3$. Le potentiel aura pour expression:

$$V = \int \frac{\delta' d\omega'}{r},$$

$\delta'$ étant une fonction de $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$; c'est cette fonction que l'on appelle ordinairement la densité superficielle de la matière attirante.

Considérons une sphère:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2$$

ayant pour centre l'origine et supposons que la surface attirante soit tout entière en dehors de cette sphère de sorte que l'on ait:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 > \rho^2.$$

Développons:

$$\frac{1}{r} = [(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)]^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les puissances de $x_1$, $x_2$, $x_3$. Les coefficients du développement seront plus petits que les coefficients correspondants du développement de:

$$\frac{1}{\rho}\left[1 - \sum\left(\frac{2x_k}{\rho} + \frac{x_k^2}{\rho^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Le développement est donc uniformément convergent par rapport à $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ pourvu que:

$$\sum\left(\frac{2|x_k|}{\rho} + \frac{x_k^2}{\rho^2}\right) < 1,$$

ou

$$\sum\left(1 + \frac{|x_k|}{\rho}\right)^2 < 4$$

ou enfin pourvu que:

$$(1) \qquad |x_1| < \rho\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \; ; \; |x_2| < \rho\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \; ; \; |x_3| < \rho\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right).$$

Plus généralement le développement de

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(x'_k - x_k)^2\right]^p$$

suivant les puissances croissantes des $x_k$ a ses coefficients plus petits que ceux du développement de:

$$\rho^{2p}\left[1 - \sum\left(\frac{2x_k}{\rho} + \frac{x_k^2}{\rho^2}\right)\right]^p$$

en posant

$$\rho^2 = \sum x_k'^2.$$

Le développement converge donc uniformément pourvu que:

$$|x_k| < \rho\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right). \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

Soit donc:

$$\sum A x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \tag{2}$$

le développement de $\frac{1}{r}$ suivant les puissances de $x_1$, $x_2$ et $x_3$. La convergence de ce développement est uniforme, tant par rapport à $x'_1, x'_2, x'_3$ que par rapport à $x_1$, $x_2$, $x_3$ pourvu que ces quantités satisfassent aux inégalités:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \geqq \rho^2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqq \rho^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 - \varepsilon$$

$\varepsilon$ etant une quantité aussi petite que l'on veut.

Les coefficients $A$ sont, bien entendu, des fonctions des $x'_k$.

Il vient alors:

$$V = \int \frac{\delta' d\omega'}{r} = \sum x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \int A\delta' d\omega'. \tag{3}$$

Comme la convergence de la série (2) est uniforme, la série du dernier membre de (3) converge également et représente $V$. Donc le potentiel

$V$ peut être développé en série procédant suivant les puissances de $x_1$, $x_2$, $x_3$ pourvu que les modules de ces quantités soient assez petits.

Pour que ce résultat soit exact, il n'est pas nécessaire que la fonction $\delta'$ soit finie et continue, il suffit que l'intégrale:

$$\int |\delta'| d\omega'$$

existe et soit finie. Par exemple, en un point $Q$ de la surface attirante, la densité $\delta'$ pourra devenir infinie, pourvu que le produit de la densité $\delta'$ au point $M'$ par la distance $M'Q$ tende vers une limite finie quand la distance $M'Q$ tend vers zéro.

En effet, d'après la discussion précédente nous avons:

$$|A| < Bh^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, \qquad h < 1$$

$B$ et $h$ étant deux nombres indépendants des exposants $\alpha$ et des coordonnées $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$. On a donc:

$$\left|\int A\delta' d\omega'\right| < h^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} B \int |\delta'| d\omega'$$

ce qui montre que la série (3) converge pourvu que $\int |\delta'| d\omega'$ soit finie.

Par un simple changement d'origine, on démontrerait que $V$ est développable suivant les puissances de $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2$, $x_3 - a_3$ pourvu que l'on puisse trouver des nombres $\rho$ et $\varepsilon$ tels que

$$(x'_1 - a_1)^2 + (x'_2 - a_2)^2 + (x'_3 - a_3)^2 \geqq \rho^2,$$
$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 \leqq \rho^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 - \varepsilon.$$

Or c'est ce qu'on peut toujours faire, pourvu que le point $a_1$, $a_2$, $a_3$ ne soit pas sur la surface attirante.

Le potentiel $V$ est donc une fonction holomorphe dans tout l'espace sauf sur la surface attirante.

En particulier, ce sera une fonction holomorphe en tout point de la sphère:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2.$$

Cela ne veut pas dire que la série (3) converge en tous les points de cette sphère; tout ce que nous avons démontré c'est que la convergence a lieu en tous les points de la sphère concentrique dont le rayon est

$$\rho\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right).$$

Mais la série présente une particularité curieuse; supposons que dans la série (3) on groupe ensemble tous les termes de même degré; chacun de ces groupes formera un polynôme homogène en $x_1$, $x_2$, $x_3$ et satisfaisant à l'équation de LAPLACE; c'est ce qu'on appelle un »polynôme sphérique».

Quand les termes sont ainsi groupés, la série (3) converge en tous les points de la sphère de rayon $\rho$; et en effet la série (2), si l'on convient de grouper ensemble les termes de même degré, converge uniformément dans toute sphère de rayon plus petit que $\rho$.

Je n'insisterai pas davantage sur la démonstration de cette proposition qui est bien connue et qui ne m'est d'ailleurs pas utile pour mon objet.

La condition de convergence absolue de la série (3) est donc

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2$$

si on groupe ensemble les termes de même degré et

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2$$

si on laisse ces termes séparés les uns des autres.

C'est ainsi que la série alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

n'est pas absolument convergente, mais qu'elle le devient si on groupe les termes de la manière suivante:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots.$$

Passons au cas dit de la double couche.

**Théorème 3.** Soient $l'_1, l'_2, l'_3$ les cosinus directeurs de l'élément de surface $d\omega$; $x'_1, x'_2, x'_3$ les coordonnées du centre de gravité de cet élément, et $\delta'$ une fonction quelconque de ces coordonnées; soit toujours $r$ la distance des points $x_1, x_2, x_3$ et $x'_1, x'_2, x'_3$. Considérons l'intégrale

$$V = \int \delta' d\omega' \left[ l'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_1} + l'_2 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_2} + l'_3 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_3} \right].$$

Cette intégrale est ce qu'on appelle le potentiel d'une double couche. Soit encore:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \geqq \rho^2$$

soit:

$$l'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_1} + l'_2 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_2} + l'_3 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_3} = \sum A x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \tag{4}$$

le développement de l'expression qui figure entre parenthèses sous le signe $\int$ par rapport aux puissances de $x_1, x_2$ et $x_3$. Comme $l'_1, l'_2$ et $l'_3$ sont limités, nous voyons d'abord que ce développement converge et que la convergence est uniforme tant par rapport aux $x'$ que par rapport aux $x$ pourvu que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2 \left( \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right)^2 - \varepsilon.$$

Par conséquent $V$ peut se développer suivant les puissances de $x_1, x_2, x_3$ et le développement converge pourvu que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2.$$

Donc le potentiel $V$ d'une double couche attirante est une fonction holomorphe dans tout l'espace, sauf sur la double couche attirante elle-même.

Cela resterait vrai, même si $\delta'$ pouvait devenir infini, pourvu que l'intégrale

$$\int |\delta'| d\omega'$$

soit finie.

Enfin si on groupe ensemble les termes de même degré, le développement de $V$ converge absolument pourvu que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2$$

et chaque terme de ce développement est un polynôme sphérique.

**Théorème 4.** Considérons une surface fermée quelconque $S$.

Soit $V$ une fonction qui soit harmonique à l'intérieur de $S$, sauf sur tous les points d'une certaine courbe singulière $C$.

Soit $\rho$ la plus courte distance du point $x_1, x_2, x_3$ à la courbe singulière $C$. Je suppose que

$$\frac{V}{\log \rho}, \rho \frac{dV}{dx_1}, \rho \frac{dV}{dx_2}, \rho \frac{dV}{dx_3}$$

restent finis quand $\rho$ tend vers zéro et que le point $x_1, x_2, x_3$ se rapproche indéfiniment de la courbe $C$.

Je supposerai que la surface $S$ et la courbe $C$ sont analytiques et qu'elles ne se touchent en aucun point de façon qu'elles se coupent sous un angle fini.

Considérons maintenant le vecteur $F$ dont les composantes sont

$$\frac{dV}{dx_1}, \frac{dV}{dx_2}, \frac{dV}{dx_3}.$$

Soit ensuite $M$ le point $x_1, x_2, x_3$ et $N$ le point de la courbe $C$ qui est le plus rapproché de $M$; la droite $MN$ est par conséquent normale à la courbe $C$ et c'est sa longueur que nous avons appelée plus haut $\rho$.

Soit $\Phi$ la projection du vecteur $F$ sur la droite $MN$.

Je suppose que le produit $\rho\Phi$ tend vers une limite bien déterminée $2\mu$ quand le point $M$ se rapproche indéfiniment du point $N$. Cette limite $2\mu$ est, bien entendu, une fonction de la position du point $N$ sur la courbe $C$; mais elle ne dépend pas de la direction de la droite $MN$ dans le plan normal en $N$ à la courbe $C$.

Nous envisagerons encore un point $P$ intérieur à $S$ et dont les coordonnées s'appelleront $y_1, y_2, y_3$.

Construisons un domaine $D$ défini par les trois conditions suivantes:

1° Les points de ce domaine sont intérieurs à $S$.

2° La distance d'un point de ce domaine à $P$ est plus grande que $\varepsilon$.

3° La distance d'un point de ce domaine à la courbe $C$ est plus grande que $\varepsilon$.

Le domaine $D$ est limité par trois surfaces:

1° par la surface $S$, ou plutôt par la portion $S_1$ de cette surface dont tous les points sont à une distance de $C$ plus grande que $\varepsilon$;

2° par la sphère $\Sigma$ de centre $P$ et de rayon $\varepsilon$;

3° par une surface-canal $K$, enveloppe des sphères de rayon $\varepsilon$ dont le centre est sur $C$. L'équation de cette surface-canal peut s'écrire $\rho = \varepsilon$.

Si la courbe $C$ coupe la surface $S$ en $h$ points, la surface-canal $K$ découpera sur la surface $S$, si $\varepsilon$ est très petit, $h$ petites courbes fermées entourant ces $h$ points. La portion de $S$ située en dehors de ces $h$ petites courbes est celle que nous venons d'appeler $S_1$; la portion de $S$ située à l'intérieur de ces $h$ petites courbes pourra s'appeler $S_2$.

Posons

$$r^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2; \qquad U = \frac{1}{r}.$$

Les fonctions $V$ et $U$ sont harmoniques dans le domaine $D$ et le théorème de Green nous donne:

$$\int \left( V \frac{dU}{d\nu} - U \frac{dV}{d\nu} \right) d\omega = 0.$$

Les intégrales doivent être étendues à toutes les surfaces qui limitent le domaine $D$, c'est à dire aux surfaces $S_1$, $\Sigma$ et $K$; nous aurons donc:

$$\int_{S_1} + \int_{\Sigma} + \int_{K} = 0.$$

Faisons maintenant tendre $\varepsilon$ vers 0 et voyons vers quelle limite tendra chacune de ces trois intégrales.

Occupons-nous d'abord de $\int\limits_{S_1}$. Je dis que cette intégrale tend vers une limite finie et déterminée que l'on peut considérer, d'après les conventions habituelles, comme la définition de l'intégrale $\int\limits_{S}$ étendue à la surface $S$ tout entière.

Il suffit pour cela de montrer que l'intégrale

$$\int_S \left| V\frac{dU}{d\nu} - U\frac{dV}{d\nu} \right| d\omega$$

est finie; la fonction sous le signe $\int$ devient infinie aux $h$ points où la courbe $C$ coupe la surface $S$; mais comme il s'agit d'une intégrale double, il suffit, pour que l'intégrale soit finie, qu'en tout point $M$, voisin de l'un de ces $h$ points que j'appelle $Q$, la fonction sous le signe $\int$ soit au plus de l'ordre de l'inverse de la distance $MQ$, ou ce qui revient au même de l'ordre de $\frac{1}{\rho}$.

Or $U$ et $\frac{dU}{d\nu}$ sont finis, $V$ est de l'ordre de $\log \rho$ et $\frac{dV}{d\nu}$ de l'ordre de $\frac{1}{\rho}$. La condition est donc remplie.

Pour la même raison

$$\int_S |V| d\omega, \qquad \int_S \left| \frac{dV}{d\nu} \right| d\omega$$

sont finies. Donc d'après un théorème démontré plus haut l'intégrale

$$\int_S \left( V\frac{dU}{d\nu} - U\frac{dV}{d\nu} \right) d\omega = \int V\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} d\omega - \int \frac{dV}{d\nu}\frac{d\omega}{r}$$

est une fonction holomorphe de $y_1, y_2, y_3$ pourvu que le point $y_1, y_2, y_3$ soit à l'intérieur de $S$.

En effet l'intégrale

$$\int V\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} d\omega$$

n'est autre chose que le potentiel de double couche envisagé plus haut

$$\int \delta' d\omega' \left[ l'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_1} + l'_2 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_2} + l'_3 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_3} \right];$$

les notations seules sont changées, on passe de la seconde intégrale à la première en changeant $x_1, x_2, x_3$ en $y_1, y_2, y_3$; $x'_1, x'_2, x'_3$ en $x_1, x_2, x_3$; $d\omega'$ en $d\omega$; $\delta$ en $V$.

De même l'intégrale

$$\int \frac{dV}{d\nu}\frac{d\omega}{r}$$

n'est autre chose que l'intégrale

$$\int \delta \frac{d\omega'}{r}$$

qui représente le potentiel d'une surface attirante. Il n'y a qu'un changement de notations et l'on passe de l'une à l'autre en changeant les $x$ en $y$, les $x'$ en $x$, $d\omega'$ en $d\omega$, $\delta$ en $\frac{dV}{d\nu}$.

Voici donc un premier résultat: *la limite pour* $\varepsilon = 0$ *de l'intégrale* $\int\limits_{S_1}$ *est une fonction holomorphe des* $y$.

Passons à l'intégrale $\int\limits_{\Sigma}$; la surface de la sphère est $4\pi\varepsilon^2$. $V$ et $\frac{dV}{d\nu}$ sont finis; $U$ est égal à $\frac{1}{\varepsilon}$ et $\frac{dU}{d\nu}$ à $\frac{1}{\varepsilon^2}$.

Donc

$$\int \frac{dV}{d\nu}\frac{d\omega}{r}$$

est de l'ordre de $\varepsilon$ et tend vers $0$; et d'autre part

$$\lim \int V\frac{dU}{d\nu}d\omega = \lim \int V\frac{d\omega}{\varepsilon^2} = 4\pi V(y_1, y_2, y_3)$$

c'est à dire que

$$\lim \int\limits_{\Sigma} = 4\pi V(y_1, y_2, y_3).$$

Considérons enfin l'intégrale $\int\limits_{K}$.

La surface-canal $K$ est engendrée pas des circonférences de rayon $\varepsilon$ dont le plan est normal à la courbe $C$. Soient $Q$ et $Q'$ deux points infiniment voisins de la courbe $C$; considérons les deux circonférences dont le plan est normal à $C$ aux deux points $Q$ et $Q'$. La portion de la surface comprise entre ces deux circonférences sera ce que j'appellerai un »segment» de la surface.

Si l'arc $QQ'$ est égal à $ds$, l'aire du segment correspondant sera $2\pi\varepsilon ds$. Considérons notre intégrale

$$\int\left(V\frac{dU}{d\nu}-U\frac{dV}{d\nu}\right)d\omega$$

et étendons-la à ce segment.

$U$ et $\frac{dU}{d\nu}$ sont finies; $V$ est de l'ordre de $\log\varepsilon$ et $\frac{dV}{d\nu}$ de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$. Alors l'intégrale

$$\int V\frac{dU}{d\nu}d\omega$$

est de l'ordre de $\varepsilon\log\varepsilon$ et tend vers o. L'intégrale:

$$\int\frac{dV}{d\nu}Ud\omega=\int\frac{dV}{d\nu}\frac{d\omega}{r}$$

tend au contraire vers une limite finie; qui est égale au produit:

$$2\pi ds.\lim\left(\varepsilon\frac{dV}{d\nu}\right)\lim\frac{1}{r}.$$

La limite de $\varepsilon\frac{dV}{d\nu}$ est ce que j'ai appelé plus haut $2\mu$. La limite de $\frac{1}{r}$ est l'inverse de la distance du point $P$ au centre de gravité de l'élément $ds$.

L'intégrale devrait être étendue à la portion $K_1$ de la surface $K$ qui est à l'intérieur de $S$; considérons l'intégrale

$$\int\limits_{K_2}$$

étendue à la portion $K_2$ de la surface $K$ engendrée par les circonférences de rayon $\varepsilon$ dont le centre est sur la partie de $C$ intérieure à $S$.

Les deux surfaces $K_1$ et $K_2$ ne coïncident pas exactement parce qu'il peut y avoir des circonférences de rayon $\varepsilon$ qui ne sont que partiellement intérieures à $S$, ou encore des circonférences qui sont intérieures à $S$ mais dont le centre est extérieur à $S$, ou inversement.

Mais si $\varepsilon$ est très-petit, l'aire totale des parties de $K_1$ qui n'appartiennent pas à $K_2$, ou celle des parties de $K_2$ qui n'appartiennent pas à $K_1$, est de l'ordre de $\varepsilon^2$. Et, comme la fonction sous le signe $\int$ est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$, la différence

$$\int_{K_1} - \int_{K_2}$$

est de l'ordre de $\varepsilon$ et tend vers 0.

Quant à l'intégrale $\int\limits_{K_2}$, elle est la somme des intégrales relatives aux segments qui correspondent à la partie de $C$ intérieure à $S$. Elle tend donc vers la limite:

$$-4\pi \int \frac{\mu ds}{r}$$

où $r$ désigne la distance du point $P$ à l'élément $ds$.

C'est, au facteur $-4\pi$ près, le potentiel par rapport au point $P$ de la ligne attirante $C$, la densité linéaire étant égale à $\mu$.

Ce potentiel multiplié par $-4\pi$ est donc la limite vers laquelle tend notre intégrale $\int\limits_{K}$.

Donc en passant à la limite, notre équation

$$\int_{S_1} + \int_{\Sigma} + \int_{K} = 0$$

nous apprend que $V(y_1, y_2, y_3)$ est égal au potentiel de cette ligne attirante plus une fonction des $y$, holomorphe à l'intérieur de $S$.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

**Théorème 4.** *La fonction $V$ satisfaisant aux conditions énoncées plus haut est égale à l'intérieur de $S$ à une fonction holomorphe plus le potentiel d'une ligne attirante;* la ligne attirante est $C$ et la densité linéaire est $\mu$.

Si en particulier on suppose que $V$ est harmonique dans toute la région intérieure à $S$, $\mu$ sera nul; et $V$ sera une fonction holomorphe en tout point intérieur à $S$.

D'où cette conséquence.

Toute fonction harmonique dans un domaine est holomorphe dans ce domaine.

J'ai insisté un peu sur cette démonstration, parce que c'est le modèle sur lequel sera calquée plus loin la démonstration d'un théorème important.

Tous ces résultats s'étendent facilement au cas d'un nombre quelconque de variables; et d'abord le théorème de GREEN.

Considérons dans l'espace à $n$ dimensions un domaine $D$ et la variété fermée à $n-1$ dimensions $S$ qui limite ce domaine.

Considérons une portion de cette variété assez petite pour que ses équations puissent se mettre sous la forme suivante:

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}). \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

Les $u$ sont des variables auxiliaires et les $\varphi$ sont des séries procédant suivant les puissances des $u$.

Considérons le jacobien ou déterminant fonctionnel de

$$\varphi_1 + \alpha_1\xi, \ \varphi_2 + \alpha_2\xi, \quad \ldots, \quad \varphi_n + \alpha_n\xi$$

par rapport à

$$u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, \xi.$$

Ce jacobien étant évidemment une fonction linéaire des indéterminées $\alpha$, je l'appelle:

$$D_1\alpha_1 + D_2\alpha_2 + \ldots + D_n\alpha_n.$$

Soit ensuite:

$$D_0 = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_n^2}.$$

L'intégrale $n-1^{\text{ple}}$

$$\int D_0 du_1 du_2 \ldots du_{n-1}$$

étendue à une portion $\Pi$ de la variété $S$ s'appellera *l'aire* de cette portion $\Pi$; les intégrales $n-1^{\text{ples}}$

$$\int D_1 du_1 du_2 \ldots du_{n-1}, \ldots, \int D_n du_1 du_2 \ldots du_{n-1}$$

s'appelleront les projections de cette aire sur les espaces coordonnés. Si la portion $\Pi$ est infiniment petite, l'intégrale

$$\int D_0 du_1 \ldots du_{n-1}$$

pourra s'appeler l'aire d'un élément de la variété $S$ et se représenter par $d\omega$.

Les rapports

$$\frac{D_1}{D_0}, \frac{D_2}{D_0}, \ldots, \frac{D_n}{D_0}$$

seront les cosinus directeurs de l'élément $d\omega$.

Nous poserons alors, $\varphi$ étant une fonction quelconque des $x$:

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \frac{D_1}{D_0}\frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{D_2}{D_0}\frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + \frac{D_n}{D_0}\frac{d\varphi}{dx_n}.$$

Ces définitions posées, le théorème de GREEN se généralise immédiatement et l'on a:

**Théorème 1 généralisé.** Si $V$ et $U$ sont deux fonctions harmoniques dans le domaine $D$, on a:

$$\int_S \left(V\frac{dU}{d\nu} - U\frac{dV}{d\nu}\right)d\omega = 0.$$

On trouve de même:

**Théorème 2 généralisé.** Considérons l'intégrale

$$V = \int \frac{\delta' d\omega'}{r^{n-2}}$$

étendue à tous les éléments $d\omega'$ d'une variable $S$ à $n - 1$ dimensions; soient

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$$

les coordonnées de l'élément $d\omega'$; $r$ la distance des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$; $\delta'$ une fonction quelconque des $x'$ telle que l'intégrale

$$\int |\delta'| d\omega'$$

soit finie.

La fonction $V$ sera développable suivant les puissances de $x$ pourvu que

$$\Sigma x'^2 > \rho^2, \qquad \Sigma x^2 < \rho^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)^2.$$

La série converge encore absolument si

$$\Sigma x^2 < \rho^2$$

pourvu que l'on ait soin de grouper ensemble les termes de même degré.

*Corollaire.* La fonction $V$ est holomorphe dans tout l'espace à $n$ dimensions sauf pour les points de la variété $S$.

**Théorème 3 généralisé.** Considérons l'intégrale:

$$V = \int \delta' d\omega' \frac{d(r^{2-n})}{d\nu'}.$$

Dans cette formule, $\delta'$, $d\omega'$ et $r$ ont même signification que dans le théorème précédent et on pose:

$$\frac{d(r^{2-n})}{d\nu'} = \sum \frac{D'_k}{D'_0} \frac{d(r^{2-n})}{dx'_k},$$

$D'_0$ et $D'_k$ étant les quantités analogues aux $D_0$ et aux $D_k$ définis plus haut qui sont relatives à l'élément $d\omega'$.

La fonction $V$ sera encore développable suivant les puissances des $x$ si:

$$\Sigma x'^2 > \rho^2, \qquad \Sigma x^2 < \rho^2 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 2 \right)^2.$$

Si on groupe ensemble les termes de même degré, la convergence est encore absolue pour $\Sigma x^2 < \rho^2$.

*Corollaire.* La fonction $V$ est holomorphe dans tout l'espace à $n$ dimensions sauf pour les points de la variété $S$.

Le théorème 4 est également susceptible de généralisation; je ne m'en occuperai pas pour le moment parce que je me réserve de revenir avec plus de détails sur ce point important. Mais j'aurai peut-être encore besoin de plusieurs propositions qui sont des conséquences des propriétés des fonctions de Green relatives à une hypersphère. Ces propriétés étant bien connues, au moins en ce qui concerne l'espace à trois dimensions, je n'insisterai pas sur la démonstration.

**Théorème 5.** Considérons l'hypersphère:

$$\Sigma x^2 = R^2 \tag{1}$$

que j'appellerai $S$. Soit $P$ un point intérieur à l'hypersphère dont les coordonnées seront $y_1, y_2, \ldots, y_p$; nous aurons

$$\Sigma y^2 = \rho^2, \qquad \rho < R.$$

Soit $P'$ le point conjugué de $P$; ses coordonnées seront:

$$y_1\frac{R^2}{\rho^2}, \; y_2\frac{R^2}{\rho^2}, \; \ldots, \; y_n\frac{R^2}{\rho^2}.$$

Soit $r$ la distance du point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à $P$ et $r'$ sa distance à $P'$ de sorte que

$$r^2 = \sum (x-y)^2, \qquad r'^2 = \sum \left(x - y\frac{R^2}{\rho^2}\right)^2.$$

Lorsque le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est sur l'hypersphère $S$, on a:

$$\frac{r}{r'} = \frac{\rho}{R};$$

considérons alors la fonction:

$$G = \left(\frac{1}{r}\right)^{n-2} - \left(\frac{R}{\rho r'}\right)^{n-2};$$

c'est une fonction harmonique dans tout l'espace à $n$ dimensions sauf aux points $P$ et $P'$; elle s'annule quand le point $x_1, \ldots, x_n$ vient sur $S$.

Considérons une fonction $V$ harmonique à l'intérieur d'une hypersphère plus grande que $S$.

Considérons une hypersphère $\Sigma$ de rayon $\varepsilon$ et de centre $P$ et le domaine $D$ compris entre les deux hypersphères $S$ et $\Sigma$; dans ce domaine les deux fonctions $V$ et $G$ sont harmoniques et le théorème de Green nous donne:

$$\int \left(G\frac{dV}{d\nu} - \frac{dG}{d\nu}V\right) d\omega = 0.$$

L'intégration devant être étendue à tous les éléments des deux hypersphères $S$ et $\Sigma$, j'écris:

$$\int_S + \int_\Sigma = 0.$$

Quand $\varepsilon$ tend vers 0, la seconde intégrale $\int_\Sigma$ tend vers une limite finie:

$$CV(y_1, y_2, \ldots, y_n);$$

$C$ est une constante numérique, qui est égale à $n-2$ fois l'aire de l'hypersphère de rayon 1.

Quand à la première intégrale, comme $G$ s'annule sur $S$, elle se réduit à:

$$-\int \frac{dG}{d\nu} V d\omega.$$

Ainsi $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est égal à l'intégrale

$$\frac{1}{C}\int \frac{dG}{d\nu} V d\omega.$$

De même, comme la fonction $r^{2-n}$ est aussi harmonique dans tout l'espace sauf au point $P$, on trouverait:

$$V(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{C}\int \left(\frac{dr^{2-n}}{d\nu} V - r^{2-n}\frac{dV}{d\nu}\right) d\omega.$$

Mais d'après les théorèmes 2 et 3 généralisés, l'intégrale du 2[d] membre est développable suivant les puissances des $y$ pourvu que

$$\Sigma y^2 < R^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)^2.$$

Dans le cas où la fonction $V$ est harmonique dans toute portion finie de l'espace, on peut prendre $R$ aussi grand que l'on veut. Nous arrivons donc au résultat suivant:

*Si la fonction $V$ est harmonique dans toute portion finie de l'espace à $n$ dimensions*, (c'est à dire si elle satisfait partout à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ et possède partout des dérivées du second ordre, mais sans être assujettie à tendre vers 0 quand le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'éloigne indéfiniment) *cette fonction $V$ est développable suivant les puissances des $x$; ce développement est toujours convergent.*

Si on groupe ensemble les termes de même degré, chacun des groupes sera un polynôme homogène qui devra satisfaire à l'équation de Laplace; c'est à dire ce qu'on peut appeler un *polynôme hypersphérique.*

**Théorème 6.** Reprenons la formule

$$V(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{C}\int \frac{dG}{d\nu} V d\omega.$$

Si $R$ est très grand et $\rho$ fini, $r$ est de l'ordre de $R$ et $r'$ de l'ordre de $R^2$, si le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est sur $S$.

Donc $r^{2-n}$ et $r'^{2-n}$ sont de l'ordre de $R^{2-n}$ et $R^{4-2n}$. Leurs dérivées premières par rapport aux $x$ sont respectivement de l'ordre de $R^{1-n}$ et $R^{2-2n}$; et leurs dérivées secondes sont respectivement de l'ordre de $R^{-n}$ et $R^{-2n}$.

Les dérivées premières de $r^{2-n}$ par rapport aux $y$ sont égales au signe près aux dérivées premières par rapport aux $x$, elles sont donc de l'ordre de $R^{1-n}$.

De même les dérivées secondes de $r^{2-n}$ prises par rapport à l'une des variables $x$ et à l'une des variables $y$, sont égales au signe près aux dérivées secondes prises par rapport à deux variables $x$; elle sont donc de l'ordre de $R^{-n}$.

Supposons ensuite que le point $P$ vienne en $P_1$ et que la distance $PP_1$ soit finie; soit $r_1$ la distance du point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au point $P_1$ et $r_1'$ sa distance au point $P_1'$ conjugué de $P_1$; soit $\rho_1$ la distance du point $P_1$ à l'origine.

L'accroissement

$$r_1^{2-n} - r^{2-n}$$

est du même ordre que les dérivées $\frac{dr^{2-n}}{dy}$ c'est à dire de l'ordre $R^{1-n}$; de même les accroissements

$$\frac{d(r_1^{2-n} - r^{2-n})}{dx}$$

seront du même ordre que les dérivées $\frac{d^2r^{2-n}}{dx\,dy}$, c'est à dire de l'ordre de $R^{-n}$.

Si nous observons ensuite que l'on a:

$$\frac{dF}{d\nu} = \sum \frac{x_k}{R}\frac{dF}{dx_k}, \qquad \left|\frac{x_k}{R}\right| < 1;$$

on verra que

$$\frac{d(r_1^{2-n} - r^{2-n})}{d\nu}, \quad \frac{dr'^{(2-n)}}{d\nu}, \quad \frac{dr_1'^{(2-n)}}{d\nu},$$

sont du même ordre que

$$\frac{d(r_1^{2-n} - r^{2-n})}{dx}, \quad \frac{dr'^{(2-n)}}{dx}, \quad \frac{dr_1'^{(2-n)}}{dx},$$

c'est à dire respectivement de l'ordre de:

$$R^{-n}, R^{2-2n}, R^{2-2n}.$$

Nous avons:

$$G = r^{2-n} - \left(\frac{Rr'}{\rho}\right)^{2-n},$$

et nous poserons, de même:

$$G_1 = r_1^{2-n} - \left(\frac{Rr_1'}{\rho_1}\right)^{2-n}$$

et il viendra:

$$\frac{dG}{d\nu} - \frac{dG_1}{d\nu} = \frac{d(r^{2-n} - r_1^{2-n})}{d\nu} - \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-2} \frac{dr'^{(2-n)}}{d\nu} + \left(\frac{R}{\rho_1}\right)^{n-2} \frac{dr_1'^{(2-n)}}{d\nu}.$$

Dans le second membre, le premier terme est de l'ordre de $R^{-n}$ et les deux derniers sont aussi de l'ordre de: $R^{-n}$; donc le premier membre est de l'ordre de $R^{-n}$.

Cela posé, soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les coordonnées de $P_1$; nous aurons:

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) - V(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{C}\int \left(\frac{dG_1}{d\nu} - \frac{dG}{d\nu}\right) V d\omega.$$

La fonction $\frac{dG_1}{d\nu} - \frac{dG}{d\nu}$ est de l'ordre de $R^{-n}$; le champ d'intégration est de l'ordre de $R^{n-1}$; *si la fonction $V$ est finie,* l'intégrale du second membre est infiniment petite et l'on a:

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = V(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Comme les deux points $P$ et $P_1$ sont quelconques, cela veut dire que $V$ est une constante.

Nous arrivons donc à cette conséquence:

*Une fonction harmonique dans toute portion finie de l'espace et dont le module est limité se réduit à une constante.*

**Thèorème 7.** De là on peut tirer une conséquence importante: Supposons que la fonction $V$ soit harmonique dans toute partie finie de l'espace; qu'elle soit par conséquent susceptible d'être développée en une série toujours convergente de polynômes hypersphériques, qu'elle soit en un mot ce qu'on pourrait appeler une *fonction harmonique entière.*

Supposons de plus qu'elle soit $n$ fois périodique; alors l'espace à $n$ dimensions se trouvera subdivisé en une infinité de »prismatoïdes des périodes» formant un assemblage à la Bravais et à l'intérieur de ces divers prismatoïdes, la fonction reprendra les mêmes valeurs.

Son module est donc limité et elle doit se réduire à une constante; d'où cette conclusion:

*Toute fonction harmonique entière $n$ fois périodique se réduit à une constante.*

C'est aussi une conséquence de ce fait bien connu qu'une fonction harmonique ne peut avoir ni maximum ni minimum.

Je renverrai d'ailleurs pour plus de détails à un mémoire de M. Appell publié dans les Acta mathematica, tome 4.

## § 3. *Fonctions Biharmoniques.*

Soit $F = V + iW$ une fonction des $n$ variables complexes

$$z_1 = x_1 + iy_1 ; \qquad z_2 = x_2 + iy_2 ; \ldots ; z_n = x_n + iy_n .$$

On aura alors:

$$\frac{dV}{dx_k} = \frac{dW}{dy_k}, \qquad \frac{dV}{dy_k} = -\frac{dW}{dx_k}$$

d'où il suit que l'expression

$$(1) \qquad \sum \left(\frac{dV}{dx_k} dy_k - \frac{dV}{dy_k} dx_k\right)$$

est une différentielle exacte.

Si donc $V$ est la partie réelle d'une fonction $F$, l'expression (1) sera différentielle exacte.

De là nous tirons les équations:

$$\frac{d^2V}{dx_k^2}+\frac{d^2V}{dy_k^2}=0, \qquad \frac{d^2V}{dx_k\,dx_q}+\frac{d^2V}{dy_k\,dy_q}=0,$$

$$(2) \qquad \frac{d^2V}{dx_k\,dy_q}=\frac{d^2V}{dy_k\,dx_q}.$$

Toute fonction satisfaisant à ces équations (2) et d'ailleurs continue et ayant des dérivées secondes sera dite *biharmonique*. Des équations (2) on tire aisément:

$$(3) \qquad \Delta V=\sum\left(\frac{d^2V}{dx_k^2}+\frac{d^2V}{dy_k^2}\right)=0.$$

Ainsi toute fonction biharmonique est en même temps une fonction harmonique des $2n$ variables $x$ et $y$.

Si $n=1$, toute fonction harmonique est la partie réelle d'une fonction de variable complexe.

Mais, si $n>1$, il n'en est plus de même et la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $V$ puisse être regardée comme la partie réelle d'une fonction de variables complexes, c'est que cette fonction $V$ soit biharmonique.

Les équations (2) peuvent encore se mettre sous une autre forme.

Soit

$$u_k=x_k-iy_k$$

et supposons qu'au lieu des $x$ et des $y$, on prenne pour variables les $z$ et les $u$. Alors la condition pour que $V$ soit biharmonique, c'est qu'il soit de la forme:

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n)+\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

de sorte que les équations (2) peuvent être remplacées par les suivantes qu'on en déduit d'ailleurs par un calcul simple:

$$(2') \qquad \frac{d^2V}{dz_k\,du_q}=0$$

où l'indice $k$ peut être égal à $q$. Ces équations sont au nombre de $n^2$.

**Théorème 8.** Quelle est la condition pour qu'on puisse trouver un polynôme $V$ satisfaisant aux $n^2$ équations

$$\frac{d^2V}{dz_k\,du_q} = \Phi_{k.q} \tag{4}$$

où les $\Phi$ sont des polynômes donnés.

Il est clair que les $\Phi$ doivent satisfaire aux relations suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{k.q}}{dz_m} &= \frac{d\Phi_{m.q}}{dz_k} = \frac{d^3V}{dz_m\,dz_k\,du_q}, \\ \frac{d\Phi_{q.k}}{du_m} &= \frac{d\Phi_{q.m}}{du_k} = \frac{d^3V}{dz_q\,du_k\,du_m}. \end{aligned} \tag{5}$$

L'indice $q$ peut être égal à $k$ ou à $m$; mais ces deux derniers indices doivent être différents, sans quoi les relations se réduiraient à des identités.

Le nombre des relations (5) est donc $n^2(n-1)$.

Les conditions (5) sont évidemment nécessaires, je dis qu'elles sont suffisantes.

En effet supposons d'abord que les $\Phi$ soient des polynômes homogènes de degré $\lambda$ par rapport aux $z$ d'une part et homogènes de degré $\mu$ par rapport aux $u$ d'autre part:

Alors il suffira pour satisfaire aux équations (4) de faire:

$$V = \frac{\Sigma z_k u_q \Phi_{k.q}}{(\lambda+1)(\mu+1)}.$$

Il est aisé de vérifier que cette expression satisfait aux équations (4) si les conditions (5) sont remplies.

Si maintenant les $\Phi$ sont des polynômes quelconques, on n'aura qu'à les décomposer en parties homogènes tant par rapport aux $z$ que par rapport aux $u$.

*Ainsi pour qu'on puisse satisfaire aux équations* (4) *il faut et il suffit que les conditions* (5) *soient remplies.*

Il est clair d'ailleurs que si on peut y satisfaire, on peut le faire d'une infinité de manières puisqu'on peut ajouter à $V$ une fonction biharmonique quelconque sans que les équations (4) cessent d'avoir lieu.

Si on revient aux variables $x$ et $y$ les équations (4) deviennent

$$(4') \qquad \begin{aligned} \frac{d^2V}{dx_k^2} + \frac{d^2V}{dy_k^2} &= F_k, \\ \frac{d^2V}{dx_k\,dx_q} + \frac{d^2V}{dy_k\,dy_q} &= F_{kq}, \\ \frac{d^2V}{dx_k\,dy_q} - \frac{d^2V}{dx_q\,dy_k} &= F'_{kq}, \end{aligned}$$

les $F$ étant des polynômes donnés en $x$ et $y$, et les conditions (5) deviennent:

$$(5') \qquad \begin{aligned} \frac{dF_{kq}}{dx_m} + \frac{dF'_{kq}}{dy_m} &= \frac{dF_{mq}}{dx_k} + \frac{dF'_{mq}}{dy_k}, \\ \frac{dF_{kq}}{dy_m} - \frac{dF'_{kq}}{dx_m} &= \frac{dF_{mq}}{dy_k} - \frac{dF'_{mq}}{dx_k}. \end{aligned}$$

## § 4. *Potentiel d'une courbe.*

Considérons d'abord une courbe analytique dans l'espace ordinaire à trois dimensions. Soient $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ les coordonnées d'un point de cette courbe et $r$ la distance de ce point au point $x_1$, $x_2$, $x_3$. Le potentiel de cette courbe sera:

$$V = \int \frac{\delta' ds'}{r}$$

où $\delta'$ représente la densité et $ds'$ l'élément d'arc de la courbe. Je veux étudier cette courbe et son potentiel dans le voisinage d'un de ses points $O$. Je prendrai ce point, que je supposerai non singulier, pour origine des coordonnées; je prendrai la tangente en ce point pour axe des $x_1$ et le plan osculateur pour plan des $x_1x_2$; nous pourrons mettre alors les équations de la courbe sous la forme suivante:

$$x'_1 = \varphi_1(t), \qquad x'_2 = \varphi_2(t), \qquad x'_3 = \varphi_3(t)$$

les $\varphi$ étant des séries ordonnées suivant les puissances de $t$ et s'annulant avec $t$. De plus pour $t = 0$, $\frac{d\varphi_1}{dt}$ ne s'annule pas, mais

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} = 0.$$

Nous aurons d'ailleurs

$$ds' = dt\psi(t),$$

$\psi$ étant une série développée suivant les puissances de $t$, et je supposerai de plus que $\delta'$ est également développable suivant les puissances de $t$.

Cela posé:

$$r^2 = (x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2$$

est développable suivant les puissances de $t$, $x_1$, $x_2$ et $x_3$.

Ecrivons l'équation:

$$r^2 = 0$$

et résolvons-la plus rapport à $t$; cette équation comportera deux solutions:

$$t = \theta_1(x_1, x_2, x_3), \qquad t = \theta_2(x_1, x_2, x_3)$$

qui s'annulent pour $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ces deux solutions sont imaginaires bien entendu.

Considérons le produit $(t - \theta_1)(t - \theta_2)$ et posons:

$$(t - \theta_1)(t - \theta_2) = t^2 - 2Yt + Z$$

$Y$ et $Z$ seront deux séries procédant suivant les puissances des $x$. De plus on aura

$$r^2 = (t^2 - 2Yt + Z)\theta,$$

$\theta$ étant une série procédant suivant les puissances de $t$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ et *ne s'annulant pas pour*

$$t = x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Pour tous ces théorèmes, je renverrai au mémoire de WEIERSTRASS sur les fonctions de plusieurs variables (Oeuvres Complètes, Tome II, page 135 sqq) et au début de ma thèse inaugurale (Paris, Gauthier-Villars, 1879).

On aura donc:

$$V = \int \frac{\delta'\psi}{\sqrt{\theta}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2Yt + Z}} = \int \frac{Udt}{\sqrt{t^2 - 2Yt + Z}},$$

$U$ étant une série développée suivant les puissances de $t$ et des $x$.

Cela posé, nous allons nous proposer de mettre $U$ sous la forme suivante:

$$U = U_0 + \Phi(t - Y) + \frac{d\Phi}{dt}(t^2 - 2Yt + Z), \tag{1}$$

$U_0$ étant une série développée suivant les puissances des $x$, et $\Phi$ une série développée suivant les puissances des $x$ et de $t$.

Si nous mettons $U$ sous cette forme, nous en déduirons la valeur de $V$, car l'intégrale indéfinie sera

$$U_0 \log\left[(t - Y) + \sqrt{t^2 - 2Yt + Z}\right] + \Phi\sqrt{t^2 - 2Yt + Z}.$$

Si $U$ était un polynôme, il se mettrait sous la forme (1) par un procédé bien connu. Mais $U$ étant une série, il faut démontrer que ce procédé, toujours applicable, conduit à un résultat convergent.

Posons

$$t = Y + \xi, \qquad Y^2 - Z = \eta,$$

l'équation (1) devient:

$$U = U_0 + \xi\Phi + (\xi^2 - \eta)\frac{d\Phi}{d\xi}. \tag{1'}$$

Comme $U$ est développable suivant les puissances de $t$ et des $x$ et $Y$ suivant les puissances des $x$; la fonction $U$ sera développable également suivant les puissances de $\xi$ et des $x$.

D'autre part $\eta$ est développable suivant les puissances de $x$; mais nous ne nous servirons pas de cette propriété et nous traiterons $\eta$ comme une variable indépendante.

En conséquence dans l'équation (1'):

1° $U$ sera une série *donnée* procédant suivant les puissances de $\xi$ et des $x$.

2° $U_0$ sera une série *inconnue* procédant suivant les puissances de $\eta$ et des $x$.

3° $\Phi$ sera une série *inconnue* procédant suivant les puissances de $\xi$, de $\eta$ et des $x$.

Ecrivons alors:

$$U_0 = u_0 + \eta u_1 + \eta^2 u_2 + \cdots,$$
$$\Phi = \Phi_0 + \eta\Phi_1 + \eta^2\Phi_2 + \cdots.$$

Alors l'équation (1') se décompose dans la série d'équations suivantes:

$$(2')\qquad \begin{aligned} &\xi\Phi_0 + \xi^2\frac{d\Phi_0}{d\xi} + u_0 = U, \\ &\xi\Phi_1 + \xi^2\frac{d\Phi_1}{d\xi} + u_1 = \frac{d\Phi_0}{d\xi}, \\ &\xi\Phi_2 + \xi^2\frac{d\Phi_2}{d\xi} + u_2 = \frac{d\Phi_1}{d\xi}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nous sommes ainsi conduits à envisager l'équation:

$$\xi\Phi_k + \xi^2\frac{d\Phi_k}{d\xi} + u_k = \Sigma A_m\xi^m$$

$\Sigma A_m\xi^m$ étant une série donnée procédant suivant les puissances de $\xi$. On y satisfait en faisant:

$$u_k = A_0, \qquad \Phi_k = A_1 + \frac{A_2\xi}{2} + \frac{A_3\xi^2}{3} + \ldots.$$

On peut donc calculer les $\Phi_k$ et les $u_k$, mais il reste à savoir si le développement converge.

Pour cela je compare l'équation (1') à la suivante:

$$(1'')\qquad U' = U'_0 + \xi\Phi' - \frac{2\eta}{\xi}(\Phi' - \varphi')$$

$U'$ est une série donnée procédant suivant les puissances de $\xi$ et des $x$. $U'_0$ et $\Phi'$ sont des séries inconnues procédant la première suivant les puissances de $\eta$ et des $x$, la seconde suivant celles de $\xi$, de $\eta$ et des $x$, et où enfin $\varphi'$ est ce que devient $\Phi'$ pour $\xi = 0$. L'équation (1'') en posant:

$$U'_0 = \Sigma\eta^m u'_m, \qquad \Phi' = \Sigma\eta^m\Phi'_m, \qquad \varphi' = \Sigma\eta^m\varphi'_m$$

se décompose en une série d'équations:

$$(2'')\qquad \begin{aligned} &\xi\Phi'_0 + u'_0 = U', \\ &\xi\Phi'_1 + u'_1 = 2\,\frac{\Phi'_0 - \varphi'_0}{\xi}, \\ &\xi\Phi'_2 + u'_2 = 2\,\frac{\Phi'_1 - \varphi'_1}{\xi}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Supposons que $U'$ ait tous ses coefficients positifs et plus grands en valeur absolue que ceux de $U$ et comparons les équations (2') et (2''); soit:

$$U = \Sigma A\, \xi^m \quad x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, \qquad U' = \Sigma A' \xi^m \quad x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}; \qquad A' > |A|$$

$$\Phi_0 = \Sigma B_0 \xi^{m+1} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, \qquad \Phi_0' = \Sigma B_0' \xi^{m+1} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3},$$

$$\Phi_1 = \Sigma B_1 \xi^{m+3} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, \qquad \Phi_1' = \Sigma B_1' \xi^{m+3} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

Il viendra:

$$B_0 = \frac{A}{m}, \qquad B_0' = A'; \qquad B_1 = \frac{m-1}{m-2} B_0; \qquad B_1' = 2B_0';$$

ce qui montre que les $B'$ sont positifs et que:

$$B_k' > |B_k|.$$

La convergence des séries dans le cas de l'équation (1'') entraîne donc la convergence dans le cas de l'équation (1').

Or on satisfera à l'équation (1'') en faisant:

$$U_0' = \frac{U'(\sqrt{2\eta}) + U'(-\sqrt{2\eta})}{2}; \qquad \varphi' = \frac{U'(\sqrt{2\eta}) - U'(-\sqrt{2\eta})}{2\sqrt{2\eta}},$$

$$\Phi' = \varphi' + \xi \frac{U' - U_0' - \xi\varphi'}{\xi^2 - 2\eta}.$$

Inutile de dire que $U'(\sqrt{2\eta})$ représente ce que devient $U'$ quand on y change $\xi$ en $\sqrt{2\eta}$.

On voit en effet que dans ces conditions $U' - U_0' - \xi\varphi'$ est divisible par $\xi^2 - 2\eta$.

Ainsi nos séries convergent et $U$ peut se mettre sous la forme (1).

Nous pouvons alors trouver la valeur de $V$ puisque nous avons l'intégrale indéfinie:

$$U_0 \log[t - Y + \sqrt{t^2 - 2Yt + Z}] + \Phi\sqrt{t^2 - 2Yt + Z}.$$

Nous supposerons que les deux extrémités de la courbe attirante correspondent aux valeurs $t_0$ et $t_1$ du paramètre $t$; de sorte que les deux limites d'intégration seront $t_0$ et $t_1$.

Nous supposerons d'abord que $t_0$ et $t_1$ ne sont pas nuls et que par exemple

$$t_0 < 0 < t_1.$$

En d'autres termes, nous étudierons le potentiel dans le voisinage d'un point de la courbe qui n'est pas une des extrémités.

Dans ces conditions $U_0$, $\Phi(t_1)$, $\Phi(t_0)$, et les deux radicaux:

$$\sqrt{t_1^2 - 2Yt_1 + Z}\,,\quad \sqrt{t_0^2 - 2Yt_0 + Z}$$

sont des fonctions holomorphes des $x$; il en est de même de

$$\log\left[t_1 - Y + \sqrt{t_1^2 - 2Yt_1 + Z}\right].$$

Car le radical est développable suivant les puissances de $Y$ et de $Z$ et le logarithme ne devient pas infini pour $Y = Z = 0$.

Il n'en est plus de même de

$$\log\left[t_0 - Y + \sqrt{t_0^2 - 2Yt_0 + Z}\right]$$

car si l'on fait $Y = Z = 0$, il reste

$$\log(t_0 + \sqrt{t_0^2}).$$

Si l'on convient de prendre la détermination positive du radical; il faudra, puisque $t_0$ est négatif, prendre

$$\sqrt{t_0^2} = -t_0$$

d'où:

$$\log(t_0 + \sqrt{t_0^2}) = \log(t_0 - t_0) = \infty.$$

Au contraire

$$\log(-t_0 + Y + \sqrt{t_0^2 - 2Yt_0 + Z})$$

se réduit pour $Y = Z = 0$ à $\log(-2t_0)$ et n'est pas infini; c'est donc une fonction développable suivant les puissances des $x$.

Or nous avons:

$$\log(t_0 - Y + \sqrt{t_0^2 - 2Yt_0 + Z})$$
$$= \log(Z - Y^2) - \log(-t_0 + Y + \sqrt{t_0^2 - 2Yt_0 + Z}).$$

Donc:

**Théorème 9**; *le potentiel $V$ d'une courbe attirante est égal dans le voisinage d'un point de cette courbe qui n'est ni une extrémité de la courbe, ni un point singulier; ce potentiel, dis-je, est égal à une fonction $U_0$ holomorphe par rapport aux $x$, multipliée par* $\log(Z - Y^2)$, *plus une autre fonction holomorphe des $x$. D'ailleurs $Z - Y^2$ est aussi une fonction holomorphe des $x$.*

Supposons maintenant $t_0 = 0$; ou en d'autres termes, étudions le potentiel dans le voisinage d'une des extrêmités de la courbe. Alors

$$\sqrt{t_0^2 - 2t_0 Y + Z}$$

se réduit à $\sqrt{Z}$ et n'est plus une fonction holomorphe des $x$. Mais $Z$ est égal à $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, multiplié par une fonction holomorphe des $x$ ne s'annulant pas avec les $x$.

On a d'autre part

$$\log(t_0 - Y + \sqrt{t_0^2 + 2t_0 X + Z}) = \log(\sqrt{Z} - Y).$$

Le potentiel est alors égal à la fonction holomorphe $U_0$ multipliée par $\log(\sqrt{Z} - Y)$, plus une fonction holomorphe, plus une autre fonction homorphe multipliée par $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

En résumé soit une courbe attirante $AOB$, décomposons-la en deux segments $AO$ et $OB$; et prenons le point $O$ pour origine.

Dans le voisinage du point $O$, le potentiel du premier segment sera

$$U_0 \log(\sqrt{Z} - Y) + H + W\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$$

et celui du second segment:

$$U_0 \log(\sqrt{Z} + Y) + H' - W\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$U_0$, $H$, $H'$ et $W$ étant des fonctions holomorphes; celui de la courbe entière sera:

$$U_0 \log(Z - Y^2) + H + H'.$$

Pour bien nous rendre compte de la signification de ce résultat, cherchons d'abord ce que c'est que la surface $Z - Y^2 = 0$; l'équation

$$Z = Y^2$$

signifie que l'équation en $t$

$$t^2 - 2tY + Z = 0$$

a deux racines égales; or cette équation en $t$ est équivalente à la suivante:

$$r = 0.$$

Supposons donc que du point $x_1, x_2, x_3$ comme centre nous décrivions une sphère de rayon nul. Cette sphère coupera la courbe attirante en un certain nombre de points imaginaires; le lieu des points $x_1, x_2, x_3$ qui sont tels que deux de ces points imaginaires d'intersection se confondent est précisément la surface

$$Z = Y^2.$$

Cette surface est imaginaire, mais elle présente une courbe réelle qui n'est autre chose que la courbe attirante.

Cherchons maintenant la signification de $U_0$.

Notre potentiel $V$ est égal à l'intégrale:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{U dt}{\sqrt{t^2 - 2Yt + Z}}.$$

La fonction sous le signe $\int$, considérée comme fonction de $t$, présente un certain nombre de points singuliers. Représentons ces points singuliers dans le plan des $t$; nous ne nous occuperons que de ceux d'entre eux qui sont voisins de l'origine; ils sont au nombre de deux qui sont les racines de l'équation en $t$

$$t^2 - 2tY + Z = 0.$$

Soient $\tau$ et $\tau'$ ces deux points:

Quand les variables $x$ varieront, ces deux points $\tau$ et $\tau'$ varieront également; et quand les $x$ auront décrit un contour fermé; ces deux points $\tau$ et $\tau'$ décriront des contours fermés ou s'échangeront entre eux.

Dans ce dernier cas (ou bien encore si $\tau$ et $\tau'$ décrivent des contours fermés, mais de telle sorte que $\tau$ ait tourné autour de $\tau'$) l'intégrale définie $V$ ne reprendra pas sa valeur, mais elle augmentera d'une période.

Cette période que j'appelle $\Pi$ sera l'intégrale

$$\int \frac{U dt}{\sqrt{t^2 - 2tY + Z}}$$

prise le long d'un contour fermé enveloppant les deux points $\tau$ et $\tau'$. Or les diverses déterminations de notre intégrale définie $V$ correspondent aux diverses déterminations du logarithme

$$\log (Z - Y^2).$$

Quand ce logarithme augmente de $2i\pi$, $V$ augmente de $2i\pi U_0$; on a donc:

$$\Pi = 2i\pi U_0.$$

Il serait d'ailleurs aisé de vérifier que la période $\Pi$ est une fonction holomorphe des $x$. En effet, le contour fermé le long duquel cette intégrale est prise peut être choisi d'une manière quelconque pourvu qu'il enveloppe $\tau$ et $\tau'$. Je le choisirai donc fixe et indépendant des $x$. Comme il passe toujours à distance finie des deux points $\tau$ et $\tau'$, la fonction sous le signe $\int$ est en tous ses points, holomorphe par rapport à $t$ et aux $x$. L'intégrale est donc une fonction holomorphe des $x$.

C. Q. F. D.

Il faudrait pour être complet, étudier $V$ dans le voisinage d'un point singulier de la courbe attirante, par exemple d'un point de rebroussement. Je me contenterai de la remarque suivante:

Soit $\rho$ la distance du point $x_1, x_2, x_3$ au point singulier. Le produit $V\rho$ tend vers o quand le point $x_1, x_2, x_3$ se rapproche indéfiniment du point singulier en suivant une courbe quelconque non tangente à la courbe attirante.

Revenons à notre fonction $U_0$, cherchons sa valeur quand les $x$ s'annulent; c'est au facteur constant près $i\pi$ l'intégrale:

$$\int_{\tau}^{\tau'} \frac{U dt}{\sqrt{(t-\tau)(t-\tau')}}.$$

Si les $x$ sont très petits, $\tau$ et $\tau'$ sont très voisins l'un de l'autre et de zéro et quand $t$ varie de $\tau$ à $\tau'$, $t$ reste très petit. Alors sous le signe $\int$ le fonction $U$ ne prend que des valeurs très peu différentes de $A$, $A$ étant la valeur de $U$ quand $t$ et les $x$ s'annulent.

L'intégrale diffère donc peu de

$$A\int\frac{dt}{\sqrt{(t-\tau)(t-\tau')}} = Ai\pi.$$

Ainsi $U_0$ se réduit à $A$ quand les $x$ s'annulent.

Or nous avons

$$U = \frac{\delta\psi}{\sqrt{\theta}},$$

$$\psi = \sqrt{\sum\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2}; \qquad \theta(t-\tau)(t-\tau') = \Sigma(x'-x)^2.$$

Quand les $x$ s'annulent, $\tau$ et $\tau'$ s'annulent et il reste:

$$\theta t^2 = \Sigma x'^2.$$

Si $t$ est très-petit, on a sensiblement

$$x' = t\frac{dx'}{dt};$$

il reste donc:

$$\theta = \sum\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 = \psi^2.$$

On en conclut:

$$U = \delta.$$

Ainsi sur la courbe attirante, la fonction $U_0$ n'est autre chose que la densité.

Ce que nous venons de dire de l'intégrale

$$\int\frac{\delta\, ds}{r}$$

s'applique sans aucun changement si la courbe attirante, au lieu d'être dans l'espace ordinaire, est dans l'espace à $n$ dimensions et si au lieu de trois variables $x_1$, $x_2$, $x_3$, nous en avons un nombre quelconque.

Revenons encore sur quelques points de détail et d'abord sur la génération de la surface

$$Z = Y^2.$$

C'est l'enveloppe d'un cône isotrope (c'est à dire d'un sphère de rayon nul) dont le sommet décrit la courbe attirante. On voit aisément que c'est une surface développable.

Reprenons la formule donnée plus haut:

$$V = U_0 \log(Z - Y^2) + H + H';$$

on en tire:

$$\frac{dV}{dx_1} = \frac{dU_0}{dx_1} \log(Z - Y^2) + U_0 \frac{d \log(Z - Y^2)}{dx_1} + \frac{d(H + H')}{dx_1}$$

et

$$\frac{dU_0}{dx_1} V - \frac{dV}{dx_1} U_0 = \frac{dU_0}{dx_1}(H + H') + U_0 \frac{d(H + H')}{dx_1} + U_0^2 \frac{d \log(Z - Y^2)}{dx_1}.$$

Je remarque que $U_0$ et $\frac{dU_0}{dx_1}$ sont des fonctions holomorphes des $x$ et que le second membre est égal à une fonction holomorphe des $x$ divisée par $Z - Y^2$.

Donc $V$ satisfait à une équation linéaire du premier ordre à second membre et à coëfficients holomorphes.

Il est intéressant, un point de vue de la généralisation qui va suivre de retrouver ce résultat par une autre voie.

Nous avons:

$$V = \int \frac{\delta' \psi dt}{r}$$

et nous en tirons aisément:

$$\frac{dV}{dx_1} = \int \frac{dt}{r^3} \left[ r^2 \frac{d(\delta' \psi)}{dx_1} - r \frac{dr}{dx_1} \delta' \psi \right].$$

Les fonctions $\delta' \psi$, $r^2$ et

$$r^2 \frac{d(\delta' \psi)}{dx_1} - r \frac{dr}{dx_1} \delta' \psi = M$$

sont holomorphes par rapport à $t$ et aux $x$; de plus le développement de $r^2$ commence par des termes du 2^d degré, celui de $\delta'\psi$ par des termes de degré 0; celui de $M$ par des termes du degré 1. Nous poserons:

$$\delta'\psi = N$$

de sorte que nos intégrales prendront la forme:

$$V = \int \frac{N dt}{r}, \qquad \frac{dV}{dx_1} = \int \frac{M dt}{r^3}.$$

Transformons ces deux intégrales, et d'abord l'intégrale $V$; nous allons chercher à mettre l'intégrale indéfinie sous la forme:

$$\int \frac{N dt}{r} = \Phi \int \frac{dt}{r} + Pr$$

$P$ étant une fonction holomorphe de $t$ et des $x$, et $\Phi$ une fonction holomorphe des $x$ seulement.

Cela nous donne:

$$N = \Phi + r^2 \frac{dP}{dt} + r \frac{dr}{dt} P. \tag{3}$$

Cette équation (3) présente une grande analogie avec l'équation (1'); elle pourrait, soit se traiter de la même manière, soit s'y ramener par une transformation simple; mais, au point de vue de la généralisation, je préfère suivre une autre marche.

Je développe $r^2$ suivant les puissances de $t$ et des $x$, et je fais de même pour $N$, $P$ et $\Phi$; je groupe ensemble les termes de même degré et j'écris:

$$r^2 = F_2 + F_3 + \dots,$$
$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots,$$
$$N = N_0 + N_1 + N_2 + \dots.$$
$$P = P_0 + P_1 + \dots.$$

La notation $F_k$ par exemple représente un groupe de termes homogène par rapport à $t$ et aux $x$.

L'équation (3) se décompose alors et nous donne:

$$N_0 = \Phi_0; \quad N_1 = \Phi_1 = \frac{1}{2}\frac{dF_2}{dt} P_0; \quad N_2 = \Phi_2 + F_1 \frac{dP_1}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dF_2}{dt} P_1 + \frac{1}{2}\frac{dF_3}{dt} P_0;$$

$$N_3 = \Phi_3 + F_1 \frac{dP_2}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dF_2}{dt} P_2 + F_3 \frac{dP_1}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dF_3}{dt} P_1 + \frac{1}{2}\frac{dF_4}{dt} P_0.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

La première équation nous donne $\Phi_0$; de la seconde, on tirera $P_0$ et $\Phi_1$. La troisième nous donnera $P_1$ et $\Phi_2$, la quatrième $P_2$ et $\Phi_3$, etc.

En général ces équations prendront la forme:

$$F_1 \frac{dP_k}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dF_2}{dt} P_k + \Phi_{k+1} = H_{k+1}$$

$H_k$ étant un polynôme *connu* homogène et de degré $k + 1$ par rapport à $t$ et aux $x$.

Pour résoudre cette équation, posons:

$$P_k = \Sigma A_m t^m, \qquad H_{k+1} = \Sigma B_m t^m, \qquad F_2 = C_2 t^2 + 2C_1 t + C_0.$$

Les $A$ et les $B$ sont évidemment des polynômes homogènes par rapport aux $x$. Les degrés respectifs de $A_m, B_m, C_2, C_1, C_0$ sont $k - m$, $k + 1 - m$, $0$, $1$ et $2$.

En égalant les termes en $t^m$, on trouve:

$$mC_2 A_{m-1} + (2m + 1)C_1 A_m + (m + 1)C_0 A_{m+1} = B_m.$$

Comme $C_2$ est une constante, on fera successivement dans l'équation précédente

$$m = k + 1, k, k - 1, \ldots, 2, 1$$

ce qui permettra de calculer successivement

$$A_k, A_{k-1}, \ldots, A_0$$

qui seront des polynômes entiers par rapport aux $x$.

La dernière équation qui correspond au cas de $m = 0$ est d'une forme un peu différente, elle s'écrit:

$$3C_1 A_0 + 2C_0 A_1 + \Phi_{k+1} = B_0$$

et elle nous donne $\Phi_{k+1}$.

On peut donc mettre $N$ sous la forme (3), la question de convergence des séries demeurant réservée.

Occupons-nous maintenant de transformer l'intégrale:

$$\frac{dV}{dx_1} = \int \frac{Mdt}{r^3}.$$

Je m'appuierai sur le lemme suivant, sur lequel je me réserve de revenir plus loin.

Soient trois fonctions holomorphes $M$, $A_1$ et $A_2$. Si $M$ s'annule toutes les fois que $A_1$ et $A_2$ s'annulent à la fois, (au moins dans le voisinage de l'origine), on peut trouver deux fonctions holomorphes $B_1$ et $B_2$ telles que l'on ait identiquement:

$$M = A_1 B_1 + A_2 B_2.$$

Considérons les deux fonctions holomorphes

$$r^2 \text{ et } r\frac{dr}{dt}.$$

Pour qu'elles s'annulent à la fois, il faut que l'équation

$$t^2 - 2Xt + Z = 0$$

ait deux racines égales; c'est à dire que

$$Z - Y^2 = 0.$$

La fonction $(Z - Y^2)M$ s'annule donc toutes les fois que $r^2$ et $r\frac{dr}{dt}$ s'annulent à la fois de sorte qu'on peut poser:

$$(Z - Y^2)M = r^2 B_1 + r\frac{dr}{dt}B_2,$$

$B_1$ et $B_2$ étant holomorphes; on en déduit

$$\int \frac{Mdt}{r^3}(Z - Y^2) = \int \left(B_1 + \frac{dB_2}{dt}\right)\frac{dt}{r} - \frac{B_2}{r}.$$

L'intégrale

$$\int\left(B_1 + \frac{dB_2}{dt}\right)\frac{dt}{r}$$

peut se traiter comme $V$, ce qui montre qu'elle est égale à:

$$\Phi'\int\frac{dt}{r} + P'r$$

$\Phi'$ et $P'$ étant holomorphes; on a donc finalement:

$$(Z - Y^2)\int\frac{Mdt}{r^3} = \Phi'\int\frac{dt}{r} + P'r - \frac{B_2}{r}. \tag{4}$$

Il reste à traiter la question de la convergence des séries.

Pour démontrer la convergence de la série $P$ qui entraîne celle de toutes les autres, j'emploierai la méthode des fonctions majorantes et je comparerai l'équation (3) à l'équation:

$$N'' = \Phi'' + \frac{d}{dt}(P''F'') \tag{3'}$$

où $N''$ est une série donnée, holomorphe en $t$ et $x$ et dont tous les coëfficients sont positifs et plus grands en valeur absolue que ceux de $N$; où $\Phi''$ et $P''$ sont deux séries inconnues holomorphes la première en $x$, la seconde en $t$ et $x$, où enfin

$$F'' = \frac{C_2 t^2}{2} - G$$

$G$ étant une série dont les coëfficients sont positifs et égaux à la valeur absolue de ceux de $r^2 - C_2 t^2$.

L'intégration de l'équation (3') est d'ailleurs facile.

On en tire:

$$P''F'' = \int N''dt - \Phi''t - \Phi'''$$

$\Phi'''$ étant une nouvelle série holomorphe en $x$; on peut toujours choisir les deux séries inconnues $\Phi''$ et $\Phi'''$ de telle façon que le second membre soit divisible par $F''$; on obtiendra ensuite immédiatement $P''$.

Cela posé, reprenons l'équation (4) et l'équation qui donne la valeur de $\int \frac{N dt}{r}$; nous en tirerons:

$$(5) \qquad (Z - Y^2)\Phi \int \frac{M dt}{r^3} - \Phi' \int \frac{N dt}{r} = (\Phi P' - P\Phi') r + \frac{\Phi B_2}{r}.$$

Cherchons les valeurs de $\Phi$ et de $\Phi'$, et pour cela prenons l'équation:

$$\int \frac{N dt}{r} = \Phi \int \frac{dt}{r} + Pr.$$

Prenons les intégrales le long d'un contour fermé enveloppant $\tau$ et $\tau'$; le premier membre devient égal à $U_0$; soit $J$ l'intégrale $\int \frac{dt}{r}$ prise le long de ce même contour. Quant à l'intégrale

$$\int d(Pr)$$

prise le long d'un contour fermé, elle est nulle; il vient donc:

$$U_0 = \Phi J.$$

Nous avons vu que $U_0$ est une fonction holomorphe des $x$ ne s'annulant pas avec les $x$. Pour la même raison, il en est de même de $J$.

On trouve de même, en partant de l'équation (4)

$$(Z - Y^2) \frac{dU_0}{dx_1} = \Phi' J$$

et alors l'équation (5) peut s'écrire:

$$(Z - Y^2)\left[U_0 \int \frac{M dt}{r^3} - \frac{dU_0}{dx_1} \int \frac{N dt}{r}\right] = \left[U_0 P' - P \frac{dU_0}{dx_1}(Z - Y^2)\right] r + \frac{U_0 B_2}{r}$$

ou en prenant les intégrales entre les limites $t_0$ et $t_1$

$$(Z - Y^2)\left(U_0 \frac{dV}{dx_1} - V \frac{dU_0}{dx_1}\right) = \Theta,$$

$\Theta$ étant une fonction holomorphe des $x$.

C. Q. F. D.

## § 5. *Généralisation.*

Je me propose d'étendre les résultats précédents au cas d'une variété attirante à $n - 2$ dimensions dans l'espace à $n$ dimensions, la loi d'attraction étant en raison inverse de la puissance $n - 1$ des distances.

Soit $v$ la variété attirante, $O$ un point de cette variété dans le voisinage duquel nous voulons étudier le potentiel. Nous supposerons que ce n'est pas un point singulier et nous le prendrons pour origine.

Les équations de la variété $v$ prendront la forme suivante:

$$x'_k = \varphi_k(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}) \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

les $\varphi_k$ étant holomorphes et s'annulant avec les $t$.

L'expression

$$r^2 = \Sigma(x_k - x'_k)^2$$

est développable en série procédant suivant les puissances des $x$ et des $t$ le développement commence par des termes du 2[d] degré; je pourrai toujours choisir les variables auxiliaires $t$ de telle façon, que quand les $x$ s'annulent, les termes du second degré de $r^2$ se réduisent à

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_{n-2}^2.$$

Cela posé, le potentiel cherché sera représenté par l'intégrale $n - 2$[ple]

$$V = \int \frac{N d\sigma}{r^{n-2}};$$

$N$ désigne une fonction holomorphe des $t$ et des $x$ et j'ai désigné pour abréger par $d\sigma$ le produit:

$$d\sigma = dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-2}.$$

L'intégrale $V$ n'est pas une fonction holomorphe des $t$ et des $x$ parce que $r$ s'annule avec les $t$ et les $x$, c'est à dire dans le champ d'intégration. Voyons d'un peu plus près en quoi consiste cette singularité.

Représentons dans l'espace à $2n - 4$ dimensions les parties réelles et imaginaires des $n - 2$ variables complexes $t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}$.

L'intégrale $V$ est une intégrale $n - 2^{\text{ple}}$ étendue aux éléments d'une certaine variété $w$ à $n - 2$ dimensions située dans cet espace à $2n - 4$ dimensions.

Cette variété est d'ailleurs plane; soit en effet

$$t_k = u_k + \sqrt{-1}\, v_k.$$

Comme dans l'intégrale $V$, nous ne donnons aux $t$ que des valeurs réelles, nous aurons

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_{n-2} = 0.$$

C'est là l'équation de notre variété $w$. Mais cette variété n'est pas indéfinie, elle est limitée par une variété à $n - 3$ dimensions que j'appellerai $\lambda$ et qui aura pour équations

$$v_k = 0, \qquad f(u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}) = 0.$$

Pour achever de définir la variété $w$, il faut donc adjoindre aux équations $v_k = 0$, l'inégalité $f > 0$.

La variété $\lambda$ est ainsi le *bord* de la variété $w$.

Le point

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_{n-2} = 0$$

n'appartient d'ailleurs pas à $\lambda$; car nous n'avons pas supposé que le point $O$ se trouvait sur le bord de la variété attirante $v$.

D'après un théorème connu, généralisation de celui de CAUCHY, (cf. Mémoire *sur les résidus des intégrales doubles,* Acta mathematica, tome 9), l'intégrale ne changera pas quand on la prendra le long d'une autre variété $w'$, ayant même bord que $w$, pourvu qu'on puisse passer d'une manière continue de $w$ à $w'$ sans rencontrer de point singulier.

Quand le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ décrira certains contours fermés, il faudra déformer la variété $w$ d'une manière continue de telle façon que sur cette variété ne se trouve jamais aucun point singulier; quand le contour fermé aura été complètement décrit, il pourra se faire que la variété $w$ ne revienne pas à sa forme primitive, et se soit changée en une autre variété $w'$.

L'intégrale $V$ se sera alors changée en $V + U_0$, $U_0$ étant une période de l'intégrale $(n-2)^{\text{ple}}$

$$\int \frac{N d\sigma}{r^{n-2}}.$$

Pour aller plus loin, nous allons appliquer la même méthode que dans le cas de l'espace ordinaire.

Nous allons chercher à mettre $N$ sous la forme:

$$N = r^2 \sum \frac{dP_k}{dt_k} - (n-4) \sum P_k r \frac{dr}{dt_k} + \Phi \tag{1}$$

où $\Phi$ est une fonction holomorphe des $x$ et les $P_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-2)$ des fonctions holomorphes des $x$ et des $t$.

Cette équation équivaut en effet à:

$$\int \frac{N d\sigma}{r^{n-2}} = \sum \int \frac{d}{dt_k} \left( \frac{P^k}{r^{n-4}} \right) d\sigma + \Phi \int \frac{d\sigma}{r^{n-2}}. \tag{2}$$

Décomposons les séries $N, P_k, \Phi, r^2$ en groupes de termes homogènes tant par rapport aux $t$ que par rapport aux $x$. Soient

$$N_{\mu.\nu}, \ P_{k.\mu.\nu}, \ \Phi_\mu, \ F_{\mu.\nu}$$

les groupes de termes de

$$N, \ P_k, \ \Phi, \ r^2$$

qui sont de degré $\mu$ par rapport aux $x$ et de degré $\nu$ par rapport aux $t$.

Nous allons calculer les groupes inconnus $P_{k.\mu.\nu}$ dans l'ordre suivant: on commencera par les termes où $\mu + \nu$ est le plus petit et on rangera les groupes dans l'ordre des $\mu + \nu$ croissants; les groupes correspondant à une même valeur de $\mu + \nu$ seront rangés dans l'ordre des $\mu$ croissants.

Nous aurons donc en posant pour abréger

$$P_{k.\mu.\nu} = \Pi_k,$$

en nous rappelant que

$$F_{0.2} = \Sigma t^2$$

et en désignant par $M$ un ensemble de termes déjà calculés, homogènes de degré $\mu$ par rapport aux $x$ et de degré $\nu + 1$ par rapport aux $t$, nous aurons donc, dis-je: (en égalant dans (3) les termes de même degré)

$$(3) \qquad M = \sum t^2 \sum \frac{d\Pi_k}{dt_k} - (n-4)\Sigma \Pi_k t_k.$$

Nous poserons $\sum \frac{d\Pi}{dt} = Z$ et d'autre part, on peut poser et cela d'une infinité de manières:

$$M = \Sigma t_k A_k.$$

Nous chercherons donc à faire:

$$A_k = t_k Z - (n-4)\Pi_k$$

d'où l'on tire aisément:

$$\sum \frac{dA_k}{dt_k} = (\nu + 1)Z$$

en tenant compte de

$$\sum t_k \frac{dZ}{dt_k} = (\nu - 1)Z, \qquad Z = \sum \frac{d\Pi_k}{dt_k}$$

car $Z$ est homogène de degré $\nu - 1$ par rapport aux $t$.

Nos équations nous donneront donc $Z$ et les $\Pi_k$.

En égalant dans l'équation (3) les termes de degré $\mu$ par rapport aux $x$ et o par rapport aux $t$, on a une équation qui donne $\Phi_\mu$.

Il resterait à traiter la question de la convergence des séries; comme les théorèmes que je démontre dans ce paragraphe et dans le précédent ne sont pas indispensables pour mon sujet principal, je ne veux pas trop m'y attarder et je me bornerai à indiquer la marche générale de la démonstration.

Il est d'abord facile de mettre $r^2 = F$ sous la forme suivante:

$$r^2 = F = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{n-2}^2 + z$$

où $u_k$ est une série développée suivant les puissances de $t$ et des $x$, commençant par des termes du 1^er^ degré, et dont les termes du 1^er^ degré se réduisent à $t_k$ quand les $x$ s'annulent;

où $z$ est une série développée suivant les puissances des $x$ et commençant par des termes du second degré.

Cela posé l'intégrale

$$\int \frac{N dt_1 dt_2 \dots dt_{n-2}}{r^{n-2}}$$

devient:

$$\int \frac{N\Delta\, du_1\, du_2 \dots du_{n-2}}{r^{n-2}}$$

où $\Delta$ est le jacobien des $t$ par rapport aux $u$; ce jacobien étant une fonction holomorphe des $t$ et des $x$, et aussi des $u$ et des $x$, nous voyons que nous pouvons toujours supposer que l'on a:

$$r^2 = \Sigma t^2 + z$$

car les $u$ peuvent jouer le même rôle que les $t$.

Supposons donc

$$r^2 = \Sigma t^2 + z.$$

Notre équation devient alors:

$$(\Sigma t^2 + z)\sum \frac{dP}{dt} - (n-4)\Sigma(tP) = N - \Phi. \tag{4}$$

Notre fonction $N$ peut se développer en une série absolument convergente de la forme

$$N = \Sigma Y \rho^\beta$$

où $\beta$ est un entier pair et où $Y$ est un polynome homogène de degré $\alpha$ par rapport aux $t$ et satisfaisant à l'équation

$$\sum \frac{d^2 Y}{dt^2} = \Delta Y = 0$$

et où enfin on a posé

$$\rho^2 = \Sigma t^2.$$

Cherchons à satisfaire à la fois aux équations

$$\sum \frac{dP}{dt} = 0, \qquad \Sigma tP = -\frac{1}{n-4} Y\rho^\beta.$$

Pour cela faisons:

$$P_k = a\frac{dY}{dt_k}\rho^\beta + bt_k Y\rho^{\beta-2}$$

où $a$ et $b$ sont des coëfficients qu'il s'agit de déterminer. Pour cela on trouve les deux équations:

$$a\alpha + b = -\frac{1}{n-4},$$

$$\alpha + \beta + b(\alpha + \beta + n - 4) = 0$$

dont le déterminant ne s'annule que pour

$$\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha + n - 4 = 0.$$

Comme $n$ est plus grand que 4, cette seconde hypothèse ne peut se réaliser, mais nous devons exclure le cas de $\alpha = 0$.

Appelons donc $N_0$ l'ensemble des termes de $N$ pour lesquels $\alpha$ sera nul, de sorte que $N_0$ sera fonction de $\rho^2$ seulement et résolvons l'équation

$$(4') \qquad (\Sigma t^2 + z)\sum\frac{dP}{dt} - (n-4)\Sigma(tP) = N - N_0;$$

cela pourra se faire en prenant:

$$P = \sum a\frac{dY}{dt}\rho^\beta + \Sigma btY\rho^{\beta-2}$$

(les termes où $\alpha$ est nul étant exclus); comme les coefficients $a$ et $b$ sont limités, la série est convergente.

Il faut maintenant trouver des séries $P_k$ satisfaisant à l'équation:

$$(4'') \qquad (\rho^2 + z)\sum\frac{dP}{dt} - (n-4)\Sigma tP = N_0 - \Phi.$$

Nous poserons:

$$P_k = t_k Q$$

$Q$ étant une fonction de $\rho^2$; l'équation devient:

$$(\rho^2 + z)\left[(n-2)Q + \rho\frac{dQ}{d\rho}\right] - (n-4)\rho^2 Q = N_0 - \Phi$$

ou bien:

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{Q\rho^{n-2}}{(\rho^2+z)^{\frac{n-4}{2}}}\right]=\frac{(N_0-\Phi)\rho^{n-3}}{(\rho^2+z)^{\frac{n-2}{2}}}.$$

L'équation est tout à fait semblable à celle qui a été traité dans le paragraphe précédent, et pourrait se traiter de la même manière.

On pourrait dire aussi: nous déterminerons $\Phi$ à l'aide de l'équation:

$$\int\frac{N_0\rho^{n-3}\,d\rho}{(\rho^2+z)^{\frac{n-2}{2}}}=\Phi\int\frac{\rho^{n-3}\,d\rho}{(\rho^2+z)^{\frac{n-2}{2}}}$$

les intégrales étant prises le long d'un contour fermé entourant les deux points

$$\rho=\pm\sqrt{-z}.$$

Si dans ces intégrales on pose:

$$\rho=\rho'\sqrt{z}$$

et qu'on prenne les intégrales suivant un contour entourant les deux points $\rho'=\pm i$, l'intégrale du second membre sera une constante; dans celle du 2[d] membre la fonction sous le signe $\int$ sera une fonction holomorphe des $x$ et de $\sqrt{z}$; $\Phi$ devra donc être une fonction holomorphe des $x$ et de $\sqrt{z}$; et j'ajouterai des $x$ et de $z$; car $\Phi$ ne change pas quand $\sqrt{z}$ se change en $-\sqrt{z}$.

Si $\Phi$ est une fonction holomorphe; il est clair qu'il en est de même de $Q$.

On pourrait aussi ramener nos intégrales par des intégrations par parties aux cas simples $n=3$ ou $n=4$.

Pour résumer cette longue discussion:

l'intégrale $V$ peut toujours être mise sous la forme:

$$\int\frac{N\,d\sigma}{r^{n-2}}=\sum\int\frac{d}{dt_k}\left(\frac{P^k}{r^{n-4}}\right)d\sigma+\Phi\int\frac{d\sigma}{r^{n-2}}. \tag{2}$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\frac{dV}{dx_1}=\int\frac{M\,d\sigma}{r^n}$$

où

$$M = r^2 \frac{dN}{dx_1} + (n - 2)N(x_1 - x_1')$$

est une fonction holomorphe des $t$ et des $x$.

Considérons les équations:

$$(5) \qquad r^2 = r\frac{dr}{dt_1} = r\frac{dr}{dt_2} = \ldots = r\frac{dr}{dt_{n-2}} = 0$$

et éliminons les $t$ entre les équations dont les premiers membres sont holomorphes en $t$ et en $x$; nous obtiendrons une certaine équation:

$$(6) \qquad H = 0$$

dont le premier membre sera holomorphe par rapport aux $x$. En appliquant le même lemme que dans le paragraphe précédent, nous pourrons écrire:

$$HM = Ar^2 + B_1 r\frac{dr}{dt_1} + B_2 r\frac{dr}{dt_2} + \ldots + B_{n-2} r\frac{dr}{dt_{n-2}},$$

$A$ et les $B$ étant holomorphes en $t$ et en $x$; car $H$ s'annule toutes les fois que les équations (5) sont satisfaites.

Ce lemme est bien connu; et d'ailleurs, en ce qui concerne son application actuelle, il suffit pour lui donner une évidence immédiate, de rappeler que nous avons vu qu'on peut toujours supposer:

$$r^2 = \Sigma t^2 + z$$

d'où

$$r\frac{dr}{dt_k} = t_k; \qquad H = z.$$

Cela posé notre intégrale devient

$$H\int \frac{M d\sigma}{r^n} = \int \left[A + \frac{1}{n-2}\sum \frac{dB_k}{dt_k}\right]\frac{d\sigma}{r^{n-2}} - \sum \int \frac{d}{dt_k}\left(\frac{B_k}{(n-2)r^{n-2}}\right)d\sigma.$$

La première intégrale du 2^d membre se traitera comme $\int \frac{N d\sigma}{r^{n-2}}$ et on trouvera finalement l'équation suivante analogue à (2) ainsi qu'à l'équation (4) du paragraphe précédent:

$$(7) \qquad H\int \frac{M\,d\sigma}{r^n} = \sum \int \frac{d}{dt_k}\left(\frac{P'_k}{r^{n-4}}\right)d\sigma + \Phi' \int \frac{d\sigma}{r^{n-2}}.$$

Nous n'avons plus qu'à continuer le raisonnement comme dans le paragraphe précédent

Dans l'équation (2) comme dans l'équation (7), le premier terme du second membre est nul si l'intégrale est prise le long d'une variété fermée; elle est une fonction holomorphe des $x$ dans le cas contraire.

Prenons d'abord les intégrales le long de la variété fermée qui correspond à la période $U_0$ dont nous avons parlé plus haut, les équations (2) et (7) nous donneront:

$$U_0 = \Phi J,$$

$$H\frac{dU_0}{dx_1} = \Phi' J,$$

$J$ étant la période de l'intégrale $\int \frac{d\sigma}{r^{n-2}}$, laquelle période est une fonction holomorphe des $x$ ne s'annulant pas avec les $x$.

On tirera alors des équations (2) et (7) (en prenant les intégrales dans les limites qui conviennent à $V$):

$$H\left(U_0\frac{dV}{dx_1} - V\frac{dU_0}{dx_1}\right) = \theta_1,$$

$\theta_1$ étant une fonction holomorphe des $x$ et on trouverait de même:

$$H\left(U_0\frac{dV}{dx_2} - V\frac{dU_0}{dx_2}\right) = \theta_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H\left(U_0\frac{dV}{dx_n} - V\frac{dU_0}{dx_n}\right) = \theta_n;$$

ces équations peuvent s'écrire encore:

$$d\left(\frac{V}{U_0}\right) = \frac{\theta_1 dx_1 + \theta_2 dx_2 + \ldots + \theta_n dx_n}{HU_0^2}.$$

Posons:

$$\frac{\theta_k}{U_0^2} = A_k \frac{dH}{dx_k} + B_k H,$$

l'expression:

$$\sum \left(\frac{A_k}{H} \frac{dH}{dx_k} + B_k\right) dx_k$$

devra être une différentielle exacte ce qui entraîne l'identité:

$$0 = (A_2 - A_1) \frac{dH}{dx_1} \frac{dH}{dx_2} + (A_1 - A_2) H \frac{d^2 H}{dx_1 dx_2} + H\left(\frac{dA_1}{dx_2} \frac{dH}{dx_1} - \frac{dA_2}{dx_1} \frac{dH}{dx_2}\right)$$
$$+ H^2 \left(\frac{dB_1}{dx_2} - \frac{dB_2}{dx_1}\right).$$

Cette équation nous montre d'abord que pour $H = 0$; on a $A_1 = A_2$ et de même:

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n.$$

Comme les $A_k$ sont arbitraires pourvu qu'ils se réduisent à $\frac{\theta_k}{U_0^2}$ pour $H = 0$, nous pourrons supposer que tous les $A_k$ sont égaux et supprimer l'indice $k$; notre équation devient alors en divisant par $H$:

$$\frac{dA}{dx_1} \frac{dH}{dx_2} - \frac{dA}{dx_2} \frac{dH}{dx_1} + H\left(\frac{dB_1}{dx_2} - \frac{dB_2}{dx_1}\right) = 0;$$

ce qui montre que l'on peut regarder $A$ comme une constante; car si l'on a $H = 0$, $dH = 0$, il vient $dA = 0$.

Il vient alors:

$$d\left(\frac{V}{U_0}\right) = A d \log H + B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + \ldots + B_n dx_n.$$

Comme il est aisé de vérifier que les $B$ ne peuvent être que des fonctions holomorphes des $x$, nous déduirons:

$$V = A U_0 \log H + \text{ fonction holomorphe des } x.$$

Il nous reste à voir quelle est la signification de cette variété $H = 0$, qui joue un grand rôle dans l'analyse précédente.

L'équation

$$r^2 = 0$$

est l'équation d'une variété à $n - 1$ dimensions que j'appelle $K$ et qu'on peut assimiler à un cône ayant son sommet en un point $P$ de la variété attirante $v$. La variété $K$ est le lieu des points dont la distance à $P$ est nulle; elle est donc imaginaire et n'a d'autre point réel que le point $P$ lui même.

Quand le point $P$ se déplace sur la variété $v$, la variété $K$ se déplace également et son enveloppe s'obtient en éliminant les $t$ entre les équations (5); c'est donc la variété à $n - 1$ dimensions

$$H = 0.$$

Cette variété est donc imaginaire et n'a d'autres points réels que ceux de $v$.

Considérons une fonction holomorphe $F$ de $n$ variables complexes

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad \ldots, \quad z_n = x_n + iy_n$$

et considérons les $x$ et les $y$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $2n$ dimensions.

L'équation $F = 0$ se décompose en deux autres obtenues en égalant à zéro la partie réelle et la partie imaginaire de $F$; elle définit ainsi une variété à $2n - 2$ dimensions que j'appelle $v$.

Nous verrons plus loin que la fonction

$$\log |F|$$

est égale au potentiel de la variété attirante $v$ plus une fonction holomorphe des $x$ et des $y$.

Nous devrons donc avoir:

$$\log |F| = U_0 \log H + \Phi,$$

$U_0$, $H$ et $\Phi$ étant des fonctions holomorphes des $x$ et des $y$.

L'équation $|F| = 0$ doit donc coïncider avec l'équation $H = 0$. L'équation $|F| = 0$ représente une variéte à $2n - 1$ dimensions qui est imaginaire et dont les seuls points réels sont les points de la variété à $2n - 2$ dimensions $v$.

Vérifions donc que la variété $|F| = 0$ est bien l'enveloppe des variétés $r^2 = 0$.

Observons d'abord que, si nous laissons de côté les points singuliers, nous pouvons écrire·

$$F = (z_n - f)\Phi$$

où $f$ est une fonction holomorphe de $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ et où $\Phi$ est une fonction holomorphe de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ qui ne s'annule pas dans le voisinage du point considéré.

Soit

$$f = f_1 + if_2$$

de sorte que $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions holomorphes de

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1};$$

les coefficients des développements de ces fonctions holomorphes étant réels.

La variété à $2n - 2$ dimensions $v$ a pour équations:

$$x_n = f_1, \qquad y_n = f_2$$

et la variété imaginaire à $2n - 1$ dimensions $|F| = 0$ a pour équations:

$$(x_n - f_1) + i(y_n - f_2) = 0. \tag{8}$$

Cela posé soit $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ un point de $v$, la variété correspondante $r^2 = 0$ a pour équation

$$\Sigma(x_k - x'_k)^2 + \Sigma(y_k - y'_k)^2 = 0. \tag{9}$$

Il faut chercher l'enveloppe de cette variété, en faisant varier

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1},$$
$$y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n-1},$$

et en même temps $x'_n$ et $y'_n$ puisque l'on a:

$$x'_n = f_1(x'_1, y'_1, \ldots, x'_{n-1}, y'_{n-1}),$$
$$y'_n = f_2(x'_1, y'_1, \ldots, x'_{n-1}, y'_{n-1}),$$

On trouve ainsi par la différentiation de (9)

$$(x_k - x'_k) + (x_n - x'_n)\frac{dx'_n}{dx'_k} + (y_n - y'_n)\frac{dy'_n}{dx_k} = 0,$$
$$(y_k - y'_k) + (x_n - x'_n)\frac{dx'_n}{dy'_k} + (y_n - y'_n)\frac{dy'_n}{dy'_k} = 0. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,n-1)}$$

A cause des relations:

$$\frac{dx'_n}{dx'_k} = \frac{dy'_n}{dy'_k}, \qquad \frac{dx'_n}{dy'_k} = -\frac{dy'_n}{dx'_k}$$

il vient:

$$(x_k - x'_k) + i(y_k - y'_k) = \left(\frac{dx'_n}{dx'_k} - i\frac{dy'_n}{dx'_k}\right)[(x_n - x'_n) + i(y_n - y'_n)]$$

et en combinant avec (9)

$$(x_k - x'_k) + i(y_k - y'_k) = (x_n - x'_n) + i(y_n - y'_n) = 0.$$

On a donc:

$$x_n + iy_n = x'_n + iy'_n = f(x'_1 + iy'_1, x'_2 + iy'_2, \ldots, x'_{n-1} + iy'_{n-1}).$$

Or

$$x'_k + iy'_k = x_k + iy_k.$$

Donc:

$$x_n + iy_n = f(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_{n-1} + iy_{n-1})$$

de sorte qu'on retrouve l'équation (8).

C. Q. F. D.

## § 6. *Généralisation du théorème 4.*

Soit dans l'espace à $n$ dimensions une variété $S$ à $n-1$ dimensions; supposons que cette variété soit fermée et limite un domaine $G$.

Soit maintenant $C$ une variété analytique à $n-2$ dimensions; nous mettrons les équations de la variété $C$ sous la forme suivante:

(1) $$x_k = \varphi_k(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}). \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,n)}$$

Cela posé, considérons les hypersphères de rayon $\varepsilon$ ayant pour centre un point de $C$. L'équation générale de ces hypersphères sera:

$$\Sigma(x_k - \varphi_k)^2 = \varepsilon^2 \tag{2}$$

et cette équation contient $n - 2$ paramètres arbitraires qui sont les $t$. Pour avoir l'enveloppe de ces hypersphères, il suffit de différentier l'équation (2) par rapport aux paramètres $t$, ce qui nous donne les $n - 2$ équations:

$$\sum (x_k - \varphi_k) \frac{d\varphi_k}{dt_h} = 0. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,n-2)} \tag{3}$$

En éliminant les $t$ entre les équations (2) et (3) on obtiendrait l'équation d'une variété à $n - 1$ dimensions que j'appelle $K$ et qui est une sorte de »variété-canal».

Posons

$$x_k - \varphi_k = \alpha_k \varepsilon \cos\theta + \beta_k \varepsilon \sin\theta$$

et cherchons à choisir les $\alpha$ et les $\beta$ de telle façon que les équations (2) et (3) soient satisfaites quel que soit $\theta$; nous obtiendrons les équations suivantes qui définissent les $\alpha$ et les $\beta$

$$\begin{gathered} \Sigma\alpha^2 = \Sigma\beta^2 = 1, \qquad \Sigma\alpha\beta = 0, \\ \sum \alpha \frac{d\varphi}{dt_h} = \sum \beta \frac{d\varphi}{dt_h} = 0. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,n-2)} \end{gathered} \tag{4}$$

Je dis que les cosinus directeurs de l'élément de surface de $K$, c'est à dire les quantités que j'ai appelées

$$\frac{D_k}{D_0}$$

au paragraphe 2 sont égales a

$$\frac{x_k - \varphi_k}{\varepsilon} = \alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta.$$

Pour cela il suffit de vérifier que l'on a:

$$\sum \left(\frac{x_k - \varphi_k}{\varepsilon}\right)^2 = 1$$

et en outre

$$\frac{x_1 - \varphi_1}{D_1} = \frac{x_2 - \varphi_2}{D_2} = \ldots = \frac{x_n - \varphi_n}{D_n}$$

ou ce qui revient au même:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\sum (x_k - \varphi_k)\frac{dx_k}{d\theta} = 0, \\ &\sum (x_k - \varphi_k)\frac{dx_k}{dt_h} = 0. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,n-2)} \end{aligned}$$

Ces conditions sont évidemment remplies, car en différentiant (2) on trouve

$$\sum (x_k - \varphi_k)\frac{d(x_k - \varphi_k)}{dt_h} = 0, \qquad \sum (x_k - \varphi_k)\frac{dx_k}{d\theta} = 0$$

et en combinant avec (3) on retrouve (5).

On déduit de là:

$$D_0 = \Sigma(\alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta) D_k$$

c'est à dire que $D_0$ est égal au déterminant:

$$\left| \frac{dx_k}{dt_1}, \frac{dx_k}{dt_2}, \ldots, \frac{dx_k}{dt_{n-2}}, \frac{dx_k}{d\theta}, \alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta \right|. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,n)}$$

Or on a:

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{d\varphi_k}{dt} + \varepsilon\left(\frac{d\alpha_k}{dt}\cos\theta + \frac{d\beta_k}{dt}\sin\theta\right)$$

et comme $\varepsilon$ est très petit, on peut écrire:

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{d\varphi_k}{dt}.$$

Il vient donc, en négligeant $\varepsilon^2$:

$$D_0 = \left| \frac{d\varphi_k}{dt_1}, \frac{d\varphi_k}{dt_2}, \ldots, \frac{d\varphi_k}{dt_{n-2}}, \varepsilon(-\alpha_k \sin\theta + \beta_h \cos\theta), \alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta \right|$$

ou bien:

$$D_0 = \varepsilon \left| \frac{d\varphi_k}{dt_1}, \frac{d\varphi_k}{dt_2}, \ldots, \frac{d\varphi_k}{dt_{n-2}}, \beta_k, \alpha_k \right|.$$

Remplaçons les lignes $m^e$ et $p^e$ du déterminant par deux lignes ainsi obtenues; l'une sera obtenue en multipliant la 1ère ligne par $\alpha_1$, la 2de par $\alpha_2, \ldots$, la $n^e$ par $\alpha_n$, et ajoutant; l'autre en multipliant la 1ère ligne par $\beta_1$, la 2de par $\beta_2, \ldots$, la $n^e$ par $\beta_n$ et ajoutant.

Le déterminant se trouve ainsi multiplié par

$$\alpha_m\beta_p - \alpha_p\beta_m.$$

En tenant compte des équations (4) on voit que tous les éléments des deux lignes nouvelles sont égaux à 0 ou à 1 et on conclut:

$$(\alpha_m\beta_p - \alpha_p\beta_m)D_0 = \varepsilon\Delta_{m.p}$$

$\Delta_{m.p}$ étant le mineur obtenu en supprimant les deux dernières colonnes et les lignes $m$ et $p$.

On a $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de cette forme. En faisant la somme des carrés, et remarquant que

$$\Sigma(\alpha_m\beta_p - \alpha_p\beta_m)^2 = 1,$$

on trouve:

$$D_0^2 = \varepsilon^2\Sigma\Delta_{mp}^2.$$

Nous poserons:

$$\Sigma\Delta_{mp}^2 = \Delta_0^2$$

et il viendra, aux quantités près de l'ordre de $\varepsilon^2$:

$$D_0 = \varepsilon\Delta_0.$$

L'aire de la variété $C$ est donc représentée par l'intégrale $n - 2^{\text{ple}}$

$$\int \Delta_0 dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-2}$$

et celle de $K$ (en négligeant $\varepsilon^2$) par l'intégrale $n - 1^{\text{ple}}$

$$\varepsilon\int \Delta_0 dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-2} d\theta.$$

Il nous faut distinguer quels seront les parties de la variété-canal $K$ qui conviennent. Nous ne conserverons de cette variété que les points qui satisferont aux deux conditions suivantes:

1° Ils seront à l'intérieur de $S$,

1° Leur plus courte distance à $C$ sera précisément $\varepsilon$, et non pas plus petite que $\varepsilon$.

Les circonstances suivantes peuvent en effet se présenter:

1° Il peut arriver que le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $K$ soit à l'extérieur de $S$ tandis que le point correspondant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $C$ est à l'intérieur de $S$.

2° Il peut arriver au contraire que le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $K$ soit à l'intérieur de $S$ tandis que le point correspondant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $C$ sera à l'extérieur de $S$.

3° Il peut arriver enfin que l'on puisse du point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mener deux normales à $C$, l'une égale à $\varepsilon$, l'autre plus petite que $\varepsilon$, de telle façon que ce point appartienne à $K$, mais que sa plus courte distance à $C$ soit cependant plus petite que $\varepsilon$.

Soit $K_1$ la portion de $K$ formée par les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tels que les points correspondants $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $C$ soient à l'intérieur de $S$. La portion de $K$ qui convient au problème sera alors

$$K_1 - k + k' - k'':$$

$k$, lieu des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui sont extérieurs à $S$, mais tels que les points $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ correspondants soient intérieurs à $S$.

$k'$, lieu des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui sont intérieurs à $S$, mais tels que les points $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ correspondants soient extérieurs à $S$.

$k''$, lieu des points d'où l'on peut mener à $C$ deux normales, l'une égale à $\varepsilon$, l'autre plus petite que $\varepsilon$.

Je dis que l'aire totale de $k, k'$ et $k''$ est de l'ordre de $\varepsilon^2$.

Démontrons-le d'abord pour $k$ et $k'$.

Si les deux points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont l'un extérieur et l'autre intérieur à $S$, comme la distance de ces deux points est $\varepsilon$, la plus courte distance de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ à $S$ sera plus petite que $\varepsilon$. Considérons la partie de $C$ formée par les points $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ dont la plus courte distance à $S$ est plus petite que $\varepsilon$. Son aire, représentée par l'intégrale

$$\int \Delta_0 dt_1 dt_2 \ldots . dt_n$$

sera, je suppose, égale à $A$. L'aire de $k + k'$, représentée par l'intégrale

$$\varepsilon \int \Delta_0 dt_1 dt_2 \ldots dt_n d\theta$$

sera alors plus petite que

$$2\pi\varepsilon A.$$

Je dis que $A$ est de l'ordre de $\varepsilon$.

Pour nous en rendre compte, supposons par exemple que la variété $S$ soit une hypersphère

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 = \rho^2$$

et faisons varier $\rho$.

Soit $F(\rho)$ l'aire de la partie de la variété $C$ contenue à l'intérieur de cette hypersphère.

Nous allons faire varier $\rho$ depuis 0 jusqu'à $\rho_0$ par exemple; cet intervalle va pouvoir se partager en un nombre fini d'intervalles partiels de telle sorte que dans chacun de ces intervalles partiels, $F(\rho)$ soit une fonction analytique de $\rho$.

Si nous donnons à $\rho$ une valeur comprise à l'intérieur d'un de ces intervalles, $A$ sera égal à

$$F(\rho + \varepsilon) - F(\rho - \varepsilon)$$

et comme la fonction $F$ est analytique, $A$ sera de l'ordre de $\varepsilon$.

On peut d'ailleurs éviter cette difficulté par l'artifice suivant.

Soit $C'$ l'intersection de $C$ et de $S$; c'est une variété à $n - 3$ dimensions. Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ un point de $C'$; $\alpha_k$ et $\beta_k$ les valeurs correspondantes des coefficients $\alpha$ et $\beta$ définis plus haut.

Considérons l'ensemble des points:

$$x_k = \varphi_k + \zeta(\alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta)$$

où les $\varphi_k$ (ainsi que les $\alpha_k$ et les $\beta_k$) prennent toutes les valeurs qui correspondent aux différents points de $C'$; où $\theta$ varie de 0 à $2\pi$ et $\zeta$ de 0 à $\varepsilon$.

Cet ensemble de points formera une variété $W$ à $n - 1$ dimensions qui s'écartera peu de $S$, puisque le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ est sur $S$ et que $\zeta$ est très petit.

Remplaçons $S$ par une variété $S'$ peu différente, mais comprenant la variété $W$; il n'y aura plus alors d'aires $k$ et $k'$; car si le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $C$ est à l'intérieur de $S'$, il en est de même du point correspondant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $K$ et inversement. Pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer que lorsque le point $\varphi_k$ de $C$ traverse $S'$, il est sur $C'$ et par conséquent le point correspondant $x_k$ est sur $W$ et par conséquent sur $S'$, puisque $W$ fait partie de $S'$.

Passons maintenant à $k''$; je dis que l'aire de $k''$ sera très petite, non seulement d'une manière absolue, mais par rapport à $\varepsilon$.

En effet l'équation de la variété-canal $K$ peut pour $\varepsilon$ très petit se mettre sous la forme suivante.

Soient

$$F = 0, \qquad F_1 = 0$$

les équations de la variété $C$; l'équation de $K$ s'écrira en négligeant les puissances supérieures de $\varepsilon$:

$$F^2 \sum \left(\frac{dF_1}{dx}\right)^2 - 2FF_1 \sum \left(\frac{dF}{dx}\frac{dF_1}{dx}\right) + F_1^2 \sum \left(\frac{dF}{dx}\right)^2$$

$$= \varepsilon^2 \sum \left(\frac{dF_1}{dx_i}\frac{dF}{dx_k} - \frac{dF_1}{dx_k}\frac{dF}{dx_i}\right)^2.$$

Cette variété ne présentera pas de singularité à moins que tous les déterminants

$$\frac{dF_1}{dx_i}\frac{dF}{dx_k} - \frac{dF_1}{dx_k}\frac{dF}{dx_i}$$

ne s'annulent à la fois. Si cela n'a pas lieu, dans un certain domaine on est donc certain que deux nappes de la variété $K$ ne peuvent pas se couper dans ce domaine, et par conséquent que ce domaine ne contient aucune partie de $k''$.

L'ensemble des points de $C$ tels que tous ces déterminants s'annulent forme une variété singulière $C''$ qui aura au plus $n - 3$ dimensions.

Si le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $C$ n'est pas sur $C''$, nous pourrons choisir $\varepsilon$ assez petit pour être certains que le point correspondant $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ de $K$ n'est pas sur $k''$.

Soit alors $C_1$ l'ensemble des points de $C$ dont la plus courte distance à $C'$ est plus petite que $\delta$. Nous pourrons prendre $\varepsilon$ assez petit pour que si le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $C$ n'est pas sur $C_1$, nous soyons certains que le point correspondant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $K$ ne sera pas sur $k''$. Il est à remarquer que la valeur que l'on doit attribuer à $\varepsilon$ doit être d'autant plus petite que $\delta$ est plus petit.

Soit $A$ l'aire de $C_1$, elle sera de l'ordre de $\delta$. L'aire de $k''$ sera plus petite que $2\pi\varepsilon A$. Elle sera donc de l'ordre de $\varepsilon\delta$. Quand $\delta$ et par conséquent $\varepsilon$ tendent vers zéro, on voit que le rapport de l'aire de $k''$ à $\varepsilon$ tend vers o. C. Q. F. D.

Envisageons maintenant une fonction $V$ jouissant des propriétés suivantes:

1° Elle est harmonique à l'intérieur de la variété $S$, sauf sur la variété $C$.

2° Quand le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est à une distance $\varepsilon$ de la variété $C$, elle est de l'ordre de $\log \varepsilon$.

3° En même temps ses dérivées premières sont de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

4° Considérons un point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $C$ et un point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ très voisin du premier, et tel que l'on ait:

$$x_k - \varphi_k = \alpha_k \varepsilon \cos\theta + \beta_k \varepsilon \sin\theta,$$

les $\alpha_k$ et les $\beta_k$ étant les coefficients définis plus haut et correspondant au point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; je supposerai que l'expression

$$(x_1 - \varphi_1)\frac{dV}{dx_1} + (x_2 - \varphi_2)\frac{dV}{dx_2} + \ldots + (x_n - \varphi_n)\frac{dV}{dx_n}$$

tend vers une limite finie indépendante de $\theta$ quand $\varepsilon$ tend vers o.

Cette limite que j'appellerai $\delta$ est évidemment une fonction des coordonnées $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ du point considéré de $C$.

Cela posé, soit

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

un point quelconque intérieur à $S$. Posons

$$r^2 = \Sigma(x_k - y_k)^2, \qquad U = \frac{1}{r^{n-2}}.$$

Soit ensuite $\Sigma$ l'hypersphère

$$\Sigma(x_k - y_k)^2 = \varepsilon^2.$$

Dans le domaine limité par la variété $S$, par l'hypersphère $\Sigma$ et par la variété-canal $K$, les deux fonctions $V$ et $U$ sont harmoniques, nous pouvons donc appliquer le théorème de Green et écrire:

$$\int\left(V\frac{dU}{d\nu}-U\frac{dV}{d\nu}\right)d\omega=0,$$

les intégrales étant prises le long des variétés qui limitent le domaine, c'est ce que je mettrai en évidence en écrivant l'équation qui précède sous la forme suivante:

$$\int_{S_1}+\int_K+\int_\Sigma=0$$

ou bien encore:

$$\int_{S_1}+\int_{K_1}-\int_k+\int_{k'}-\int_{k''}+\int_\Sigma=0;$$

$S_1$ représente ici la partie de $S$ qui est extérieure à $K$.

Je vais maintenant faire tendre $\varepsilon$ vers $0$.

Je dis que $\int\limits_{S_1}$ tend vers une limite finie et déterminée que j'appellerai $\int\limits_S$. En effet la variété $S$ a $n-1$ dimensions, l'intersection de $C$ et de $S$ en a $n-3$; l'aire de $S-S_1$ (c'est à dire de l'ensemble des points de $S$ dont la distance à $C$ est plus petite que $\varepsilon$) sera donc de l'ordre de $\varepsilon^2$. Si nous changeons $\varepsilon$ en $\varepsilon'$, $\varepsilon'$ étant plus petit que $\varepsilon$ et tel que la différence $\varepsilon-\varepsilon'$ soit très petite par rapport à $\varepsilon$, si nous appelons $s$ l'ensemble des points de $S$ dont la distance à $C$ est comprise entre $\varepsilon$ et $\varepsilon'$; l'aire de $s$ sera de l'ordre de $\varepsilon(\varepsilon-\varepsilon')$; de plus dans $s$, les fonctions $U$ et $\frac{dU}{d\nu}$ sont finies, tandis que $V$ et $\frac{dV}{d\nu}$ sont de l'ordre de $\log\varepsilon$ et de $\frac{1}{\varepsilon}$. L'intégrale $\int\limits_s$ est donc de l'ordre de $\varepsilon-\varepsilon'$. Nous en concluons que l'intégrale

$$\int\limits_S\left(V\frac{dU}{d\nu}-U\frac{dV}{d\nu}\right)d\omega$$

et même l'intégrale

$$\int_S \left(\left|V\frac{dU}{d\nu}\right| + \left|U\frac{dV}{d\nu}\right|\right)d\omega$$

sont finies.

De plus d'après les théorèmes 2 et 3 généralisés la première intégrale est une fonction holomorphe et harmonique des $y$.

Ainsi quand $\varepsilon$ tend vers 0, l'intégrale $\int\limits_{S_1}$ tend vers une fonction holomorphe et harmonique des $y$.

En même temps, les intégrales $\int\limits_k$, $\int\limits_{k'}$, $\int\limits_{k''}$ tendent vers 0; en effet les aires d'intégration $k$, $k'$ et $k''$ sont très petites par rapport à $\varepsilon$ et la fonction sous le signe $\int$ est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Passons à l'intégrale $\int\limits_{\Sigma}$. L'aire de $\Sigma$ est proportionnelle à $\varepsilon^{n-1}$. A la surface de $\Sigma$, $V$ et $\frac{dV}{d\nu}$ sont finis; $U$ est égal à $\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}$ et $\frac{dU}{d\nu}$ à $\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}$. Donc quand $\varepsilon$ tend vers 0,

$$\varepsilon^{n-1}\left(V\frac{dU}{d\nu} - U\frac{dV}{d\nu}\right)$$

tend vers $(n-2)V_0$, $V_0$ étant la valeur de $V$ au point de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, c'est à dire au centre de $\Sigma$.

La limite de l'intégrale $\int\limits_{\Sigma}$ est donc égale à $V_0$ multipliée par un facteur constant numérique.

Reste l'intégrale $\int\limits_{K_1}$. Elle est égale à

$$2\pi\varepsilon\int\left(V\frac{dU}{d\nu} - U\frac{dV}{d\nu}\right)d\tau$$

en représentant par

$$\int d\tau = \int \Delta_0 dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-2}$$

l'aire de $C$.

$V$ est de l'ordre de $\log \varepsilon$ et $\frac{dU}{d\nu}$ est fini, donc

$$\varepsilon V \frac{dU}{d\nu}$$

tend vers zéro. D'autre part $U$ est égal à $r^{2-n}$ et

$$\varepsilon \frac{dV}{d\nu} = \sum (x_k - \varphi_k) \frac{dV}{dx_k}$$

tend vers $\delta$. Donc l'intégrale $\int\limits_{K_1}$ tend vers

$$-2\pi \int \frac{\delta\, dt}{r^{n-2}},$$

$r$ désignant la distance de l'élément $d\tau$ au point $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

C'est le potentiel d'une variété attirante à $n-2$ dimensions, au point $y_1, y_2, \ldots, y_n$. La variété attirante est $C$ et la densité de la matière attirante est $\delta$.

Notre équation devient ainsi:

$$\int\limits_S - 2\pi \int \frac{\delta\, dt}{r^{n-2}} + CV_0 = 0,$$

$C$ étant un coefficient constant.

Nous arrivons donc à l'énoncé suivant qui est la généralisation de notre théorème 4:

*Notre fonction $V$ est, dans le domaine considéré, égale au potentiel de la variété attirante $C$, plus une fonction holomorphe et harmonique.*

On pourrait dans la démonstration précédente, remplacer la variété-canal $K$, par d'autres variétés très peu différentes et qui joueraient le même rôle.

Nous en verrons un exemple dans le paragraphe suivant.

## § 7. *Applications aux fonctions logarithmiques.*

Soit $F$ une fonction des $n$ variables complexes:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \qquad z_2 = x_2 + iy_2, \quad \ldots, \quad z_n = x_n + iy_n$$

holomorphe dans un certain domaine $G$.

La fonction

$$V = \log|F|$$

sera une fonction biharmonique des $2n$ variables $x$ et $y$ dans tout ce domaine sauf sur la variété à $2n - 2$ dimensions

$$F = 0,$$

variété que j'appellerai $C$ dans ce qui va suivre.

J'appellerai $S$ la variété à $2n - 1$ dimensions qui limite le domaine $G$.

Nous pourrions en partant de la variété $C$, construire, comme dans le paragraphe précédent, une variété-canal $K$ à $2n - 1$ dimensions qui serait l'enveloppe des hypersphères dont le rayon serait $\varepsilon$ et dont le centre serait sur $C$.

J'envisagerai ensuite une hypersphère $\Sigma$ dont le centre sera un point quelconque de $G$ et dont le rayon sera $\varepsilon$. Je désignerai par $P$ le centre de cette hypersphère.

Je désignerai par $M$ le point de coordonnées courantes

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$$

et par $r$ la distance $MP$.

J'ai déjà posé

$$V = \log|F|;$$

je pose de même

$$U = \frac{1}{r^{2n-2}}.$$

La fonction $U$ a même définition qu'au paragraphe précédent; il me reste à montrer que la fonction $V$ satisfait bien aux mêmes conditions que dans le paragraphe précédent.

1° Quand le point $M$ est à la distance $\varepsilon$ de la variété $C$, $V$ est de l'ordre de $\log \varepsilon$.

Soit en effet

$$x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, \ldots, x'_n, y'_n$$

un point quelconque $M'$ de la variété $C$.

Je poserai d'ailleurs:

$$x'_k + iy'_k = z'_k.$$

Si le point $M'$ n'est pas singulier, c'est à dire si en ce point $\frac{dF}{dz_n}$ ne s'annule pas; nous pourrons poser:

$$F = (z_n - H)\theta.$$

$H$ est une série développée suivant les puissances de

$$z_1 - z'_1, z_2 - z'_2, \ldots, z_{n-1} - z'_{n-1}$$

et se réduit à $z'_n$ quand tous les $z_k$ deviennent égaux à $z'_k$.

$\theta$ est une série développée suivant les puissances de

$$z_1 - z'_1, z_2 - z'_2, \ldots, z_n - z'_n$$

et ne s'annule pas quand tous les $z_k$ deviennent égaux à $z'_k$.

Supposons maintenant que le point $M'$ soit singulier; je suppose donc qu'en ce point $\frac{dF}{dz_n}$ s'annule, mais cependant que toutes les dérivées successives de $F$ par rapport à $z_n$ ne s'annulent pas à la fois. Par exemple, pour fixer les idées, je supposerai:

$$\frac{dF}{dz_n} = \frac{d^2F}{dz_n^2} = 0; \qquad \frac{d^3F}{dz_n^3} \gtrless 0.$$

Alors nous pourrons poser:

$$F = (z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0)\theta.$$

$\theta$ conserve la même signification. Les séries $H_2, H_1, H_0$ sont comme $H$ développées suivant les puissances de

$$z_1 - z'_1, z_2 - z'_2, \ldots, z_{n-1} - z'_{n-1}.$$

Quand tous les $z_k$ deviennent égaux à $z'_k$, le polynôme

$$z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0$$

se réduit à

$$(z_n - z'_n)^3.$$

Tout cela résulte des théorèmes cités plus haut et qui se trouvent soit dans les oeuvres de WEIERSTRASS, soit au début de ma thèse.

Reste le cas où toutes les dérivées $\frac{d^k F}{d z_n^k}$ sont nulles à la fois. Mais ce cas se ramène au précédent. Il suffit de faire un changement linéaire de variables; et on peut toujours le faire de telle façon que toutes les dérivées de $F$ par rapport à l'une des nouvelles variables ne s'annulent pas à la fois. Car nous ne supposons pas que $F$ soit identiquement nul. Qu'on se reporte d'ailleurs au dernier des théorèmes de la partie citée de ma thèse.

Cela posé, plaçons-nous d'abord dans le premier cas; celui où:

$$F = (z_n - H)\theta.$$

Considérons le point de coordonnées courantes $M$ dont les coordonnées sont les parties réelles et imaginaires de

$$z_1, z_2, \ldots, z_n.$$

Considérons le point $M''$ dont les coordonnées sont les parties réelles et imaginaires de

$$z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, \qquad H(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}).$$

La distance $MM''$ est précisément

$$|z_n - H|.$$

Nous aurons alors:

$$V = \log|z_n - H| + \log|\theta|;$$

le second terme est fini, le premier est négatif et très grand; il est égal à $\log MM''$.

Mais comme $\varepsilon$ représente la plus courte distance de $M$ à $C$ et que $M''$ est sur $C$, on a

$$MM'' > \varepsilon$$

et par conséquent

$$|\log MM''| < |\log \varepsilon|.$$

Donc $V$ est de l'ordre de $\log \varepsilon$. C. Q. F. D.

Passons au second cas où:

$$F = (z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0)\,\theta.$$

Soient $h_1, h_2, h_3$ les trois racines de l'équation:

$$z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0 = 0.$$

Soient $M_1'', M_2'', M_3''$ les trois points dont les coordonnées sont les parties réelles et imaginaires de

$$z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, h_1,$$
$$z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, h_2,$$
$$z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, h_3.$$

Ces trois points sont sur $C$ et l'on aura:

$$|z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0| = MM_1'' \times MM_2'' \times MM_3''$$

d'où:

$$V = \log(MM_1''\,.\,MM_2''\,.\,MM_3'') + \log|\theta|.$$

Le second terme est fini.

Quand au premier il est plus petit en valeur absolue que

$$3 \log \varepsilon;$$

car les points $M_1'', M_2'', M_3''$ étant sur $C$, on a:

$$MM_1'' > \varepsilon, \qquad MM_2'' > \varepsilon, \qquad MM_3'' > \varepsilon.$$

Donc $V$ est de l'ordre de $\log \varepsilon$. C. Q. F. D.

2° Les dérivées premières de $V$ sont de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Ces dérivées premières sont les parties réelles et imaginaires de

$$\frac{d \log F}{dz_1}, \frac{d \log F}{dz_2}, \ldots, \frac{d \log F}{dz_n}.$$

Nous pouvons toujours supposer que toutes les dérivées successives de $F$ par rapport à $z_n$ ne s'annulent pas à la fois, non plus que toutes les dérivées par rapport à $z_1$, non plus que toutes les dérivées successives par rapport à $z_2$, etc.

Car, ainsi que je l'ai dit plus haut, s'il n'en était pas ainsi, on n'aurait qu'à faire un changement linéaire de variables.

Il suffira d'ailleurs de démontrer la proposition énoncée pour $\frac{d \log F}{dz_n}$; si l'on a:

$$F = (z_n - H)\theta$$

il vient:

$$\frac{d \log F}{dz_n} = \frac{1}{z_n - H} + \frac{d \log \theta}{dz_n}.$$

Le second terme est fini et le premier a son module égal à $\frac{1}{MM''}$ et par conséquent plus petit que $\frac{1}{\varepsilon}$.

Si l'on a:

$$F = (z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0)\,\theta = (z_n - h_1)(z_n - h_2)(z_n - h_3)\,\theta$$

il vient:

$$\frac{d \log F}{dz_n} = \frac{1}{z_n - h_1} + \frac{1}{z_n - h_2} + \frac{1}{z_n - h_3} + \frac{d \log \theta}{dz_n}.$$

Le dernier terme est fini et les trois autres ont leurs modules égaux à

$$\frac{1}{MM_1''}, \frac{1}{MM_2''}, \frac{1}{MM_3''},$$

c'est à dire plus petits que $\frac{1}{\varepsilon}$.

Donc dans tous les cas le module de $\frac{d \log F}{dz_n}$ est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

C. Q. F. D.

3° L'expression

$$E = \sum (x_k - x'_k) \frac{dV}{dx_k} + (y_k - y'_k) \frac{dV}{dx_k}$$

tend vers l'unité; quand le point $M'$ dont les coordonnées sont $x'_k$ et $y'_k$ est sur la variété $C$; quand la distance de $M'$ au point $M$ dont les coordonnées sont $x_k$ et $y_k$ tend vers 0; quand enfin la droite $MM'$ est normale à la variété $C$.

Exprimons d'abord que la droite $MM'$ est normale à la variété $C$. Nous aurons les équations suivantes:

$$\frac{z_1 - z'_1}{A_1^0} = \frac{z_2 - z'_2}{A_2^0} = \ldots = \frac{z_n - z'_n}{A_n^0} = \tau$$

qui correspondent aux équations (3) du paragraphe précédent.

Dans ces équations $A_k^0$ a la signification suivante. Soit $A_k$ ce que devient $\frac{dF}{dz_k}$ quand on y remplace les $z_k$ par $z'_k$; $A_k^0$ sera l'imaginaire conjuguée de $A_k$.

D'autre part $E$ est la partie réelle de

$$J = \sum (z_k - z'_k) \frac{d \log F}{dz_k} = \frac{\tau}{F} \sum A_k^0 \frac{dF}{dz_k}.$$

La formule des accroissements finis nous donne ensuite

$$F = \Sigma B_k (z_k - z'_k),$$

$B_k$ étant une quantité complexe dont la partie réelle est comprise entre celle de $A_k$ et celle de $\frac{dF}{dz_k}$ et dont la partie imaginaire est comprise de même entre celles de $A_k$ et de $\frac{dF}{dz_k}$. En effet $F$ est nul pour $z_k = z'_k$ puisque le point $M'$ est sur $C$.

Il vient alors:

$$J = \frac{\tau}{\Sigma B_k (z_k - z'_k)} \sum A_k^0 \frac{dF}{dz_k} = \frac{\sum A_k^0 \frac{dF}{dz_k}}{\Sigma A_k^0 B_k}.$$

Quand la distance $MM'$ tend vers zéro, $\frac{dF}{dz_k}$ et $B_k$ tendent vers $A_k$ et $J$ tend vers 1.

Il en est donc de même de sa partie réelle $E$.

C. Q. F. D.

Ainsi la troisième condition imposée à $V$ dans le paragraphe précédent est remplie et la quantité $\delta$ est égale à $1$.

Donc

*La fonction* $\log|F|$ *est égale dans le domaine $G$ à une fonction holomorphe et harmonique des $x$ et des $y$, plus le potentiel de la variété attirante $C$, la densité de la matière attirante étant égale à* $1$.

*C'est là le théorème fondamental que je veux emprunter à la théorie du potentiel pour l'appliquer à la théorie des fonctions abéliennes.*

La démonstration du paragraphe précédent peut être un peu modifiée en substituant à la variété-canal $K$, une autre variété peu différente qui a pour équation:

$$|F| = \text{const.}$$

En effet résolvons l'équation:

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = F$$

par rapport à $z_n$ et supposons que l'on trouve ainsi:

$$z_n = H(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, F)$$

et faisons-y

$$F = |F|e^{i\theta}.$$

Soient $H'$ et $H''$ les parties réelles et imaginaires de $H$ de telle sorte que

$$x_n = H', \qquad y_n = H''.$$

Alors $x_n$ et $y_n$ vont se trouver exprimés en fonctions de

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}, \theta$$

de sorte que la quantité que nous avons appelée $D_0^2$ sera la somme des carrés des déterminants contenus dans la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{dx_n}{dx_1} & \frac{dx_n}{dy_1} & \frac{dx_n}{dx_2} & \frac{dx_n}{dy_2} & \frac{dx_n}{d\theta} \\ \frac{dy_n}{dx_1} & \frac{dy_n}{dy_1} & \frac{dy_n}{dx_2} & \frac{dy_n}{dy_2} & \frac{dy_n}{d\theta} \end{vmatrix}.$$

J'ai en écrivant cette matrice supposé $n = 3$ pour fixer les idées.

On en déduit:

$$D_0^2 = \sum \left(\frac{dx_n}{dx_k}\frac{dy_n}{d\theta} - \frac{dx_n}{d\theta}\frac{dy_n}{dx_k}\right)^2 + \sum \left(\frac{dx_n}{dy_k}\frac{dy_n}{d\theta} - \frac{dy_n}{dy_k}\frac{dx_n}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dx_n}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy_n}{d\theta}\right)^2$$

d'où:

$$D_0^2 = \left(1 + \sum \left|\frac{dz_n}{dz_k}\right|^2\right) \left|\frac{dz_n}{dF}\right|^2 |F|^2.$$

D'autre part nous aurons:

$$|F^2| \left(\frac{dV}{d\nu}\right)^2 = \sum \left|\frac{dF}{dz_k}\right|^2.$$

Mais pour comparer cette formule avec la précédente, il importe de remarquer que dans l'une d'elles nous faisons entrer les dérivées partielles:

$$\frac{dz_n}{dF}, \frac{dz_n}{dz_k}$$

en regardant $z_n$ comme fonction de $F$ et des $z_K$ et dans l'autre les dérivées

$$\frac{dF}{dz_k}, \frac{dF}{dz_n}$$

en regardant $F$ comme fonction de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Pour rendre les formules comparables, nous transformerons par les relations:

$$\frac{dF}{dz_k} + \frac{dF}{dz_n}\frac{dz_n}{dz_k} = 0; \qquad \frac{dF}{dz_n}\frac{dz_n}{dF} = 1$$

ce qui donne:

$$D_0^2 = \frac{|F^2|}{\left|\frac{dF}{dz_n}\right|^4} \sum \left|\frac{dF}{dz_k}\right|^2.$$

Envisageons l'intégrale qui correspond à $\int\limits_K$, à savoir:

$$\int \left(U\frac{dV}{d\nu} - V\frac{dU}{d\nu}\right) D_0 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \ldots dx_{n-1} dy_{n-1} d\theta.$$

Entre quelles limites faut-il prendre cette intégrale? Pour nous en rendre compte, observons que le domaine $G$ est arbitraire dans une très large mesure; nous pourrons le supposer défini par des inégalités de la forme suivante:

$$\alpha_1 < x_1 < \alpha_1', \ \alpha_2 < x_2 < \alpha_2', \ \ldots, \ \alpha_n < x_n < \alpha_n',$$

$$\beta_1 < y_1 < \beta_1', \ \beta_2 < x_2 < \beta_2', \ \ldots, \ \beta_n < y_n < \beta_n'.$$

Nous pourrons toujours supposer que les constantes $\alpha$ et $\beta$ ont été choisies de telle sorte que si l'une des quantités $x_n$ ou $y_n$ atteint l'une de ses limites $\alpha_n$, $\alpha_n'$, $\beta_n$ ou $\beta_n'$; et que l'une des inégalités relatives à $x_n$ ou à $y_n$ soit remplacée par une égalité, le module $|F|$ restera supérieur à une certaine limite.

En effet donnons d'abord à $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ les valeurs

$$\alpha_1 + i\beta_1, \ \alpha_2 + i\beta_2, \ \ldots, \ \alpha_{n-1} + i\beta_{n-1};$$

nous pourrons choisir $\alpha_n$, $\beta_n$, $\alpha_n'$ et $\beta_n'$ de telle sorte que si nous considérons dans le plan de la variable $z_n$ le rectangle dont les côtés ont pour équations

$$x_n = \alpha_n, \qquad x_n = \alpha_n', \qquad y_n = \beta_n, \qquad y_n = \beta_n',$$

$F$ ne s'annule pas sur le périmètre de ce rectangle et s'annule à l'intérieur de ce rectangle.

Si ensuite $\alpha_k'$ est assez voisin de $\alpha_k$ et $\beta_k'$ assez voisin de $\beta_k$, $F$ ne s'annulera pas non plus quand $z_n$ décrira le périmètre de ce rectangle et quand en même temps $x_k$ variera de $\alpha_k$ à $\alpha_k'$ et $y_k$ de $\beta_k$ à $\beta_k'$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Ainsi se trouve justifiée l'hypothèse faite plus haut.

Dans ces conditions, les limites de l'intégration seront

$$\begin{array}{ll} \alpha_k \text{ et } \alpha'_k \text{ pour } x_k, & \\ \beta_k \text{ et } \beta'_k \text{ pour } y_k, & (k=1,2,\ldots,n-1) \\ 0 \text{ et } 2\pi \text{ pour } \theta, & \end{array}$$

pourvu que $|F|$ soit plus petit que le plus bas module que puisse atteindre $F$ quand $z_n$ décrit le périmètre du rectangle dont il vient d'être question.

Cela posé l'intégrale:

$$\int \frac{dU}{d\nu} V D_0 dx_1 \ldots dy_{n-1} d\theta$$

tend vers zéro quand $|F|$ tend vers 0, et il nous suffira d'envisager l'intégrale:

$$\int U \frac{dV}{d\nu} D_0 dx_1 \ldots dy_{n-1} d\theta = \int \frac{U \sum \left|\frac{dF}{dz_k}\right|^2}{\left|\frac{dF}{dz_n}\right|^2} dx_1 \ldots dy_{n-1} d\theta.$$

Quand $|F|$ tend vers zéro, la variété $|F| = \text{const.}$ tend à se confondre avec $C$ et la quantité sous le signe $\int$ tend vers la valeur qui correspond aux points de la variété $C$.

Elle devient donc indépendante de $\theta$, et en intégrant d'abord par rapport à $\theta$, notre intégrale devient:

$$2\pi \int \frac{U \sum \left|\frac{dF}{dz_k}\right|^2}{\left|\frac{dF}{dz_n}\right|^2} dx_1 \ldots dy_{n-1}.$$

Comparons-la avec l'intégrale qui représente l'aire de $C$.

Il est aisé de voir que cette intégrale est égale à:

$$\int \frac{\sum \left|\frac{dF}{dz_k}\right|^2}{\left|\frac{dF}{dz_n}\right|^2} dx_1 \ldots dy_{n-1} = \int d\omega.$$

Notre intégrale a donc pour limite:

$$2\pi\int U d\omega = 2\pi\int\frac{d\omega}{r^{2n-2}}$$

ce qui représente au facteur $2\pi$ près, le potentiel de la variété attirante $C$.

C. Q. F. D.

L'avantage de cette façon de procéder, c'est qu'on évite les difficultés relatives aux petites portions de variété appelées $k$, $k'$ et $k''$ dans le paragraphe précédent.

## § 8. *Application aux fonctions Abéliennes.*

Nous allons appliquer ce qui précède aux fonctions de $n$ variables méromorphes et $2n$ fois périodiques.

Qu'est-ce d'abord qu'une fonction méromorphe?

Voici les hypothèses que nous allons faire et que nous regardons comme constituant la définition d'une fonction méromorphe.

Il y aura dans l'espace à $2n$ dimensions une infinité de domaines $G$, distribués de telle façon que tout point de l'espace à $2n$ dimensions appartienne *au moins à un* de ces domaines.

Dans un domaine $G$, la fonction méromorphe pourra être représentée par le quotient de deux séries de puissances.

Je ne restreins pas la généralité en supposant que ces deux séries de puissances ne peuvent être l'une et l'autre divisible par une troisième série de même forme s'annulant à l'intérieur de $G$.

Weierstrass a démontré en effet (oeuvres complètes, tome 2, page 151) que si deux séries de puissances $P_1$ et $P_2$ s'annulent en un certain point $M$, on peut toujours trouver trois autres séries $P_0$, $P_1'$, $P_2'$ telles que l'on ait:

$$P_1 = P_0 P_1',$$

$$P_2 = P_0 P_2',$$

et telles que les deux séries $P_1'$ et $P_2'$ n'admettent aucun diviseur commun s'annulant au point $M$.

Qu'arrive-t-il alors dans la partie commune à deux domaines $G$ et $G'$?

Dans le domaine $G$, la fonction méromorphe $F$ sera égale au quotient de deux séries $\frac{P}{Q}$; dans le domaine $G'$ au quotient de deux séries $\frac{P'}{Q'}$; dans la partie commune on aura;

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}.$$

La variété $P = 0$ a $2n - 2$ dimensions; je dis que dans la partie commune $G$ et à $G'$, elle ne diffère pas de la variété $P' = 0$.

Supposons en effet, qu'en un point de cette partie commune, on ait $P' = 0$ sans avoir $P = 0$; soit

$$z_1 = a_1\ ,\ z_2 = a_2\ ,\ \ldots\ ,\ z_n = a_n,$$

ce point que j'appellerai $M$. Je pourrai toujours supposer qu'en ce point toutes les dérivées successives de $P'$ par rapport à $z_n$ ne s'annulent pas à la fois, sans quoi je ferais un changement linéaire de variables. Imaginons par exemple

$$\frac{dP'}{dz_n} = \frac{d^2P'}{dz_n^2} = 0, \qquad \frac{d^3P'}{dz_n^3} \gtrless 0.$$

Alors on aura:

$$P' = [(z_n - a_n)^3 + H_1(z_n - a_n)^2 + H_2(z_n - a_n) + H_3]\,\theta = \Pi . \theta,$$

où les $H$ sont des séries ordonnées suivant les puissances de

$$z_1 - a_1\ ,\ z_2 - a_2\ ,\ \ldots\ ,\ z_{n-1} - a_{n-1}$$

et s'annulant pour $z_k = a_k$, et où $\theta$ est une série ordonnée suivant les puissances des $z_k - a_k$ et ne s'annulant pas pour $z_k = a_k$.

Soit alors

$$\Pi = (z_n - a_n - h_1)(z_n - a_n - h_2)(z_n - a_n - h_3);$$

$h_1$, $h_2$ et $h_3$ seront des fonctions de

$$z_1 - a_1\ ,\ z_2 - a_2\ ,\ \ldots\ ,\ z_{n-1} - a_{n-1}$$

s'annulant avec ces variables.

Quand on égalera $z_n$ à $a_n + h_1$, $a_n + h_2$, $a_n + h_3$; $P'$ sera nul et $P$ ne sera pas nul, donc $Q'$ devra s'annuler; donc $Q'$ est divisible par $\Pi$, ce qui est absurde puisque nous avons supposé que $P'$ et $Q'$ n'avaient pas de diviseur commun.

Donc les deux variétés $P = 0$, $P' = 0$ sont identiques.

Il en est évidemment de même des deux variétés $Q = 0$, $Q' = 0$.

J'appellerai $C$ la variété $P = 0$; et $C'$ la variété $Q = 0$; j'appellerai $W$ l'intersection de ces deux variétés qui est elle-même une variété à $2n - 4$ dimensions.

Il importait de démontrer que la définition de la variété $C$ ne dépendait pas de la façon dont $F$ est mise sous la forme du quotient de deux séries, c'est à dire que les deux variétés $P = 0$ et $P' = 0$ sont identiques; je puis ainsi étendre nos variétés $C$ et $C'$ au delà du domaine $G$.

Supposons maintenant que notre fonction méromorphe $F$ est $2n$ fois périodique. L'espace à $2n$ dimensions va se trouver partagé en une infinite de *prismatoïdes des périodes* dont le rôle est analogue à celui des parallélogrammes des périodes dans la théorie des fonctions elliptiques.

Soient

$$R_0, R_1, R_2, \ldots, R_k, \ldots$$

ces prismatoïdes; l'ordre des indices est d'ailleurs arbitraire jusqu'à nouvel ordre.

Je désignerai par; $C_k$, $C'_k$, $W_k$ les portions de variétés $C$, $C'$, $W$ qui sont intérieures au prismatoïde $R_k$.

L'aire de $C_k$ sera finie; ce sera une constante qui sera la même pour $C_k$ que pour $C_0$; car la variété $C_k$ n'est autre chose que la variété $C_0$ transportée parallèlement à elle-même. Soit $A$ cette aire.

Soit $d\omega'$ un élément de l'aire de la variété $C$, $M'$ son centre de gravité, $x'_1, y'_1, \ldots, x'_n, y'_n$ ses coordonnées. Soit $M$ le point de coordonnées courantes, $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ ses coordonnées. Soit $r$ la distance $MM'$.

Considérons l'intégrale:

$$V_k = \int \frac{d\omega'}{r^{2n-2}},$$

étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la variété $C_k$ (c'est à dire le potentiel de cette variété $C_k$).

Développons $\frac{1}{r^{2n-2}}$ suivant les puissances croissantes des $x$ et des $y$, c'est à dire des coordonnées du point $M$, et écrivons:

$$\frac{1}{r^{2n-2}} = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$$

$U_k$ étant un ensemble de termes homogène de degré $k$ par rapport aux $x$ et aux $y$.

Supposons que les coordonnées $x$ et $y$ soient finies et les coordonnées $x'$ et $y'$ très grandes, de telle façon que

$$\rho = \sqrt{\Sigma x_k'^2 + \Sigma y_k'^2},$$

distance du point $M'$ à l'origine, soit un infiniment grand du 1[er] ordre.

Alors $U_0$ sera égal à

$$\frac{1}{\rho^{2n-2}}$$

et sera un infiniment petit d'ordre $2n - 2$.

$U_1$ sera un infiniment petit d'ordre $2n - 1$, $U_2$ d'ordre $2n$ etc.

Si nous posons:

$$H = \frac{1}{r^{2n-2}} - U_0 - U_1 - U_2,$$

$H$ sera un infiniment petit d'ordre $2n + 1$.

Précisons davantage; je suppose que $\rho_0$ et $\rho_1$ soient deux constantes et que l'on ait:

$$(\alpha) \qquad \Sigma x^2 + \Sigma y^2 < \rho_0^2 < \rho_1^2 < \Sigma x'^2 + \Sigma y'^2$$

on pourra trouver une constante $B$ telle que

$$|H| < \frac{B}{\rho^{2n+1}}.$$

Soit maintenant

$$S_k = \int d\omega'(U_0 + U_1 + U_2),$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la variété $C_k$; $S_k$ sera un polynôme du 2[d] degré par rapport aux $x$ et aux $y$. Ce polynôme sera harmonique, c'est à dire qu'on aura

$$\Delta S_k = 0;$$

car on a

$$\Delta \frac{1}{r^{2n-2}} = 0$$

et par conséquent

$$\Delta U_0 = \Delta U_1 = \Delta U_2 = 0.$$

On a ensuite:

$$V_k - S_k = \int H d\omega'.$$

Il est clair que si les inégalités ($\alpha$) sont remplies, on aura:

$$|V_k - S_k| < \frac{AB}{\sigma^{2n+1}},$$

la lettre $\sigma$ désignant la plus petite valeur que puisse prendre $\rho$ à l'intérieur du prismatoïde $R_k$.

Soit d'un autre côté $T$ le volume d'un prismatoïde des périodes; ce volume est évidemment le même pour tous les prismatoïdes. Soit $D$ la longueur de la plus grande diagonale de ce prismatoïde; cette longueur est aussi la même pour tous les prismatoïdes.

A l'intérieur du prismatoïde $R_k$, $\rho$ sera compris entre $\sigma$ et $\sigma + D$. L'intégrale $2n^{\text{ple}}$

$$\int \frac{dx'_1 dx'_2 \ldots dx'_n dy'_1 \ldots dy'_n}{(\rho - D)^{2n+1}} = \int \frac{d\tau}{(\rho - D)^{2n+1}}$$

étendue au prismatoïde $R_k$ sera plus grande que $\frac{T}{\sigma^{2n+1}}$; je désigne pour abréger par $d\tau$ le produit des $2n$ différentielles $dx'$ et $dy'$.

On aura donc:

$$|V_k - S_k| < \frac{AB}{T} \int \frac{d\tau}{(\rho - D)^{2n-1}}$$

Je dis que la série:

$$\Sigma(V_k - S_k)$$

est absolument convergente. En effet nous distinguerons parmi les prismatoïdes $R_k$:

1° ceux dont tous les points ne satisfont pas aux inégalités

$$> \rho_1 \, , \, \rho > D.$$

Ceux-là sont en nombre fini et correspondent à un nombre fini de termes de la série.

2° ceux dont tous les points satisfont aux inégalités

$$\rho > \rho_1 \, , \; \rho > D.$$

La somme

$$\Sigma \, | V_k - S_k |$$

relative à ces prismatoïdes est plus petite que l'intégrale:

$$\frac{AB}{T} \int \frac{d\tau}{(\rho - D)^{2n+1}}$$

étendue à tous les éléments $d\tau$ de ces prismatoïdes; ou a fortiori plus petite que l'intégrale

$$\frac{AB}{T} \int \frac{d\tau}{(\rho - D)^{2n+1}}$$

étendue à tous les éléments $d\tau$ de l'espace tels que

$$\rho > \rho_1 \, , \; \rho > D;$$

je puis toujours supposer pour fixer les idées

$$\rho > \rho_1 > D.$$

Or cette dernière intégrale est égale à l'intégrale simple

$$\frac{AB\varpi}{T} \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2},$$

$\varpi$ étant une constante, et cette intégrale simple est finie.

Donc la série

$$\Sigma (V_k - S_k)$$

est absolument convergente. C. Q. F. D.

Cette série est évidemment égale à l'intégrale

$$\int H d\omega'$$

étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la variété $C$.

Je désigne par $V$ la somme de cette série.

Voici les propriétés fondamentales de cette fonction $V$.

1° Elle est harmonique dans tout l'espace sauf pour les points de la variété $C$.

2° La différence $V - V_k$ est harmonique en tous les points du prismatoïde $R_k$.

3° Envisageons un domaine $G$, où l'on peut mettre $F$ sous la forme $\frac{P}{Q}$ et qui fasse partie de $R_k$.

D'après le théorème fondamental du paragraphe précédent, la fonction

$$\log|P|$$

est, à l'intérieur de $G$, égale à

$$\varphi + \varphi',$$

$\varphi$ étant une fonction holomorphe et harmonique des $x$ et des $y$ et $\varphi'$ étant le potentiel d'une variété attirante qui est la partie de $C$ intérieure à $G$; c'est à dire l'intégrale

$$\int \frac{d\omega'}{r^{2n-2}}$$

étendue à cette partie de $C$. Mais comme $V_k$ est la même intégrale étendue à une partie de $C$ plus étendue, à savoir à la partie de $C$ qui est intérieure à $R_k$, la différence

$$V_k - \varphi'$$

sera une fonction holomorphe et harmonique dans $G$.

Donc la différence

$$V_k - \log|P|$$

et par conséquent *la différence*

$$V - \log|P|$$

*est dans tout le domaine $G$ une fonction holomorphe et harmonique des $x$ et des $y$.*

4° La fonction $\log|P|$ est biharmonique.

Si donc je représente par

$$DV$$

l'une des expressions

$$\frac{d^2V}{dx_k^2}+\frac{d^2V}{dy_k^2}\,,\quad \frac{d^2V}{dx_k\,dx_q}+\frac{d^2V}{dy_k\,dy_q}\,,\quad \frac{d^2V}{dx_k\,dy_q}-\frac{d^2V}{dy_k\,dx_q}\,,$$

on aura:

$$D\log|P| = 0.$$

Or $V - \log|P|$ est une fonction holomorphe et harmonique; donc

$$D(V - \log|P|)$$

sera aussi une fonction holomorphe et harmonique, puisque

$$\Delta D(V - \log|P|) = D\Delta(V - \log|P|) = 0;$$

et puisque

$$D\log|P| = 0$$

nous arrivons à cette conclusion que

*$DV$ est une fonction holomorphe et harmonique dans tout l'espace.*

5° Qu'arrive-t-il quand les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_n$ augmentent d'une période?

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une période de telle façon que la fonction $F$ ne change pas quand $z_1, z_2, \ldots, z_n$ se changent en

$$z_1 + a_1\,,\; z_2 + a_2\,,\; \ldots\,,\; z_n + a_n.$$

Je représenterai par

$$V(z_i + a_i)\,,\; V_k(z_i + a_i)\,,\; S_k(z_i + a_i)$$

ce que deviennent $V$, $V_k$ et $S_k$, c'est à dire $V(z_i)$, $V_k(z_i)$, $S(z_i)$ quand on change $z_i$ en $z_i + a_i$; nous aurons alors:

$$V(z_i + a_i) = \Sigma[V_k(z_i + a_i) - S_k(z_i + a_i)],$$
$$V(z_i) = \Sigma[V_k(z_i) - S_k(z_i)].$$

Quand $z'_i$ se changera en $z'_i + a_i$, le prismatoïde $R_k$ se changera en un autre prismatoïde $R_h$; et comme la distance des points $z_i + a_i$ et $z'_i + a_i$ est égale à celle des points $z_i$ et $z'_i$, nous aurons:

$$V_k(z_i) = V_h(z_i + a_i).$$

D'autre part nous pouvons remplacer l'équation

$$V(z_i + a_i) = \Sigma[V_k(z_i + a_i) - S_k(z_i + a_i)]$$

par la suivante:

$$V(z_i + a_i) = \Sigma[V_h(z_i + a_i) - S_h(z_i + a_i)].$$

Les deux séries ne diffèrent en effet que par l'ordre des termes; la première s'étend aux prismatoïdes $R_k$, c'est à dire à *tous* les prismatoïdes; la seconde aux prismatoïdes $R_h$, c'est à dire aussi à *tous* les prismatoïdes. Je puis écrire également:

$$V(z_i + a_i) = \Sigma[V_k(z_i) - S_h(z_i + a_i)]$$

et par conséquent:

$$V(z_i + a_i) - V(z_i) = \Sigma[S_k(z_i) - S_h(z_i + a_i)].$$

Tous les termes du $2^d$ membre sont des polynômes du $2^d$ degré par rapport aux $x$ et aux $y$.

Donc quand les $z$ augmentent d'une période, $V$ augmente d'un polynôme qui est au plus du $2^d$ degré.

Etudions les termes du second degré et cherchons par exemple le coefficient de $\frac{x_1^2}{2}$.

Dans $S_k(z_i)$ ce coefficient est égal à l'intégrale:

$$\int d\omega' \frac{d^2\rho^{-2n+2}}{dx_1'^2} \quad \text{où} \quad \rho^2 = \Sigma x_k'^2 + \Sigma y_k'^2;$$

l'intégration est étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la partie de $C$ qui est intérieure à $R_k$; j'appelle $J_k$ cette intégrale.

Dans $S_h(z_i + a_i)$, le coefficient sera la même intégrale étendue à tous les élements $d\omega'$ de la partie de $C$ intérieure à $R_h$; c'est donc $J_h$.

Donc le coefficient cherché dans $V(z_i + a_i) - V(z_i)$ est la somme de la série:

$$\Sigma(J_k - J_h).$$

Je dis que cette série est absolument convergente et a pour somme zéro. Elle est absolument convergente parce que son terme général est de l'ordre de

$$\rho^{-(2n+1)},$$

c'est à dire du même ordre que le terme général de la série $\Sigma(V_k - S_k)$ qui est convergente.

Pour évaluer la somme, groupons les termes d'une façon particulière.

Soit $R_k = R'_0$ un prismatoïde quelconque, $R_h = R'_1$ ce que devient $R_k$ quand on change $z'_i$ en $z'_i + a_i$; soit plus généralement $R'_n$ ce que devient $R_k = R'_0$ quand on change $z'_i$ en $z'_i + na_i$, $n$ étant un entier positif ou négatif.

Les prismatoïdes

$$\ldots, R'_{-n}, \ldots, R'_{-1}, R'_0, R'_1, R'_2, \ldots, R'_p, \ldots$$

formeront ce que j'appellerai un groupe de prismatoïdes. Tout prismatoïde appartiendra à l'un de ces groupes et à un seul.

Nous aurons ainsi réparti en groupes les prismatoïdes et par conséquent les termes de la série.

Il me suffit de montrer que la somme des termes d'un groupe est nulle.

En effet, soit $J'_n$ l'intégrale qui sera à $R'_n$ ce que $J_k$ est à $R_k$. Notre groupe de termes s'écrira:

$$(J'_{-n} - J'_{-n+1}) + \ldots + (J'_{-1} - J'_0) + (J'_0 - J'_1) + (J'_1 - J'_2) + \ldots + (J'_p - J'_{p+1}).$$

La somme des termes sera

$$J'_{-n} - J'_{p+1},$$

en nous arrêtant au $n^e$ terme dans un sens et au $p^e$ dans l'autre. Quand $n$ et $p$ croîtront indéfiniment, $J'_{-n}$ et $J'_{p+1}$ tendront vers zéro.

Donc la somme cherchée est nulle.

C. Q. F. D.

Donc le coefficient de $\frac{x_1^2}{2}$ est nul et on démontrerait de même que les autres termes du second degré sont nuls également.

Donc la différence $V(z_i + a_i) - V(z_i)$ est un polynôme du 1^er degre seulement.

*Donc quand les $z$ augmentent d'une période, la fonction $V$ augmente d'un polynôme du 1^er degré par rapport aux $x$ et aux $y$.*

On démontrerait de même:

1° Que l'intégrale

$$V' = \int H d\omega'$$

étendue à tous les éléments de la variété $C'$ est finie.

2° Que la fonction $V'$ est harmonique dans tout l'espace sauf sur la variété $C'$.

3° Que la différence

$$V' - \log |Q|$$

est dans tout le domaine $G$ une fonction holomorphe et harmonique.

4° Que les expressions $DV'$ sont harmoniques dans tout l'espace.

5° Que la fonction $V'$ augmente d'un polynôme du 1^er degré par rapport aux $x$ et aux $y$ quand les $z$ augmentent d'une période.

## § 9. *Introduction des fonctions $\theta$.*

Nous venons de voir que les expressions $DV$ sont des fonctions holomorphes et harmoniques dans tout l'espace.

D'autre part, nous avons trouvé:

$$V(z_i + a_i) - V(z_i) = \Pi,$$

$\Pi$ étant un polynôme du 1^er degré; on a donc:

$$DV(z_i + a_i) - DV(z_i) = D\Pi = 0$$

ou

$$DV(z_i + a_i) = DV(z_i)$$

ce qui montre que les $DV$ sont des fonctions périodiques.

Les $DV$ étant des fonctions à la fois harmoniques et périodiques se réduisent à des constantes (théorème 7).

Je dis maintenant que l'on peut toujours trouver un polynôme $Z$ du second degré par rapport aux $x$ et aux $y$ et tel que les expressions $DZ$ se réduisent à des constantes données.

Ce théorème peut encore s'énoncer d'une autre manière.

Reprenons les notations du § 3 et posons:

$$x_k + iy_k = z_k, \qquad x_k - iy_k = u_k.$$

Je dis qu'on peut toujours trouver un polynôme $Z$ du second degré par rapport aux $z$ et aux $u$ et tel que les $n^2$ quantités:

$$\frac{d^2Z}{dz_k\,du_q}$$

soient égales à $n^2$ constantes données $A_{k.q}$.

L'identité des deux énoncés est manifeste et d'ailleurs le second énoncé est immédiatement évident puisqu'on n'a qu'à prendre:

$$Z = \Sigma A_{kq} z_k u_q.$$

Il résulte de là que nous pourrons toujours trouver un polynôme $Z$ tel que les expressions $DZ$ soient égales aux constantes $DV$.

On aura donc

$$D(V - Z) = 0$$

c'est à dire que la fonction $V - Z$ est biharmonique dans tout l'espace sauf sur $C$.

D'autre part $\log|P|$ étant biharmonique, on a

$$D(V - Z - \log|P|) = 0$$

et comme $V - Z - \log|P|$ est holomorphe et harmonique à l'intérieur de $G$, même sur $C$, nous pouvons conclure que

$$V - Z - \log|P|$$

est holomorphe et *biharmonique* à l'intérieur de $G$, même sur $C$. Enfin $V - Z$ augmente d'un polynôme du 1^er^ degré par rapport aux $x$ et aux $y$, quand les $z$ augmentent d'une période.

Les équations

$$D(V-Z)=0$$

nous apprennent que l'expression

$$\sum\left[\frac{d(V-Z)}{dx_k}dy_k-\frac{d(V-Z)}{dx_k}dx_k\right]$$

est une différentielle exacte. Posons donc:

$$T=\int\sum\left[\frac{d(V-Z)}{dx_k}dy_k-\frac{d(V-Z)}{dy_k}dx_k\right].$$

L'intégrale prise le long d'un contour fermé est nulle si ce contour ne tourne par autour de $C$; elle n'est pas nulle en général, si le contour tourne autour de $C$.

Donc $T$ est une fonction uniforme dans tout domaine simplement connexe ne contenant aucun point de $C$. Mais ce n'est plus une fonction uniforme dans un domaine traversé par $C$.

Considérons de même la fonction:

$$\text{arg.}\,P=\int\sum\left[\frac{d\log|P|}{dx_k}dy_k-\frac{d\log|P|}{dy_k}dx_k\right],$$

c'est également une fonction uniforme dans tout domaine simplement connexe non traversé par $C$; et une fonction non uniforme dans un domaine traversé par $C$.

La différence:

$$T-\text{arg.}\,P=\int\sum\left[\frac{d(V-Z-\log|P|)}{dx_k}dy_k-\frac{d(V-Z-\log|P|)}{dy_k}dx_k\right]$$

est une fonction uniforme dans tout le domaine $G$, quoique ce domaine soit traversé par $C$; et en effet $V-Z-\log|P|$ est biharmonique dans tout le domaine $G$.

La fonction

$$\varphi=V-Z+iT-\log P$$

a pour partie réelle

$$V-Z-\log|P|$$

et pour partie imaginaire

$$T - \arg. P.$$

C'est donc une fonction des $n$ variables complexes

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

et de plus cette fonction est holomorphe dans tout le domaine $G$.

Posons ensuite:

$$e^{V-Z+iT} = \theta(z_i)$$

il viendra:

$$\theta = Pe^{\varphi}.$$

$P$ et $\varphi$ étant des fonctions holomorphes des $n$ variables complexes $z$ dans le domaine $G$, il en sera de même de $\theta$ et comme tout point de l'espace fait partie d'un domaine tel que $G$:

*La fonction $\theta$ est une fonction des $n$ variables complexes $z$ holomorphe dans tout l'espace.*

Nous avons trouvé plus haut:

$$V(z_i + a_i) - V(z_i) = \Pi,$$

$\Pi$ étant un polynôme du 1^er^ degré. D'autre part $Z$ étant un polynôme du second degré, on aura:

$$Z(z_i + a_i) - Z(z_i) = \Omega,$$

$\Omega$ étant un polynôme du 1^er^ degré; il vient alors:

$$\frac{d}{dy_k}[T(z_i + a_i) - T(z_i)] = \frac{d}{dx_k}[V(z_i + a_i) - V(z_i) - Z(z_i + a_i) + Z(z_i)]$$

$$= \frac{d(\Pi + \Omega)}{dx_k} = \text{const.}$$

et de même:

$$\frac{d}{dx_k}[T(z_i + a_i) - T(z_i)] = -\frac{d(\Pi + \Omega)}{dy_k} = \text{const.}$$

Les dérivées de $T(z_i + a_i) - T(z_i)$ étant des constantes, on aura:

$$T(z_i + a_i) - T(z_i) = \Psi,$$

$\Psi$ étant encore un polynôme du premier degré. J'écris enfin:

$$V(z_k + a_k) - Z(z_k + a_k) + iT(z_k + a_k) - V(z_k) + Z(z_k) - iT(z_k) = U,$$

$U$ étant un polynôme du 1^er^ degré par rapport aux $x$ et aux $y$.

Comme

$$V(z_k) - Z(z_k) + iT(z_k),$$

$$V(z_k + a_k) - Z(z_k + a_k) + iT(z_k + a_k)$$

sont des fonctions des $n$ variables complexes $z$, il en sera de même de $U$.

*Donc $U$ est un polynôme du 1^er^ degré par rapport aux $n$ variables complexes $z$ et on aura*

$$(1) \qquad \theta(z_i + a_i) = \theta(z_i)e^U.$$

Cette propriété rappelle la propriété fondamentale des fonctions $\theta$ et il est aisé de voir comment les fonctions qui satisfont à la condition (1) se ramènent aux fonctions $\theta$ ordinaires; je renverrai pour plus de détails à mon mémoire sur les fonctions abéliennes inséré dans l'American Journal of Mathematics.

On démontrerait de même:

1° que les $DV'$ sont des constantes.

2° qu'il existe un polynôme du second degré $Z'$ tel que

$$DZ' = DV'.$$

3° que si l'on pose:

$$T' = \int \sum \left[\frac{d(V' - Z')}{dx_k} dy_k - \frac{d(V' - Z')}{dy_k} dx_k\right],$$

$$\theta' = e^{V' - Z' + iT'};$$

la fonction $\theta'$ est dans tout l'espace une fonction holomorphe des $n$ variables complexes $z$.

4° enfin que

$$\theta'(z_i + a_i) = \theta'(z_i)e^{U'},$$

$U'$ étant un polynôme du 1^er^ degré par rapport aux $n$ variables complexes $z$.

Considérons maintenant le rapport:

$$\frac{F\theta'}{\theta}$$

ou plutôt son logarithme

$$H = \log F + \log \theta' - \log \theta.$$

1° C'est une fonction des $n$ variables complexes $z$.

2° Cette fonction $H$ est holomorphe dans tout l'espace, et en effet, dans le domaine $G$, elle est égale à la différence de

$$V' - Z' + iT' - \log Q$$

et

$$V - Z + iT - \log P$$

qui sont toutes deux holomorphes dans le domaine $G$.

3° Quand les $z$ augmentent d'une période, cette fonction $H$ augmente de

$$U' - U$$

c'est à dire d'un polynôme du 1^er^ degré; les dérivées secondes de $H$ sont donc périodiques et comme elles sont holomorphes dans tout l'espace, elles se réduisent à des constantes.

En d'autres termes $H$ est un polynôme du second degré.

On a donc finalement

$$F = \frac{\theta}{\theta'} e^{H},$$

$H$ étant un polynôme du second degré.

Cette formule démontre la possibilité de mettre $F$ sous la forme du quotient de deux fonctions $\vartheta$ ordinaires; il suffit pour s'en rendre compte d'appliquer les principes de mon mémoire cité de l'American Journal of Mathematics.