ÜBER DIE INTEGRATION SIMULTANER LINEARER DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN DURCH BESTIMMTE INTEGRALE

VON

HJ. MELLIN
in HELSINGFORS.

In diesem Aufsatze wollen wir zeigen, dass die auf Verwendung bestimmter Integrale basirte Integrationsmethode ebenfalls auf *Systeme* simultaner linearer Differentialgleichungen übertragen werden kann. Der Kürze halber beschränken wir uns hierbei auf Systeme von zwei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zwischen zwei abhängigen Veränderlichen. Aus der folgenden Darstellung wird sich aber leicht ergeben, dass unsere Sätze ohne weiteres auf beliebige Systeme gewöhnlicher linearer homogener Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten ausgedehnt werden können. An der Hand der vorangehenden Arbeit [1] kann man ferner finden, dass ganz analoge Sätze auch von Systemen partieller linearer Differentialgleichungen gelten müssen.

§ 1.

In den LAGRANGE'schen Beziehungen

$$\varphi\sum_{\nu=0}^{m} x^\nu f_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\chi - \chi\sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\varphi = \frac{d}{dx}f(\chi, \varphi),$$

$$\psi\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu g_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\chi - \chi\sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\psi = \frac{d}{dx}g(\chi, \psi),$$

[1] *Über die Integration partieller linearer Differentialgleichungen durch vielfache Integrale.*

wo $f(\chi, \varphi)$ und $g(\chi, \psi)$ in χ und φ, resp. in χ und ψ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen, wollen wir $\chi = e^{ux}$ annehmen, während φ und ψ zwei zusammengehörende Lösungen der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right) x^\nu \varphi + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right) x^\nu \psi = 0$$

bedeuten sollen. Beachtet man zugleich die bekannte Formel

$$f\left(\frac{d}{dx}\right) e^{ux} = f(u) e^{ux},$$

so folgt aus den obigen Beziehungen durch Addition und Integration in der x-Ebene längs einer Linie (x):

$$\sum_{\nu=0}^{m} f_\nu(u) \int_{(x)} e^{ux} x^\nu \varphi\, dx + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu(u) \int_{(x)} e^{ux} x^\nu \psi\, dx$$
$$= \int_{(x)} \frac{d}{dx} [f(e^{ux}, \varphi) + g(e^{ux}, \psi)]\, dx.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz:

Bilden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein System von Lösungen der Differentialgleichung (1) *und ist der Integrationsweg (x) so gewählt, dass die Bedingung*

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx} [f(e^{ux}, \varphi) + g(e^{ux}, \psi)]\, dx = 0$$

identisch erfüllt wird, so besitzen wir in

$$(2) \qquad \Phi(u) = \int_{(x)} e^{ux} \varphi(x)\, dx, \qquad \Psi(u) = \int_{(x)} e^{ux} \psi(x)\, dx$$

ein System von Lösungen der Differentialgleichung

$$(3) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu(u) \frac{d^\nu}{du^\nu} \Phi + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu(u) \frac{d^\nu}{du^\nu} \Psi = 0.$$

Zwischen den beiden Gleichungen (1) und (3) existirt zugleich eine solche Reciprocität, dass sie sich gegenseitig durch bestimmte Integrale integriren.

Um dies zu zeigen setzen wir in den LAGRANGE'schen Beziehungen

$$\Phi \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{\nu} \frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} [f_{\nu}(u)\chi] - \chi \sum_{\nu=0}^{m} f_{\nu}(u) \frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} \Phi = \frac{d}{du} f'(\chi, \Phi),$$

$$\Psi \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} [g_{\nu}(u)\chi] - \chi \sum_{\nu=0}^{n} g_{\nu}(u) \frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} \Psi = \frac{d}{du} g'(\chi, \Psi),$$

wo $f'(\chi, \Phi)$ und $g'(\chi, \Psi)$ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen, $\chi = e^{-ux}$, während Φ und Ψ Lösungen der Differentialgleichung (3) bedeuten. Beachtet man zugleich, dass

$$\frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} [f(u) e^{-ux}] = \frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} \left[f\left(-\frac{d}{dx}\right) e^{-ux} \right] = f\left(-\frac{d}{dx}\right) \left[\frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} e^{-ux} \right]$$
$$= (-1)^{\nu} f\left(-\frac{d}{dx}\right) [x^{\nu} e^{-ux}],$$

so ergiebt sich aus den obigen Beziehungen durch Addition und Integration in der u-Ebene längs einer Linie (u):

$$\sum_{\nu=0}^{m} f_{\nu}\left(-\frac{d}{dx}\right) x^{\nu} \int_{(u)} e^{-ux} \Phi du + \sum_{\nu=0}^{n} g_{\nu}\left(-\frac{d}{dx}\right) x^{\nu} \int_{(u)} e^{-ux} \Psi du$$
$$= \int_{(u)} \frac{d}{du} [f'(e^{-ux}, \Phi) + g'(e^{-ux}, \Psi)] du.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz:

Bilden $\Phi(u)$ und $\Psi(u)$ ein System von Lösungen der Differentialgleichung (3) und ist der Integrationsweg (u) so gewählt, dass die Bedingung

$$\int_{(u)} \frac{d}{du} [f'(e^{-ux}, \Phi) + g'(e^{-ux}, \Psi)] du = 0$$

identisch erfüllt wird, so besitzen wir in

$$(4) \qquad \varphi(x) = \int_{(u)} e^{-ux} \Phi(u) du, \qquad \psi(x) = \int_{(u)} e^{-ux} \Psi(u) du$$

ein System von Lösungen der Differentialgleichung (1).

Der Zusammenhang zwischen den Differentialgleichungen (1) und (3) wird also durch die Integralformeln (2) und (4) vermittelt.

An Stelle *einer* Gleichung wollen wir jetzt *zwei* Differentialgleichungen zwischen den abhängigen Veränderlichen betrachten. Versteht man unter $F(\chi, \varphi)$, $G(\chi, \psi)$, $F'(\chi, \Phi)$, $G'(\chi, \Psi)$ bilineare Differentialausdrücke, welche in Rücksicht auf die unten noch hinzukommenden Differentialgleichungen genau ebenso zu definiren sind, wie oben $f(\chi, \varphi)$, $g(\chi, \psi)$, $f'(\chi, \Phi)$, $g'(\chi, \Psi)$ in Bezug auf die Gleichungen (1) und (3), so hat man ohne weiteres die folgenden Sätze:

Bilden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen

$$(5)\qquad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\varphi + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\psi = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\varphi + \sum_{\nu=0}^{n'} G_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\psi = 0 \end{cases}$$

und ist der Integrationsweg (x) so gewählt, dass die Bedingungen

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[f(e^{ux}, \varphi) + g(e^{ux}, \psi)]\,dx = 0,$$

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[F(e^{ux}, \varphi) + G(e^{ux}, \psi)]\,dx = 0$$

erfüllt werden, so besitzen wir in

$$\Phi(u) = \int_{(x)} e^{ux}\varphi(x)\,dx, \qquad \Psi(u) = \int_{(x)} e^{ux}\psi(x)\,dx$$

ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen

$$(6)\qquad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu(u)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Phi + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu(u)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Psi = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu(u)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Phi + \sum_{\nu=0}^{n'} G_\nu(u)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Psi = 0. \end{cases}$$

Bilden umgekehrt $\Phi(u)$ *und* $\Psi(u)$ *ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen* (6) *und ist der Integrationsweg* (u) *so gewählt, dass die Bedingungen*

$$\int\limits_{(u)} \frac{d}{du}[f'(e^{-ux}, \Phi) + g'(e^{-ux}, \Psi)]\,du = 0,$$

$$\int\limits_{(u)} \frac{d}{du}[F'(e^{-ux}, \Phi) + G'(e^{-ux}, \Psi)]\,du = 0$$

erfüllt werden, so besitzt man in

$$\varphi(x) = \int\limits_{(u)} e^{-ux}\,\Phi(u)\,du, \qquad \psi(x) = \int\limits_{(u)} e^{-ux}\,\Psi(u)\,du$$

ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen (5).

Die beiden Systeme (5) und (6) integriren sich also gegenseitig durch Quadraturen.

§ 2.

Wir benutzen jetzt LAGRANGE'sche Beziehungen der Form

$$\varphi \sum_{\nu=0}^{m} x^\nu f_\nu\left(x\frac{d}{dx}\right)\chi - \chi \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(-x\frac{d}{dx} - 1\right)x^\nu \varphi = \frac{d}{dx} f(\chi, \varphi),$$

$$\psi \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu g_\nu\left(x\frac{d}{dx}\right)\chi - \chi \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(-x\frac{d}{dx} - 1\right)x^\nu \psi = \frac{d}{dx} g(\chi, \psi),$$

wo $f(\chi, \varphi)$ und $g(\chi, \psi)$ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen.

Wir denken uns χ als eine beliebige Function der Form $\chi = \chi(ux)$, in welchem Falle allgemein $f\left(x\frac{d}{dx}\right)\chi(ux) = f\left(u\frac{d}{du}\right)\chi(ux)$ ist, und wählen die Functionen φ und ψ als Lösungen der Differentialgleichung

$$(7) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(-x\frac{d}{dx} - 1\right)x^\nu \varphi + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(-x\frac{d}{dx} - 1\right)x^\nu \psi = 0.$$

Dann ergiebt sich aus den obigen Beziehungen durch Addition und Integration längs einer Linie (x):

$$(8)\qquad \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\int_{(x)}\chi(ux)x^\nu\varphi\,dx + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\int_{(x)}\chi(ux)x^\nu\psi\,dx$$
$$= \int_{(x)}\frac{d}{dx}[f(\chi,\varphi)+g(\chi,\psi)]\,dx.$$

Wählt man die Functionen φ und ψ so, dass sie, ausser der Gleichung (7), noch der folgenden genügen

$$(9)\qquad \sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu\left(-x\frac{d}{dx}-1\right)x^\nu\varphi + \sum_{\nu=0}^{n'} G_\nu\left(-x\frac{d}{dx}-1\right)x^\nu\psi = 0,$$

so besteht gleichzeitig mit (8) die Beziehung

$$(10)\qquad \sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\int_{(x)}\chi(ux)x^\nu\varphi\,dx + \sum_{\nu=0}^{n'} G_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\int_{(x)}\chi(ux)x^\nu\psi\,dx$$
$$= \int_{(x)}\frac{d}{dx}[F(\chi,\varphi)+G(\chi,\psi)]\,dx,$$

wo $F(\chi,\varphi)$ und $G(\chi,\psi)$ in Bezug auf (9) ebenso zu definirende bilineare Differentialausdrücke bedeuten, wie $f(\chi,\varphi)$ und $g(\chi,\psi)$ hinsichtlich der Gleichung (7).

Durch passende Specialisirungen von χ können aus den simultanen Gleichungen (8) und (10) verschiedene Sätze abgeleitet werden. Setzt man beispielsweise $\chi(x)=x^\rho$ und benutzt die bekannte Formel

$$f\left(u\frac{d}{du}\right)u^\rho = u^\rho f(\rho),$$

so hat man den Satz:

Bilden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen

$$(11)\qquad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(-x\frac{d}{dx}-1\right)x^\nu\varphi + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(-x\frac{d}{dx}-1\right)x^\nu\psi = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu\left(-x\frac{d}{dx}-1\right)x^\nu\varphi + \sum_{\nu=0}^{n'} G_\nu\left(-x\frac{d}{dx}-1\right)x^\nu\psi = 0, \end{cases}$$

und ist der Integrationsweg (x) *so gewählt, dass die Bedingungen*

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[f(u^\rho x^\rho, \varphi) + g(u^\rho x^\rho, \psi)]\,dx = 0,$$

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[F(u^\rho x^\rho, \varphi) + G(u^\rho x^\rho, \psi)]\,dx = 0$$

erfüllt werden, so besitzen wir in

$$\Phi(\rho) = \int_{(x)} \varphi(x) x^\rho\,dx, \qquad \Psi(\rho) = \int_{(x)} \psi(x) x^\rho\,dx$$

ein System von Lösungen der simultanen Differenzen-Gleichungen

$$\begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{m} f_\nu(\rho)\Phi(\rho+\nu) + \sum\limits_{\nu=0}^{n} g_\nu(\rho)\Psi(\rho+\nu) = 0, \\ \sum\limits_{\nu=0}^{m'} F_\nu(\rho)\Phi(\rho+\nu) + \sum\limits_{\nu=0}^{n'} G_\nu(\rho)\Psi(\rho+\nu) = 0. \end{cases}$$

In den Formeln (8) und (10) wollen wir zweitens $\chi(x) = e^x$ annehmen. Alsdann ergiebt sich der Satz:

Bilden $\varphi(x)$ *und* $\psi(x)$ *ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen* (11) *und ist der Integrationsweg* (x) *so gewählt, dass die Bedingungen*

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[f(e^{ux}, \varphi) + g(e^{ux}, \psi)]\,dx = 0,$$

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[F(e^{ux}, \varphi) + G(e^{ux}, \psi)]\,dx = 0$$

erfüllt werden, so besitzen wir in

$$\Phi(u) = \int_{(x)} e^{ux}\varphi(x)\,dx, \qquad \Psi(u) = \int_{(x)} e^{ux}\psi(x)\,dx$$

ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Phi+\sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Psi=0,\\ &\sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Phi+\sum_{\nu=0}^{u'} G_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Psi=0.\end{aligned}\right.$$

In den Formeln (8) und (10) wollen wir schliesslich $\chi(x)=(1-x)^{\alpha-1}$ annehmen. Durch Rechnungen, die im Wesentlichen mit denjenigen übereinstimmen, welche im folgenden Paragraphen näher ausgeführt werden, ergiebt sich alsdann der folgende Satz, wo p die kleinste, die beiden Bedingungen $p\geqq m$, $p\geqq n$ erfüllende ganze Zahl bezeichnet, während q dieselbe Bedeutung hinsichtlich der Zahlen m' und n' hat:

Bilden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen (11) *und ist der Integrationsweg* (x) *so gewählt, dass die Bedingungen*

$$\int\limits_{(x)}\frac{d}{dx}\left[f((1-ux)^{\alpha-1},\varphi)+g((1-ux)^{\alpha-1},\psi)\right]dx=0,$$

$$\int\limits_{(x)}\frac{d}{dx}\left[F((1-ux)^{\alpha-1},\varphi)+G((1-ux)^{\alpha-1},\psi)\right]dx=0$$

erfüllt werden, so besitzen wir in

$$\Phi(u)=\int\limits_{(x)}(1-ux)^{\alpha-1}\varphi(x)dx,\qquad \Psi(u)=\int\limits_{(x)}(1-ux)^{\alpha-1}\psi(x)dx$$

ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)u^{\alpha-\nu}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}u^{p-\alpha}\frac{d^\nu}{du^\nu}\Phi+\sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)u^{\alpha-\nu}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}u^{p-\alpha}\frac{d^\nu}{du^\nu}\Psi=0,\\ &\sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)u^{\alpha-\nu}\frac{d^{q-\nu}}{du^{q-\nu}}u^{q-\alpha}\frac{d^\nu}{du^\nu}\Phi+\sum_{\nu=0}^{n'} G_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)u^{\alpha-\nu}\frac{d^{q-\nu}}{du^{q-\nu}}u^{q-\alpha}\frac{d^\nu}{du^\nu}\Psi=0.\end{aligned}\right.$$

§ 3.

In den LAGRANGE'schen Beziehungen

$$\chi\sum_{\nu=0}^{m} x^\nu f_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi - \varphi\sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\chi = \frac{d}{dx}f(\varphi,\chi),$$

$$\chi\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu g_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\psi - \psi\sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\chi = \frac{d}{dx}g(\psi,\chi),$$

wo $f(\varphi,\chi)$ und $g(\psi,\chi)$ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen, wollen wir $\chi = (u-x)^{a-1}$ annehmen, während φ und ψ ein System von Lösungen der Differentialgleichung

$$(12)\qquad \sum_{\nu=0}^{m} x^\nu f_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi + \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu g_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\psi = 0$$

bilden. Aus den obigen Beziehungen folgt dann durch Addition und Integration

$$(13)\quad \sum_{\nu=0}^{m}\int_{(x)} dx\,\varphi f_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)[x^\nu(u-x)^{a-1}] + \sum_{\nu=0}^{n}\int_{(x)} dx\,\psi g_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)[x^\nu(u-x)^{a-1}]$$

$$= -\int_{(x)}\frac{d}{dx}[f(\varphi,(u-x)^{a-1}) + g(\psi,(u-x)^{a-1})]dx.$$

Fügt man den beiden Seiten der in § 6. der vorangehenden Arbeit abgeleiteten Formel

$$(14)\qquad x^\nu\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}(u-x)^{a-1} = u^a\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}[u^{\nu-a}(u-x)^{a-1}]$$

den Ausdruck $f\left(-\frac{d}{dx}\right)$ symbolisch als Factor hinzu und multiplicirt nachher mit $\varphi(x)$, so ergiebt sich durch Integration

$$\frac{d^\nu}{du^\nu}\int\limits_{(x)} dx\,\varphi f\left(-\frac{d}{dx}\right)[x^\nu(u-x)^{\alpha-1}] = u^\alpha \frac{d^\nu}{du^\nu}u^{\nu-\alpha}\int\limits_{(x)} dx\,\varphi f\left(-\frac{d}{dx}\right)(u-x)^{\alpha-1}$$

$$= u^\alpha \frac{d^\nu}{du^\nu}u^{\nu-\alpha}\int\limits_{(x)} dx\,\varphi f\left(\frac{d}{du}\right)(u-x)^{\alpha-1} = u^\alpha \frac{d^\nu}{du^\nu}u^{\nu-\alpha} f\left(\frac{d}{du}\right)\int\limits_{(x)}(u-x)^{\alpha-1}\varphi(x)\,dx.$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten von (13) die p^{te} Ableitung — unter p die kleinste, die beiden Bedingung $p \geqq m$, $p \geqq n$ erfüllende ganze Zahl verstehend — so erhält man mit Benutzung der letzten Formel

$$\sum_{\nu=0}^{m}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}u^\alpha \frac{d^\nu}{du^\nu}u^{\nu-\alpha} f_\nu\left(\frac{d}{du}\right)\int\limits_{(x)}(u-x)^{\alpha-1}\varphi(x)\,dx$$

$$+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}u^\alpha \frac{d^\nu}{du^\nu}u^{\nu-\alpha} g_\nu\left(\frac{d}{du}\right)\int\limits_{(x)}(u-x)^{\alpha-1}\psi(x)\,dx$$

$$= -\frac{d^p}{du^p}\int\limits_{(x)}\frac{d}{dx}[f(\varphi,(u-x)^{\alpha-1}) + g(\psi,(u-x)^{\alpha-1})]\,dx.$$

Hieraus ergiebt sich schliesslich der Satz:

Bilden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein System von Lösungen der Differentialgleichung (12) *und ist der Integrationsweg (x) so gewählt, dass*

$$\int\limits_{(x)}\frac{d}{dx}[f(\varphi,(u-x)^{\alpha-1}) + g(\psi,(u-x)^{\alpha-1})]\,dx = 0$$

ist, so besitzen wir in

$$\Phi(u) = \int\limits_{(x)}(u-x)^{\alpha-1}\varphi(x)\,dx, \qquad \Psi(u) = \int\limits_{(x)}(u-x)^{\alpha-1}\psi(x)\,dx$$

ein System von Lösungen der Differentialgleichung

$$(15)\qquad \sum_{\nu=0}^{m}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}u^\alpha \frac{d^\nu}{du^\nu}u^{\nu-\alpha} f_\nu\left(\frac{d}{du}\right)\Phi + \sum_{\nu=0}^{n}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}u^\alpha \frac{d^\nu}{du^\nu}u^{\nu-\alpha} g_\nu\left(\frac{d}{du}\right)\Psi = 0.$$

Wir werden zeigen, dass auch umgekehrt die Integration von (12) durch Quadraturen auf die der Gleichung (15) zurückführbar ist.

Da der adjungirte Differentialausdruck einer Summe gleich ist der Summe von den adjungirten der Summanden, so ergeben sich, wenn man auch den Reciprocitätssatz benutzt, die Beziehungen

$$\chi\sum_{\nu=0}^{m}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}u^{\alpha}\frac{d^{\nu}}{du^{\nu}}u^{\nu-\alpha}f_{\nu}\left(\frac{d}{du}\right)\Phi$$

$$=(-1)^{p}\Phi\sum_{\nu=0}^{m}f_{\nu}\left(-\frac{d}{du}\right)u^{\nu-\alpha}\frac{d^{\nu}}{du^{\nu}}u^{\alpha}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}\chi+\frac{d}{du}f'(\Phi,\chi),$$

$$\chi\sum_{\nu=0}^{n}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}u^{\alpha}\frac{d^{\nu}}{du^{\nu}}u^{\nu-\alpha}g_{\nu}\left(\frac{d}{du}\right)\Psi$$

$$=(-1)^{p}\Psi\sum_{\nu=0}^{n}g_{\nu}\left(-\frac{d}{du}\right)u^{\nu-\alpha}\frac{d^{\nu}}{du^{\nu}}u^{\alpha}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}\chi+\frac{d}{du}g'(\Psi,\chi),$$

wo $f'(\Phi,\chi)$ und $g'(\Psi,\chi)$ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen. Wir wählen nun Φ und Ψ als Lösungen der Differentialgleichung (15) und ersetzen χ durch den Ausdruck

$$\chi=(u-x)^{p-\alpha-1}. \tag{16}$$

Alsdann verschwindet die linke Seite der durch Addition der obigen Beziehungen entstehenden Gleichung, während die unter den Summationszeichen auf χ sich beziehenden Operationen eine sehr einfache Form annehmen werden.

Ersetzt man nämlich in der Formel (14) α durch $\nu-\alpha$, so folgt

$$u^{\nu-\alpha}\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}[u^{\alpha}(u-x)^{\nu-\alpha-1}]=(-1)^{\nu}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\nu+1)x^{\nu}(u-x)^{-\alpha-1}.$$

Mit Benutzung dieser Formel ergiebt sich leicht, dass ein Ausdruck der Form

$$u^{\nu-\alpha}\frac{d^{\nu}}{du^{\nu}}u^{\alpha}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}\chi$$

bei der Annahme (16) in den folgenden übergeht

$$(-1)^{p}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)x^{\nu}(u-x)^{-\alpha-1}.$$

Wählt man also in den obigen LAGRANGE'schen Beziehungen Φ und Ψ als Lösungen der Differentialgleichung (15) und ersetzt χ durch den Ausdruck (16), so folgt durch Addition

$$C\Phi\sum_{\nu=0}^{m} x^\nu f_\nu\left(-\frac{d}{du}\right)(u-x)^{-\alpha-1} + C\Psi\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu g_\nu\left(-\frac{d}{du}\right)(u-x)^{-\alpha-1}$$

$$= C\Phi\sum_{\nu=0}^{m} x^\nu f_\nu\left(\frac{d}{du}\right)(u-x)^{-\alpha-1} + C\Psi\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu g_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)(u-x)^{-\alpha-1}$$

$$= \frac{d}{du}[f'(\Phi, (u-x)^{p-\alpha-1}) + g'(\Psi, (u-x)^{p-\alpha-1})],$$

wo zur Abkürzung $\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1) = C$ gesetzt wurde.

Integrirt man nun schliesslich in der u-Ebene längs einer passenden Linie (u), so hat man den Satz:

Bilden $\Phi(u)$ und $\Psi(u)$ ein System von Lösungen der Differentialgleichung (15) *und ist der Integrationsweg so gewählt, dass*

$$\int_{(u)} \frac{d}{du}[f'(\Phi, (u-x)^{p-\alpha-1}) + g'(\Psi, (u-x)^{p-\alpha-1})]\,du = 0$$

ist, so besitzen wir in

$$\varphi(x) = \int_{(u)} (u-x)^{-\alpha-1}\Phi(u)\,du, \qquad \psi(x) = \int_{(u)} (u-x)^{-\alpha-1}\Psi(u)\,du$$

ein System von Lösungen der Differentialgleichung (12).

An Stelle *einer* Gleichung betrachten wir jetzt *zwei* Differentialgleichungen zwischen den abhängigen Veränderlichen und verstehen unter $F(\varphi,\chi)$, $G(\psi,\chi)$, $F'(\Phi,\chi)$, $G'(\Psi,\chi)$ bilineare Differentialausdrücke, welche in Bezug auf die unten hinzu kommenden Differentialgleichungen ebenso zu definiren sind, wie oben $f(\varphi,\chi)$, $g(\psi,\chi)$, $f'(\Phi,\chi)$, $g'(\Psi,\chi)$ hinsichtlich der Gleichungen (12) und (15). Wie oben bezeichnet p die kleinste, die beiden Bedingungen $p \geqq m$, $p \geqq n$ erfüllende ganze Zahl, während q dieselbe Bedeutung hinsichtlich der Zahlen m' und n' hat. Aus dem Vorangehenden ergeben sich dann ohne weiteres die nachstehenden Sätze:

Bilden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen

$$(17)\quad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{m} x^\nu f_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi + \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu g_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\psi = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{m'} x^\nu F_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi + \sum_{\nu=0}^{n'} x^\nu G_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\psi = 0, \end{cases}$$

und ist der Integrationsweg so gewählt, dass die Bedingungen

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[f(\varphi, (u-x)^{\alpha-1}) + g(\psi, (u-x)^{\alpha-1})]\,dx = 0,$$

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[F(\varphi, (u-x)^{\alpha-1}) + G(\psi, (u-x)^{\alpha-1})]\,dx = 0$$

erfüllt werden, so besitzen wir in

$$\Phi(u) = \int_{(x)} (u-x)^{\alpha-1}\varphi(x)\,dx, \qquad \Psi(u) = \int_{(x)} (u-x)^{\alpha-1}\psi(x)\,dx$$

ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen

$$(18)\quad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{m} \frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}} u^\alpha \frac{d^\nu}{du^\nu} u^{\nu-\alpha} f_\nu\left(\frac{d}{du}\right)\Phi + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}} u^\alpha \frac{d^\nu}{du^\nu} u^{\nu-\alpha} g_\nu\left(\frac{d}{du}\right)\Psi = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{m'} \frac{d^{q-\nu}}{du^{q-\nu}} u^\alpha \frac{d^\nu}{du^\nu} u^{\nu-\alpha} F_\nu\left(\frac{d}{du}\right)\Phi + \sum_{\nu=0}^{n'} \frac{d^{q-\nu}}{du^{q-\nu}} u^\alpha \frac{d^\nu}{du^\nu} u^{\nu-\alpha} G_\nu\left(\frac{d}{du}\right)\Psi = 0. \end{cases}$$

Bilden umgekehrt $\Phi(u)$ und $\Psi(u)$ ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen (18) *und ist der Integrationsweg* (u) *so gewählt, dass die Bedingungen*

$$\int_{(u)} \frac{d}{du}[f'(\Phi, (u-x)^{p-\alpha-1}) + g'(\Psi, (u-x)^{p-\alpha-1})]\,du = 0,$$

$$\int_{(u)} \frac{d}{du}[F'(\Phi, (u-x)^{q-\alpha-1}) + G'(\Psi, (u-x)^{q-\alpha-1})]\,du = 0$$

erfüllt werden, so besitzen wir in

$$\varphi(x) = \int_{(u)} (u-x)^{-a-1}\, \Phi(u)\, du, \qquad \psi(x) = \int_{(u)} (u-x)^{-a-1}\, \Psi(u)\, du$$

ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen (17).

Helsingfors, Mai 1896.