L'OEUVRE MATHÉMATIQUE DE WEIERSTRASS

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

1.

Ce qui me frappe dans la carrière mathématique de Weierstrass, c'est la remarquable unité de la pensée, persistant à travers l'étendue et la variété de son oeuvre.

Dès le début, il s'est proposé un but bien déterminé, il a créé des méthodes pour l'atteindre; et, s'il a essayé quelquefois ces méthodes sur d'autres problèmes, il n'a jamais perdu de vue l'objet final de ses recherches.

Au reste il a pris soin lui-même de nous en avertir.

En 1857, il entrait à l'Académie de Berlin et dans son discours de réception, il s'exprimait ainsi:

»Je dois maintenant expliquer en quelques mots quelle a été jusqu'ici la marche de mes études et dans quelle direction je m'efforcerai de les poursuivre.

Depuis le temps, où sous la direction de mon maître Gudermann, je fis pour la première fois connaissance avec la théorie des fonctions elliptiques, cette branche nouvelle de l'Analyse mathématique a exercé sur mon intelligence un puissant attrait dont l'influence sur le développement de ma pensée a été décisive.

Cette discipline, fondée par Euler, cultivée avec ardeur et succès par Legendre, s'était d'abord étendue dans une direction unique; mais elle venait depuis dix ans d'être bouleversée entièrement par l'introduction des fonctions doublement périodiques découvertes par Abel et Jacobi. Ces transcendantes, dotant l'Analyse de grandeurs nouvelles dont les propriétés sont remarquables, trouvaient aussi des applications en Géométrie et en Mécanique, et montraient par là qu'elles étaient le fruit normal d'un développement naturel de la science.

Mais Abel, habitué à se placer toujours au point de vue le plus élevé, avait trouvé un théorème qui s'étend à toutes les transcendantes résultant de l'intégration des différentielles algébriques et qui est pour elles en quelque sorte ce qu'est celui d'Euler pour les fonctions elliptiques. Enlevé à la fleur de l'âge, il n'avait pu poursuivre lui-même sa grande découverte, mais Jacobi en avait bientôt fait une seconde non moins importante; il avait démontré l'existence de fonctions périodiques de plusieurs arguments dont les propriétés principales sont fondées sur le théorème d'Abel et par là il avait fait connaître la véritable signification de ce théorème.

La représentation effective de ces grandeurs, dont l'analyse n'avait encore aucun exemple, l'étude détaillée de leurs propriétés devenait donc l'un des problèmes fondamentaux des Mathématiques; et, dès que j'en eus compris le sens et l'importance, je résolus de m'y essayer.

C'eût été une véritable folie, si j'avais seulement voulu penser à la solution d'un pareil problème, sans m'y être préparé par une étude approfondie des moyens qui devaient m'y aider et sans m'être exercé d'abord sur des problèmes moins difficiles . . .»

Ainsi, il a eu depuis ses débuts, l'ambition de créer une théorie complète et cohérente des fonctions abéliennes. Dès son entrée dans la carrière, encore élève de Gudermann, il voit avec netteté le but vers lequel il marchera toute sa vie, il ne l'oubliera jamais et cherchera sans cesse à s'en rapprocher.

On croirait voir un savant ingénieur attaquant une place très forte; à travers la complication des travaux d'approche, à travers les longues pèripéties du siège, l'unité de sa pensée persiste et reste toujours visible.

Cependant, bien entendu, les instruments qu'il créait ainsi pouvaient servir à bien d'autres besognes; à droite et à gauche de la grande route qu'il suivait, il a ouvert bien des voies latérales et il s'y est engagé assez avant pour nous montrer où elles conduisaient. Il y a guidé les premiers pas de ses élèves et leur a assigné à chacun un but. Aussi quelque nombreux qu'aient été ces élèves, son héritage a été assez riche pour que chacun d'eux ait pu s'y tailler une large part.

2.

Pour atteindre son but, le grand géomètre avait trois échelons à gravir:

1°. Approfondir la théorie générale des fonctions, d'abord celle des fonctions d'une variable, puis celle des fonctions de deux variables; c'était là la base sur laquelle toute la pyramide devait s'élever.

2°. Les fonctions abéliennes étant l'extension naturelle des fonctions elliptiques, il fallait perfectionner la théorie de ces dernières transcendantes et la mettre sous une forme où la généralisation devînt facile.

3°. Il restait enfin à attaquer les fonctions abéliennes elles-mêmes.

3.

Mais ce serait mal le comprendre que de penser qu'en poursuivant un dessein unique, il a négligé les autres parties de l'Analyse. Quand il abordait d'autres problèmes, ce n'était pas uniquement pour s'exercer, comme pourrait le faire croire une des phrases de son discours académique que j'ai citées plus haut. Nul au contraire n'avait l'esprit plus large, et, s'il restait ainsi attaché à son plan de campagne, c'est qu'il en attendait des résultats d'une portée universelle.

Tel un général marche directement sur la capitale de l'ennemi, sachant bien que, dès qu'il l'aura atteinte, tout le pays tombera en son pouvoir.

Il rêvait donc sinon pour lui-même, au moins pour ses successeurs, de bien plus vastes conquêtes. Si ces espérances, qui à ses débuts devaient lui sembler bien lointaines, ont fini par se réaliser en grande partie, c'est qu'il n'est pas resté seul. Son enseignement a formé de nombreux disciples, et a donné au maître toute une armée, qui acceptait sa direction, et qu'il lançait en avant, ne pouvant aller partout lui-même.

C'est pour cela qu'il est si difficile de rendre un compte exact des travaux mathématiques de Weierstrass; ce n'est pas seulement parce que son oeuvre imprimée est considérable; c'est surtout parce que cette oeuvre ne le contient pas tout entier.

Longtemps les plus importants de ses ouvrages sont restés inédits et c'était dans son enseignement oral qu'il prodiguait les trésors de sa science; que de richesses encore aujourd'hui, ne nous sont conservées que par la mémoire de ses auditeurs.

Heureusement les élèves se pressaient en foule autour de sa chaire et allaient ensuite porter au loin son influence. L'esprit de Weierstrass inspirait aussi non seulement ceux qui avaient eu le bonheur d'entendre sa parole, mais ceux qui n'en avaient reçu qu'un écho indirect. Aussi dans l'oeuvre de beaucoup d'entre nous, il pourrait légitimement revendiquer une part.

Dans ses dernières années, sa santé l'avait obligé à abandonner cet enseignement; il vieillissait entouré du respect et de l'admiration de tous, s'occupant tranquillement de la publication de ses travaux avec la joie de voir son oeuvre continuée par les hommes qu'il avait animés de son esprit.

Théorie des fonctions.

4.

Au commencement du siècle, l'idée de fonction était une notion à la fois trop restreinte et trop vague. D'une part en effet les fonctions discontinues, les fonctions dépourvues de dérivées, ou étaient inconnues ou étaient regardées comme des créations purement artificielles, indignes de l'attention du géomètre.

On excluait donc de l'analyse tout un domaine qu'elle s'est depuis annexé; mais d'autre part on aurait été bien embarrassé s'il s'était agi d'énoncer, d'une manière nette et précise, les conditions nécessaires et suffisantes pour conférer à une fonction le droit de cité. La frontière entre les fonctions analytiques et les autres était loin d'être complètement tracée.

En réalité, comme par un héritage dû aux fondateurs du calcul infinitésimal, qui s'étaient d'abord préoccupés des applications, on se reportait inconsciemment au modèle qui nous est fourni par les fonctions considérées en mécanique et on rejetait tout ce qui s'écartait de ce modèle; on n'était pas guidé par une définition claire et rigoureuse, mais par une sorte d'intuition et d'obscur instinct.

Cette définition, il fallait la donner; car l'analyse ne pouvait qu'à ce prix acquérir la parfaite rigueur.

Aujourd'hui tout est bien changé; on distingue deux domaines, l'un sans limites, l'autre plus restreint, mais mieux cultivé. Le premier est celui de la fonction en général, le second celui de la fonction analytique. Dans le premier, toutes les fantaisies sont permises et à chaque instant nos habitudes sont heurtées et nos associations d'idées rompues; nous y apprenons ainsi à nous défier de certains raisonnements par à peu près qui paraissaient convaincants à nos pères; à nous abstenir de telles conclusions qui leur auraient paru légitimes. Dans le second, au contraire, ces conclusions sont permises; mais *nous savons pourquoi;* il a suffi de placer au début une bonne définition; et on a vu reparaître une rigoureuse logique.

Voilà le chemin parcouru; nous allons voir comment Weierstrass a contribué à nous y guider.

Je citerai d'abord une note lue à l'Académie de Berlin le 18 juillet 1872, et où Weierstrass a cité des exemples de fonctions continues d'un argument réel, qui pour aucune valeur de cet argument, ne possèdent une dérivée déterminée.

Il y a cent ans, une pareille fonction eut été regardée comme un outrage au sens commun. Une fonction continue, aurait-on dit, est par essence susceptible d'être représentée par une courbe et une courbe a évidemment toujours une tangente.

Un pareil raisonnement n'a aucune valeur mathématique; il est fondé sur une intuition, ou plutôt sur une représentation sensible. Mais cette représentation est grossière et trompeuse.

Nous croyons nous représenter une courbe sans épaisseur; mais nous ne nous représentons qu'un trait d'une faible épaisseur. Nous voyons de même la tangente sous la forme d'une bande rectiligne de faible épaisseur; et quand nous disons qu'elle touche la courbe, nous voulons dire simplement que ces deux bandes empiètent l'une sur l'autre sans se traverser. Si c'est là ce qu'on appelle une courbe et une tangente, il est clair que toute courbe a une tangente; mais cela n'a plus rien à voir avec la théorie des fonctions.

On voit à quelles erreurs nous expose une folle confiance dans ce qu'on prend pour l'intuition. Par la découverte de cet exemple frappant, Weierstrass nous a donc donné un utile avertissement et nous a appris à mieux apprécier les méthodes impeccables et purement arithmétiques dont il a, plus que personne, contribué à doter la Science.

Du même coup, il enrichissait le domaine des fonctions non analytiques, où tant de surprises nous attendent encore.

5.

Mais ce n'était là qu'une courte excursion hors du chemin si droit qu'il s'était tracé et dont il ne s'est jamais longtemps écarté.

Sur ce chemin, ce qu'il rencontrait, c'était le domaine des fonctions analytiques, qu'il devait d'abord explorer à fond, s'il voulait atteindre son but.

La théorie moderne des fonctions analytiques a eu quatre fondateurs, Gauss, Cauchy, Riemann et Weierstrass.

Gauss n'a rien publié de son vivant; il n'avait pour ainsi dire rien communiqué à personne et ses manuscrits n'ont été retrouvés que longtemps après sa mort. Il n'a donc exercé aucune influence.

Les trois autres géomètres qui ont contribué à créer la notion nouvelle de fonction ont suivi des voies bien différentes.

Cauchy a précédé les deux autres et leur a montré le chemin; mais néanmoins les trois conceptions restent distinctes et cela est fort heureux, puisque nous avons ainsi trois instruments entre lesquels nous pouvons choisir et dont nous pouvons souvent combiner l'action.

Pour Cauchy la définition de la fonction conserve encore un peu de l'indécision qu'elle avait chez ses devanciers. Il impose seulement aux fonctions analytiques quelques conditions restrictives, comme celle d'avoir une dérivée continue. Tout repose sur un théorème très simple relatif aux intégrales imaginaires et sur la notion de résidu. Une fonction quelconque peut être représentée par une intégrale définie et devient ainsi maniable pour l'analyste, quelque vaguement définie qu'elle ait été au début. C'est là un avantage précieux et aujourd'hui encore les »résidus» nous donnent la solution de problèmes que nous ne pourrions résoudre sans eux.

La théorie de Cauchy contenait en germe à la fois la conception géométrique de Riemann et la conception arithmétique de Weierstrass, et il est aisé de comprendre comment elle pouvait, en se développant dans deux sens différents, donner naissance à l'une et à l'autre.

Pour Riemann, l'image géométrique joue le rôle dominant; une fonction n'est qu'une des lois d'après lesquelles les surfaces peuvent se transformer; on cherche à se représenter ces transformations et non à les analyser; leur possibilité même n'est établie que par un raisonnement sommaire auquel on n'a pu, beaucoup plus tard, donner la rigueur qu'au prix de modifications profondes et de détours compliqués.

Weierstrass se place à l'extrême opposé; le point de départ est la série de puissances, »l'élément de la fonction» qui est confiné dans un cercle de convergence; pour poursuivre la fonction en dehors de ce cercle, nous avons le procédé de la continuation analytique; tout devient ainsi une conséquence de la théorie des séries et cette théorie est elle-même établie sur des bases arithmétiques et solides. Nous sommes débarrassés des doutes qui, au siècle dernier et dans la première moitié de ce siècle, assaillaient souvent les penseurs à propos des principes du calcul infinitésimal, et aussi de ceux que pouvait provoquer par ses lacunes la théorie des fonctions analytiques de Lagrange. Tout cela n'est plus aujourd'hui que de l'histoire ancienne.

La conception de Weierstrass présente un double avantage:

1°. Elle est, comme nous venons de le voir, parfaitement rigoureuse et cette rigueur est obtenue par des moyens les plus simples.

2°. Elle s'adapte avec une grande facilité à la généralisation, et peut s'étendre aux fonctions de plusieurs variables.

Entre ces trois conceptions gardons-nous de choisir; chacune a son rôle nécessaire. Avec l'instrument de Riemann, l'intuition verra d'un seul coup d'oeil l'aspect général des choses; comme un voyageur qui examine du haut d'une montagne la topographie de la plaine qu'il va visiter et apprend de la sorte à s'y orienter. Avec l'instrument de Weierstrass, l'analyse éclairera successivement tous les recoins et y fera pénétrer l'absolue clarté.

En un mot, la méthode de Riemann est avant tout une méthode de découverte, celle de Weierstrass est avant tout une méthode de démonstration.

6.

La principale contribution de Weierstrass aux progrès de la théorie des fonctions est la découverte des *facteurs primaires*.

Les plus simples des transcendantes sont les fonctions entières qui n'ont de point singulier qu'à l'infini. Une pareille transcendante est toujours le produit d'une infinité de »facteurs primaires»; chacun de ces facteurs est lui-même le produit d'un polynôme du premier degré par une exponentielle dont l'exposant est un polynôme de degré q; le facteur primaire est dit alors de genre q.

A cette découverte se rattache la classification des fonctions entières en genres dont l'importance arithmétique a été récemment mise en évidence par M. Hadamard. Une fonction est de genre q, lorsque tous ses facteurs primaires sont de genre q au plus.

Weierstrass a trouvé là également le moyen de construire une fonction entière ayant des zéros donnés.

A ce théorème se rattache directement celui de M. Mittag-Leffler sur les fonctions méromorphes.

Ces deux théorèmes permettent la construction facile des fonctions $\sigma(u)$ et $\wp(u)$ qui ont été comme nous le verrons plus loin, les principaux instruments de Weierstrass dans la théorie des fonctions elliptiques.

C'est sans doute cette perspective qui a dirigé dans cette voie les efforts du grand géomètre allemand; mais il en a retiré bien d'autres fruits. La portée de la méthode nouvelle dépassait en effet de beaucoup la question particulière qu'il avait voulu résoudre et pour laquelle il l'avait créée.

Elle s'étendit sans peine, grâce aux travaux personnels de Weierstrass et à ceux de M. Mittag-Leffler, aux fonctions qui présentent des points singuliers essentiels isolés, puis à celles qui admettent des singularités plus compliquées et même des lignes singulières.

C'est donc une des méthodes les plus générales de l'analyse.

C'est dans cet ordre d'idées que Weierstrass a été conduit à étudier la représentation des fonctions par les séries dont les termes sont des fractions rationnelles.

Il a, en multipliant les exemples, bien montré comment une pareille série peut représenter dans deux domaines différents deux fonctions différentes; à cette occasion, il a éclairci la notion des limites naturelles d'une fonction et par là la notion fondamentale de fonction analytique elle-même. C'est depuis ce mémoire que toute obscurité a enfin disparu.

7.

Mais, pour l'étude des transcendantes abéliennes, la théorie des fonctions d'une variable ne suffit pas; il faut approfondir celle des fonctions de plusieurs variables.

Aussi l'illustre géomètre allemand n'a cessé de s'en préoccuper; il devait y rencontrer des difficultés nouvelles; car il se trouvait privé de l'usage des facteurs primaires qui lui avaient été si utiles dans ses recherches sur les fonctions d'une seule variable.

Il a pu néanmoins, mettre hors de doute une foule de théorèmes qui lui étaient nécessaires pour son objet, et qu'on admettait souvent sans en avoir compris le véritable sens et la portée. Sa tâche lui a été facilitée par l'emploi continuel d'une des notions qu'il avait créées, celle des éléments de fonction.

8.

Pour avoir le droit de représenter ainsi toutes les fonctions par des séries et pour pouvoir sans crainte se servir de cette représentation dans toutes les questions de calcul intégral, il fallait faire voir qu'on peut égaler à une série de puissances toute fonction implicite tirée d'un système d'équations dont les premiers membres sont des séries de puissances; ou l'intégrale d'une équation différentielle dont les coefficients sont des séries de puissances. Cet important théorème devait être pour Weierstrass une des pierres fondamentales de son système.

On sait qu'il a été établi pour la première fois par Cauchy.

En 1842, Weierstrass publia une mémoire où il démontre de nouveau cette proposition d'une manière analogue à celle de Cauchy.

Il avait éte devancé à son insu par le savant français, mais il conserve néanmoins une large part d'originalité. L'uniformité de la convergence, la façon dont les éléments de fonctions se déduisent les uns des autres par continuation analytique sont des questions qu'il étudie à fond.

D'un autre côté, au point de vue didactique, son mode d'exposition présente de grands avantages; sa »fonction majorante» est plus simple et plus maniable que celle de Cauchy; les inégalités du début sont tirées des propriétés élémentaires des séries, et non plus de la considération d'intégrales imaginaires. C'est là un progrès, il y avait intérêt à montrer quand cette considération est indispensable et quand on peut s'en passer.

On voit par cet exemple comment la façon dont le mathématicien allemand conçoit la fonction dérive de la conception de Cauchy, mais en l'allégeant d'un bagage inutile.

Weierstrass a appliqué lui-même cette méthode à une foule de questions et même à la démonstration de l'existence des racines d'une équation algébrique. Mais c'est surtout entre les mains de ses disciples qu'elle a donné ses principaux résultats. M[me] Kowalevski l'a appliquée aux équations aux dérivées partielles, et M. Fuchs aux équations différentielles linéaires avec le succès que l'on sait.

9.

Un dernier travail qui se rapporte indirectement à la théorie des fonctions est celui que l'illustre mathématicien a consacré au principe de Dirichlet. Par un exemple frappant, il a montré combien est fragile la démonstration de ce principe dont on s'était longtemps contenté.

C'est sur ce principe pourtant que Riemann avait voulu bâtir toute sa théorie des fonctions; cette assise fondamentale n'était pas solide et si on ne voulait la voir s'écrouler en entraînant tout l'édifice dans sa chute, il fallait soigneusement l'étayer; c'est ce qu'ont fait depuis M. Schwarz et d'autres disciples de Weierstrass

Fonctions elliptiques.

10.

La forme que Jacobi avait donnée à la théorie des fonctions elliptiques était loin d'être parfaite; les défauts en sautent aux yeux.

A la base nous trouvons trois fonctions fondamentales sn, cn et dn. Ces fonctions n'ont pas les mêmes périodes; pour l'une $4K$ et $2iK$, pour l'autre $4K$ et $2K + 2iK'$; pour la troisième $2K$ et $4iK'$. Si on veut les rapporter toutes trois à un même système de périodes, il faut prendre $4K$ et $4iK'$; mais parmi les transcendantes qui admettent ces périodes, les fonctions de Jacobi sn, cn, dn ne sont pas les plus simples; elles ont quatre infinis et les plus simples n'en ont que deux.

Dans le système de Weierstrass, au lieu de trois fonctions fondamentales, nous n'en avons plus qu'une $\wp(u)$ et c'est la plus simple de toutes celles qui ont mêmes périodes. Elle n'a qu'un seul infini double; et enfin sa définition est telle qu'elle ne change pas quand on remplace un système de périodes par un autre système équivalent; au contraire cette substitution produirait entre les fonctions de Jacobi des permutations dont la loi est inutilement compliquée.

Dans la plupart des problèmes, il suffit de considérer $\wp(u)$ et l'introduction de sn, cn, dn ne serait qu'une cause artificielle de complication. Sans doute il en est d'autres où cette introduction serait plus naturelle; mais dans ceux-là même, Weierstrass les remplace avec avantage par les trois fonctions

$$\sqrt{\wp(u) - e_1}\,,\ \sqrt{\wp(u) - e_2}\,,\ \sqrt{\wp(u) - e_3}.$$

Les formules qui les relient les unes aux autres sont remarquablement symétriques et peuvent se déduire les unes des autres par permutation circulaire. Il n'en était pas de même avec les anciennes transcendantes sn, cn, dn; le module entrait dans la relation qui relie sn à dn, il n'entrait pas dans celle qui relie sn à cn. Rien ne justifiait cette dissymétrie qui était parfois gênante.

11.

D'autre part, le rôle prépondérant que joue le module k se comprend mal. Le module k n'est pas la plus simple de toutes les fonctions modulaires, puisqu'à un même système de périodes peuvent correspondre plusieurs valeurs du module. Le rôle du module n'est pas le même par rapport aux deux périodes et il en résulte une dissymétrie artificielle dans les formules.

Pour calculer le module, il faut résoudre une équation du 4^e degré; cette résolution est évitée, si on prend pour arguments fondamentaux les coëfficients du premier membre de cette équation, ou plutôt les invariants de ce polynôme. Ce sont ces invariants que Weierstrass a appelés g_2 et g_3. L'invariant absolu

$$J = \frac{g_2^3}{g_3^2}$$

est la plus simple de toutes les fonctions modulaires; c'est l'élément essentiel et naturel qui doit remplacer k, comme $\wp(u)$ a remplacé sn, cn, dn.

12.

Une autre catégorie de transcendantes dont l'importance est fondamentale, ce sont les fonctions Θ. Là encore les notations de Jacobi ne sont pas sans inconvénient. Les formules de transformation rebutent la mémoire par leur défaut de symétrie.

Les quatre fonctions Θ et H de Jacobi ne sont qu'un cas particulier de fonctions beaucoup plus générales, les fonctions θ des différents ordres, comme M. Hermite l'a montré dans un mémoire aussi concis que substantiel. Mais ces fonctions de M. Hermite peuvent elles-mêmes être généralisées et il existe toute une catégorie de fonctions que Briot et Bouquet ont, je ne sais pourquoi, appelées intermédiaires et qui se reproduisent multipliées par une exponentielle quand la variable augmente d'une période.

Parmi elles, quelle est celle qui doit être choisie comme élément simple? Ce ne peuvent être les quatre fonctions de Jacobi dont les rapports sont les quantités sn, cn et dn déjà condamnées pour les raisons que nous avons exposées plus haut. Ce ne peut être non plus une des fonctions de M. Hermite, car dans ces fonctions les deux périodes ne jouent pas le même rôle; de sorte que ces transcendantes prennent une infinité de formes différentes quand on remplace un système de périodes par un autre équivalent.

Weierstrass s'est préoccupé dès ses débuts de ce choix d'un élément simple et il a adopté d'abord la fonction qu'il a appelée Al et qui ne change pas quand on change le système de périodes mais *de façon que le module reste le même.*

Il a abandonné plus tard cette fonction *Al* en même temps que le module lui-même, et il a choisi comme élément nouveau la fonction σ qui, d'après sa définition, ne change pas quand on remplace le système des périodes par un autre système équivalent *quelconque.*

Les formules atteignent ainsi leur maximum de simplicité. Mais cependant la fonction σ n'a pas définitivement détrôné les fonctions θ et en particulier celles de M. Hermite comme $\wp(u)$ a détrôné sn, cn et dn.

La simplicité du développement des θ, la rapidité de la convergence, l'élégance de leurs propriétés, leur assure une place importante et de cette place elles ne seront jamais délogées.

Il faut seulement savoir passer rapidement de σ aux θ et des θ à σ.

13.

Il y a bien des manières de commencer l'exposition de cette importante théorie. Celle que Weierstrass a préférée est bien curieuse; il se demande à quelles conditions une fonction peut admettre un théorème d'addition.

Cette prédilection s'explique aisément; car c'est ainsi qu'il se proposait d'introduire ses auditeurs dans le domaine des fonctions abéliennes quand il en aurait achevé la théorie; cette façon de présenter les choses lui plaisait par sa généralité, qui rendait facile l'extension qu'il avait en vue. On trouvera les formules de Weierstrass relatives aux fonctions elliptiques réunies dans un recueil que M. Schwarz publie avec un soin extrême; mais on ne se rendra complètement compte de la marche de ses idées qu'en se reportant aux mémoires originaux.

Fonctions abéliennes.

14.

Weierstrass, comme je l'ai dit, s'est toute sa vie préoccupé des fonctions abéliennes; dans la première période de sa carrière, il s'efforce d'étendre à ces transcendantes, et en particulier aux fonctions hyperelliptiques, les propriétés connues de sn, cn et dn; à cette époque, il n'a pas encore donné sa forme définitive à sa théorie personnelle des fonctions elliptiques; il devra donc plus tard remettre au point les résultats qu'il a obtenus alors.

Mais à ce moment survint la publication du mémoire de Riemann qui exerça une grande influence sur le développement de cette discipline. Les fonctions hyperelliptiques cessèrent de jouer un rôle à part dans les préoccupations des analystes et on envisagea les fonctions abéliennes engendrées par les courbes algébriques les plus générales. Mais les théorèmes déjà démontrés par Weierstrass s'y étendaient facilement.

Dans cet ordre d'idées, tout repose encore sur l'étude des intégrales abéliennes et sur celle des fonctions rationnelles de deux variables x et y liées par une relation algébrique. A cet ordre d'idées se rattache un important travail de Weierstrass dont les résultats sont exposés dans une lettre adressée à M. le Professeur Schwarz. Là sont définies les singularités vraiment essentielles des courbes algébriques, celles qui ne sont pas altérées par les transformations birationnelles et que l'on appelle aujourd'hui »points de Weierstrass». Le géomètre berlinois a montré également comment les rapports mutuels de ces singularités nous font connaître les transformations birationnelles d'une courbe en elle-même.

15.

Mais les fonctions abéliennes définies par Riemann ne sont pas les fonctions périodiques les plus générales, que la méthode de Riemann semble impuissante à atteindre. Nous savons en effet que le nombre des modules d'une courbe d'ordre p est égal à $3p-3$; le nombre des coefficients arbitraires d'une fonction θ à p variables est égal à $\frac{p(p+1)}{2}$; ces deux nombres ne sont égaux que pour $p=2$ et pour $p=3$; pour $p>3$, le second est plus grand que le premier. Il y a donc des fonctions θ qui ne correspondent pas à des courbes algébriques.

Weierstrass fut ainsi conduit à aborder la question par une autre voie et à chercher quelles sont les fonctions périodiques les plus générales. Et d'abord une première question se présente; combien une fonction de n variables peut-elle avoir de périodes? Le problème avait été résolu par Jacobi qui avait montré que le nombre maximum de ces périodes est $2n$. Weierstrass a donné une démonstration nouvelle du théorème de Jacobi et a nettement marqué les conditions dans lesquelles il est applicable.

Il s'est ensuite occupé d'étudier les propriétés des fonctions les plus générales qui dépendent de n variables et admettent $2n$ périodes. Il a reconnu qu'elles jouissent de propriétés analogues à celles des transcendantes elliptiques.

Entre $n+1$ fonctions, qui ont mêmes périodes, il y a toujours une relation algébrique; d'où il suit d'abord que ces fonctions admettent un théorème d'addition et satisfont à des équations différentielles.

Enfin Weierstrass a démontré qu'une pareille fonction est toujours le quotient de deux séries θ et que les fonctions abéliennes les plus générales peuvent se déduire de celles de Riemann par le procédé connu de la »réduction des intégrales abéliennes».

Le but était atteint.

Divers.

16.

Je m'étendrai peu sur les autres travaux de Weierstrass, malgré leur importance et leur variété.

Deux mémoires déjà anciens ont été consacrés aux facultés analytiques, qui avaient été l'objet de recherches nombreuses et anciennes, souvent assez mal conduites et qui se ramènent très simplement aux fonctions eulériennes.

La question des unités complexes a aussi occupé Weierstrass dans ses dernières années; on avait conçu de très grandes espérances à la suite de l'invention des nombres complexes; on en attendait les mêmes surprises qu'avaient données les imaginaires. Il faut y renoncer; on sait maintenant que tous les nombres complexes, je veux dire tous ceux dont la multiplication est commutative, se ramènent aux imaginaires et ne nous apprendront rien de plus.

La découverte de M. Hermite qui a démontré la transcendance de e, bientôt suivie de celle de M. Lindemann qui a établi la transcendance de π, attira il y a une quinzaine d'années, l'attention de tous les géomètres; elle ne pouvait échapper à celle de Weierstrass qui a notablement perfectionné les démonstrations de ses devanciers.

Citons encore un mémoire sur la représentation des fonctions d'une variable réelle par des séries de polynômes; deux autres sur la théorie des formes quadratiques; un travail sur un problème de calcul des variations; un autre sur le théorème fondamental de la géométrie projective, etc.

Ces exemples suffiront pour montrer comment, en restant toujours fidèle au même esprit, il a touché à toutes les parties de la science mathématique et avec quelle souplesse s'adaptaient aux problèmes les plus divers les méthodes fécondes qu'il avait créées.

Conclusions.

17.

En terminant cette rapide analyse, je voudrais pouvoir caractériser en quelques mots l'esprit qui dans tous leurs travaux a animé le maître et ses disciples.

C'est d'abord un souci constant d'une parfaite rigueur.

Pour cela, Weierstrass renonce à se servir de l'intuition, ou du moins ne lui laisse que la part qu'il ne peut lui ôter. Les notions intuitives sont analysées et réduites en leurs éléments; parmi ces éléments, les philosophes en trouveraient certainement qui conservent le caractère intuitif; mais ceux-là sont rejetés hors du domaine des mathématiques pures, qui peuvent se développer sans eux; les physiciens seuls auront à s'en occuper. Ceux qu'on conserve sont analysés à leur tour et cette analyse est poussée jusqu'à ce qu'on arrive à l'élément ultime, le nombre entier.

De là à l'égard de la géométrie une certaine méfiance qui est le caractère propre de l'Ecole de Berlin; pour ainsi dire elle ne cherche pas à voir, mais à comprendre.

Tout dérive donc du nombre entier et participe par conséquent de la certitude de l'arithmétique; le continu lui-même se ramène à cette origine et toutes les égalités qui font l'objet de l'Analyse et où figurent des grandeurs continues ne sont plus que des symboles, remplaçant une multitude infinie d'inégalités entre nombres entiers.

Les notions analytiques sont donc pour Weierstrass, comme pour Kronecker, des constructions faites avec les mêmes matériaux, les nombres entiers. Mais il y a une différence entre les deux conceptions; Kronecker est surtout préoccupé de mettre en évidence le sens philosophique des vérités mathématiques; le nombre entier étant le fond de tout, il veut qu'il reste partout apparent; pour lui, les seules opérations licites sont l'addition et la multiplication; ce n'est que par une concession aux préjugés contemporains, qu'il consent quelquefois à admettre la division.

Tel n'est pas le point de vue de Weierstrass. Dès qu'il a élevé une construction, il oublie de quels matériaux elle est faite et n'y veut plus voir qu'une unité nouvelle dont il fera l'un des éléments d'une construction plus grandiose. Il peut le faire sans crainte, car il en a, une fois pour toutes, éprouvé la solidité.

Ces unités intermédiaires ne sont sans doute que des auxiliaires; mais notre esprit est si faible qu'il ne peut s'en passer; car il ne peut percevoir à la fois tous les détails d'un grand ensemble. Ces artifices sont donc nécessaires si l'on veut marcher toujours en avant et c'est là justement ce que veut Weierstrass. Kronecker, lui aussi, a fait bien des découvertes; mais s'il y est arrivé, c'est en oubliant qu'il était philosophe et en délaissant lui-même ses principes qui étaient condamnés d'avance à la stérilité.

Weierstrass procède donc par construction en partant du nombre entier; il marche ainsi toujours du simple au composé. Il se distingue par cette tendance d'autres analystes qui partent du général et de l'indéterminé et qui le déterminent ensuite de plus en plus par des hypothèses restrictives. De là le contraste entre sa façon de concevoir la fonction analytique et celle de ses devanciers.

Une autre pensée semble l'avoir guidé.

En 1875, il écrivait à M. Schwarz:

»Plus je réfléchis aux principes de la théorie des fonctions — et c'est ce que je fais sans cesse — plus je suis solidement convaincu qu'ils sont bâtis sur le fondement des verités algébriques et que, par conséquent, ce n'est pas le véritable chemin, si inversement on fait appel au transcendant pour établir les théorèmes simples et fondamentaux de l'Algèbre; et cela reste vrai, quelque pénétrantes que puissent paraître au premier abord les considérations par lesquelles Riemann a découvert tant d'importantes propriétés des fonctions algébriques.»

Je pourrais citer d'autres exemples où il s'est inspiré de la même idée. Il est constamment efforcé d'aller au but par le chemin le moins détourné, qui n'est pas toujours le plus rapide ni le plus élégant, mais qui est le seul logique.