ÜBER ABEL'S VERALLGEMEINERUNG DER BINOMISCHEN FORMEL

VON

A. HURWITZ

in ZÜRICH.

Bei meinen Untersuchungen über RIEMANN'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten [1] bin ich auf eine Reihe von algebraischen Identitäten geführt worden, welche die von ABEL gegebene Verallgemeinerung der binomischen Formel [2] als einen speciellen Fall enthalten. In der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 35, S. 56, habe ich vor längerer Zeit einen Theil dieser Identitäten mitgetheilt. Die übrigen, auf welche ich nur kurz in der unten citirten Abhandlung hingewiesen habe, möchte ich in den folgenden Zeilen näher darlegen und begründen.

Es seien r und s zwei (positive oder negative) ganze Zahlen, ferner $u, v, x_1, x_2, \ldots, x_n$ unbeschränkt veränderliche Grössen. Ich definire nun eine Function $F_{r,s}$ dieser Grössen durch die Gleichung

$$(\mathrm{I})\quad F_{r,s}=\sum(u+\varepsilon_1 x_1+\varepsilon_2 x_2+\ldots+\varepsilon_n x_n)^{r+\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i}(v+\varepsilon_1' x_1+\varepsilon_2' x_2+\ldots+\varepsilon_n' x_n)^{s+\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i'}.$$

Hier ist ε_i' zur Abkürzung für $1-\varepsilon_i$ geschrieben und es soll die Summe in der Weise gebildet werden, dass $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ unabhängig von einander die beiden Werthe 0 und 1 erhalten. Indem man in jedem einzelnen der 2^n Glieder dieser Summe diejenigen Terme $\varepsilon_i x_i$ bez. $\varepsilon_i' x_i$ unterdrückt, für welche ε_i bez. ε_i' gleich Null ist, erhält die Gleichung (I) offenbar die Gestalt

$$(\mathrm{I}')\quad F_{r,s}=\sum(u+x_{\alpha_1}+x_{\alpha_2}+\ldots+x_{\alpha_\lambda})^{r+\lambda}(v+x_{\beta_1}+x_{\beta_2}+\ldots+x_{\beta_\mu})^{s+\mu},$$

[1] S. Mathematische Annalen, Bd. 39, S. 1 ff.

[2] ABEL, Oeuvres complètes, nouvelle édition, vol. I, p 102.

wo nun die Summation auf alle Zerlegungen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in zwei Gruppen $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_\lambda}$ und $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_\mu}$ auszudehnen ist. Dabei sind auch diejenigen beiden Zerlegungen zu berücksichtigen, bei welchen in der einen Gruppe keine, in der andern Gruppe die sämmtlichen Variabeln stehen.

Wenn es erforderlich ist, die Argumente, von denen $F_{r,s}$ abhängt, näher anzugeben, so werde ich in der Folge diese Funktion mit

$$F_{r,s}(u\,,\,v \mid x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots,\,x_n)$$

bezeichnen.

Offenbar ist $F_{r,s}$ eine symmetrische Funktion der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$; sie bleibt ferner ungeändert, wenn gleichzeitig u mit v und r mit s vertauscht wird. Einige weitere Eigenschaften von $F_{r,s}$ folgen leicht aus der Definitionsgleichung (I). Nimmt man auf der rechten Seite dieser Gleichung diejenigen Glieder, für welche $\varepsilon_1 = 1$ ist, so bilden dieselben die Funktion $F_{r+1,s}(u + x_1\,,\,v \mid x_2\,,\,\ldots,\,x_n)$, während diejenigen Glieder, für welche $\varepsilon_1 = 0$ ist, die Funktion $F_{r,s+1}(u\,,\,v + x_1 \mid x_2\,,\,\ldots,\,x_n)$ bilden. Daher hat man

$$(1) \qquad F_{r,s} = F_{r+1,s}(u + x_1\,,\,v \mid x_2\,,\,\ldots,\,x_n) + F_{r,s+1}(u\,,\,v + x_1 \mid x_2\,,\,\ldots,\,x_n).$$

Durch Vertauschung von x_1 mit $x_2, x_3, \ldots, x_n$ entstehen hieraus $n - 1$ weitere Gleichungen.

Trennt man im allgemeinen Gliede der Summe (I) einen Faktor $u + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \ldots + \varepsilon_n x_n$ ab, so gewinnt die Summe die Form:

$$\begin{aligned} &u \sum (u + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_n x_n)^{r-1+\Sigma\varepsilon_i}(v + \varepsilon'_1 x_1 + \ldots + \varepsilon'_n x_n)^{s+\Sigma\varepsilon'_i} \\ &+ x_1 \sum \varepsilon_1 (u + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_n x_n)^{r-1+\Sigma\varepsilon_i}(v + \varepsilon'_1 x_1 + \ldots + \varepsilon'_n x_n)^{s+\Sigma\varepsilon'_i} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man die Richtigkeit der Gleichung

$$(2) \qquad F_{r,s} = uF_{r-1,s} + \sum_{k=1}^{n} x_k F_{r,s}(u + x_k\,,\,v \mid x_1\,,\,\ldots,\,x_{k-1}\,,\,x_{k+1}\,,\,\ldots,\,x_n).$$

Analog ergiebt sich

$$(3) \qquad F_{r,s} = vF_{r,s-1} + \sum_{k=1}^{n} x_k F_{r,s}(u\,,\,v + x_k \mid x_1\,,\,\ldots,\,x_{k-1}\,,\,x_{k+1}\,,\,\ldots,\,x_n).$$

Für die nach u und v genommenen Differentialquotienten von $F_{r,s}$ findet man aus (I)

$$(4)\qquad \frac{\partial F_{r,s}}{\partial u} = rF_{r-1,s} + \sum_{k=1}^{n} F_{r,s}(u + x_k, v \mid x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

$$(5)\qquad \frac{\partial F_{r,s}}{\partial v} = sF_{r,s-1} + \sum_{k=1}^{n} F_{r,s}(u, v + x_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

Differenziirt man die Gleichung (1) partiell nach x_1 und benutzt sodann auf der rechten Seite die Formeln (4) und (5), so ergiebt sich nach kurzer Rechnung

$$(6)\qquad \frac{\partial F_{r,s}}{\partial x_1} = (r+1)F_{r,s}(u+x_1, v \mid x_2, \ldots, x_n) + (s+1)F_{r,s}(u, v+x_1 \mid x_2, \ldots, x_n)$$
$$+ \sum_{k=2}^{n} F_{r,s}(u, v \mid x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + x_1, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch Vertauschung von x_1 mit $x_2, x_3, \ldots, x_n$ entsprechende Darstellungen der nach diesen Variabeln genommenen Differentialquotienten von $F_{r,s}$.

Wenn die Zahl n der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sich auf 1 reducirt, so ist der Ausdruck der Funktion $F_{r,s}$ nach (I) der folgende:

$$(7)\qquad F_{r,s}(u, v \mid x_1) = (u + x_1)^{r+1}v^s + u^r(v + x_1)^{s+1}.$$

Auf Grund der vorstehenden Gleichungen lässt sich nun leicht zeigen, dass die Funktion $F_{-1,0}$ die sehr einfache Darstellung

$$(\mathrm{II})\qquad F_{-1,0} = (u + v + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n \frac{1}{u}$$

zulässt. In der That ist dieses nach (7) im Falle $n = 1$ richtig. Nimmt man nun an, dass die Gleichung (II) für den Fall von $n - 1$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ gilt, so ergiebt sich aus (5) und (6)

$$\frac{\partial F_{-1,0}}{\partial v} = n(u + v + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{n-1}\frac{1}{u},$$

$$\frac{\partial F_{-1,0}}{\partial x_i} = n(u + v + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{n-1}\frac{1}{u}. \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Und hieraus folgt durch Integration

$$F_{-1,0} = (u + v + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n \frac{1}{u} + C,$$

wo C von $v, x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängig ist. Setzt man aber

$$v = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, \qquad r = -1, \qquad s = 0,$$

so erhält man auf der rechten Seite von (I) u^{n-1}. Also ist $C = 0$ und damit die Allgemeingültigkeit der Gleichung (II) erwiesen. Benutzt man die Definitionsgleichung (I'), so stellt sich die Gleichung (II) in der Form dar:

$$\text{(II')} \quad \Sigma(u + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1}(v + x_{\beta_1} + x_{\beta_2} + \ldots + x_{\beta_\mu})^{\mu} = \frac{1}{u}(u + v + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n.$$

Diese vereinfacht sich noch, wenn man v durch $v - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ ersetzt. Dadurch erhält man nämlich

$$\text{(II')} \quad \Sigma(u + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1}(v - x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} - \ldots - x_{\alpha_\lambda})^{n-\lambda} = \frac{1}{u}(u + v)^n.$$

Für den Fall, dass man die n willkürlichen Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämmtlich gleich ein und derselben Grösse x annimmt, geht die vorstehende Gleichung in die Abel'sche Formel

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda}(u + \lambda x)^{\lambda-1}(v - \lambda x)^{n-\lambda} = \frac{1}{u}(u + v)^n$$

über.

Setzt man in (3) $r = -1$, $s = 0$, so kann man, unter Berücksichtigung von (II), aus der entstehenden Gleichung $F_{-1,-1}$ bestimmen. Es ergiebt sich auf diese Weise:

$$\text{(III)} \quad \Sigma(u + x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1}(v + x_{\beta_1} + \ldots + x_{\beta_\mu})^{\mu-1} = (u + v + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{n-1}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right).$$

Auch dem Falle $r = 0$, $s = 0$ entspricht eine einfache Formel, die man durch Induktion mit Hülfe der Gleichungen (2) und (II) beweist. Setzt man zur Abkürzung

$$u + v + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s$$

und bezeichnet man ferner mit $f_1, f_2, \ldots, f_n$ die elementar-symmetrischen Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$f_1 = \sum x_i, \qquad f_2 = \sum x_i x_k, \quad \ldots, \quad f_n = x_1 x_2 \ldots x_n,$$

so lautet die in Rede stehende Formel:

$$\text{(IV)} \qquad \sum (u + x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_\lambda})^\lambda (v + x_{\beta_1} + \ldots + x_{\beta_\mu})^\mu$$
$$= s^n + \underline{|1} f_1 s^{n-1} + \underline{|2} f_2 s^{n-2} + \ldots + \underline{|n} f_n.$$

Schliesslich seien hier noch einige Verallgemeinerungen der vorstehenden Identitäten erwähnt, welche sich aus diesen ableiten oder in ähnlicher Weise wie diese begründen lassen. Es sei $r > 1$ eine positive ganze Zahl. Man theile die Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf alle möglichen Weisen in r Gruppen

$$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_\lambda}; \; x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_\mu}; \; \ldots; \; x_{\omega_1}, x_{\omega_2}, \ldots, x_{\omega_\theta},$$

wobei auch diejenigen Eintheilungen berücksichtigt werden sollen, bei welchen in einer oder mehreren Gruppen keine Variable steht. Dann hat man:

$$\text{(V)} \qquad \sum (u_1 + x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_\lambda})^\lambda (u_2 + x_{\beta_1} + \ldots + x_{\beta_\mu})^{\mu-1} \ldots (u_r + x_{\omega_1} + \ldots + x_{\omega_\theta})^{\theta-1}$$
$$= (u_1 + u_2 + \ldots + u_r + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n \frac{1}{u_2 u_3 \ldots u_r}$$

und

$$\text{(VI)} \qquad \sum (u_1 + x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1} (u_2 + x_{\beta_1} + \ldots + x_{\beta_\mu})^{\mu-1} \ldots (u_r + x_{\omega_1} + \ldots + x_{\omega_\theta})^{\theta-1}$$
$$= (u_1 + u_2 + \ldots + u_r + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{n-1} \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_r}{u_1 u_2 \ldots u_r}.$$

Im Falle $r = 2$ geht (V) in (II) und (VI) in (III) über.

Zürich, im November 1901.