

THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES HYPERBOLIQUES ET DU PROBLÈME DE CAUCHY

PAR

JACQUES HADAMARD

à PARIS.

Les équations dont nous nous occuperons ici sont les analogues de l'équation des ondes sphériques, étudiée par POISSON et KIRCHHOFF, et de l'équation des ondes cylindriques, étudiée par M. VOLTERRA.¹

La méthode employée pour les intégrer sera, au fond, celle que nous avons indiquée, pour le cas de trois variables, dans deux Mémoires intitulés *Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles*.² Le présent travail a pour but de reprendre cette méthode, pour l'étendre à un nombre quelconque de variables.

I. Formule fondamentale et solution fondamentale.

1. Nous rappellerons, dans ce premier Chapitre, un certain nombre de résultats connus ou empruntés aux Mémoires dont nous venons de parler.

Toutes les recherches faites jusqu'ici sur les équations linéaires aux dérivées partielles reposent sur l'emploi de la *formule fondamentale* et des *solutions fondamentales*.

¹ Acta Mathematica tome XVIII; 1894.

² Ann. Scient. E. Norm. série (3) t. XXI, p. 535—556, 1904 et t. XXII, p. 101—141, 1905.

Pour l'équation de LAPLACE $\Delta u = 0$, la formule fondamentale est la formule de GREEN. La solution fondamentale¹ est le potentiel élémentaire $\frac{1}{r^{n-2}}$ (n étant le nombre des dimensions) ou $\log \frac{1}{r}$ (pour $n = 2$).

La formule fondamentale s'étend aisément à l'équation linéaire générale (du second ordre). Soit

$$(E) \quad F(u) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

cette équation, où x_1, x_2, \dots, x_n sont des variables indépendantes, u la fonction inconnue, pendant que $F(u)$ désigne un polynôme différentiel

$$F(u) = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + lu$$

dans lequel les a_{ik} , les a_i , ainsi que l et le second membre f de l'équation, sont des fonctions données des variables indépendantes. Soient T une portion de l'espace à n dimensions, limitée (en tous sens) par une surface (multiplicité $n-1$ fois étendue) S ; dS , un élément de S ; $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$, des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale à S dirigée vers T , le facteur de proportionnalité étant positif et sa valeur absolue étant telle que l'on ait

$$\pi_n dS = \pm dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}.$$

Désignons enfin par A la forme quadratique

$$A = \sum_{i,k} a_{ik} \pi_i \pi_k.$$

On aura, entre une intégrale $n^{\text{up}}^{\text{le}}$ prise dans T et une intégrale $(n-1)^{\text{up}}^{\text{le}}$ prise sur S , l'identité

$$(I) \quad \int \int \dots \int_T [v F(u) - u G(v)] dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int \dots \int_S \left(u \frac{dv}{dv} - v \frac{du}{dv} - Lu v \right) dS$$

quelles que soient les fonctions u et v .

¹ Les solutions fondamentales que nous introduisons sont donc sans rapport direct avec les fonctions fondamentales que considère la théorie des équations à caractéristiques imaginaires.

Dans cette formule, $G(v)$ est le polynôme différentiel *adjoint* à F

$$G(v) = \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} (a_{ik} v) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i v) + l v$$

[l'équation $G(v) = 0$ étant dite *l'adjointe*¹ de (E)]; quant à la dérivée $\frac{d}{dv}$, elle désigne le symbole de différentiation

$$\frac{d}{dv} = \sum_i \frac{\pi \partial A}{2 \partial \pi_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

La direction de cosinus directeurs proportionnels à $\frac{dx_1}{dv}, \frac{dx_2}{dv}, \dots, \frac{dx_n}{dv}$ est désignée sous le nom de *conormale*² à S . C'est la direction conjuguée du plan tangent à S par rapport au cône (cône *caractéristique*) représenté par l'équation tangentielle $A = 0$. Enfin la quantité L a l'expression

$$L = \sum_i \left(- \sum_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} + a_i \right) \pi_i.$$

D'après sa définition, la direction conormale est tangente à S lorsque celle-ci est *caractéristique* c'est à dire que son plan tangent satisfait à l'équation $A = 0$. La direction conormale n'est alors autre que celle de la tangente à la *bicaractéristique*, — c'est à dire à la caractéristique de l'équation du premier ordre $A = 0$, — située sur S .

Nous désignerons par \mathcal{A} le discriminant de la forme A . Nous supposons toujours, dans ce qui va suivre, que cette forme est *générale*, c'est à dire qu'on a $\mathcal{A} \neq 0$. A admet alors une forme adjointe: nous désignerons par H cette forme adjointe divisée par \mathcal{A} . La relation entre A et H est réciproque, et le discriminant D de H est l'inverse de \mathcal{A} .

2. Les *solutions fondamentales* ont été, pour le cas de deux variables, découvertes par M. PICARD,³ retrouvées plus tard et appliquées au problème de

¹ L'équation adjointe est toujours prise sans second membre, même si l'équation donnée en a un.

² D'ADHÉMAR, C. R. Ac. Sc. 11 février 1901. — On pourrait employer aussi la dénomination de *transversale*, empruntée au Calcul des Variations.

³ C. R. Ac. Sc., 6 avril 1891.

DIRICHLET par M. SOMMERFELD.¹ Elles comprennent, dans ce cas, un terme holomorphe, augmenté d'un terme qui contient un logarithme en facteur.

Rappelons comment on peut former ces solutions pour un nombre quelconque de variables, en renvoyant pour les détails au premier des Mémoires précédemment cités.²

Soit $O(a_1, a_2, \dots, a_n)$ un point donné de l'espace à n dimensions. Si nous déterminons les fonctions x_i, p_i de la variable s par les équations différentielles

$$(2) \quad \frac{dx_i}{\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial p_i}} = \frac{-dp_i}{\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial x_i}} = ds \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

les x_i ayant, pour $s = 0$, les valeurs initiales a_i et les p_i des valeurs arbitraires p_{0i} , les lignes décrites ainsi par le point (x_1, x_2, \dots, x_n) ne sont autres que des géodésiques relatives à l'élément linéaire

$$ds^2 = H(dx_1, dx_2, \dots, dx_n; x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Celles des lignes (2) sur lesquelles A est nul (et, par conséquent, sur lesquelles $H = 0$) ne sont autres que les bicaractéristiques. Sur les autres, s sera proportionnel à l'arc (mesuré relativement à l'élément linéaire H et compté à partir de O), avec un facteur de proportionnalité arbitraire sur chaque géodésique. Nous désignerons par Γ le carré de la distance géodésique, ainsi mesurée, entre le point O et le point $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Γ est une fonction holomorphe autour de O , son développement autour de ce point commençant par les termes

$$\Gamma = H(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n) + \dots;$$

les dérivées partielles de Γ seront données par les formules

$$(3) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = 2s p_i.$$

Cela posé, si n est impair, il existera une solution (et une seule à un facteur constant près) de la forme

$$(3) \quad u = \frac{v}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}},$$

où v est holomorphe autour du point O .

¹ Encyclopädie der Math. Wiss., II 7 c.

² Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 1904.

Pour n pair, au contraire, cette forme est remplacée par la suivante

$$(4') \quad u = \frac{v}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} + v_0 \log \Gamma$$

où v et v_0 sont des fonctions holomorphes. En outre, une telle solution n'est plus unique, car la forme ainsi écrite de la fonction u n'est pas altérée si on lui ajoute une fonction régulière quelconque, solution de l'équation $F(u) = 0$. Cette indétermination est d'ailleurs la seule que présente u : la fonction v_0 est unique (à un coefficient de proportionnalité constant près) et (sauf le même coefficient) la fonction v est déterminée à des termes près contenant en facteur $\Gamma^{\frac{n-2}{2}}$.

Quant au coefficient de proportionnalité, nous l'avions choisi dans les *Recherches sur les solutions fondamentales* de manière que la fonction v prenne la valeur 1 lorsqu'on fait coïncider le point $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec le point O . Nous modifierons légèrement ici cette convention: nous admettrons — ce qui est plus avantageux au point de vue de la *relation d'échange* (voir plus loin n° 21) — que U prend, au point O , non la valeur 1 mais la valeur $\frac{1}{+V|A|}$. Le lecteur voudra bien tenir compte de cette discordance dans la comparaison de nos formules actuelles avec celles de notre précédent travail.

Une fois cette dernière convention établie, la *solution fondamentale* u est, dans le cas de n impair, une fonction parfaitement bien déterminée des $2n$ quantités $x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n$. Considéré comme fonction du point M , u admet comme singularité la surface $\Gamma = 0$. Cette surface est le *conoïde caractéristique* de sommet O , lieu des bicaractéristiques issues de ce point.

3. C'est la solution fondamentale qui joue le rôle du potentiel élémentaire dans l'étude des équations à caractéristiques imaginaires (cas *elliptique*). La théorie a été développée, à ce point de vue, d'une manière complète par M. SOMMERFELD, dans l'article cité de l'Encyclop. der Math. Wiss.

Nous nous attacherons ici au cas *hyperbolique*, où A n'a pas tous ses carrés de même signe et où, par conséquent, le conoïde caractéristique est réel. C'est seulement dans ce cas que l'on a à se poser le problème de CAUCHY, c'est à dire celui qui consiste à déterminer une solution de l'équation d'après ses valeurs et celles d'une de ses dérivées premières sur une surface donnée.

Si l'on envisage ce problème dans l'hypothèse où il n'y a que deux variables indépendantes et où la solution est donnée par la méthode de RIEMANN, on y voit encore intervenir une fonction des coordonnées x, y, x', y' de deux points

du plan, laquelle rend les mêmes services que la solution fondamentale de M. PICARD pour le problème de DIRICHLET dans le plan, c'est à dire qu'il suffit de la substituer dans la formule fondamentale pour obtenir la valeur d'une intégrale de l'équation en fonction des données de CAUCHY.

Cependant cette fonction de RIEMANN *n'est pas* l'analogie de la solution fondamentale. Mais elle présente avec elle une relation que j'ai établie en 1900, et exposée au Congrès international des Mathématiciens:¹ elle n'est autre que le coefficient du logarithme dans l'expression (4') de u . Nous retrouverons cette relation dans l'étude du cas général.

4. Si maintenant, pour passer à des équations à trois ou à quatre variables nous prenons les solutions de M. VOLTERRA et de KIRCHHOFF, nous y verrons apparaître un caractère tout différent: Non seulement les fonctions utilisées par ces deux auteurs ont une singularité (au contraire de la fonction de RIEMANN, qui est régulière): mais elles ont toute une *ligne* de singularités, en dehors du cône caractéristique de sommet O .

Cette singularité a été le principal obstacle à la généralisation des méthodes de KIRCHHOFF et de M. VOLTERRA. J'ai montré précédemment, pour le cas de $n = 3$, que cette généralisation s'opérait au contraire, d'elle-même lorsqu'on remontait à la solution fondamentale. La marche suivie à cet effet consistait à déduire de celle-ci les fonctions de M. VOLTERRA, ce qui se fait par une quadrature. On pourrait l'étendre avec quelques complications, au cas de $n > 3$; je préfère laisser cet intermédiaire de côté et partir directement de la solution fondamentale. Il faut pour cela, recourir à un symbole, déjà employé dans notre précédent Mémoire, et dont, comme le constatait² au même moment M. d'ADHÉMAR on ne peut éviter la présence lorsqu'on veut effectuer les différentiations indiquées par les formules de M. VOLTERRA. L'intervention de ce symbole, formé de deux infinis qui se détruisent, a été jusqu'ici une des graves difficultés du problème. Je me propose, dans ce qui va suivre de montrer qu'elle permet, au contraire, d'en obtenir, d'une manière simple et directe, la solution générale.

¹ Compte rendu du 2^e Congrès Internat. p. 375. — Cette relation est indiquée à nouveau dans la Thèse de M. ANDRAE. Göttingen 1903; p. 18.

² Thèse, Paris, 1904.

II. Définition d'un nouveau symbole d'intégration.

5. Partons de l'intégrale

$$(5) \quad \int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{1+\alpha}} dx$$

où l'exposant constant α satisfait aux inégalités

$$0 < \alpha < 1.$$

Nous aurons surtout en vue, dans ce qui va suivre, le cas où ces inégalités excluent l'égalité et nous nous placerons tout d'abord dans ce cas.

L'intégrale (5) n'a aucun sens. Mais, du moins si la fonction A satisfait à la condition de LIPSCHITZ

$$|A(b) - A(x)| < K|b - x|,$$

on peut adjoindre à cette intégrale une expression de la forme

$$\frac{B(x)}{(b-x)^\alpha}$$

telle que la somme de cette quantité et de la précédente ait une valeur déterminée: je veux dire, telle que la quantité

$$(6) \quad \int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{1+\alpha}} dx + \frac{B(x)}{(b-x)^\alpha}$$

tende vers une limite lorsque x tend vers b . Il suffit, pour cela que la fonction B , remplissant également la condition de LIPSCHITZ, satisfasse en outre à la relation

$$(7) \quad A(b) + \alpha B(b) = 0.$$

En effet, si, au lieu de $A(x)$ et $B(x)$, on introduit $A(x) - A(b)$, $B(x) - B(b)$, l'expression (6) s'écrit

$$(6') \quad \int_a^x \frac{A(x) - A(b)}{(b-x)^{1+\alpha}} dx + \frac{B(x) - B(b)}{(b-x)^\alpha} + \frac{A(b)}{\alpha} \left(\frac{1}{(b-x)^\alpha} - \frac{1}{(b-a)^\alpha} \right) + \frac{B(b)}{(b-x)^\alpha}$$

et, moyennant la condition (7), elle tend vers la limite

$$(8) \quad \int_a^b \frac{A(x) - A(b)}{(b-x)^{1+\alpha}} dx - \frac{A(b)}{\alpha(b-a)^\alpha}.$$

Le résultat demandé est donc obtenu. Mais une remarque essentielle se dégage de la forme de ce résultat.

L'expression (8) ne contient pas la fonction B . Elle est entièrement définie par la connaissance de l'intégrale donnée (5). Cela tient évidemment à ce que, dans l'expression (6'), l'ensemble des termes en $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$ n'a pu cesser d'être infini que pour devenir nul, en vertu de l'inégalité $\alpha < 1$ et de la condition de LIPSCHITZ vérifiée par la fonction B .

La quantité (8) sera dite la *partie finie* de l'intégrale (5) et désignée par le symbole

$$\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{1+\alpha}} dx.$$

Plus généralement, prenons l'intégrale

$$\int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\alpha}} dx \quad (0 < \alpha < 1)$$

où p est un entier positif, et supposons que la fonction A ait au moins $p-1$ dérivées, la dernière satisfaisant à la condition de LIPSCHITZ. Si l'on veut, pour énoncer une condition un peu plus restrictive, mais plus simple, admettons que A ait au moins p dérivées finies.

Nous pourrions encore ajouter à cette intégrale une expression de la forme

$$(9) \quad \frac{B(x)}{(b-x)^{p-1+\alpha}}$$

de manière que la somme ait une valeur déterminée pour $x=b$. Il suffira que, dans le développement de ces deux expressions suivant les puissances croissantes (positives et négatives) de $b-x$, les termes en $(b-x)^{-(a+p-1)}$, $(b-x)^{-(a+p-2)}$, ..., $(b-x)^{-a}$ se détruisent.

Cette addition peut se faire d'une manière et d'une seule, non que la fonction B satisfaisant à ces conditions soit unique, mais parce que (si nous lui imposons,

comme nous le ferons toujours, la condition d'être dérivable au moins autant de fois que A) elle est déterminée à des termes près de l'ordre de $(b-x)^p$, lesquels donnent un résultat nul dans la fraction (9).

Nous pouvons donc encore parler sans ambiguïté de la quantité

$$(10) \quad \int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+a}} dx$$

ou *partie finie* de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+a}} dx.$$

6. La théorie des fonctions de variable imaginaire va nous donner une autre définition de l'expression (10).

Supposons la fonction A analytique et holomorphe pour $x=b$. (Si elle ne l'était pas, on appliquerait les mêmes considérations à une fonction analytique coïncidant avec A aux termes en $(b-x)^p$ près). Soit d'abord l'intégrale

$$(11) \quad I = \int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^a} dx,$$

qui a une valeur finie, au sens classique.

On a

$$I = \frac{1}{1 - e^{2i\pi a}} \int_L \frac{A(x)}{(b-x)^a} dx$$

L étant un lacet (fig. 1) qui va de a en b et revient en a après une rotation directe autour de b et le dénominateur ayant sa détermination réelle et positive sur la première branche.



Fig. 1.

Considérons, de même, l'expression.

$$(12) \quad \frac{1}{1 - e^{2i\pi a}} \int_L \frac{A(x)}{(b-x)^{p+a}} dx.$$

Elle est égale à l'expression (10)

Pour démontrer qu'il en est ainsi, comme on peut, en développant le numérateur par la formule de TAYLOR, décomposer l'intégrale (10) en une intégrale de la forme (11) et plusieurs autres de la forme

$$A \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{p+\alpha}}$$

(A étant constant), il suffit de faire la vérification pour ces dernières. Or, dans ce cas, les expressions (10) et (12) ont la valeur commune¹ $\frac{A}{(p+\alpha-1)(b-a)^{p+\alpha-1}}$.

Le fait peut d'ailleurs être considéré comme évident à priori, l'intégrale prise suivant un petit cercle de centre b étant manifestement d'ordre fractionnaire par rapport au rayon de ce cercle.

De même, la partie finie de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{A(x)}{[(x-a)(b-x)]^{p+\alpha}}$$

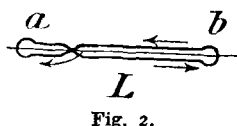


Fig. 2.

(qui est infinie aux deux extrémités a et b) pourra se calculer, soit en décomposant l'intervalle (a, b) en deux par une limite intermédiaire c , soit par intégration le long d'une ligne L allant de a en b et revenant avec rotation directe (fig. 2) autour de l'un des points a, b et inverse autour de l'autre.

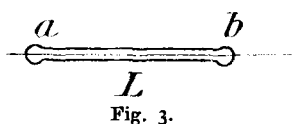


Fig. 3.

Dans le cas de $\alpha = \frac{1}{2}$, qui est celui dont nous aurons à faire usage, les sens des rotations sont indifférents et on peut donner à L la forme classique représentée (fig. 3).

Le facteur $\frac{1}{1 - e^{2i\pi\alpha}}$ a, dans ce cas, la valeur $\frac{1}{2}$.

6 bis. Les remarques du n° précédent entraînent cette conséquence, importante pour nous, que l'expression (10) admet la différentiation sous le signe \int , même lorsque la limite b est variable. Il suffit de ne pas écrire, dans la dérivée, le terme correspondant à cette variabilité. Ainsi on a

$$(13) \quad \frac{d}{dt} \int_a^b \frac{A(x, t)}{[b(t)-x]^{p+\alpha}} dx = \int_a^b \left[\frac{\partial A}{\partial t} - (p+\alpha) \frac{db}{dt} \frac{A}{(b-x)^{p+\alpha+1}} \right] dx$$

C'est ce qui se voit immédiatement sur la forme (12) de l'intégrale (10).

La formule est encore valable pour $p=0$: le second membre de cette formule donne alors la dérivée, par rapport à t , de l'intégrale (ordinaire) (11),

¹ On remarquera que cette valeur est négative, pour $A > 0$, quoique la quantité sous le signe \int soit positive. Autrement dit, c'est le terme complémentaire (9) qui donne son signe.

7. Quelques-unes des considérations précédentes s'étendraient à l'intégrale

$$(14) \quad \int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^p} dx$$

On ramènerait celle-ci à être finie par l'addition des termes

$$(15) \quad \frac{B(x)}{(b-x)^{p-1}} + B_1(x) \log(b-x).$$

Mais, pour $p > 1$, on pourrait en ajoutant à $B(x)$ des termes en $(b-x)^{p-1}$, modifier le résultat d'une manière arbitraire. Ce résultat n'est donc pas déterminé par la connaissance de l'intégrale (14), mais exige celle des termes additifs (15).

Il n'en est pas de même pour $p = 1$. Mais, par contre, le résultat obtenu n'est pas invariant par un changement de variable. Cette invariance a, au contraire, lieu pour α fractionnaire,¹ ainsi qu'il est évident sur l'une ou autre des deux définitions données plus haut. Ceci n'empêche pas d'ailleurs l'expression correspondant à $p = 1$ d'avoir son utilité. C'est sous cette forme par exemple que se présentent les dérivées secondes du potentiel spatial,² ou plutôt sous la forme analogue relative à une intégrale multiple.

8. Le cas des intégrales multiples se ramène, en effet, immédiatement au précédent.

Soit une multiplicité T à n dimensions, dont un point est défini par les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n , et dont l'élément sera désigné par $d\tau_n$, multiplicité délimitée par une frontière σ définie par l'équation

$$(16) \quad \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Sur σ , soient prises des coordonnées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$, et par chaque point de Γ , menons une ligne l , qui varie continûment et n'est pas tangente à Γ . En considérant $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \Gamma$ comme des coordonnées curvilignes dont les $n-1$ premières restent constantes sur chaque ligne l , l'élément à n dimensions $d\tau_n$ pourra être mis sous la forme

$$(17) \quad K d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_{n-1} d\Gamma.$$

¹ Il est clair, toutefois, qu'on suppose le changement de variable régulier en b .

² Cette expression est aussi en relation évidente avec la *valeur principale* de CAUCHY.

Soit maintenant l'intégrale

$$(18) \quad \iint \dots \int \frac{A(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Gamma^{p+a}} d\tau_n$$

que nous pourrons écrire sous la forme

$$(18') \quad \iint \dots \int \frac{A}{\Gamma^{p+a}} \cdot K d\lambda_1 \dots d\lambda_{n-1} d\Gamma.$$

Etendue à la portion d'espace à n dimensions délimitée par la frontière (16), elle cesse d'avoir un sens.

La *partie finie*

$$\overline{\iint \dots \int \frac{A}{\Gamma^{p+a}} d\tau_n}$$

de cette intégrale sera, par définition,

$$(19) \quad \underbrace{\iint \dots \int}_{n-1} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_{n-1} \cdot \overline{\int_l \frac{KA d\Gamma}{\Gamma^{p+a}}}$$

Les coordonnées curvilignes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \Gamma$ et, par conséquent, la transformation (18') ne pourront, en général, être employées que dans le voisinage de la frontière. Il y aura donc lieu, en général, de diviser le domaine T en deux parties, l'une centrale T_1 où l'intégrale s'évaluera à la manière ordinaire, l'autre T_2 , comprenant le voisinage de σ_1 où l'on adoptera l'expression (18').

Nous obtenons la partie finie de l'intégrale simple suivant l en la prenant non plus depuis le point de départ $\Gamma = 0$ de cette ligne, mais depuis un point infiniment voisin $\Gamma = h$, et ajoutant un terme complémentaire

$$(19') \quad \frac{B}{h^{p+a-1}}$$

où B est une fonction régulière de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, h$ et, par conséquent, de x_1, x_2, \dots, x_n .

h variera d'ailleurs suivant une loi quelconque en fonction des coordonnées λ , sous la seule condition d'être partout très petit. Appelons σ' la multiplicité décrite par le point $\Gamma = h$ et qui devra tendre vers σ de manière que h tende uniformément vers zéro.

La quantité précédente (19'), intégrée par rapport à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$, donnera évidemment une intégrale $n - 1^{\text{upl}}$ étendue à la multiplicité σ' , soit

$$(20) \quad \iint \dots \int_{\sigma'} \frac{B}{\Gamma^{p+a-1}} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_{n-1}$$

et la valeur de l'expression (19) sera la limite vers laquelle tendra la somme de l'intégrale n^{uplo} (18) et de l'intégrale $n-1^{\text{uplo}}$ (20), limite qui sera indépendante de la loi suivant laquelle la surface σ' tendra vers σ .

Elle sera également indépendante du choix des coordonnées curvilignes $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, et de celui des lignes l .

Ce dernier point n'est pas une conséquence évidente de la manière dont nous avons obtenu le terme complémentaire (20); mais il résulte immédiatement de la forme de ce terme.

Choisissons, en effet, pour fixer les idées, la multiplicité σ' de manière que les rapports mutuels des valeurs de h tendent vers des limites finies. Soit, par exemple, δ la distance interceptée entre σ et σ' sur une ligne déterminée quelconque (sécante à σ). Nous pouvons supposer que la position de σ' est exprimée en fonction de δ et cela de manière que h soit une fonction continue et dérivable (jusqu'à l'ordre p) de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \delta$.

Dans ces conditions, le terme (20) est infini d'ordre fractionnaire en δ , avec numérateur régulier. D'après les considérations développées précédemment, cette condition et celle de transformer l'intégrale (18) en une quantité finie déterminent complètement ce terme, ou du moins le résultat obtenu en fin de compte: c'est ce que nous voulions établir.

9. Dans le cas de $p=1$, on peut aisément écrire le terme complémentaire sous une forme manifestement indépendante des éléments arbitraires. En effet, pour $\Gamma=0$, le nombre K est indépendant du choix des lignes l : il est égal à la valeur commune du rapport

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}{D(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x_n}$$

et des rapports analogues. On peut, dès lors, introduire l'élément

$$d\sigma_{n-1} = K d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_{n-1}$$

de la multiplicité (16), et remarquer que cet élément, indépendant, à son tour, du choix des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, est entièrement défini par l'égalité

$$d\sigma_{n-1} d\Gamma = d\tau_n$$

puis écrire la partie finie cherchée sous la forme

$$\iint \dots \int_T \frac{A}{\Gamma^{1+a}} d\tau_n + \frac{1}{\alpha} \int \dots \int_\sigma \frac{A}{\Gamma^a} d\sigma_{n-1}$$

où il est entendu que l'on doit tout d'abord remplacer σ par σ' (en limitant l'intégrale $n^{\text{up}}^{\text{le}}$ à σ') puis faire tendre σ' vers σ .

On remarquera que, pour calculer la partie utile du second terme, il suffit de connaître les valeurs de A sur la frontière σ , comme s'il s'agissait d'une intégrale ordinaire. Ceci n'a plus lieu pour $p > 1$.

10. Enfin, il est essentiel de nous rappeler que tout ce qui précède suppose vérifiées les conditions suivantes:

1°. A admet des dérivées jusqu'à l'ordre p (ou jusqu'à l'ordre $p-1$, avec la condition de LIPSCHITZ);

2°. σ n'admet pas de points singuliers aux environs desquels Γ soit d'ordre supérieur au premier par rapport à la distance du point (x_1, x_2, \dots, x_n) à σ .

Les considérations précédentes s'étendent cependant encore au cas où Γ est le produit de deux facteurs $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, de manière que σ se compose de deux parties $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ sécantes entre elles: c'est ce qui arriverait, par exemple, si T était un rectangle, Γ désignant le produit des quatre côtés.

Cela résulte de ce qu'on peut encore ramener l'intégrale à être finie en retranchant des termes complémentaires en

$$\frac{M}{\Gamma^{(1)}(p+a-1)}, \quad \frac{M}{\Gamma^{(2)}(p+a-1)}, \quad \frac{M}{\Gamma^{(1)}(p+a-1) \cdot \Gamma^{(2)}(p+a-1)}$$

(M désignant des quantités régulières) et la troisième catégorie de termes possède, comme les deux premières, la propriété de ne pouvoir rester finis pour toutes les valeurs infiniment petites de $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ sans être nuls.

La méthode est, bien entendu, applicable si, l'aire d'intégration étant un rectangle, Γ représente le produit des premiers membres des équations de deux côtés opposés; et d'une manière générale, si la frontière se compose d'une partie σ où Γ est nul et d'une autre s où il est différent de zéro.

Il n'en est plus de même pour d'autres singularités de σ . Nous serons obligés de traiter de telles singularités comme on traite les infinis de la quantité sous le signe \int dans la théorie classique, c'est à dire de les isoler tout d'abord par une frontière auxiliaire Σ et de rapprocher indéfiniment celle-ci de la singularité.

Les résultats mêmes auxquels nous parviendrons ainsi montreront qu'il n'aurait pas été légitime d'opérer directement.

II. Il importe de pouvoir assigner une limite supérieure aux expressions que nous venons d'étudier, comme on le fait pour les intégrales ordinaires. S'il s'agit, d'abord, de l'intégrale simple

$$I = \sqrt[p+a]{\int_a^b A dx},$$

on obtiendra cette limite supérieure en retranchant de A les premiers termes de son développement de TAYLOR, comme nous l'avons expliqué plus haut. Si (A_n) est une limite supérieure du module de la n -ième dérivée de A dans l'intervalle (a, b) , on a

$$(22) \quad K|I| < (A_p) \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^a} + \frac{|A(a)|}{(b-a)^{p+a-1}} + \frac{|A'(a)|}{(b-a)^{p+a-2}} + \dots + \frac{|A^{(p-1)}(a)|}{(b-a)^a}$$

K étant un coefficient numérique qui dépend exclusivement du nombre p .

Il pourra, évidemment, y avoir lieu de n'appliquer la transformation que dans une partie de l'intervalle d'intégration.

C'est ce que l'on fera, en général, dans le cas de l'intégrale multiple

$$(18) \quad \sqrt[p+a]{\int \dots \int \frac{A}{\Gamma^{p+a}} d\tau_n}.$$

On évaluera à la manière ordinaire l'intégrale relative à la partie du domaine que nous avons appelée T_1 . Dans T_2 , on partira de l'expression (22). D'après ce que nous venons de trouver, le résultat ainsi obtenu sera de la forme

$$(23) \quad L[(A_0) + \dots + (A_p)] \int \dots \int_{T_2} \frac{1}{\Gamma^a} d\tau_n + L' \frac{(A_0) + \dots + (A_{p+1})}{(\Gamma)^{p+a-1}} \sigma_1 + \int \dots \int_{T_1} \frac{A}{\Gamma^{p+a}} d\tau_n$$

où (A_n) est le maximum du module des dérivées partielles d'ordre n de la fonction A dans T_2 , (Γ) , le minimum du module de Γ sur σ_1 ; L, L' des quantités dépendant de Γ et du choix des lignes l .

Il serait évidemment désirable de préciser cette formule en donnant des expressions de L, L' . Telle qu'elle est, elle suffira pour les applications que nous nous proposons d'en faire.

12. Non seulement la définition de notre symbole suppose l'existence des dérivées de A , mais, comme on le voit, sa valeur n'est limitée qu'en fonction de ces dérivées. De fait, il est facile d'indiquer des expressions de cette nature qui

prennent des valeurs aussi grandes qu'on le veut quoique A reste toujours fini. Il suffit — pour nous borner au cas des intégrales simples — de prendre la suivante

$$(24) \quad I = \int_0^a \frac{f(\mu x)}{x^{p+a}} dx$$

μ étant un nombre positif très grand et f une fonction finie quelque grand que soit x . En faisant le changement de variable $\mu x = z$, on voit immédiatement qu'on aura l'égalité asymptotique

$$(25) \quad I = \mu^{p+a-1} I_1$$

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{f(z)}{z^{p+a}} dz$$

Si donc I_1 est différent de zéro, I augmentera indéfiniment comme μ^{p+a-1} . C'est ce qui arrivera en particulier si les p premières dérivées de f conservent chacune un signe constant depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$ et sont nulles à l'infini; on aura alors:

$$I_1 = \frac{(-1)^p}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)} \int_0^\infty \frac{f^{(p)}(z)}{z^\alpha} dz.$$

13. Nous aurons à envisager, au point de vue qui précède, l'intégrale

$$\int \frac{dz}{(z^2 - \alpha)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Prenons-la d'abord entre $+\sqrt{\alpha}$ et le nombre fixe $z_1 > \sqrt{\alpha}$. Pour $n=0$, on a

$$\int_{\sqrt{\alpha}}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - \alpha}} = \log \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - \alpha}}{\sqrt{\alpha}} = -\frac{1}{2} \log \alpha + P(\alpha),$$

où

$$(26) \quad P(\alpha) = \log(z_1 + \sqrt{z_1^2 - \alpha}) = \log z_1 + \log \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha}{z_1^2}} \right)$$

est une série entière par rapport à α .

On en déduit, par différentiation,

$$(27) \quad \int_{\sqrt{\alpha}}^{z_1} \frac{dz}{(z^2 - \alpha)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^n}{2n C_n} \frac{1}{\alpha^n} + \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{d^n}{d\alpha^n} P(\alpha),$$

C_n désignant le coefficient numérique

$$(28) \quad C_n = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots (n - \frac{1}{2})}{1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n + 1)}.$$

Pour $z_1 = \infty$, le dernier terme disparaît (en vertu de l'égalité (26)) dans le second membre de la formule (27). On a donc

$$(29) \quad \int_{\sqrt{a}}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - \alpha)^{n + \frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^n}{2n C_n \alpha^n}.$$

Nous devons également noter la valeur de l'intégrale pour $n < 0$, soit

$$(27') \quad \int_{+\sqrt{a}}^{z_1} dz (z^2 - \alpha)^{n' - \frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{n'-1}}{2} C_{n'} \alpha^{n'} \log \alpha + P(\alpha),$$

C_n désignant le même coefficient numérique que précédemment.

Mais les formules relatives au cas où les limites sont $-\sqrt{a}$, $+\sqrt{a}$ sont spécialement importantes pour la suite.

L'intégrale

$$(30) \quad \int_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}} \frac{dz}{(\alpha - z^2)^{n + \frac{1}{2}}}$$

est nulle.

L'intégrale

$$\int_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}} dz (z^2 - \alpha)^{n'-1} \sqrt{\alpha - z^2}$$

est égale à πA , A désignant le coefficient de $\log \alpha$ dans l'expression (27') soit

$$(30') \quad \int_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}} dz (z^2 - \alpha)^{n'-1} \sqrt{\alpha - z^2} = \frac{(-1)^{n'-1}}{2} \pi C_{n'} \alpha^{n'}.$$

Ces résultats se vérifient directement sans difficulté, mais on les obtient immédiatement en observant que les intégrales que nous venons d'écrire peuvent, au facteur $2i$ près, être considérées comme les périodes des précédentes, dues au pôle $z = \infty$.

13 bis. Considérons la quadrique à n dimensions

$$(31) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 1$$

analogue à l'hyperboloïde à une nappe, et le volume (à n dimensions) compris entre cette quadrique et le *cône asymptote*

$$(32) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0.$$

Posons

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2} = \frac{x_n}{z}.$$

Cette équation, pour chaque valeur de z représente un cône. L'élément de volume compris entre ce cône, le cône analogue infiniment voisin et la surface (31) est

$$\Omega_{n-2} \frac{1}{n} r^n dz = \frac{\Omega_{n-2}}{n} \frac{dz}{V(1-z^2)^n}$$

Ω_{n-2} désignant la surface de l'hypersphère de rayon 1 dans l'espace à $n-1$ dimensions. Cette quantité est égale à $2 \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^{n-1}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$, c'est à dire (pour n impair)

$$\text{à } 2 \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}.$$

L'intégrale de la différentielle précédente, prise entre -1 et $+1$, est infinie; mais, pour n impair (seul cas qui nous intéresse) sa *partie finie est nulle*, ainsi que nous venons de le constater.

Prenons, au contraire, la quadrique

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = -1$$

qui, pour $n=3$, donne l'hyperboloïde à deux nappes. Considérons encore le volume compris entre la nappe qui correspond à $x_n > 0$ et le cône asymptote (32).

Ce volume sera représenté par l'intégrale

$$\frac{\Omega_{n-2}}{n} \int \frac{dz}{V(z^2-1)^n},$$

que nous devons prendre entre 1 et $+\infty$. Si n est impair et égal à $2n_1 + 1$, l'expression ainsi obtenue a une partie finie, qui est égale à

$$\frac{\Omega_{2n_1-1}}{2n_1+1} \frac{(-1)^{n_1}}{2n_1 C_{n_1}}.$$

Par exemple, pour l'hyperboloïde à deux nappes ordinaire, il vient

$$\frac{2\pi}{3} \int_1^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2\pi}{3}.$$

Si l'hyperboloïde à deux nappes est donné sous la forme

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = -1$$

(H étant une forme quadratique à un carré positif et $n - 1 = 2n_1$ carrés négatifs) notre résultat devra évidemment être divisé par $+ \sqrt{D}$, D étant le discriminant de H .

Le signe de la partie finie cherchée dépend, on le voit, de la parité de $\frac{n-1}{2}$.

14. Notons enfin que ce qui a été dit au n° 6 bis, sur la différentiation sous le signe \int , s'étend évidemment aux intégrales multiples, en vertu de la formule (19) qui sert de définition aux parties finies de ces intégrales.

Si la fonction à intégrer est infinie (d'ordre fractionnaire) sur toute la limite d'intégration, aucun terme correspondant à la variabilité de cette limite ne devra être inscrit. Dans le cas contraire, on devra tenir compte (s'il y a lieu) de la variation d'une portion de la frontière, celle où la quantité sous le signe \int reste finie.

III. Equations à un nombre impair de variables.

15. Ces principes étant rappelés, nous pouvons aborder l'étude du problème de CAUCHY relatif à l'équation

$$(E) \quad F(u) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

D'après ce qui précède, il est à prévoir que nous aurons à distinguer le cas de n pair de celui de n impair. Nous commencerons par ce dernier.

La solution fondamentale est alors unique.

Elle ne contient pas de terme logarithmique, mais un dénominateur irrationnel.

Nous aurons d'ailleurs surtout à considérer, non la solution fondamentale de l'équation proposée, mais celle de l'équation adjointe

$$(E_1) \quad G(v) = 0:$$

cette solution sera de forme entièrement semblable à la précédente, savoir

$$(33) \quad v = v(x/a) = \frac{V}{\Gamma^{n_1 - \frac{1}{2}}},$$

pour $n = 2n_1 + 1$.

Γ est toujours le carré de la distance géodésique des deux points (x_1, x_2, \dots, x_n) , (a_1, a_2, \dots, a_n) et V , une fonction holomorphe des $2n$ coordonnées de ces deux points, prenant, lorsque ceux-ci coïncident, la valeur $\frac{1}{\sqrt{A}}$.

Nous supposons que l'équation considérée appartient au type *hyperbolique* et, plus spécialement, à ce que nous appellerons le type hyperbolique *normal*, celui où la forme quadratique

$$A = \sum a_{ik} \pi_i \pi_k$$

a tous ses carrés de même signe à l'exception d'un seul. Le conoïde caractéristique se compose alors de deux nappes distinctes¹ et divise l'espace en *trois* régions, deux intérieures à chacune des nappes, la troisième extérieure. On peut toujours admettre (en changeant au besoin tous les signes dans l'équation donnée) que Γ est positif lorsque chacun des points dont il dépend est intérieur au conoïde caractéristique issu de l'autre: ceci revient à dire que A comprend un carré positif et $n - 1$ carrés négatifs.

Le problème de CAUCHY consiste à déterminer une intégrale u de l'équation (E), connaissant les valeurs de u et celles de ses dérivées premières — il suffit de se donner la dérivée *conormale* — le long d'une certaine multiplicité $n - 1$ ^{uple} S .

Nous supposerons essentiellement, en ce moment, qu'il s'agit du problème *intérieur*, c'est à dire que la multiplicité S ne coupe qu'une nappe du conoïde caractéristique Γ ayant pour sommet un point quelconque $O(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et que cette nappe délimite sur elle une portion fermée en tous sens intérieure à la nappe en question. C'est ce qui arrivera (du moins tant que le point O reste dans une certaine région voisine de S , à laquelle nous nous limiterons), si le plan tangent à S en chacun de ses points est extérieur au cône caractéristique ayant pour sommet ce point, et dans ce cas seulement.

Cette circonstance ne peut pas se présenter pour des cas hyperboliques autres que le cas hyperbolique normal: alors tout plan passant par le sommet d'un cône caractéristique coupe ce cône suivant une infinité de génératrices

¹ COULON, Thèse, Paris, Herrman, 1902, p. 30.

Les équations appartenant aux types hyperboliques non normaux n'admettent donc point de problèmes intérieurs.

Nous constaterons que ce problème *intérieur* est toujours possible (et déterminé) sans autres conditions imposées aux données que certaines conditions simples de dérivabilité (en particulier sans qu'il soit nécessaire de supposer ces données analytiques). Au contraire, lorsqu'il est extérieur — et, par conséquent, dans tous les cas lorsque l'équation appartient au type elliptique ou à un type hyperbolique non proprement dit — le problème de CAUCHY cesse d'être possible en général.

16. Soit donc donnée la multiplicité S , en chaque point de laquelle on donne la valeur de u , intégrale de l'équation (E) et celle de sa dérivée conormale; et soit $O(a_1, a_2, \dots, a_n)$ un point de l'espace à n dimensions où nous voulons calculer la valeur de u . Le conoïde caractéristique Γ de sommet O est supposé couper S suivant une multiplicité $n - 2^{\text{uple}}$ fermée qui délimite une portion S_0 de S intérieur à Γ . Il délimite, d'autre part, avec S une portion déterminée T de l'espace à n dimensions, celle qui est à la fois intérieure à Γ et située du même côté de S que le point O .

Nous appliquerons la formule fondamentale (1) dans le domaine T à l'inconnue u et à la solution fondamentale $v(M, O)$ de l'équation adjointe qui est singulière en O .

La quantité $vf = \frac{fV}{r^{n_1 - \frac{1}{2}}}$ est infinie sur une partie de la frontière, à savoir le conoïde Γ . Elle est infinie d'ordre fractionnaire $n_1 - \frac{1}{2}$. L'intégrale n^{uple} qui porte sur cette quantité relève donc (sauf pour $n_1 = 1$, c. à d. $n = 3$) des considérations développées dans ce qui précède.

Mais il y a exception pour le voisinage du point O , où Γ est infiniment petit d'ordre 2 et non d'ordre 1. Nous devons donc opérer comme on le fait dans le cas des intégrales multiples ordinaires et retrancher du domaine d'intégration tout le voisinage du point O , par une petite surface Σ (fig. 4)¹ entourant ce point, telle qu'une petite sphère de centre O .

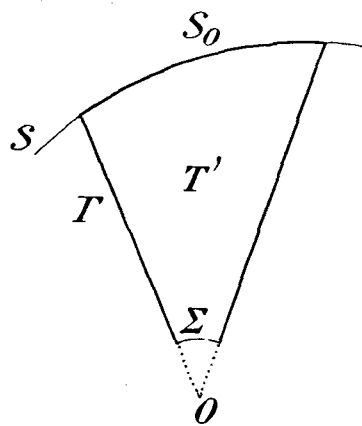


Fig. 4.

¹ La figure 4 est supposée obtenue en coupant celle que l'on a à considérer (laquelle est à n dimensions) par un plan à deux dimensions mené par le point O .

Soit T' ce qui reste de T après qu'on a enlevé tout ce qui est intérieur à Σ .
La formule fondamentale

$$(34) \quad \iint \dots \int v f dx_1 dx_2 \dots dx_n + \iint \dots \int \left(v \frac{du}{dv} - u \frac{dv}{dv} + Luv \right) dS = 0$$

va être appliquée dans le domaine T' , avec la convention de prendre la partie finie du premier membre, par suppression des infinis fractionnaires en Γ . On devra donc

1°. Prendre la partie finie de la première intégrale (34) (intégrale n^{uplo} relative à T');

2°. Prendre de même la partie finie de l'intégrale $n-1^{\text{uplo}}$ relative à la multiplicité donnée S . Le terme complémentaire sera une intégrale $n-2^{\text{uplo}}$, prise (à la limite) suivant γ , intersection de S avec Γ ;

3°. Supprimer l'intégrale relative à la frontière Γ , cette intégrale étant infinie d'ordre fractionnaire. Cette même intégrale s'élimine dans la méthode de KIRCHHOFF, parce qu'elle s'intègre exactement, et dans celle de M. VOLTERRA, parce qu'elle est identiquement nulle. Le même fait se produit ici, comme on le voit, par un mécanisme différent.

4°. Restera enfin l'intégrale relative à Σ , dont nous devons (comme sur S) prendre la partie finie. Nous avons à voir ce que devient cette quantité lorsque Σ tend vers le point O .

Menons, par ce point, des géodésiques (définies par les équations différentielles (2)) intérieures à Γ , et qui dépendent de $n-1$ paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$, pendant que, sur chacune d'elles, un point quelconque sera défini par la variable s du n° 2. s aura, en chaque point de Σ , une valeur déterminée (infiniment petite), fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$. L'intégrale

$$(35) \quad \overline{\iint \dots \int_{\Sigma} \left(v \frac{du}{dv} + Luv \right) dS} = \overline{\int \dots \int_{\Sigma} \frac{\left(v \frac{du}{dv} + Luv \right)}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} dS}$$

tendra vers zéro. Les quantités

$$\pi_i dS = \pm \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_{n-1}$$

qui figurent au numérateur sous le signe $\int \dots \int$, sont en effet, de l'ordre de s^{n-1} , au lieu que le dénominateur

$$\Gamma^{\frac{n-2}{2}} = s^{n-2} H^{\frac{n-2}{2}} (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

(où $x'_i = \frac{dx_i}{ds}$) ne contient que s^{n-2} en facteur. Le coefficient de

$$\frac{I}{H^{\frac{n-2}{2}}(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)}$$

est donc de l'ordre de s et il en est de même de ses dérivées des divers ordres par rapport à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$. Dans ces conditions, l'évaluation obtenue au n° 11 montre¹ que l'intégrale (35) est également de l'ordre de s .

Ceci s'applique encore, dans le terme

$$-\iint \dots \int u \frac{dv}{d\nu} dS$$

à la partie

$$-\iint \dots \int \frac{u \frac{dV}{d\nu}}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} dS$$

non différenciée par rapport à Γ .

17. Prenons enfin la partie restante

$$+ \frac{n-2}{2} \iint \dots \int \frac{u V \frac{d\Gamma}{d\nu}}{\Gamma^{\frac{n}{2}}} dS = + \frac{n-2}{2} \iint \dots \int \frac{\frac{1}{2} u V \Sigma \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial \pi_i}}{\Gamma^{\frac{n}{2}}} dS.$$

On a (toujours avec les notations du n° 2)

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = 2s p_i$$

et, par conséquent,

$$\sum_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} \frac{\partial A}{\partial \pi_i} = 2s \sum_i p_i \frac{\partial A}{\partial \pi_i} = 2s \sum_i \pi_i \frac{\partial A}{\partial p_i} = 4s \sum_i \pi_i \frac{dx_i}{ds}.$$

Mais, si nous nous reportons à l'expression de $\pi_i dS$ écrite plus haut, nous voyons que le coefficient de $4s$ (multiplié par dS) n'est autre qu'un développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{ds} & \frac{dx_2}{ds} & \dots & \frac{dx_n}{ds} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \lambda_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \lambda_{n-1}} \end{vmatrix} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_{n-1}$$

¹ Notre raisonnement suppose néanmoins que la surface Σ est régulière et que les dérivées (jusqu'à un ordre suffisamment élevé) de s par rapport aux λ sont du même ordre que s .

les λ étant pris dans un ordre tel que le déterminant soit positif, puisque la direction des s croissants s'éloigne de O et pénètre dans le domaine T' .

Toutes les lignes du déterminant précédent, à l'exception de la première, contiennent s en facteur,¹ de sorte que la quantité sous le signe $\int \dots \int$ (pour des valeurs déterminées des λ) reste finie quand s tend vers zéro.

On a d'autre part, sensiblement

$$uV = \frac{1}{V\mathcal{A}_0} u(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{V\mathcal{A}} u_0$$

le mot *sensiblement* ayant un sens un peu différent de celui qu'il a ordinairement en pareil cas, et voulant dire que les quantités négligées ainsi que leurs dérivées par rapport aux λ (jusqu'à l'ordre n_1) sont très petites.

Toujours au même point de vue, nous pouvons remplacer les $\frac{dx_i}{ds}$ par les valeurs x'_i qu'ils ont à l'origine, et les dérivées $\frac{\partial x_i}{\partial \lambda}$ par $s \frac{\partial x'_i}{\partial \lambda}$: nous avons donc finalement l'expression

$$(36) \quad \frac{\frac{n-2}{2} u_0}{V\mathcal{A}} \iint \dots \int \frac{\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_n \\ \frac{\partial x'_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x'_n}{\partial \lambda_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x'_1}{\partial \lambda_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x'_n}{\partial \lambda_{n-1}} \end{vmatrix} d\lambda_1 \dots d\lambda_{n-1}}{H^n(x'_1, \dots, x'_n)}$$

L'intégrale qui est multipliée par $\left(\frac{n-2}{2}\right) \frac{u_0}{V\mathcal{A}}$ est en rapport direct avec le volume de l'hyperboloïde à deux nappes

$$(37) \quad H(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n) = -1,$$

de l'espace à n dimensions.

Comme on le voit aisément, elle est égale à n fois la partie finie du volume compris entre une nappe de l'hyperboloïde (37) et son cône asymptote. Cette partie finie a été calculée plus haut (n° 13 bis), nous l'avons trouvée égale (pour $n = 2n_1 + 1$) à

¹ Chaque élément contient, il est vrai, outre une partie proportionnelle à s , une partie qui contient les dérivées de cette quantité par rapport aux λ .

$$\frac{\Omega_{2n_1-1}(-1)^{n_1}}{2n_1(2n_1+1)C_{n_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{D}},$$

D étant le discriminant de H . L'intégrale suivant Σ a donc (en vertu de l'égalité $D\mathcal{A}=1$) la valeur limite

$$\frac{(-1)^{n_1}\Omega_{2n_1-1}}{2n_1C_{n_1}} \cdot (2n_1-1)u_0 = (-1)^{n_1}\frac{\Omega_{2n_1-1}}{C_{n_1-1}} \cdot u_0 = (-1)^{n_1} \cdot 2\pi\Omega_{2n_1-2} \cdot u_0$$

et la valeur cherchée de u_0 est donnée par la formule

$$(38) \quad (-1)^{n_1} \cdot \pi\Omega_{2n_1-2} \cdot u_0 = (-1)^{n_1}\frac{\Omega_{2n_1-1}}{C_{n_1-1}} u_0 = -\sqrt{\int\int\cdots\int_T v f dx_1 dx_2 \dots dx_n} + \sqrt{\int\int\cdots\int_S \left(u \frac{dv}{dv} - v \frac{du}{dv} - Luv\right) dS}.$$

Pour $n=3$ ($n_1=1$), le coefficient de u_0 est $-\Omega_1 \frac{1}{2C_1} = -2\pi$.

18. D'après ce qui précède, la première intégrale (intégrale n^{up}) doit avoir un sens du moins si en faisant tendre Σ vers le point O , on s'impose la restriction mentionnée dans la note de la page 355. On peut mettre ce fait en évidence, et même montrer que la restriction imposée à Σ est inutile, en adoptant le système des coordonnées curvilignes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, s$: on aura

$$\sqrt{\int\int\cdots\int_T v f dx_1 dx_2 \dots dx_n} = \sqrt{\int\int\cdots\int \frac{Vf}{s^{n-2} H^{\frac{n-2}{2}}} \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, s)} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_{n-1} ds}.$$

Or le déterminant fonctionnel $\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \dots, s)}$ contient s^{n-1} en facteur et par conséquent la quantité sous le signe $\int\int\cdots\int$ ne contient plus que l'infini fractionnaire

$$\frac{1}{H^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{x_1 - a_1}{s}, \frac{x_2 - a_2}{s}, \dots, \frac{x_n - a_n}{s} \right)}.$$

19. Le signe qui figure au premier membre de la formule (38) appelle quelques remarques.

Bornons nous, pour simplifier, au cas de l'équation sans second membre,

soit $f=0$. Supposons le point O situé au voisinage de S : alors c'est manifestement le terme $u \frac{dv}{d\nu}$, ou, plus spécialement, la partie

$$-\frac{n-2}{2} \frac{u V \frac{d\Gamma}{d\nu}}{\Gamma^{\frac{n}{2}}} = -(n-2) u V s \frac{\sum \pi_i \frac{dx_i}{ds}}{\Gamma^{\frac{n}{2}}}$$

de ce terme, qui donne son signe à la quantité que l'on doit intégrer le long de S . Ce signe est celui de u , car les π_i désignant les paramètres directeurs de la normale à S intérieure à T , c'est à dire de celle qui est dirigée du côté où est O , la somme $\sum \pi_i \frac{dx_i}{ds}$ est négative.

Si donc nous avons affaire à une intégrale ordinaire, elle aurait le signe de u sur S (en supposant ce signe constant). Mais ici l'intégrale $n-1^{\text{uplo}}$ est modifiée par une intégrale complémentaire $n-2^{\text{uplo}}$, nécessairement de signe contraire.

Or le premier membre doit avoir forcément le même signe que les valeurs de u sur S , si nous continuons à supposer le point O voisin de S .

Donc pour les valeurs paires de n_1 , c'est à dire pour $n=5, 9, 13, \dots$, c'est l'intégrale $n-1^{\text{uplo}}$ qui donne son signe; mais pour n_1 impair, c'est à dire pour $n=3, 7, \dots$, c'est, au contraire le terme complémentaire qui l'emporte.

Prenons le cas particulier où les valeurs données de u et de $\frac{du}{d\nu}$, nulles en général sur S , sont seulement différentes de zéro dans une certaine région R de S , et où le point O est tel que le cône issu de ce point comprenne la région R entièrement à son intérieur (sans la toucher). Nous avons alors ce que, dans un travail précédent,¹ j'ai appelé l'intégrale résiduelle.

Dans ce cas, le terme complémentaire est nul. Donc si u est positif, l'intégrale résiduelle est positive pour les équations à $4p+1$ variables, mais négative pour les équations à $4p+3$ variables, telle que l'équation des ondes cylindriques. Il en est du moins ainsi tant que le point considéré est assez voisin de S et que les valeurs données de $\frac{du}{d\nu}$ ne sont pas trop grandes par rapport à celles de u .

20. Les formules précédentes s'étendent, comme il est bien connu,² au cas où la frontière S est formée de portions de caractéristiques, pourvu que, comme

¹ Bulletin de la Soc. Math. de Fr. 1900.

² Voir d'ADHÉMAR, C. R. Ac. Sc. 11 février 1901; COULON Thèse p. 53 et suiv.

précédemment elle délimite complètement, avec une nappe de Γ , une portion d'espace T intérieure à cette nappe.

De plus, la conormale à S est, dans ce cas, tangente à S , de sorte que les dérivées conormales sont des dérivées prises sur S elle-même.¹ La formule ne fait donc intervenir que les valeurs de u (et non plus de ses dérivées) sur la multiplicité en question. Une solution de l'équation est ainsi déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une frontière formée de caractéristiques.

21. Prenons, pour S , une nappe de conoïde caractéristique Γ_1 de sommet O_1 et disposée de manière à délimiter avec Γ un domaine T ; pour u , la solution de l'équation proposée privée de second membre

$$F(u) = 0$$

analogue à v , c'est à dire celle qui est singulière en O_1 et qui est, autour de ce point, de l'ordre de

$$\frac{1}{V\sqrt{O_1}} \frac{1}{\Gamma_1^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Si nous intégrons dans T , les termes relatifs aux frontières Γ , Γ_1 disparaîtront encore. Aucune modification ne sera apportée à cette conclusion par la présence de l'intersection de Γ et de Γ_1 , grâce à ce qui a été établi au n° 10. Nous aurons donc uniquement, comme dans ce qui précède, à isoler les points O et O_1 et il viendra

$$(39) \quad u_0 = v_{O_1}.$$

C'est la *relation d'échange*, tout analogue à celle qui a lieu pour la fonction de RIEMANN dans l'équation hyperbolique à deux variables,² ou à la symétrie de la fonction de GREEN dans la théorie du potentiel. Elle a lieu, comme on voit, moyennant la précaution que nous avons prise de diviser par $V\sqrt{O}$ la solution singulière en O .

Grâce à la relation (39) nous voyons que la fonction v , considérée comme fonction du point O et x_1, x_2, \dots, x_n étant fixes, est une solution de l'équation proposée supposée privée de second membre.

¹ D'ADHÉMAR, C. R. Ac. Sc. loc. cit.

² Voir DARBOUX, Leçons sur la théorie des surfaces, tome II.

IV. Synthèse de la solution précédente. Problème extérieur.

22. Nous montrerons brièvement que la solution obtenue dans ce qui précède vérifie bien les conditions du problème (du moins moyennant la régularité des données).

Pour l'équation des ondes cylindriques (solution de M. VOLTERRA), cette démonstration a été faite par M. d'ADHÉMAR.¹ Toute fois, M. d'ADHÉMAR n'a élucidé la question qu'en ce qui concerne les conditions aux limites, et a laissé de côté l'équation elle-même, le calcul des dérivées secondes paraissant présenter de grandes difficultés.

La vérification de l'équation aux dérivées partielles est au contraire, particulièrement simple dans notre manière de procéder.

Elle est immédiate pour l'équation sans second membre, c'est à dire quand l'expression (38) de $(-1)^{n_1} \pi \Omega_{2n_1-2} u_0$ se réduit à son second terme. Nous savons, en effet (n° 14) que, pour différentier celui-ci par rapport aux a , il suffit de différentier sous le signe $\int \dots \int$. Or la quantité à intégrer ne contient les a que par le facteur v , lequel est (n° précédent) solution de l'équation sans second membre.

Soit maintenant $f \neq 0$. Nous n'avons plus à nous occuper que de l'intégrale n^{up}_1

$$(40) \quad - \int \dots \int_T v f dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Nous lui appliquerons des méthodes toutes semblables à celles de la théorie classique du potentiel.

Pour différentier une première fois cette intégrale par rapport à l'une des coordonnées a , il suffit de différentier sous le signe $\int \dots \int$. En effet, l'intégrale ainsi obtenue

$$(41) \quad - \int \dots \int_T \frac{\partial v}{\partial a_i} f dx_1 \dots dx_n$$

a un sens, c'est à dire qu'en isolant le point O par une surface voisine Σ (comparer la fig. schématique 4) on a une intégrale qui tend vers une limite déterminée

¹ Bull. Soc. Math. Fr. 1901, p. 190 et Thèse, Paris, 1904.

quand Σ tend vers le point O suivant une loi quelconque. C'est ce qu'on voit en suivant la même marche qu'au n° 18. Mais de plus, l'intégrale précédente est uniformément convergente, c'est à dire que l'erreur commise en substituant le domaine d'intégration T' (fig. 4) à T a une limite supérieure qu'on peut assigner sans connaître le point O , pourvu qu'on le sache suffisamment voisin de Σ .

Donc, d'après un raisonnement bien connu, l'intégrale (41) est la dérivée de (40), même dans le domaine T .

Pour différentier une seconde fois, on considérera à nouveau la surface Σ , qui décompose le domaine d'intégration en deux parties, l'une T' comprise entre S et Σ , l'autre T'' comprise entre Σ et O .

Dans T' , on différentiera directement sous le signe $\int \dots \int$.

Dans T'' , on écrira

$$-\frac{\partial v}{\partial a_i} = -\left(\frac{\partial v}{\partial a_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

La quantité $\left(\frac{\partial v}{\partial a_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$ donne lieu à une intégrale qu'on peut différentier sous le signe $\int \dots \int$ en appliquant les raisonnements du n° 18. Cela tient à ce que les termes du moindre degré de Γ ne contiennent que les combinaisons

$$x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n.$$

Quant à l'intégrale

$$\int \dots \int_{T''} f \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_n,$$

on la transformera par la formule de GREEN¹ en

$$-\int \dots \int_{T''} v f dx_1 \dots dx_n + \int \dots \int_{\Sigma} v f \pi_i dS$$

π_i étant, comme précédemment, un cosinus directeur de la normale à Σ dirigée vers l'intérieur de T' (donc vers l'extérieur de T'').

¹ Cette formule, dont la démonstration repose sur la décomposition de l'intégration multiple en intégrations simples, n'est directement applicable qu'à des domaines tels que T' , et en supposant la direction de l'axe des x_i intérieure au cône caractéristique (comparer plus loin, nos 30, 31). Mais on peut choisir les axes coordonnées de manière à vérifier cette dernière condition et, d'autre part, l'intégrale $n-1$ ^{uple} prise sur Σ tendant ici vers zéro, la formule s'étend à des domaines tels que T , donc à T'' .

La différentiation sous les signes $\int \dots \int$ n'offre plus maintenant de difficulté, et l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} \int \dots \int_T v f dx_1 \dots dx_n = - \int \dots \int_{T'} \frac{\partial^2 v}{\partial a_i \partial a_k} f dx_1 \dots dx_n + \int \dots \int_{\Sigma} f \pi_i \frac{\partial v}{\partial a_k} dS + R$$

(R étant une intégrale $n^{\text{up}}^{\text{le}}$ prise dans T''); ou, encore, en faisant tendre Σ vers le point O ,

$$\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k} \int \dots \int_T v f dx_1 \dots dx_n = \lim \left\{ - \int \dots \int_{T'} \frac{\partial^2 v}{\partial a_i \partial a_k} f dx_1 \dots dx_n + \int \dots \int_{\Sigma} f \pi_i \frac{\partial v}{\partial a_k} dS \right\}$$

Le résultat de substitution de l'expression (40) dans le polynôme différentiel F est dès lors

$$\lim \int \dots \int_{\Sigma} f \sum_{i,k} a_{ik} \pi_i \frac{\partial v}{\partial a_k} dS$$

limite tout analogue¹ à celle de la quantité (36) du n° 17, à laquelle on la ramène sans difficulté.

23. Venons enfin aux conditions à la frontière.

Celle qui est relative à la valeur de u sur S doit être considérée comme vérifiée par les calculs des n°s 16 et 17 (où la surface désignée par Σ n'est autre que S). Rien en effet, dans ce qui a été exposé en cet endroit ne suppose le point O fixe.

La condition relative à la dérivée conormale serait sans doute un peu plus malaisée à vérifier directement. Mais elle est certainement remplie lorsque S et la distribution des données sur cette surface sont analytiques et régulières (puisque les théorèmes généraux nous enseignent *a priori* l'existence d'une solution).

Or on peut évidemment remplacer S par une autre surface S' ayant avec la première un contact d'un certain ordre au point considéré A , et les données par d'autres également tangentes aux premières en ce même point. Il suffit, pour cela, que ces données et les coordonnées de S soient dérivables jusqu'à l'ordre qui suit celui que l'on doit obtenir. Or on verra aisément que, si ce der-

¹ Les deux expressions ne diffèrent que par le changement de $\frac{\partial v}{\partial x_k}$ en $\frac{\partial v}{\partial a_k}$ et par ce fait que les valeurs des a_{2k} sont prises, dans un cas, au point (x_1, x_2, \dots, x_n) , dans l'autre au point (a_1, a_2, \dots, a_n) .

nier est suffisamment élevé, on n'altère pas ainsi la valeur de la dérivée conormale en A .¹

24. Dans le cas où la frontière S est caractéristique, nos formules font connaître la fonction cherchée u à l'aide des valeurs de u seul sur cette frontière (jointes, bien entendu, aux valeurs de f si l'équation est à second membre).

Il reste à montrer que les valeurs ainsi obtenues satisfont bien à la condition aux limites (l'équation aux dérivées partielles s'établissant comme dans le cas de la frontière non caractéristique).

Cette démonstration présenterait des difficultés particulières, si l'on ne voulait adopter aucune hypothèse restrictive sur la forme de S . Cette frontière, qui ne peut pas, ici, être formée d'une seule surface régulière, peut en effet, soit comprendre plusieurs portions de caractéristiques sécantes entre elles, soit présenter des singularités, lesquelles peuvent être de natures très diverses.

Le cas où S est elle-même un cône caractéristique, a été traité dans ces derniers temps par M. d'ADHÉMAR² pour l'équation des ondes cylindriques.

Nous considérons l'équation générale correspondant au cas de $n=3$ en supposant, pour fixer les idées, que S est composée de deux caractéristiques régulières sécantes entre elles. Par un changement de variables, nous pourrions faire que ces deux caractéristiques aient pour équations respectives $x=0$, $z=0$, les bicaractéristiques tracées sur chacune d'elles correspondant à $y = \text{const}$. La valeur de $2\pi u_0$, savoir

$$(38') \quad - \iiint v f dx dy dz + \sqrt{\iint_S \left(u \frac{dv}{dv} - v \frac{du}{dv} - Luv \right) dS}$$

pourra, en ce qui concerne l'intégrale de surface, se transformer par parties. Pour cela, on choisira dS de manière à pouvoir prendre sur $z=0$, $v=x$ et sur $x=0$, $v=z$. Soient dans le premier cas,

$$dS = K dx dy$$

dans le second

$$dS = K' dy dz$$

les expressions de dS sur $z=0$. Le terme

¹ Le même mode de raisonnement se transporterait quoique, avec un peu plus de complication, au cas où l'équation elle-même n'est pas analytique (en supposant démontrée, du moins, l'existence de la solution fondamentale dans ce cas).

² Circolo Mat. di Palermo, tome XX, 27 mai 1905.

$$\overline{\iint u \frac{dv}{dv} dS} = \overline{\iint K u \frac{\partial v}{\partial x} dx dy}$$

pourra s'intégrer par parties par rapport à x . Les deux limites d'intégration, pour une valeur déterminée quelconque de y , sont fournies, l'une par l'axe des y , arête du dièdre (fig. 5), l'autre par le conoïde caractéristique. Mais le terme correspondant à cette dernière limite disparaît comme infini fractionnaire. Il reste donc, pour la portion d'intégrale prise sur $z = 0$,

$$(42) \overline{\iint \left(u \frac{dv}{dv} - v \frac{du}{dv} - Luv \right) dS} = - \iint v \left(K \frac{\partial u}{\partial x} + KLu + \frac{\partial(Ku)}{\partial x} \right) dx dy - \int_{y_1}^{y_2} Kuv dy$$

(l'intégrale simple étant prise suivant un segment $P_1 P_2$ (fig. 5) de l'axe des y). Le signe $\overline{\quad}$ n'est plus nécessaire au second membre, la quantité v n'ayant qu'un infini d'ordre $\frac{1}{2}$.

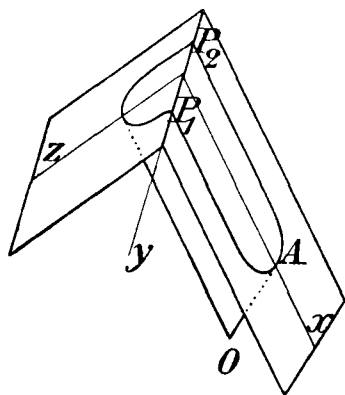


Fig. 5.

Nous supposons le point O très voisin d'un point A (fig. 5) du plan $z = 0$, point par lequel nous ferons passer l'axe des x . Dans ces conditions tout parallèle à l'axe des y menée dans le plan $z = 0$ ou voisine de ce plan coupera le conoïde Γ de sommet A en deux points dont les abscisses y_1, y_2 auront la forme

$$y_1 = \lambda - \sqrt{\mu}, \quad y_2 = \lambda + \sqrt{\mu}$$

λ et μ étant des fonctions régulières dans les conditions où nous nous plaçons: on pourra écrire

$$\Gamma = G(\mu - (y - \lambda)^2).$$

G, λ, μ seront des fonctions de a, b, c, x, y, z , dont les deux dernières (mais non la première) tendent vers zéro avec b, c, y, z , quels que soient x et a .

Or l'intégrale

$$\int_{\lambda - \sqrt{\mu}}^{\lambda + \sqrt{\mu}} \frac{dy}{\sqrt{\mu - (y - \lambda)^2}}$$

est, comme on sait, égale à π .

Donc le second membre de la formule (42) est égal (au signe près) à

$$(43) \quad -\pi \left(\frac{K_0 u_0}{\sqrt{G_0}} + \int_0^x \frac{K \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(Ku)}{\partial x} + KLu}{\sqrt{G}} dx \right),$$

α désignant ici l'abscisse du point A ; u_0 , K_0 , G_0 , les valeurs de u , K , G à l'origine des coordonnées.

L'intégrale prise sur $x=0$ se traite de manière toute semblable (avec cette simplification que l'intégrale double correspondant à celle du second membre de (42) y disparaît, l'aire d'intégration étant infiniment petite) elle se réduit donc, à la limite, à

$$(43') \quad \pm \pi \frac{K_0 u_0}{\sqrt{G_0}}.$$

Quant à l'intégrale triple de la formule (38'), elle tend évidemment vers zéro.

La somme des quantités (43), (43') se réduit à $2\pi u_0$ toutes les fois que la distribution des valeurs de u est analytique,¹ puisque, dans ce cas, le problème est assurément possible, d'après les recherches de BEUDON.² Ceci d'après des théorèmes bien connus de calcul des variations, ne peut avoir lieu sans qu'il en soit de même pour toute distribution des valeurs de u . C'est ce que nous voulions établir.

Le raisonnement peut s'étendre aux cas de $n=5, 7, \dots$ sans difficulté essentielle; car les formules du n° 13 permettent de calculer l'intégrale

$$\int_{\lambda - \sqrt{\mu}}^{\lambda + \sqrt{\mu}} \frac{\varphi(y) dy}{\sqrt{\mu - (y - \lambda)^2}}.$$

Nous n'insisterons pas plus longuement sur ce point et nous donnerons quelques indications sur l'extension des résultats précédents au problème *extérieur* relatif à l'équation (E).

25. On sait que ce problème extérieur³ est celui où la surface S n'a plus par rapport aux cônes caractéristiques, la situation supposée dans ce qui pré-

¹ Ce raisonnement paraît supposer que la surface caractéristique S est elle-même analytique. Il n'en est rien. On peut, en effet, substituer à S une caractéristique analytique S' ayant avec elle un contact d'ordre aussi élevé qu'on voudra en un point de l'axe des x , par exemple à l'origine des coordonnées. En vertu des propriétés fondamentales des caractéristiques, ce contact subsistera sur toute la bicaractéristique (ici l'axe des x) et, par conséquent, les coefficients de u et de sa dérivée dans les quantités (43), (43') seront les mêmes sur S et sur S' .

² Bull. Soc. Math. Fr., 1897.

³ VOLTERRA, Acta Math. t. 18; d'ADHÉMAR, Thèse (Paris, 1904).

cède, c'est à dire où son plan tangent en chaque point coupe le cône caractéristique correspondant. S coupe alors les deux nappes du conoïde caractéristique issu d'un point (suffisamment voisin) O : elle est d'ailleurs supposée avoir une forme telle qu'elle délimite, avec ces deux nappes, un espace complètement fermé, et c'est à cet espace, *extérieur* au conoïde, qu'on applique la formule fondamentale.

Le problème extérieur n'est pas un problème *bien posé*, en ce sens que les données y sont surabondantes et, par conséquent, la solution n'existe que moyennant une infinité de conditions de possibilité. Il ne faut pas, dès lors, s'attendre à la voir aussi étroitement liée à notre solution fondamentale que celle du problème intérieur (puisqu'elle est susceptible d'une infinité d'expressions en fonction des données). Néanmoins, même dans ce cas, nos résultats permettront d'obtenir ceux de M. VOLTERRA¹ et de les étendre à l'équation générale (E).

Considérons encore notre solution fondamentale v et appliquons-lui (ainsi qu'à la fonction inconnue u) la formule fondamentale non plus dans notre domaine T , mais dans celui que M. VOLTERRA² appelle \bar{S}_a .

L'intégrale obtenue sera nulle; elle ne fera plus connaître, par conséquent, la valeur de u_0 , mais donnera une relation entre les données, qui sera une *condition de possibilité* du problème. Cela tient à ce que (n° 13. bis) la partie finie du volume de l'hyperboloïde à une nappe est nulle

26. Pour obtenir la véritable solution, nous partirons non de la forme que nous avons donnée ici même à la méthode, mais de celle que nous avons adoptée dans notre Mémoire précédent, et nous prions le lecteur de se reporter à ce Mémoire.³

Nous substituerons seulement à l'intégrale considérée en cet endroit, savoir

$$V_1 = \int_L m(t)v dt$$

où $m(t)$ est finie, l'intégrale analogue dans laquelle nous prendrons $m(t) = \log(t - t_0)$ (t_0 étant la limite inférieure de l'intégrale).

Pour

$$v = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 - (x_3 - a_3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - (x_3 - a_3)^2}}$$

(avec $t = a_3$), on a aisément

¹ Mémoire cité des Acta Math. t. XVIII.

² VOLTERRA, loc. cit. n° 6.

³ Ann. Ec. Norm. sup., loc. cit., deuxième Mémoire 1905; p. 104 et suiv.

$$(44) \quad V_1 = c + \int_0^\theta \log(1 - \Theta^2) \frac{d\Theta}{\sqrt{1 - \Theta^2}} + \log r \operatorname{arc} \sin \frac{x_3 - t_0}{r}$$

(avec $\Theta = \frac{x_3 - t_0}{r}$) c'est à dire l'intégrale w_3 de M. VOLTERRA.¹ Comme dans le problème intérieur, après avoir porté cette fonction V_1 dans la formule fondamentale, il restera à différentier par rapport à t_0 . Il revient d'ailleurs au même de faire d'abord cette différentiation dans l'expression V_1 elle même. On trouve ainsi, si l'on opère sur l'expression (44), la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - (x_3 - t_0)^2}} \log \left(\frac{r^2 - (x_3 - t_0)^2}{r} \right)$$

c'est à dire celle qui figure dans la formule (F') de M. VOLTERRA.²

Il est aisé de donner à $\frac{\partial V_1}{\partial t_0}$ une expression tout analogue dans le cas général.

On peut, en effet, mettre Γ sous la forme³

$$\Gamma = n(x_1, x_2, x_3) [B - (t - A)^2]$$

où A et B sont des fonctions holomorphes de x_1, x_2, x_3 . En reportant ceci dans v et développant la fonction $\frac{V}{\sqrt{n}}$ suivant les puissances de $[B - (t - A)^2]$,⁴ on voit immédiatement que la partie principale du résultat aura la même forme que dans le cas de l'équation des ondes cylindriques savoir

$$\frac{1}{\sqrt{B - (t - A)^2}} \log \frac{B - (t - A)^2}{\sqrt{B}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \log \frac{\Gamma}{n\sqrt{B}}$$

(puisque V a la valeur 1 au point O). B est d'ailleurs, à un facteur régulier et différent de zéro près, la carré de la distance géodésique du point (x_1, x_2, x_3) à la ligne d'intégration L .

En opérant sur cette quantité comme nous avons opéré précédemment sur v , on aura évidemment, comme coefficient de u_0 , aux facteurs numériques près déjà écrits précédemment, l'intégrale

$$\left[\int_{-1}^{+1} \frac{dz \log(1 - z^2)}{(1 - z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = 2 \left[\frac{d}{d\mu} B \left(\frac{1}{2}, 1 - \mu \right) \right]_{\mu = \frac{1}{2}}$$

(B étant l'intégrale eulérienne de première espèce; comparer n^o 31).

¹ loc. cit. p. 170.

² loc. cit. p. 193.

³ Les notations sont celles de mon travail cité des Annales de l'Ecole Norm. sup. 1905 n^o 19. J'ajoute que le calcul ainsi présenté n'est pas essentiellement distinct de celui que M. POINCARÉ a développé dans son mémoire *Sur les propriétés du potentiel et sur les fonctions abéliennes* (Acta Math., t. 22; 1899, p. 114 et suiv.).

⁴ Ann. Ec. Norm. loc. cit. p. 109.

27. Si, au lieu de prendre le point O intérieur à S , on l'avait supposé extérieur, la solution fondamentale v correspondante aurait été régulière dans toute la portion d'espace comprise à l'intérieur de S et à l'extérieur du conoïde caractéristique de sommet O (cette dernière frontière exclue): dès lors, en appliquant la formule fondamentale à cet espace (v étant la solution fondamentale en question et u la fonction cherchée), on aura une nouvelle condition de possibilité du problème.

Le système de ces conditions de possibilité est équivalent à celles qu'indique M. d'ADHÉMAR¹ et qui consistent à exprimer que la solution calculée comme il est expliqué au n° précédent, vérifie les conditions aux limites sur S . Cette équivalence tient à ce que les intégrales prises sur S présentent (comme l'a remarqué M. VOLTERRA² pour l'équation des ondes cylindriques) les mêmes discontinuités que les potentiels de surface, ainsi qu'on l'établit par les méthodes employées au n° 23.

Il est clair que ces conditions sont suffisantes pour la possibilité du problème, de sorte qu'elles contiennent celles que nous avons obtenues au n° 25.

28. Tout ceci s'étendrait sans difficulté aux autres valeurs impaires de n .

On traiterait par des méthodes semblables, les équations non normales dont s'est occupé spécialement M. COULON,³ celles dans lesquelles la forme A contient plus d'un carré de chaque signe. Dans ce cas (le nombre total des variables étant toujours supposé impair) entre le cône

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

et les deux surfaces du second degré

$$(45) \quad H(x_1, x_2, \dots, x_n) = \pm 1$$

sont compris deux volumes dont on peut calculer les parties finies: il est aisé de voir que l'une d'elles (celle que l'on obtient en donnant au second membre de (45) le signe qui appartient à un nombre pair de carrés du premier membre) est nulle, l'autre différente de zéro. Cette dernière n'est autre (comparer plus loin n° 31) qu'une intégrale eulérienne de première espèce.

Il en résulte que les problèmes de CAUCHY (impossibles d'ailleurs en général) que l'on peut se poser relativement à une équation du type de M. COULON, se résolvent les uns directement à l'aide de la solution fondamentale, les autres par le procédé indiqué au n° 26.

¹ Thèse p. 58 et suiv.

² Congrès International des Mathématiciens, Paris 1900.

³ COULON, Thèse, Ch. III, IV.

V. Les équations à un nombre pair de variables.

29. Les premiers exemples qu'on ait pu donner de la résolution du problème de CAUCHY pour le type hyperbolique ne se rapportent pas à des équations qui rentrent dans la catégorie précédente. Ce sont la méthode de RIEMANN et celle de KIRCHHOFF. L'une est relative au cas de $n = 2$, l'autre à celui de $n = 4$.

Une singularité disparaît alors comme nous le verrons: c'est l'intervention des intégrales infinies. Ainsi s'explique que les solutions qui viennent d'être rappelées aient été trouvées les premières.

Dans le cas général, au contraire, les valeurs paires de n doivent être considérées comme offrant des difficultés nouvelles.

Les méthodes précédentes cessent de s'appliquer, et cela pour deux raisons: D'abord la *solution fondamentale* n'est plus bien déterminée (n° 2).

En second lieu, il ne sera plus légitime de parler de la *partie finie* des intégrales que nous serions conduits à employer, puisque l'exposant d'infinitude, c'est à dire l'exposant $\frac{n-2}{2}$ ou $\frac{n}{2}$, avec lequel figure Γ au dénominateur dans la solution fondamentale ou dans ses dérivées, est un entier.

En fait, il ressortira de la nature même des expressions auxquelles nous aboutirons, qu'elles ne pourraient pas être obtenues par une imitation pure et simple des méthodes employées jusqu'ici.

La marche que nous suivrons consistera à déduire la solution d'une équation à n variables

$$(E) \quad F(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + lu = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

de celle d'une équation analogue à $n + 1$ variables

$$(E') \quad F'(u) = F(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(où z désigne la $n + 1^{\text{ème}}$ variable). Si, comme nous le supposons, la forme

$$A = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \pi_i \pi_k$$

relative à l'équation (E) comprend un carré positif et $n - 1$ carrés négatifs, la forme analogue A' relative à l'équation (E') comprendra un carré positif et n carrés négatifs. La quantité Γ' analogue à Γ pour l'équation (E') sera

$$\Gamma' = \Gamma - (z - c)^2,$$

où $(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ et $(a_1, a_2, \dots, a_n, c)$ sont deux points de l'espace à $n + 1$ dimensions.

Nous allons tout d'abord trouver les relations qui existent entre les solutions fondamentales des deux équations ou plutôt entre celles de leurs adjointes

$$(E_1) \quad G(v) = 0,$$

$$(E'_1) \quad G'(v) = G(v) - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

C'est ce qui a été fait dans le travail cité,¹ pour le cas de $n = 2$. Le calcul est tout semblable pour les valeurs supérieures de n , à ceci près que nous aurons encore affaire à des intégrales infinies dont il faudra prendre les parties finies: la solution fondamentale de l'équation (E'_1) sera

$$(46) \quad v = w + \int_{z+\sqrt{\Gamma}}^{c_1} \frac{V'}{(-\Gamma')^{\frac{n-1}{2}}} dc = w + \int_{z+\sqrt{\Gamma}}^{c_1} \frac{V'}{[(c-z)^2 - \Gamma]^{\frac{n-1}{2}}} dc$$

en désignant par c_1 un nombre fixe (très grand), par

$$v' = \frac{V'}{\Gamma'^{\frac{n-1}{2}}}$$

la solution fondamentale de l'équation (E'_1) ; par w , une fonction régulière.

V' est, comme on le constate aisément, une fonction paire de $z - c$. En l'ordonnant suivant les puissances de $(z - c)^2 - \Gamma$:

$$V' = \sum_0^{\infty} (-1)^i W_i [(z - c)^2 - \Gamma]^i,$$

nous aurons la partie singulière de l'expression (46) sous la forme

$$(47) \quad \sum_0^{\infty} (-1)^i W_i \int_{z+\sqrt{\Gamma}}^{c_1} [(z - c)^2 - \Gamma]^{i - \frac{n-1}{2}} dc = \sum_0^{\infty} (-1)^i W_i \int_{\sqrt{\Gamma}}^{\frac{c_1 - z}{\sqrt{\Gamma}}} (c'^2 - \Gamma)^{i - \frac{n-1}{2}} dc'.$$

En remplaçant la limite supérieure $c_1 - z$ par c_1 , on n'altère le résultat que d'une quantité holomorphe en $x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n$. Les formules (27), (27') donnent, dès lors, pour $n = 2n_1$,

¹ Ann. Ec. Norm., 1^{er} Mémoire, n^o 19, p. 108—110; 1904.

$$(48) \quad (-1)^{n_1-1} v = \frac{1}{\Gamma^{n_1-1}} \sum_{i=0}^{n_1-2} \frac{1}{2(n_1-i-1)C_{n_1-i-1}} W_i \Gamma^i - \frac{\log \Gamma}{2} \sum_{i=n_1-1}^{\infty} C_{i-n_1+1} W_i \Gamma^{i-n_1+1} + w,$$

w étant encore une fonction régulière.

La quantité v coïncide forcément avec celle que nous avons écrite précédemment: on a

$$(49) \quad V = C_{n_1-1} \sum_{i=0}^{n_1-2} \frac{1}{(n_1-i-1)C_{n_1-i-1}} W_i \Gamma^i + w \Gamma^{n_1-1},$$

$$V_0 = C_{n_1-1} \sum_{i=n_1-1}^{\infty} C_{i-n_1+1} W_i \Gamma^{i-n_1+1}$$

w pouvant être augmenté d'une fonction régulière, solution de l'équation. Les W_i sont des fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n$.

30. Cela posé, pour obtenir une solution de l'équation (E) répondant, sur la multiplicité S , aux conditions données, nous considérerons, dans l'espace à $n + 1$ dimensions défini par les coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$, la multiplicité S' (hypercylindre) qui a pour projection S (fig. 6),¹ c'est à dire celle qu'on obtient en prenant successivement pour x_1, x_2, \dots, x_n les coordonnées d'un point quelconque de S et pour z toutes les valeurs réelles possibles. Si S est situé par rapport au cône

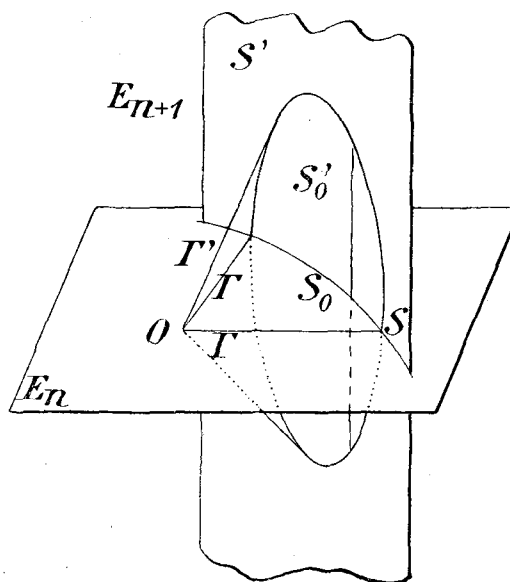


Fig. 6

Γ , comme nous l'avons supposé jusqu'ici, il en sera de même de S' par rapport à Γ' . Une solution u de l'équation (E) étant définie par la double condition:

de prendre en chaque point $(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ de S' la valeur que doit avoir u au point correspondant (x_1, x_2, \dots, x_n) de S ;

d'avoir pour dérivée conormale, au point $(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ la valeur donnée de $\frac{du}{d\nu}$ en (x_1, x_2, \dots, x_n) ,

¹ La figure 6, relative au cas de $n=2$, peut servir comme figure schématique pour le cas général.

cette solution sera unique, d'après ce qui précède (pour n pair), indépendante de z et satisfera à l'équation (E). On aura donc ainsi une solution du problème proposé, et réciproquement.

La fonction u sera donnée par la formule (38), soit

$$(50) \quad (-1)^m \pi \Omega_{n-2} u_0 = - \sqrt{\int \int \dots \int_{T'} v' f dx_1 dx_2 \dots dx_n dz} + \sqrt{\int \int \dots \int_{S'_0} \left(u \frac{dv'}{dv} - v' \frac{du}{dv} - Lu v' \right) dS'}$$

où T' désigne la portion d'espace à $n+1$ dimensions comprise entre S' et Γ' . S'_0 (fig. 6) la portion correspondante de S' et $n = 2n_1$.

T' est projeté sur l'espace à n dimensions E_n suivant la région T comprise entre S et Γ , c'est à dire que si le point $(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ appartient à T' , le point (x_1, x_2, \dots, x_n) appartient à T et qu'inversement, tout point de T est la projection commune de points de T' , à savoir, tous ceux dont les z sont compris entre $+V\bar{\Gamma}$ et $-V\bar{\Gamma}$ (en supposant nulle la $n+1$ ème coordonnée de O).

De même S'_0 est projeté sur E_n suivant S_0 , chaque point de S_0 étant la projection d'une infinité de points de S'_0 , ayant leurs z compris entre $+V\bar{\Gamma}$ et $-V\bar{\Gamma}$.

D'après cela, le premier terme du second membre de (50) s'écrira

$$- \sqrt{\int \dots \int f dx_1 dx_2 \dots dx_n \int_{-V\bar{\Gamma}}^{+V\bar{\Gamma}} v' dz} = - \sqrt{\int \dots \int f dx_1 \dots dx_n \int_{-V\bar{\Gamma}}^{+V\bar{\Gamma}} \frac{\sum_0^{\infty} W_i (\Gamma - z^2)^i}{(\Gamma - z^2)^{n-\frac{1}{2}}} dz}$$

Nous diviserons le domaine d'intégration T en deux parties T_1 et T_2 , dont la seconde comprend les points voisins du conoïde caractéristique, par une frontière σ_1 que nous ferons tendre ensuite vers Γ .

A la partie T_1 , correspondra, dans T' , une portion T'_1 limitée par Γ' d'une part, par un cylindre de base σ_1 , de l'autre. L'intégrale relative à T'_1 s'obtiendra en intégrant n fois, dans T_1 , l'intégrale simple relative à z

$$\int_{-V\bar{\Gamma}}^{+V\bar{\Gamma}} \frac{\sum_0^{\infty} W_i (\Gamma - z^2)^i}{(\Gamma - z^2)^{n-\frac{1}{2}}} dz.$$

Or il résulte des formules obtenues au n° 13 que cette intégrale (où tous les termes d'indice i inférieur à $n_1 - 1$ disparaissent) est égale à π , multiplié par le coefficient du logarithme dans l'intégrale (47), c'est à dire à πV_0 .

Déjà, par conséquent, dans ce premier terme, la quantité infinie sur le conoïde, qui figurait sous le signe $\int \dots \int$ dans les formules relatives au cas de n impair, est remplacée par la quantité parfaitement régulière $\pi V_0 f$.

31. Dans T_2 , nous considérerons un système de lignes l , joignant chacune un point de Γ (défini par des coordonnées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$) à un point de σ_1 . Un point de T_2 sera donc défini par les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ et de Γ , cette dernière quantité variant de zéro à une quantité γ très petite si σ_1 est très voisin de Γ .

Soit

$$K d\lambda_1 \dots d\lambda_{n-1} d\Gamma$$

l'élément de T_2 .

Si T'_2 est la partie de T' projetée suivant T_2 , un point de T'_2 sera défini par les coordonnées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \Gamma, z$.

Intégrons d'abord suivant les lignes l , c'est à dire en laissant $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, z$ constants. Puis nous ferons varier z et enfin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$. En opérant ainsi, nous aurons deux sortes de termes complémentaires, une intégrale n^{uple} et une intégrale $n - 1^{\text{uple}}$, celle-ci résultant de ce que la partie finie de l'intégrale prise suivant l est très grande quand l est très courte. Nous pouvons d'ailleurs remarquer immédiatement que les termes correspondant à $i > n_1 - 1$, dans le développement de v' , ne donnent qu'une intégrale finie au sens ordinaire, et infiniment petite quand σ_1 tendra vers Γ . Nous en ferons donc abstraction.

Pour $i < n_1 - 1$, soit

$$(51) \quad K f W_i = M_{0i} + M_{1i}(\gamma - \Gamma) + \dots + M_{ki}(\gamma - \Gamma)^k + \dots$$

le développement de $K f W_i$ suivant les puissances de $\gamma - \Gamma$, $f W_i$ étant supposé exprimé en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \Gamma$, de sorte que les M_{ki} , qui sont fonctions de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ seulement, représentent à des coefficients numériques et aux signes près, les dérivées successives du premier membre par rapport à Γ , pour $\Gamma = \gamma$.

Un terme quelconque du développement (51) nous donnera, suivant l , l'intégrale simple

$$(52) \quad M_{ki} \int_{z^2}^{\gamma} \frac{(\gamma - \Gamma)^k}{(\Gamma - z^2)^{m-i-\frac{1}{2}}} d\Gamma = M_{ki} (\gamma - z^2)^{i+k-m+\frac{3}{2}} \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{t^{m-i-\frac{1}{2}}} dt.$$

L'intégrale qui figure au second membre ne serait autre, si $n_1 - i - \frac{1}{2}$ était inférieur à 1, qu'une intégrale eulérienne de première espèce

$$(53) \quad B(k+1, i-n_1+\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(i-n_1+\frac{3}{2})\Gamma(k+1)}{\Gamma(i-n_1+k+\frac{3}{2})}.$$

On vérifiera sans peine que cette expression reste vraie ici pour notre «partie finie»: il suffira d'exprimer celle-ci par une intégrale suivant un lacet, comme nous l'avons indiqué au n° 6.

Nous devons, ensuite, intégrer l'expression (52) par rapport à z , de $-V\sqrt{\gamma}$ à $+V\sqrt{\gamma}$, en prenant la partie finie du résultat. Or la quantité

$$(54) \quad \int_{-V\sqrt{\gamma}}^{+V\sqrt{\gamma}} (\gamma-z^2)^{i+k-n_1+\frac{3}{2}} dz$$

est nulle, nous l'avons vu, pour $i+k-n_1+\frac{3}{2} < -\frac{1}{2}$. Pour $i+k-n_1+\frac{3}{2} > -\frac{1}{2}$, elle est infiniment petite avec γ et, par conséquent, disparaît à la limite. Nous n'avons donc à retenir que les valeurs de i et de k telles que

$$(55) \quad i+k = n_1 - 2.$$

L'intégrale (54) est alors égale à π . Le coefficient (53) devient

$$\frac{\Gamma(i-n_1+\frac{3}{2})\Gamma(n_1-i-1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} = (-1)^{n_1-1} \pi \frac{\Gamma(n_1-i-1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n_1-i-\frac{1}{2})} = \frac{(-1)^{n_1-i-1}}{(n_1-i-1)C_{n_1-i-1}}.$$

Nous avons donc, au total, en réunissant tous les termes ainsi obtenus par intégration relative à Γ et à z et faisant $\gamma=0$,

$$\pi \sum \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)C_{k+1}} M_{ki},$$

où i varie de 0 à n_1-2 , k étant donné par l'égalité (55) et les M_{ki} ayant les valeurs qui correspondent à $\gamma=0$, de sorte que $(-1)^k M_{ki}$ est le coefficient de Γ^k dans le développement de KfW_i suivant les puissances de Γ (les λ étant toujours considérés comme constants).

Dès lors, la somme précédente est le coefficient de Γ^{n_1-2} dans le développement, suivant ces mêmes puissances, de

$$-\pi Kf \sum \frac{W_i \Gamma^i}{(n_1-i-1)C_{n_1-i-1}},$$

c'est à dire de $\pi Kf \frac{V}{C_{n_1-1}}$.

Intégrons enfin par rapport à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$. Sur la multiplicité σ_1 définie par l'équation $\Gamma = \gamma$, où γ est une constante quelconque, le produit $K d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_{n-1}$ donne un élément $d\sigma_1$ qui peut être considéré comme défini par l'égalité

$$(56) \quad d\sigma_1 d\Gamma = dx_1 \cdot dx_2 \cdot \dots \cdot dx_n.$$

L'intégrale

$$I_\gamma = \int \int \dots \int_{\sigma_1} f V d\sigma_1$$

sera une fonction de γ , que l'on pourra développer suivant les puissances de γ en développant de cette manière le produit Kf et intégrant par rapport aux λ .

Donc la quantité que nous cherchons s'obtiendra en multipliant par $2\pi(-1)^m$ le coefficient de γ^{m-1} dans le développement de I_γ , ou, si on veut, elle est égale à

$$(57) \quad (-1)^m \frac{2\pi}{(n_1 - 2)!} \left(\frac{d^{m-2} I}{d\gamma^{m-2}} \right)_{\gamma=0}.$$

Elle contiendra, comme on voit, les dérivées jusqu'à l'ordre $n_1 - 2$ de f et celles de V . Cette dernière fonction n'est déterminée qu'à des termes près contenant en facteur Γ^{m-1} ; mais on voit que ces termes n'influent pas sur l'expression précédente.

La partie de la valeur u_O qui correspond au terme

$$\int \int \dots \int v f dx_1 dx_2 \dots dx_n dz$$

se compose donc de l'intégrale n^{uplo}

$$\pi \int \int \dots \int f V_0 dx_1 \dots dx_n$$

étendue à l'intérieur de Γ , et de l'expression (57), intégrale $n - 1^{\text{uplo}}$ étendue à la surface de Γ . Ces deux quantités ne contiennent, cette fois, aucune fonction infinie, mais seulement les deux fonctions régulières V_0 pour l'une, V pour l'autre.

32. Nous avons, il est vrai, pris l'intégrale I_γ sur toute la partie de la multiplicité $\Gamma = \gamma$ comprise à l'intérieur du domaine T , alors que nous aurions dû exclure d'abord le voisinage immédiat du point O par une surface auxiliaire Σ , puis tous calculs faits (c'est à dire après la dérivation indiquée par la formule (57)) faire tendre la partie ainsi exclue vers zéro.

Mais on s'assure aisément que la partie de I_γ interceptée par Σ a une dérivée $n_1 - 2^{\text{ième}}$, déterminée pour $\gamma = 0$, laquelle tend vers zéro lorsque Σ tend vers ce point O .

33. Une évaluation toute semblable s'applique évidemment à l'intégrale

$$\sqrt{\int \int \dots \int \left(v' \frac{du}{dv} + Lu v' \right) dS'}.$$

On aura, pour cette quantité, la valeur

$$\pi \int \int \dots \int_{S_0} \left(V_0 \frac{du}{dv} + Lu V_0 \right) dS + 2\pi \frac{(-1)^{n_1}}{(n_1 - 2)!} \frac{d^{n_1-2}}{d\gamma_{(\gamma=0)}^{n_1-2}} \int \dots \int_{s_\gamma} \left(V \frac{du}{dv} + Lu V \right) ds_\gamma$$

où s_γ est l'intersection de S par la multiplicité $\Gamma = \gamma$, et ds_γ , l'élément de s_γ défini par la relation

$$(58) \quad ds_\gamma d\Gamma = dS.$$

Passons, enfin, au terme

$$(59) \quad \sqrt{\int \dots \int u \frac{dv'}{dv} dS'} = \sqrt{\int \dots \int u \frac{dv'}{dv} dS dz}.$$

Une méthode semblable lui sera encore applicable. Le nombre n_1 devra être changé en $n_1 + 1$, puisque $\frac{dv'}{dv}$ contient en dénominateur $(\Gamma - z^2)^{n_1 + \frac{1}{2}}$ et non $n_1 - \frac{1}{2}$.

Dès lors, soit considérée l'intégrale

$$(60) \quad \sqrt{\int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1} \frac{dv'}{dv} dz} = \frac{U}{\Gamma^{n_1}} + U_0 \log \Gamma + \dots,$$

(les termes remplacés par des points étant réguliers pour $\Gamma = 0$): on aura

$$(61) \quad \sqrt{\int \dots \int u \frac{dv'}{dv} dS'} = \pi \int \dots \int_S u U_0 dS + 2\pi \frac{(-1)^{n_1+1}}{(n_1 - 1)!} \frac{d^{n_1-1}}{d\gamma_{(\gamma=0)}^{n_1-1}} \int \dots \int_{s_\gamma} U u ds_\gamma.$$

Or l'intégrale (58) n'est autre que

$$\frac{d}{dv} \sqrt{\int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1} v' dz} = \frac{d}{dv} \left(\frac{V}{\Gamma^{n_1-1}} + V_0 \log \Gamma + \dots \right).$$

On a donc

$$U_0 = \frac{dV_0}{dv}, \quad U = \Gamma \frac{dV}{dv} - (n_1 - 1) \frac{V d\Gamma}{dv} + V_0 \Gamma^{n_1-1} \frac{d\Gamma}{dv}.$$

Ce sont ces valeurs qu'il faudra reporter dans (61).

34. Au premier abord, les expressions ainsi écrites présentent un inconvénient que ne manifestaient pas les précédentes. Elles paraissent dépendre des termes en Γ^{n-1} de V , termes qui ne sont pas déterminés.

Il est aisé de vérifier que cette dépendance n'est qu'apparente.

Imaginons, en effet, qu'à partir de chaque point de S' , on porte, sur la conormale, une longueur constante très petite ν . Désignons par S'_ν le lieu des points ainsi obtenus et, en chacun d'eux, donnons à u la même valeur qu'au point correspondant de S' .

Le terme (61) sera, dans ces conditions, la dérivée, par rapport à ν , de la quantité

$$\sqrt{\int \dots \int_{S'_\nu} u v' dS'}$$

et, par conséquent, sera égal à

$$\pi \frac{d}{d\nu} \int \dots \int_{S_\nu} V_0 u dS + 2\pi \frac{(-1)^{n_1}}{(n_1 - 2)!} \frac{d}{d\nu} \frac{d^{n_1-2}}{d\gamma_{(\gamma=\nu=0)}^{n_1-2}} \int \dots \int_{s_{\gamma\nu}} V u ds_\gamma$$

où S_ν est la trace de S'_ν sur l'espace E_n ; $s_{\gamma\nu}$, l'intersection de S_ν par $\Gamma = \gamma$. (l'élément ds_γ comme, plus haut dS , étant toujours celui qui correspond à $\nu = 0$).

Cette expression est équivalente à la précédente; mais il est visible, cette fois, que les termes en Γ^{n-1} de l'expression de V n'y figurent pas.

35. Le calcul du terme

$$\sqrt{\int \dots \int u \frac{dv'}{d\nu} dS'}$$

complète la solution du problème. Nous avons l'énoncé suivant:

Soient pour $n = 2n_1$:

V, V_0 les deux fonctions régulières qui figurent dans la solution fondamentale

$$v = V_0 \log \Gamma + \frac{V}{\Gamma^{n_1-1}}$$

de l'équation adjointe à la proposée;

Γ, T, S_0 , les domaines analogues à ceux qui ont été définis pour n impair; σ_1 , la partie de la multiplicité $\Gamma = \gamma$ (γ étant une constante positive très petite) comprise à l'intérieur de T ; s_γ , l'intersection de cette même multiplicité avec S_0 , les éléments des multiplicités σ_1 et s_γ étant définis par les égalités (56), (58).

La solution du problème de Cauchy sera donnée par la formule,

$$(62) \quad \pm \frac{\Omega_{n-2}}{2C_{n-1}} u_0 = - \int \int \dots \int_T f V_0 dx_1 \dots dx_n + \int \dots \int_{S_0} \left(u \frac{dV_0}{d\nu} - V_0 \frac{du}{d\nu} - Lu V_0 \right) dS \\ \pm 2 \left\{ \frac{1}{(n_1-2)!} \frac{d^{n-2}}{d\gamma^{n-2}} \left[\int \int \dots \int_{\sigma_1} f V d\sigma_1 + \int \dots \int_{s_\gamma} \left(V \frac{du}{d\nu} + Lu V \right) ds_\gamma \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{(n_1-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\gamma^{n-1}} \int \dots \int_{s_\gamma} u \left[\frac{\Gamma dV}{d\nu} - (n_1-1) \frac{V d\Gamma}{d\nu} + V_0 \Gamma^{n-1} \right] ds_\gamma \right\} \gamma = 0$$

Il est inutile d'ajouter que les dérivations sous les signes $\int \dots \int$ indiquées dans cette formule se font par les règles classiques et ne donnent lieu à aucune des difficultés rencontrées par M. d'ADHÉMAR à propos de la formule de M. VOLTERRA.

36. Pour $n=2$, $n_1=1$, V_0 est la fonction de RIEMANN. Tous les termes en V disparaissent de la formule précédente, dont le dernier terme se réduit à $V_0 u$. On retrouve alors la formule classique déduite de la méthode de RIEMANN.

Pour $n=4$, $n_1=2$, un seul terme exigera une dérivation par rapport à γ : ce sera le terme $\frac{d}{d\gamma} \int \dots \int (n-1) u \frac{V d\Gamma}{d\nu} ds_\gamma$. Tous les autres seront directement exprimés (sans différentiation) en fonction de valeurs de u et de $\frac{du}{d\nu}$ sur S_0 ou s_0 , et des valeurs de f dans T ou sur Γ .

Pour l'équation du son, la solution fondamentale est $v = \frac{1}{\sqrt{a^2 t^2 - z^2}}$ (z ayant la signification classique). On a donc $V=1$, $V_0=0$. Il suffit de substituer les expressions dans la formule (62) pour retrouver celle de KIRCHHOFF.

Pour l'équation des ondes amorties,

$$a^2 \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ku = 0$$

la solution fondamentale se déduit de celle de l'équation du son en multipliant par une fonction de BESSEL. On retombe ainsi directement sur les résultats de MM. BIRKELAND, CARVALLO, BRILLOUIN.

37. L'expression de l'inconnue cherchée est, on le voit, notablement différente de celle qui convenait au cas de n impair. Dans cette dernière, c'était la solution fondamentale qui s'introduisait directement. Ici, la solution fondamentale est encore à la base du calcul, mais parce qu'on lui emprunte les deux fonctions V_0 et V qui, seules, interviennent dans les opérations.

D'autre part, la valeur de l'inconnue, pour n pair se présente sous la forme d'une somme de deux intégrales, l'une étendue à l'intérieur du conoïde caractéristique, et dont l'élément contient en facteur les données elles-mêmes multipliées par des fonctions connues; la seconde étendue au conoïde caractéristique lui-même, portant dans les mêmes conditions *sur les données et leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n_1 - 2$ (ou même $n_1 - 1$)*. Les intégrales ainsi écrites ne portent d'ailleurs que sur des quantités finies, si les données sont régulières.

Dans le cas de n impair, nous avons une intégrale unique, portant sur les données (sans dérivation) mais présentant le caractère paradoxal étudié précédemment et qui, par là même, contient en quelque sorte, virtuellement une intégrale de frontière.

Une telle expression doit, par conséquent, être considérée comme intermédiaire entre deux expressions de la catégorie précédente (les intégrales ordinaires rencontrées pour le cas de n pair) correspondant à deux valeurs consécutives de n_1 .

On lui reconnaîtra également ce caractère si l'on se place à un point de vue que j'ai indiqué précédemment dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris,¹ et qui est celui du calcul fonctionnel linéaire.

Considérons l'expression

$$(63) \quad \int_0^a \psi(n) g(n) dn + A_0 \psi(0) + A_1 \psi'(0) + \dots + A_{n_1} \psi^{(n_1)}(0)$$

où g est une fonction donnée (finie), ψ une fonction arbitraire; $\psi', \dots, \psi^{(n_1)}$ les dérivées successives de ψ ; A_0, \dots des nombres donnés.

Si nous prenons

$$(64) \quad \psi = \mu f[\mu(x - x_0)]$$

f ayant les propriétés indiquées dans la Note citée, et μ croissant indéfiniment, l'expression (63) tendra vers une limite déterminée² pour $0 < x_0 < a$. Il en sera de même pour $x_0 = 0$ si la formule (63) se réduit à son premier terme. Dans le cas contraire, cette expression augmentera en général, indéfiniment comme μ^{n_1+1} .

Traisons de même l'intégrale

$$\int_0^a \frac{\psi(x)}{x^{n_1+a}} dx.$$

¹ tome 136, p. 351; 9 février 1903.

² Voir la Note citée.

Par la substitution (64), pour $x_0 = 0$, on obtient (comparer n° 12) une quantité sensiblement proportionnelle à μ^{n_1+a} .

Il est clair que le cas de nos intégrales multiples est tout semblable.

38. Enfin les formules précédentes nous fournissent une réponse à la question suivante:

Pour quelles équations linéaires le principe de Huyghens est-il vrai?

ce principe de HUYGHENS étant pris au point de vue où je m'étais placé précédemment, je veux dire signifiant que *l'intégrale résiduelle est nulle*; autrement dit, que la solution s'exprime par une intégrale étendue au cône caractéristique lui même, et non à l'intérieur de ce cône.

D'après ce qui précède, *la condition nécessaire et suffisante pour cela est évidemment $V_0 = 0$* . Les équations qui admettent le principe de HUYGHENS sont donc celles dont la solution fondamentale manque de terme logarithmique. L'absence de ce terme exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les ondes régies par ces équations ne *diffusent* pas.
