SUR L'INTÉGRATION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

PAR

EMILE COTTON.

À GRENOBLE.

L'intégration[1] exacte d'un système d'équations différentielles n'étant possible que dans des cas exceptionnels, on est généralement amené en pratique à se contenter de solutions approchées.

Quelle que soit l'origine de ces solutions approchées, on peut en déduire des renseignements sur les solutions exactes, en déterminant un intervalle où celles-ci sont définies, et une gaine entourant la courbe intégrale approchée, où la courbe intégrale exacte reste comprise. C'est là le principal objet de ce Travail.

Voici la méthode suivie. Le procédé d'approximations successives de M. Picard apprend à construire des séries donnant les solutions exactes; on prend comme premiers termes de ces séries les solutions approchées. On sait évaluer une limite supérieure des restes de ces séries quand on néglige les termes d'ordre supérieur à un entier donné n; pour $n = 1$, on a les renseignements demandés.

Afin de les avoir aussi précis que possible, il est bon d'étudier avec soin la convergence des séries; c'est ce que nous avons fait tout d'abord (n^{os} 1—6). Nous sommes ainsi arrivés à perfectionner l'évaluation des restes, en en déterminant des limites supérieures qui sont solutions d'un système Σ d'équations linéaires à coefficients constants et positifs. Ce système se construit à l'aide du système différentiel donné S et des solutions approchées.

Parmi les conséquences de ces résultats, signalons la recherche de conditions suffisantes pour qu'une solution approchée ne diffère de la solution exacte que

[1] Il n'est question, dans cet article, que du domaine réel, et du problème de Cauchy: les données numériques définissant une solution du système différentiel sont relatives à une seule valeur de la variable indépendante.

d'une erreur inférieure à une limite donnée (nº 7). On rattache facilement à cette idée une démonstration de la propriété fondamentale de la méthode de CAUCHY-LIPSCHITZ (nºs 8, 9); et, par cela même, les résultats de ce travail permettent d'améliorer l'estimation habituelle des erreurs correspondant aux solutions approchées fournies par cette méthode. Ajoutons qu'en modifiant un peu ce procédé d'approximation, nous avons obtenu une méthode d'intégration graphique (nºs 10—12) qui peut donner d'utiles indications sur l'allure générale des courbes intégrales d'une équation différentielle du premier ordre. Il est à peine besoin de dire que tout ce qui précède a été directement inspiré par les beaux travaux de MM. PICARD et PAINLEVÉ.

Nous avons enfin (nºs 13, 14), dans le cas d'une équation du premier ordre, appliqué un intéressant théorème de M. PETROVITCH à la recherche d'un intervalle où le signe de l'erreur que comporte une solution approchée reste invariable.

1. Soit

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t;\, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t;\, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

un système d'équations différentielles. On veut chercher n fonctions continues de t satisfaisant à ce système et prenant les valeurs $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ pour $t = t_0$. Nous pouvons, par un changement de la variable t rendre t_0 nul; pour abréger l'écriture, nous supposerons cette condition remplie.

Admettons que l'on connaisse n fonctions $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ qui dans un intervalle[1] $I: 0 \leq t \leq h$, $(h > 0)$, sont définies continues admettent des dérivées continues, sauf peut-être pour des valeurs isolées de t. Pour toute valeur singulière de cette nature, chaque fonction y admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Nous ferons, sur les fonctions $f_i(t; x_1, \ldots, x_n)$ les hypothèses suivantes:

On peut déterminer n nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, tels que pour les points $t, x_1, \ldots, x_n$ intérieurs au domaine D défini par les inégalités

$$0 \leq t \leq h,\quad y_i(t) - \varepsilon_i \leq x_i \leq y_i(t) + \varepsilon_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

---

[1] Il n'est question, au cours de ce Travail, que de fonctions et de variables réelles. Cependant, la plupart des résultats pourraient s'étendre au domaine complexe.

les fonctions $f_i(t; x_1, \ldots, x_n)$ sont finies, continues par rapport à t, sauf peut être pour des valeurs isolées de t, et satisfont aux conditions de LIPSCHITZ

$$(2) \qquad \begin{cases} |f_i(t; x'_1, \ldots, x'_n) - f_i(t; x_1, \ldots, x_n)| < b_{i1}|x'_1 - x_1| + \cdots + b_{in}|x'_n - x_n| \\ (i = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Nous supposerons de plus

$$(3) \qquad |y_1(0) - a_1| < \eta_1, \ldots, |y_n(0) - a_n| < \eta_n$$

avec

$$\eta_1 < \varepsilon_1, \ldots, \eta_n < \varepsilon_n.$$

Posons enfin

$$(4) \qquad \left|\frac{dy_i}{dt} - f_i(t; y_1, \ldots, y_n)\right| \leq \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Lorsque les nombres η et α sont petits, les conditions (3) et (4) expriment que les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ sons des *solutions approchées* de (1), c'est à dire *satisfont à peu près* aux équations différentielles et aux conditions initiales données.

Appelons m_i un nombre supérieur ou égal à la valeur absolue maximum de la différence $\frac{dy_i}{dt} - f_i(t; x_1, \ldots, x_n)$ pour tous les points de D. On a évidemment

$$m_i \leq \alpha_i + b_{i1}\varepsilon_1 + \cdots + b_{in}\varepsilon_n.$$

2. Employons la méthode d'approximations successives de M. PICARD.[1] Nous prenons toutefois comme premières approximations les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ que nous désignerons aussi pour plus de symétrie, par $y_1^0, \ldots, y_n^0$. Nous poserons[2]

$$(5) \qquad y_i^{p+1} = a_i + \int_0^t f_i(t; y_1^p, \ldots, y_n^p)\,dt \qquad (i=1, 2, \ldots, n;\ p=0, 1, 2, \ldots).$$

---

[1] Journal de Mathématiques (1890). Traité d'Analyse t. II.

[2] M. E. LINDELÖF a perfectionné la méthode de M. PICARD. Dans le Mémoire qu'il a publié à ce sujet, dans le Journal de Mathématiques en 1894, il signale (remarque du nº 3) l'emploi de fonctions continues comme premières approximations. Toutefois l'usage qu'il en fait est différent du notre: M. LINDELÖF emploie les y_i^0 au lieu des a_i dans les équations telles que (5). Cette différence est essentielle pour la suite.

Un changement de fonctions, utilisé par M. LINDELÖF dans un cas particulier (nº 5 du Mémoire précédent), permet de réduire les premières approximations à des constantes et d'identifier les approximations de ce Travail avec celles de MM. PICARD et LINDELÖF. Aussi, si nous avons repris la démonstration de la convergence de ces approximations, c'est pour obtenir des limites supérieures des restes préférables à celles dont on fait ordinairement usage (voir nº 6).

Nous montrerons qu'il *existe un intervalle* $I': 0 \leq t \leq h' \leq h$, *où les* y_i^p *existent et tendent vers des limites* Y_i *quand* p *croît indéfiniment.* Ces fonctions Y satisfont aux équations et aux conditions initiales données et sont les seules possédant cette propriété.

Les y_i^1 existent dans I, et l'on a

$$u_i^1 = y_i^1 - y_i = a_i - y_i(0) + \int_0^t \left\{ f_i(t;\, y_1, \ldots, y_n) - \frac{dy_i}{dt} \right\} dt,$$

et par suite,

$$|u_i^1| \leq \eta_i + \alpha_i t \qquad (i = 1, 2, \ldots; n). \tag{6}$$

Si dans un intervalle $I'': 0 \leq t \leq h''$, et pour $p = r$, les y_i^p existent et les points $t, y_1^p, \ldots, y_n^p$ appartiennent à D, les y_i^{p+1} existent dans le même intervalle et l'on a facilement

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_i^{p+1}| \leq \displaystyle\int_0^t b_{i1} |u_1^p| dt + \cdots + \int_0^t b_{in} |u_n^p| dt, \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (p = 1, 2, \ldots, r), \end{array} \right. \tag{7}$$

en posant

$$u_i^p = y_i^p - y_i^{p-1}.$$

En raisonnant comme pour établir les inégalités (6), on a d'autre part,

$$|y_i^{p+1} - y_i| \leq \eta_i + m_i t = \varphi_i(t). \tag{8}$$

En prenant h'' inférieur ou égal à h et au plus petit des nombres $\dfrac{\varepsilon_i - \eta_i}{m_i}$, r est aussi grand que l'on veut, toutes les fonctions y_i^p sont définies pour t compris entre zéro et h'', les points $t, y_1^p, \ldots, y_n^p$ appartiennent, dans les mêmes conditions, au domaine D, et cela quel que soit p.

Mais, quelle que soit la définition de I'', en combinant (6) et (7) on arrive aux inégalités

$$|u_i^p| \leq \Delta_i^p \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

valables dans l'intervalle I'', où les Δ désignent les polynômes définis par

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_i^1 = \eta_i + \alpha_i t, \\ \Delta_i^p = \displaystyle\int_0^t b_{i1} \Delta_1^{p-1} dt + \cdots + \int_0^t b_{in} \Delta_n^{p-1} dt. \end{array} \right. \tag{10}$$

3. Ces polynômes se rencontrent dans l'intégration du système

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = b_{11}z_1 + \cdots + b_{1n}z_n + \alpha_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dz_n}{dt} = b_{n1}z_1 + \cdots + b_{nn}z_n + \alpha_n, \end{cases}$$

ainsi que nous allons le voir. Les solutions de ce système à coefficients constants sont fonctions entières de t; considérons, en particulier, les solutions $z_1, z_2, \ldots, z_n$ prenant pour $t = 0$ les valeurs $\eta_1, \ldots, \eta_n$ du n° 1. Ecrivons

$$(12)\qquad z_i = \psi_i(t;\, \eta_1, \ldots, \eta_n;\, b_{11}, \ldots, b_{nn};\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

en mettant en évidence les arbitraires dont dépendent ces fonctions.

Les coefficients des développements des z_i suivant les puissances croissantes de t sont des polynômes à coefficients positifs des variables η_i, b_{ik}, α_i. Par suite, les ψ considérés comme fonctions de toutes les variables t, η, b, α sont développables en séries entières à coefficients positifs. Groupant les termes de même degré par rapport aux variables b_{ik}, on a des séries de polynomes

$$z_i = \psi_i(t;\eta;b;\alpha) = \varDelta_i^1 + \varDelta_i^2 + \cdots + \varDelta_i^p + \cdots.$$

Les polynômes $\varDelta_i^p$ homogènes et de degré $p-1$ par rapport aux lettres b_{ik} *sont identiques à ceux que nous avons rencontrés au n° précédent;* nous admettons ce point facile à établir.

Lorsque les variables t, η, b, α *sont positives, les* ψ *le sont aussi et croissent en même temps que ces variables.* Si les η et les α sont nuls, les ψ le sont également.

Dans l'intervalle I'', les séries

$$(13)\qquad Y_i = y_i + u_i^1 + \cdots + u_i^{p-1} + \cdots$$

sont uniformément convergentes, on voit aisément qu'il en est de même des séries obtenues en dérivant une fois terme à terme. On en conclut que *les fonctions* Y *satisfont au système* (1) *et aux conditions initiales.*

On peut donner une autre évaluation de l'intervalle de convergence I''.

Les fonctions ψ_i, croissant avec t, devenant infinies positives en même temps que t, partant des valeurs $\eta_i < \varepsilon_i$ pour $t = 0$, chacune des équations

$$(14)\qquad \psi_i(t) = \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

admet une racine positive et une seule. Soit θ la plus petite de ces racines, et h''_1 *un nombre positif inférieur à* θ *et à* h.

Dans l'intervalle $I''_1 : 0 \leq t \leq h''_1$, on a, quelque soit p,

$$\Delta_i^1 + \Delta_i^2 + \cdots + \Delta_i^p < \varepsilon_i. \tag{15}$$

Ces inégalités, pour $p = 1$, montrent que les hypothèses du n° 2 sont vérifiées pour I''_1 et $r = 1$. En vertu de

$$y_i^2 - y_i = u_i^1 + u_i^2,$$

et des inégalités (9) et (15), il en est de même pour $r = 2$. On voit, en répetant le raisonnement, que ces hypothèses sont vérifiées pour toutes les valeurs de r.

Dans l'intervalle I''_1, les fonctions y_i^p sont définies, les séries (13) convergent et satisfont aux équations (1).

On prendra donc comme intervalle I' (énoncé du n° 2) *le plus grand des intervalles* I'', I''_1.

Il reste à voir qu'il ne peut exister un système de solutions continues $x_1, \ldots, x_n$ distinct de $Y_1, \ldots, Y_n$, prenant pour $t = 0$ les valeurs $a_1, \ldots, a_n$. Pour un pareil système, on aurait, dans un certain intervalle $0 \leq t < t_1$ intérieur à I',

$$\left\{\begin{aligned} & |y_i - x_i| < \varepsilon_i \\ & |y_i^p - x_i| < \int_0^t b_{i1} |y_1^{p-1} - x_1| \, dt + \cdots + \int_0^t b_{in} |y_n^{p-1} - x_n| \, dt, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

comme on s'en assure en tenant compte de la continuité des fonctions x. On passe des inégalités (6) et (7) aux inégalités (16) en faisant $\alpha_i = 0$, $\eta_i = \varepsilon_i$. Les inégalités (16) entraînent donc

$$|y_i^p - x_i| < \overline{\Delta_i^p},$$

en appelant $\overline{\Delta_i^p}$ ce que devient Δ_i^p lorsque les α sont nuls et les η égaux aux ε de même indice. Or $\overline{\Delta_i^p}$ tendant vers zéro quand p croît indéfiniment, x_i est la limite de y_i^p et se confond avec Y_i, comme il fallait l'établir.[1]

---

[1] Les raisonnement des n^{os} 2 et 3 sont une extension de ceux de M. LINDELÖF (Journal de Mathématiques 1894). Pour retrouver les résultats de ce géomètre, nous supposerons $y_1 = a_1, \ldots, y_n = a_n$ (les η sont alors nuls), nous remplacerons les α par le plus grand d'entr'eux que nous appellerons M_0, les ε par le plus petit d'entr'eux soit b, et enfin les m_i par le plus grand d'entr'eux appelé M. De même, pour toutes les valeurs de p, remplaçons $b_{1p}, b_{2p}, \ldots, b_{np}$

4. En résumé, *étant donné un système $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de solutions approchées des équations* (1), *nous pouvons en déduire les renseignements suivants sur le système $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de solutions cherché:*

1°. *Les solutions exactes sont définies dans tout l'intervalle I'.*

2°. *Les erreurs $x_i - y_i$ que comportent les solutions approchées sont inférieures en valeur absolue aux fonctions $\varphi_i(t)$ et $\psi_i(t)$ de même indice.*

Des deux systèmes $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ de fonctions limites des erreurs le second sera le plus utile au point de vue théorique parce qu'il ne fait intervenir que les limites des erreurs sur les données initiales et sur les équations, les η et les α.

5. Voici deux cas particuliers importants, connus du reste.

Si l'on prend comme solutions approchées des solutions de (1) ne satisfaisant pas aux conditions initiales, nous avons $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$; les fonctions $\Psi(t; \eta; b; 0)$ donnent des limites des erreurs commises; elles tendent vers zéro en même temps que les nombres η, par suite *les intégrales du système* (1) *sont fonctions continues des données initiales.*[1]

Plus généralement, supposons que les f et les a soient fonctions de certains paramètres μ, continues au voisinage des valeurs $\mu = 0$, les intégrales $x(\mu)$ des équations (1) déterminées par les valeurs initiales a, sont aussi fonctions continues de ces paramètres. Leurs limites, pour $\mu = 0$, satisfont aux équations (1') et aux données initiales a' correspondant à $\mu = 0$.[2] On le voit en prenant les solutions de (1') satisfaisant aux données initiales a' comme solutions approchées des équations (1) et des données a correspondant à des petites valeurs des paramètres μ. Les η et les α tendent vers zéro en même temps que les paramètres μ, et il en est de même des fonctions $\psi(t; \eta; b; \alpha)$.

6. La précision des renseignements précédents (n° 4) croît lorsque les erreurs sur les équations et sur les valeurs initiales étant estimées d'une façon plus étroite, on substitue aux nombres α et η des nombres analogues mais plus petits. Il est également utile de prendre les coefficients b des inégalités de Lipschitz aussi petits que possible.

---

par le plus grand d'entr'eux soit k_p. Alors les nombres $\frac{\varepsilon_i - \eta_i}{m_i}$ du n° 2 deviennent tous égaux à $\frac{b}{M}$; et les intégrales de (11) se réduisant à $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = \frac{M_0}{K}(e^{Kt} - 1)$ où $K = k_1 + \ldots + k_n$, les équations (14) ont pour racine $\frac{1}{K} \log \left(1 + \frac{Kb}{M_0}\right)$.

[1] Voir Picard, Traite d'Analyse t. II.

[2] M. Picard et Lindelöf ont démontré par la méthode des approximations successives la proposition plus précise de M. Poincaré, concernant les systèmes de cette nature lorsque les équations et les données sont analytiques.

Par exemple, si certaines équations sont exactement vérifiées par les solutions approchées, les nombres α correspondant à ces équations seront nuls. Ce cas se présente fréquemment dans l'intégration approchée des équations d'ordre supérieur.

Prenons pour fixer les idées, l'équation du pendule simple. Elle est équivalente au système

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x' \\ \dfrac{dx'}{dt} = -k^2 \sin x. \end{cases}$$

Prenons comme première approximation

$$y = \frac{v}{k}\sin kt \qquad y' = v\cos kt,$$

en supposant les conditions initiales exactement remplies et la vitesse initiale v assez petite. Nous prendrons pour système (11) correspondant à (17) les équations suivantes

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{dZ}{dt} = Z' \\ \dfrac{dZ'}{dt} = k^2 Z + \alpha, \end{cases}$$

où α peut être supposé égal à $\dfrac{v^3}{6k}$. Ce système (18) est équivalent à

$$(19)\qquad \frac{d^2 Z}{dt^2} = k^2 Z + \alpha.$$

En appliquant ce qui précède, on prend les η nuls, et l'on a, pour t assez petit,

$$(20)\qquad |y - x| < Z_1 = \frac{\alpha}{k^2}\left[\frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} - 1\right].$$

La méthode habituelle [voir la note (1) de la page (112)], donne

$$(21)\qquad |y - x| < Z_2 < \frac{\alpha}{1 + k^2}\left[e^{(1+k^2)t} - 1\right].$$

résultat moins avantageux que le précédent.

Il est intéressant de noter que, dans les applications des résultats indiqués au n° 4 aux problèmes de Mécanique, *les inégalités auxquelles on parvient satisfont d'elles-mêmes aux lois de l'homogénéité.* Il en est autrement si, comme d'habitude, on suppose $b_{1p} = b_{2p} = \cdots = b_{np}$; il faut alors mettre en évidence les unités choisies pour faire apparaitre l'homogénéité. Cela est manifeste dans les inégalités (20) et (21). Le même exemple nous a permis d'appliquer la remarque que voici.

Soit S un système d'équations différentielles comprenant des équations d'ordre supérieur à un. Au lieu de ramener S à un système S' du premier ordre et de construire le système (11) correspondant à S', on peut former directement un système linéaire Σ déterminant des limites supérieures des erreurs que comportent les solutions approchées. A chaque équation de S en correspond une de Σ, du même ordre, que l'on forme avec les coefficients de l'inégalité de LIPSCHITZ et du nombre α correspondant à cette équation.[1]

Remarquons enfin que *les raisonnements* des n[os] 2 et 3 *subsistent si l'on suppose que les inégalités* (2), *etc.... dépendent de t, c'est à dire que les b, les α, et les m sont fonctions positives ou nulles de la variable t.*

Aux fonctions $\varphi_i(t)$ correspondent les fonctions analogues

$$\overline{\varphi}_i(t) = \eta_i + \int_0^t m_i\, dt,$$

et, de même, aux fonctions $\psi_i(t)$ correspondent les intégrales $\overline{\psi}_i(t)$, d'un système lineaire analogue à (11), mais à coefficients variables. On pourrait aussi substituer aux constantes ε_i des fonctions $\overline{\varepsilon}_i$, positives, de la variable t.

7. La théorie des erreurs donne, pour les calculs algébriques, la solution de deux problèmes. 1° Estimer l'approximation du résultat d'un calcul, quand on substitue aux nombres et aux opérations exacts, des nombres et des opérations comportant des approximations connues. 2° On veut obtenir un résultat avec une approximation fixée à l'avance, avec quelles approximations suffit-il de connaître les données et d'effectuer les opérations?

On peut se poser deux questions analogues pour les équations différentielles. Le n° 4 répond à la première: Sachant que des fonctions satisfont à peu près aux conditions initiales et aux équations différentielles (des limites supérieures des erreurs correspondantes étant supposées connues), estimer l'erreur que ces fonctions présentent par rapport aux solutions exactes.

Abordons maintenant la seconde question.

Trouver des conditions suffisantes pour que des solutions approchées d'un système d'équations différentielles ne présentent, par rapport aux solutions exactes, que des erreurs inférieures, en valeur absolue, à des nombres donnés. Nous serons toute-

---

[1] Comptes Rendus 17 juillet 1905. Au sujet du système Σ [système (11)] voir le n° 13.

fois obligés de faire des hypothèses concernant l'existence des solutions exactes. Nous énoncerons d'abord ces hypothèses, et ramènerons ensuite la seconde question à la première par un artifice dû à M. SEVERINI.[1]

Nous supposons que les équations (1) admettent un système de solutions $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\ldots$, $x_n(t)$, satisfaisant aux conditions suivantes.

Elles sont définies et continues dans l'intervalle I $0 \leq t \leq h$, prennent pour $t = 0$ les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, admettent dans I des dérivées premières continues.

Il existe des nombres positifs ε_i tels que dans le domaine D défini par

$$0 \leq t \leq h,\ x_i(t) - \varepsilon_i \leq Y_i \leq x_i(t) + \varepsilon_i,$$

les fonctions $f_i(t, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ sont continues et satisfont aux conditions de LIPSCHITZ obtenues en substituant $Y_1, \ldots, Y_n$, $Y'_1, \ldots, Y'_n$ à $x_1, \ldots, x_n$, $x'_1, \ldots, x'_n$ dans les inégalités (2).

Soient alors $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\ldots$, $y_n(t)$ des fonctions de t, qui, tant que le point $t, y_1, y_2, \ldots, y_n$ ne sort pas du domaine D, sont continues, admettent des dérivées premières finies et continues (sauf peut être pour des valeurs isolées de t); et qui prennent pour $t = 0$ des valeurs satisfaisant aux inégalités

$$|a_i - y_i(0)| \leq \eta_i < \varepsilon_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Considérons alors, avec M. SEVERINI le système

$$(22) \quad \begin{cases} \dfrac{dY_i}{dt} = f_i(t;\ Y_1, \ldots, Y_n) + \left[\dfrac{dy_i}{dt} - f_i(t;\ y_1, \ldots, y_n)\right] = F_i(t;\ Y_1, \ldots, Y_n) \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

On doit supposer que, dans les crochets, les y sont remplacés par les fonctions précédentes.

Dans D, les fonctions F satisfont aux mêmes conditions de continuité que les fonctions f, et vérifient les mêmes inégalités de LIPSCHITZ. Les $y(t)$ satisfont au système (22); les $x(t)$ sont solutions approchées du même système, et nous pouvons appliquer les résultats du nº 4. Posons

$$\alpha_i \geq \left|\frac{dy_i}{dt} - f_i(t;\ y_1, \ldots, y_n)\right| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

---

[1] Rendiconti del R. Ist. Lomb. di Sc. e lett. Serie II, Vol. 31, 1898, p. 951. L'artifice consiste à former le système (22) dont les $x(t)$ sont des solutions approchées; les y des solutions exactes. Ce point mis à part, M. SEVERINI traite la question posée dans le texte d'une façon différente de la nôtre.

ces inégalités ayant lieu pour les points $t, y_1, \ldots, y_n$ intérieurs à D; et considérons les fonctions $\psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha)$ du n° 3. Si l'on peut construire les y de telles façon que les η et les α soient assez petits pour que

$$\psi_i(h;\ \eta;\ b;\ \alpha) < \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

on aura, dans tout l'intervalle I,

$$|y_i - x_i| < \psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha) < \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Regardons maintenant les y comme solutions approchées du système (1), dont les x sont solutions exactes. Nous voyons que

Pour que des fonctions ne présentent par rapport aux solutions exactes d'un système d'équations différentielles que des erreurs inférieures, en valeur absolue, à des nombres donnés, il suffit qu'elles soient assez près de satisfaire aux équations et aux conditions initiales.[1]

8. Nous rattacherons facilement à cette idée générale, *la propriété fondamentale de la méthode de* Cauchy-Lipschitz, *celle de fournir une approximation uniforme des intégrales dans tout leur domaine d'existence et de régularité.* Cette propriété a été mise en évidence par les beaux travaux de MM. Picard et Painlevé.[2]

Les hypothèses sur les intégrales x du système (1) et les fonctions f, étant les mêmes qu'au n° précédent, la méthode de Cauchy Lipschitz donne le moyen suivant de construire des fonctions y. On divise l'intervalle I, en intervalles partiels par des valeurs croissantes de t, soit

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_s < t_{s+1} = h.$$

Prenons, pour simplifier, $y_i(0) = a_i$, donc $\eta_i = 0$; et soit *pour t compris entre t_{p-1} et t_p,*

$$(23) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_i(t) = y_i(t_{p-1}) + (t - t_{p-1}) f_i[t_{p-1};\ y_1(t_{p-1}), \ldots, y_n(t_{p-1})] \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

Les y ainsi construits de proche en proche, satisfont aux conditions du n° précédent, en ce qui concerne la continuité et l'existence des dérivées.

Montrons que les nombres α_i peuvent être pris aussi petits que l'on veut, par une subdivision convenable de l'intervalle I.

---

[1] M. Runge (Mathematische Annalen, t. 44, p. 437) a traité une question analogue en utilisant la méthode de Cauchy-Lipschitz.

[2] Picard. Comptes-Rendus, juin 1899. Traité d'Analyse (2e édition).

Painlevé. Comptes-Rendus, juin 1899. Bulletin de la Société Mathématique de France 1899.

L'exposé très net de cette méthode que M. Goursat a donné dans son Traité d'Analyse nous a été fort utile.

Dans l'intervalle partiel (t_{p-1}, t_p), on doit avoir[1]

$$(24)\quad \alpha_i \geq \left|\frac{dy_i}{dt} - f_i(t;\, y_1, \ldots, y_n)\right| = \left|f_i[t_{p-1},\, y_1(t_{p-1}), \ldots, y_n(t_{p-1})] - f_i(t;\, y_1, \ldots, y_n)\right|$$

Les fonctions f étant continues dans D, on peut trouver des nombres $l(\alpha)$ et $\lambda_s(\alpha)$ tels que les $n+1$ inégalités

$$(25)\qquad |t - t_{p-1}| < l(\alpha),\ |y_s - y_s(t_{p-1})| < \lambda_s(\alpha)$$

entraînent les précédentes. Or, en désignant par $m_1, \ldots, m_n$ des nombres supérieurs ou égaux aux valeurs absolues maxima des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ dans le domaine D, il suffit de prendre les intervalles (t_{p-1}, t_p) d'étendue inférieure à $\delta(\alpha)$, $\delta(\alpha)$ désignant le plus petit des nombres $l(\alpha)$, $\dfrac{\lambda_s(\alpha)}{m_s}$ pour que les inégalités (25) soient satisfaites.[2] Il en sera alors de même des inégalités (24). La proposition énoncée résulte alors du n° précédent.

Les remarques faites antérieurement (n° 6) sur le choix des coefficients b des inégalités de Lipschitz seraient importantes pour une application pratique de la méthode précédente. D'ailleurs, pour un calcul numérique de solutions par cette méthode, il vaudrait mieux substituer à la détermination faite ci-dessus des intervalles partiels, une détermination fondée sur l'étude directe des fonctions suivantes de t

$$|f_i[t_{p-1},\, y_1(t_{p-1}), \ldots, y_n(t_{p-1})] - f_i(t;\, y_1, \ldots, y_n)|.$$

(Les y sont supposés remplacés par leurs expressions (23)). En supposant t_{p-1} connu, on choisira t_p de façon que dans l'intervalle (t_{p-1}, t_p) on ait les inégalités (24), cet intervalle étant pris du reste aussi grand que possible.

9. Reprenons les notations et les hypothèses du n° 7. Nous supposons que l'on connait les solutions approchées $y_i(t)$ des équations (1) satisfaisant aux conditions énoncées à cet endroit. Nous allons établir que *l'on peut appliquer la méthode de* M. Picard *pour déduire les solutions exactes $x(t)$ des solutions appro-*

[1] Dans une application numérique, on ne saurait en général calculer exactement l'expression $f_i[t_{p-1}, y_1(t_{p-1}), \ldots, y_n(t_{p-1})]$. Mais il suffit de la calculer à $\theta\alpha_i$ près, $(0 < \theta < 1)$ et de remplacer α_i par $(1-\theta)\alpha_i$ dans la détermination de δ.

[2] Si les fonctions $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ satisfont aux inégalités complètes de Lipschitz

$$|f_i(t;\, y_1, \ldots, y_n) - f_i(t';\, y'_1, \ldots, y'_n)| < b_i|t-t'| + b_{i1}|y_1 - y'_1| + \cdots + b_{in}|y_n - y'_n|,$$

dès que la droite joignant les points $t, y_1, \ldots, y_n$ et $t', y'_1, \ldots, y'_n$ est intérieure à D, on prendra pour $\delta(\alpha)$ les plus petits des nombres $\dfrac{\alpha_i}{b_i + b_{i1}m_1 + \cdots + b_{in}m_n}$.

chées $y(t)$.[1] Une démonstration spéciale est nécessaire, car le domaine du n° 7 est distinct de celui du n° 1.

En posant $y_i^0 = y_i$, et

$$y_i^{p+1} = a_i + \int_0^t f_i(t;\ y_1^p, \ldots, y_n^p)\,dt,$$

on a d'abord

$$|y_i^1 - x_i| \leq \int_0^t \{b_{i1}|y_1^0 - x_1| + \cdots + b_{in}|y_n^0 - x_n|\}\,dt,$$

et puisque

$$|y_i^1 - x_i| < \psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha)$$

et que d'autre part, les $\psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha)$ satisfont aux équations (11), on a

$$|y_i^1 - x_i| < \psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha) - \alpha_i t - \eta_i = \psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha) - \Delta_i^1 < \psi_i.$$

Le point $t,\ y_1^1, \ldots, y_n^1$ appartient donc à D; $y_1^2; \ldots, y_n^2$ sont definis dans I, et de l'inégalité

$$|y_i^2 - x_i| < \int_0^t \{b_{i1}|y_1^1 - x_1| + \cdots + b_{in}|y_n^1 - x_n|\}\,dt,$$

on déduit en remplaçant $|y_i^1 - x_i|$ par $\psi_i - \Delta_i^1$,

$$|y_i^2 - x_i| < \int_0^t \left[\frac{d\psi_i}{dt} - \frac{d\Delta_i^1}{dt} - \frac{d\Delta_i^2}{dt}\right] dt = \psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha) - (\Delta_i^1 + \Delta_i^2).$$

Par le même procédé, on établit de proche en proche les inégalités

$$|y_i^p - x_i| < \psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha) - (\Delta_i^1 + \Delta_i^2 + \cdots + \Delta_i^p),$$

dont les seconds membres tendent vers zéro quand p croît indéfiniment, ce qui établit la proposition énoncée plus haut.

10. Nous avons, jusqu'ici, considéré une seule courbe intégrale du système (1). On peut, comme l'a fait M. PAINLEVÉ,[2] considérer l'ensemble des

---

[1] En particulier, on pourrait utiliser la méthode des approximations successives pour perfectionner les solutions approchées obtenues par le procédé de CAUCHY-LIPSCHITZ.

[2] Comptes Rendus (juin 1899).

courbes intégrales situées dans un domaine Δ, à $n+1$ dimensions, où le système (1) est régulier. Nous voulons dire par là que, dans Δ, les seconds membres des équations (1) sont finis, continus, et satisfont aux conditions de LIPSCHITZ (2).

De tout point θ, a_1 $a_2, \ldots, a_n$ intérieur à Δ part une courbe intégrale définie et régulière dans un intervalle assez petit $(\theta - h,\ \theta + h)$ entourant θ. Pour être renseigné dans un intervalle plus grand on utilisera des équations approchées.

Fixons-nous une limite supérieure T de l'étendue des intervalles où nous ferons varier t dans l'étude des intégrales de (1). Donnons-nous aussi un nombre positif ϱ auquel nous ferons correspondre des nombres α_i tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i^2(T;\ 0;\ b;\ \alpha) < \frac{\varrho^2}{4}\cdot$$

(les ψ ayant même sens qu'au n° 3).

Soient d'autre part $\varphi_1(t;\ x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(t;\ x_1, \ldots, x_n)$ des fonctions définies dans Δ, y satisfaisant aux inégalités

$$|f_i(t;\ x_1, \ldots, x_n) - \varphi_i(t;\ x_1, \ldots, x_n)| < \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et telles que le système

$$\frac{dy_i}{dt} = \varphi_i(t;\ y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{26}$$

admette des intégrales qui, dans Δ, sont régulières, c'est à dire vérifient les conditions de continuité imposées au n° 1 aux y et à leurs dérivées.

Soient C la courbe intégrale de (1), C' la courbe intégrale de (26) issues d'un point $\theta, a_1, \ldots, a_n$ de Δ. Voici quel parti on peut tirer des courbes C', supposées connues, pour l'étude des courbes C.

Faisons varier t, en partant de θ, dans un intervalle d'étendue au plus égale à T. Si aucun point de C' n'est à une distance[1] de la frontière de Δ

---

[1] La distance de deux points $t, x_1, \ldots, x_n;\ t', x'_1, \ldots, x'_n$ est l'expression

$$\sqrt{(t-t')^2 + (x_1 - x'_1)^2 + \cdots + (x_n - x'_n)^2}.$$

La distance d'un point P à une multiplicité est la plus courte des distances de P aux points P' de la multiplicité.

L'ensemble des points de Δ dont la distance à la frontière est supérieure à ρ constitue, si ρ est assez petit, un domaine Δ_ρ, possédant la propriété suivante. La courbe intégrale partant d'un point $\theta, a_1, \ldots, a_n$ intérieur à Δ_ρ se poursuit régulièrement quand t varie dans un intervalle $\theta - h \leq t \leq \theta + h$ dont l'étendue $2h$ est au moins égale à la limite fixe $\dfrac{2\rho}{\sqrt{1 + M_1^2 + \cdots + M_n^2}}$, M_i désignant la valeur absolue la plus grande de $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ dans Δ.

inférieure ou égale à $\frac{\varrho}{2}$, la partie de C correspondant aux mêmes valeurs de t, existe, est régulière et tout entière intérieure à $\varDelta$. Lorsqu'on atteint un point de C' dont la distance à la frontière de $\varDelta$ est égale à $\frac{\varrho}{2}$, la distance du point correspondant de C à la même frontière est inférieure à ϱ.

Ces résultats sont une conséquence des précédents. Ils donnent un sens précis à la proposition intuitive: *Deux systèmes d'équations différentielles voisines ont des solutions voisines.*

11. Pour appliquer ce qui précède, il faut connaître des fonctions φ_i telles que l'étude des courbes intégrales C' du système (26) soit plus facile que celles des courbes C.[1] On peut trouver immédiatement des fonctions de cette nature dans certains cas particuliers; dans le cas général on ne peut guère donner que des indications.

Nous ne considérons ici que le cas d'une seule équation du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = f(t; x). \tag{27}$$

Pour étudier l'allure générale des courbes intégrales dans une région $\varDelta$ du plan t, x, où f est finie, continue, et satisfait à la condition de Lipschitz,

$$|f(t, x) - f(t, x')| < k|x - x'|,$$

nous déterminerons une fonction $\varphi(t, x)$ telle que

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(t; y) \tag{28}$$

soit intégrable, et que le module de $f(t, x) - \varphi(t, x)$ soit, dans $\varDelta$, inférieur à un nombre α. Ce nombre α dépend de l'étendue maximum T des intervalles où l'on veut faire varier t.

Géométriquement, dans l'espace défini par les coordonnées t, x, z, les deux surfaces S, Σ, d'équations

$$(S)\ z = f(t, x) \qquad (\Sigma)\ z = \varphi(t, x)$$

doivent être coupées par une même parallèle à Oz en des points voisins.

[1] Dans le même ordre d'idées, M. Severini représente les intégrales d'un système différentiel par des séries de polynômes. (Rendiconti del R. Ist. Lombardo 1898, 1899, 1900. Mémoire édité chez Zanichelli, Bologne 1899). M. Painlevé a signalé aussi la formation de telles séries (Bulletin de la Société Mathématique 1899).

Nous construirons une telle surface Σ en coupant S par des plans parallèles à tOx, la distance de deux plans consécutifs étant au plus égale à α. A chaque partie s de S comprise entre deux plans consécutifs P, P', nous ferons correspondre une partie σ de Σ constituée par la projection, faite parallèlement à Oz de s sur le plan Π équidistant de P et de P'.

Pratiquement,[1] *on fera sur le plan tOz la représentation topographique, par courbes de niveau cotées de la partie de S se projetant à l'intérieur de Δ. Dans cette région, toute courbe intégrale C de* (27) *est représentée approximativement par une ligne brisée C' dont les sommets sont sur les courbes de niveau: tout côté de la brisée est limité à deux courbes de niveau consécutives, et a pour coefficient augulaire la demi-somme des cotes de ces courbes de niveau.*

L'emploi de cette méthode est très pratique lorsque les courbes de niveau $f(t, x) =$ constante, sont faciles à tracer; le lecteur imaginera aisément un exemple où il en serait ainsi.

Plus généralement on pourrait diviser Δ en domaines partiels δ, tels que dans chacun d'eux l'oscillation de $f(t, x)$ soit au plus égale à α. On construirait φ en prenant dans chaque domaine δ une valeur constante intermédiaire entre les valeurs extrêmes de f dans le même domaine.

Ce procédé, au point de vue analytique, est analogue à la méthode de Cauchy-Lipschitz. Il en diffère en ce que *la détermination des valeurs intermédiaires*[2] *de t correspondant aux sommets de la brisée, s'y fait en limitant directement l'oscillation de $f(t, x)$.*

12. Nous avons supposé que la fonction $f(t, x)$ restait finie. Pour lever cette restriction, et ne pas écarter les points des courbes C où la tangente est parallèle à Ox, donnons à l'équation (27) la forme

$$\frac{dt}{P(t, x)} = \frac{dx}{Q(t, x)}. \tag{28}$$

Supposons que les fonctions P et Q soient finies et continues dans une région Δ du plan tOx, qu'elles ne s'y annulent pas simultanément, et qu'elles y vérifient les conditions de Lipschitz

[1] Comptes Rendus, 20 février 1905.

[2] Le calcul de ces valeurs exigerait la résolution d'équations finies; et, en toute rigueur, la méthode indiquée donnerait lieu à une discussion à laquelle nous ne nous arrêterons pas. Il nous semble également inutile d'étendre ces considérations à un système (1) quelconque; la seule application pratique de l'idée qui est à la base de la méthode, est, dans le cas général, la remarque faite à la fin du n° 8.

$$(29) \qquad \begin{cases} |P(t,x) - P(t',x')| < a|t-t'| + b|x-x'| \\ |Q(t,x) - Q(t',x')| < c|t-t'| + d|x-x'|. \end{cases}$$

En prenant pour variable indépendante l'arc s d'une courbe intégrale, l'équation (28) donne le système

$$(30) \qquad \frac{dt}{ds} = P' = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}, \quad \frac{dx}{ds} = Q' = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}.$$

Les seconds membres de ces équations satisfont, comme on le vérifiera facilement, à des conditions de LIPSCHITZ analogues à (29); ils sont liés d'ailleurs par la relation $P'^2 + Q'^2 = 1$.

Traçons les courbes de niveau N_i

$$P'(t,x) = \cos\theta_i, \quad Q'(t,x) = \sin\theta_i,$$

les angles θ_i étant choisis de façon que $0 < \theta_{i+1} - \theta_i < 2\alpha$; le nombre α dépendant des coefficients des inégalites de LIPSCHITZ et de la longueur maximum S des arcs que l'on veut étudier sur les courbes intégrales C.

On construira les brisées C' ayant leurs sommets sur les courbes N_i, l'angle que fait avec Ot le côté compris entre N_i et N_{i+1} étant $\frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2}$. Ces brisées représentent approximativement les courbes intégrales C; on évaluerait facilement l'approximation. Il est bon de noter que, dans ce cas, on comparerait les extrémités d'arcs de C et de C' ayant même longueur; cela tient au choix de la variable indépendante s.

13. Nous n'avons jusqu'ici trouvé que des limites supérieures des valeurs absolues des erreurs que comportent les solutions approchées d'un système d'équations différentielles, sans rien indiquer au sujet des signes de ces erreurs.

Observons d'ailleurs que le système (11) déterminant ces limites supérieures $\psi(t)$ correspondant aux équations (1) et aux solutions approchées $y(t)$ du n° 1, présente, par la forme linéaire de ses équations et la grandeur de leurs coefficients, une certaine analogie avec le système auxiliaire ou les équations aux variations que MM. DARBOUX et POINCARÉ ont utilisés pour étudier les solutions d'un système différentiel voisines d'une solution donnée. On est alors conduit à penser qu'en tenant compte des signes dérivées partielles auxquelles correspondent les coefficients des inégalités de LIPSCHITZ et de ceux des différences $\frac{dy_i}{dt} - f_i(t; y_1, \ldots, y_n)$, on peut arriver à des résultats plus précis, en diminuant au besoin l'intervalle d'étude. C'est ce que nous allons montrer, pour le cas d'une seule équation, en utilisant un intéressant théorème dû à M. PÉTROVITCH,[1] que nous rappellerons tout d'abord.

Ce théorème permet la comparaison directe des solutions de trois équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{31}$$

$$\frac{du}{dt} = \varphi(t, u), \tag{32}$$

$$\frac{dv}{dt} = \psi(t, v), \tag{33}$$

quant les hypothèses suivantes sont vérifiées.

Soit R une région du plan t, x où l'équation (31) est régulière, où les fonctions $\varphi(t, x)$, $\psi(t, x)$ sont continues, et où les différences $f - \varphi = f(t, x) - \varphi(t, x)$, $f - \psi = f(t, x) - \psi(t, x)$ sont de signes constants et contraires. Soint $P(0, a)$ un point de cette région, $x(t)$, $u(t)$, $v(t)$ les solutions de (31), (32), (33) correspondant à ce point, c'est à dire prenant la valeur a pour $t = 0$.

Appelons I un intervalle $0 \leq t \leq \theta$ où $u(t)$ et $v(t)$ existent et sont continues, et sont telles que les points du domaine R' définis par les conditions: t compris entre 0 et θ, x compris entre $u(t)$ et $v(t)$ soient intérieurs à R.

Dans ces conditions, $x(t)$ est défini dans l'intervalle I, la différence $x(t) - u(t)$ a le signe de $f - \varphi$, $x(t) - v(t)$ a le signe contraire, celui de $f - \psi$.

Cette proposition, dont la démonstration est simple, peut être étendue à des systèmes d'équations du premier ordre. A l'aide de cette généralisation on peut démontrer d'une façon nouvelle les résultats antérieurement obtenus; nous n'insistons pas sur ce point, et nous passons à l'application annoncée.

14. Considérons l'équation

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{34}$$

et une fonction $y(t)$, solution approchée de cette équation, prenant pour $t = 0$ la valeur initiale x_0 de la solution cherchée. Posons

$$Q(t) = f(t, y) - \frac{dy}{dt};$$

admettons, pour simplifier que $Q(0)$ ne soit pas nul, et que les solutions exacte

[1] Mathematische Annalen. T. 54, 1901, p. 417.

et approchée $x(t)$, $y(t)$ soient continues, ainsi que leurs dérivées premières au voisinage de $t = 0$. Désignons par δ la différence $x - y$. On a pour $t = 0$

$$\delta = 0, \ \frac{d\delta}{dt} = Q(0).$$

Dans bien des cas, par exemple si x et y sont développables en séries entières, on peut prévoir l'existence d'un intervalle $(0, l)$ où δ garde un signe constant. Ce signe est alors celui de $Q(0)$. Nous supposons que l'existence d'un tel intervalle est établie, et nous allons le déterminer, c'est à dire trouver un nombre l tel que pour $0 < t < l$, δ garde un signe constant.

On peut écrire

$$\frac{d\delta}{dt} = f(t, x) - f(t, y) + Q(t).$$

Admettons l'existence et la continuité des dérivées premières de $f(t, x)$, dans le domaine D défini par $0 < t < r$, $y(t) - \varepsilon < x < y(t) + \varepsilon$,[1] nous pouvons écrire

$$f(t, x) - f(t, y) = \delta f'_x(t, y + \theta\delta)$$

θ est une fonction de t qui reste comprise entre 0 et 1; de même $f'_x(t, y + \theta\delta)$ est une fonction de t, soit $P(t)$. Si cette fonction était connue, on aurait δ et par suite x, en intégrant l'équation linéaire

$$\frac{d\delta}{dt} = \delta P(t) + Q(t). \tag{35}$$

Mais $f(t, x)$, x et y étant continues, $\dfrac{f(t, x) - f(t, y)}{x - y}$ est fonction continue de t tant que $x - y$ n'est pas nul; de plus, si pour $t = t_1$ x et y sont égaux, $f'_x(t, y + \theta\delta)$ est encore continue pour cette valeur de t. La fonction $P(t)$ peut donc être supposé continue dans l'intervalle $0 < t < r$; et de même pour $Q(t)$.

Supposons que pour tous les points t, x du domaine D on ait

$$m < f'_x(t, x) < M, \quad \lambda(t) < Q(t) < \Lambda(t);$$

on prendra pour λ et Λ des constantes ou des fonctions de t, mais de telle façon que $\lambda(0)$ et $\Lambda(0)$ aient le signe de $Q(0)$.

Si δ est positif, on a

$$\delta m < \delta P(t) < \delta M,$$

et des inégalités de sens contraires, pour $\delta < 0$.

[1] Dans cette inégalité, x est une variable qu'il ne faut pas confondre avec l'intégrale $x(t)$, que désigne habituellement la lettre x.

Admettons que $Q(0)$ soit positif, et comparons δ solution de (35), δ_1 et δ_2 solutions de

$$\frac{d\delta_1}{dt} = \delta_1 m + \lambda, \tag{36}$$

$$\frac{d\delta_2}{dt} = \delta_2 M + \Lambda \tag{37}$$

s'annulant pour $t = 0$. Pour appliquer le théorème de M. Pétrovitch, nous regarderons les équations (35), (36), (37) comme correspondant respectivement à (31), (32), (33), δ, δ_1, δ_2 désignant maintenant les variables appelées plus haut x, u, v. Nous devons chercher les signes des différences

$$(P - m)\delta + Q - \lambda, \quad (P - M)\delta + (Q - \Lambda)$$

qui, puisque $Q(0) > 0$ entraîne $\delta > 0$, sont respectivement + et —. On a donc tant que δ est positif et inférieur à ε

$$\delta_1 < \delta < \delta_2.$$

D'autre part les fonctions δ_1 et δ_2 ont pour t positif et très petit le signe + commun à $\lambda(0)$ et $\Lambda(0)$.

Il résulte de là que si l'on désigne par l un nombre positif inférieur à τ et à la plus petite des racines positives des équations

$$\delta_1 = 0 \qquad \delta_2 = \varepsilon,$$

dans tout l'intervalle $(0, l)$ δ *sera positif et* x *supérieur à* y.

On traiterait de la même façon le cas où $Q(0) < 0$. Il est évident, du reste, que l'on pourrait élargir les hypothèses qui viennent d'être faites. Mais les indications précédentes suffisent à montrer l'intérêt qui s'attache à l'étude attentive des équations linéaires telles que (35) analogues aux équations aux variations construites avec les solutions approchées.[1]

Grenoble le 15 février 1906.

---

[1] Depuis que ces lignes ont été écrites, j'ai obtenu à ce sujet des résultats qui sont resumés dans une Note des Comptes-Rendus (10 février 1908).