BEITRÄGE ZUR AUSDEHNUNG DER FUCHS'SCHEN THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN AUF EIN SYSTEM LINEARER PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

I. HORN

in FREIBURG i. B.

In einer im zwölften Bande dieser Zeitschrift erschienenen Abhandlung *über ein System linearer partieller Differentialgleichungen* beschäftigte ich mich mit der functionentheoretischen Untersuchung der Integrale eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen

$$\tag{1} \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= a_0 z + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= b_0 z + b_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= c_0 z + c_1 \frac{\partial z}{\partial x} + c_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \end{aligned}$$

dessen Coefficienten a, b, c rationale Functionen von x, y von solcher Beschaffenheit sind, dass die drei Differentialgleichungen (1) drei linear unabhängige Integrale gemein haben.[1] Es stellte sich damals schon heraus, dass die Integrale eines solchen Differentialgleichungensystems ähnliche Eigenschaften besitzen, wie die von Herrn Fuchs (Crelles Journal, Bd. 66, 68 ff.) untersuchten Integrale einer gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung; wenn sich auch meine früheren Entwicklungen nicht über die Anfänge hinaus erstreckten, so ist daraus doch so viel

[1] Die hierzu erforderlichen Bedingungen sind künftig immer als erfüllt vorausgesetzt, auch wo es nicht besonders erwähnt wird.

zu ersehen, dass man die functionentheoretische Integration der Systeme linearer partieller Differentialgleichungen mit einer endlichen Anzahl linear unabhängiger Integrale, sowie auch der damit im Zusammenhang stehenden Systeme totaler linearer Differentialgleichungen von der Form

$$(2)\qquad \begin{aligned} dz_1 &= (a_{11}z_1 + \ldots + a_{1m}z_m)dx + (b_{11}z_1 + \ldots + b_{1m}z_m)dy, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dz_m &= (a_{m1}z_1 + \ldots + a_{mm}z_m)dx + (b_{m1}z_1 + \ldots + b_{mm}z_m)dy \end{aligned}$$

mit Aussicht auf Erfolg unternehmen kann.

In meiner Habilitationsschrift[1] habe ich die Acta mathematica, Bd. 12, begonnenen Untersuchungen weiter geführt; ich will hier einige Entwicklungen, welche als Ergänzung der früheren in dieser Zeitschrift erschienenen Abhandlung dienen können, auszugsweise mittheilen, während ich hinsichtlich der genaueren Ausführung, sowie hinsichtlich anderer Fragen, auf die erwähnte Schrift verweise.

Im dritten Abschnitt der früheren Arbeit habe ich das Differentialgleichungensystem

$$(3)\qquad \begin{aligned} \varphi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= A_0 z + \varphi A_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi A_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \varphi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= B_0 z + \varphi B_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi B_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \varphi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= C_0 z + \varphi C_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi C_2 \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

behandelt, dessen Coefficienten A, B, C in der Umgebung der Stelle (a, b) des singulären Gebildes $\varphi = 0$ — $\varphi(x, y)$ ist eine irreductible ganze Function — in Potenzreihen entwickelbar sind; dieses System besitzt die Eigenschaft, dass sich seine sämmtlichen Integrale an dem singulären Gebilde $\varphi = 0$ regulär verhalten, es ist aber nicht das allgemeinste System, welchem diese Eigenschaft zukommt. Wenn wir der Kürze halber ein solches Differentialgleichungensystem regulär an dem singulären Gebilde $\varphi = 0$ nennen, so bietet sich die Aufgabe dar, *das allgemeinste reguläre System* (1) *aufzusuchen.* Man kann demselben jedenfalls die Form

[1] *Über Systeme linearer Differentialgleichungen mit mehreren Veränderlichen.* Habilitationsschrift der Universität Freiburg i. B. Berlin, Mayer & Müller, 1890.

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= A_0 z + A_1\frac{\partial z}{\partial x} + A_2\frac{\partial z}{\partial y},\\
\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= B_0 z + B_1\frac{\partial z}{\partial x} + B_2\frac{\partial z}{\partial y},\\
\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= C_0 z + C_1\frac{\partial z}{\partial x} + C_2\frac{\partial z}{\partial y}
\end{aligned}
$$

geben, worin die Coefficienten A, B, C Potenzreihen von $x-a, y-b$ sind, welche nicht sämmtlich durch φ theilbar sind, während h eine ganze positive Zahl darstellt. Die Grössen

$$
z_0 = \frac{z}{\varphi},\qquad z_1 = \frac{\partial z}{\partial x},\qquad z_2 = \frac{\partial z}{\partial y}
$$

genügen einem System totaler Differentialgleichungen

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\varphi dz_0 &= (A_{00}z_0 + A_{01}z_1 + A_{02}z_2)dx + (B_{00}z_0 + B_{01}z_1 + B_{02}z_2)dy,\\
\varphi^{h+1}dz_1 &= (A_{10}z_0 + A_{11}z_1 + A_{12}z_2)dx + (B_{10}z_0 + B_{11}z_1 + B_{12}z_2)dy,\\
\varphi^{h+1}dz_2 &= (A_{20}z_0 + A_{21}z_1 + A_{22}z_2)dx + (B_{20}z_0 + B_{21}z_1 + B_{22}z_2)dy,
\end{aligned}
$$

dessen Coefficienten die Werthe

$$
(6)\qquad
\begin{array}{lll}
-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ 1,\ 0, & \qquad & -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ 0,\ 1,\\
\varphi A_0,\ A_1,\ A_2, & & \varphi B_0,\ B_1,\ B_2,\\
\varphi B_0,\ B_1,\ B_2, & & \varphi C_0,\ C_1,\ C_2
\end{array}
$$

haben und folglich Potenzreihen von $x-a, y-b$ sind. Das Differentialgleichungensystem (5) besitzt unter Voraussetzung der Regularität ein Fundamentalsystem

$$
\begin{array}{lll}
z_0^0 = \varphi^{p^0}\zeta_0^0, & z_1^0 = \varphi^{p^0}\zeta_1^0, & z_2^0 = \varphi^{p^0}\zeta_2^0,\\
z_0' = \varphi^{p'}\zeta_0', & z_1' = \varphi^{p'}\zeta_1', & z_2' = \varphi^{p'}\zeta_2',\\
z_0'' = \varphi^{p''}\zeta_0'', & z_1'' = \varphi^{p''}\zeta_1'', & z_2'' = \varphi^{p''}\zeta_2''
\end{array}
$$

von solcher Beschaffenheit, dass bei geeigneter Bestimmung der Exponenten p^0, p', p'' weder sämmtliche ζ einer Reihe noch sämmtliche ζ einer Colonne durch φ theilbar sind. Setzt man in (5)

$$
z_0 = \varphi^p\zeta_0,\qquad z_1 = \varphi^p\zeta_1,\qquad z_2 = \varphi^p\zeta_2,
$$

so folgt aus den Differentialgleichungen für ζ nach einigen a. a. O. ausgeführten Betrachtungen, dass alle aus den Grössen

$$(7)\qquad \begin{matrix} A_{10}\,, & A_{11}\,, & A_{12}, \\ A_{20}\,, & A_{21}\,, & A_{22}, \\ B_{10}\,, & B_{11}\,, & B_{12}, \\ B_{20}\,, & B_{21}\,, & B_{22} \end{matrix}$$

gebildeten Determinanten zweiten Grades durch φ^h theilbar sind. Man kann daher drei ganze Functionen $\varkappa, \lambda, \mu$ so bestimmen, dass die durch die Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{matrix} \mu A_{11} - \lambda A_{12} = \varphi^h A_1, & \varkappa A_{12} - \mu A_{10} = \varphi^h A_1', & \lambda A_{10} - \varkappa A_{11} = \varphi^h A_1'', \\ \mu A_{21} - \lambda A_{22} = \varphi^h A_2, & \varkappa A_{22} - \mu A_{20} = \varphi^h A_2', & \lambda A_{20} - \varkappa A_{21} = \varphi^h A_2'', \\ \mu B_{11} - \lambda B_{12} = \varphi^h B_1, & \varkappa B_{12} - \mu B_{10} = \varphi^h B_1', & \lambda B_{10} - \varkappa B_{11} = \varphi^h B_1'', \\ \mu B_{21} - \lambda B_{22} = \varphi^h B_2, & \varkappa B_{22} - \mu B_{20} = \varphi^h B_2', & \lambda B_{20} - \varkappa B_{21} = \varphi^h B_2'' \end{matrix}$$

neu definirten Grössen in Potenzreihen von $x - a\,, y - b$ entwickelbar sind. Für

$$v_0 = z_0, \qquad v_1 = z_1, \qquad v_2 = \frac{\varkappa z_0 + \lambda z_1 + \mu z_2}{\varphi^h}$$

erhält man ein Differentialgleichungensystem

$$(9)\qquad \begin{aligned} \varphi dv_0 &= (P_{00}v_0 + P_{01}v_1 + P_{02}v_2)dx + (Q_{00}v_0 + Q_{01}v_1 + Q_{02}v_2)dy, \\ \varphi dv_1 &= (P_{10}v_0 + P_{11}v_1 + P_{12}v_2)dx + (Q_{10}v_0 + Q_{11}v_1 + Q_{12}v_2)dy, \\ \varphi dv_2 &= (P_{20}v_0 + P_{21}v_1 + P_{22}v_2)dx + (Q_{20}v_0 + Q_{21}v_1 + Q_{22}v_2)dy, \end{aligned}$$

dessen Coefficienten P, Q einfache Verbindungen der A, B sind, und zwar ergeben sich[1] die Coefficienten der beiden ersten Zeilen als Potenzreihen von $x - a\,, y - b$, während man für P_{20}, P_{21}, P_{22}; Q_{20}, Q_{21}, Q_{22} Ausdrücke von der Form $\frac{\mathfrak{P}(x - a\,, y - b)}{\varphi^h}$ erhält. Eine weitere Betrachtung,

[1] Da λ, μ nicht beide durch φ theilbar sein können, so setzen wir μ als nicht durch φ theilbar voraus.

die wir wieder unterdrücken wollen, ergiebt, dass unter den gemachten Voraussetzungen auch sämmtliche Coefficienten der letzten Differentialgleichung (9) Potenzreihen sein müssen. Mit Rücksicht auf die Ausdrücke für diese Coefficienten findet man, dass auch die durch die Gleichungen

$$(10)\qquad \begin{aligned} \lambda A_{10} + \mu A_{20} &= \varphi^h L_0, & \lambda B_{10} + \mu B_{20} &= \varphi^h M_0,\\ \lambda A_{11} + \mu A_{21} &= \varphi^h L_1, & \lambda B_{11} + \mu B_{21} &= \varphi^h M_1,\\ \lambda A_{12} + \mu A_{22} &= \varphi^h L_2, & \lambda B_{12} + \mu B_{22} &= \varphi^h M_2, \end{aligned}$$

$$(11)\qquad \begin{aligned} \lambda A_1 + \mu A_2 &= \mu L_1 - \lambda L_2 = \varphi^h L - \varkappa(\mu A_{01} - \lambda A_{02}) + \varphi\left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial x}\right),\\ \lambda A_1' + \mu A_2' &= \varkappa L_2 - \mu L_0 = \varphi^h L' - \varkappa(\varkappa A_{02} - \mu A_{00}) + \varphi\left(\mu \frac{\partial \varkappa}{\partial x} - \varkappa \frac{\partial \mu}{\partial x}\right),\\ \lambda A_1'' + \mu A_2'' &= \lambda L_0 - \varkappa L_1 = \varphi^h L'' - \varkappa(\lambda A_{00} - \varkappa A_{01}) + \varphi\left(\varkappa \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \varkappa}{\partial x}\right),\\ \lambda B_1 + \mu B_2 &= \mu M_1 - \lambda M_2 = \varphi^h M - \varkappa(\mu B_{01} - \lambda B_{02}) + \varphi\left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial y} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right),\\ \lambda B_1' + \mu B_2' &= \varkappa M_2 - \mu M_0 = \varphi^h M' - \varkappa(\varkappa B_{02} - \mu B_{00}) + \varphi\left(\mu \frac{\partial \varkappa}{\partial y} - \varkappa \frac{\partial \mu}{\partial y}\right),\\ \lambda B_1'' + \mu B_2'' &= \lambda M_0 - \varkappa M_1 = \varphi^h M'' - \varkappa(\lambda B_{00} - \varkappa B_{01}) + \varphi\left(\varkappa \frac{\partial \lambda}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \varkappa}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

definirten Grössen L_0, $M_0, \ldots$; L, $M, \ldots$ in Potenzreihen von $x-a, y-b$ entwickelbar sind. Sind nun aber die durch (8), (10), (11) definirten Functionen in Potenzreihen entwickelbar, so sind es auch die Coefficienten sämmtlicher Gleichungen (9), das System (9) ist an dem singulären Gebilde $\varphi = 0$ regulär, und folglich auch das System (5).

Wollen wir nun aus den für die Regularität des Systems (5) gefundenen Bedingungen die Regularitätsbedingungen des Systems (4) ableiten, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

I. die Grössen

$$(12)\qquad \begin{aligned} &A_1\,,\ A_2,\\ &B_1\,,\ B_2,\\ &C_1\,,\ C_2, \end{aligned}$$

sind nicht sämmtlich durch φ theilbar;

II. alle Potenzreihen (12) sind durch φ theilbar, während A_0, B_0, C_0 nicht gleichzeitig durch φ theilbar sind.

Im Falle I. setzen wir in die Regularitätsbedingungen (8), (10), (11) die Ausdrücke (6) ein und ändern die Bezeichnung etwas ab; namentlich ersetzen wir $\varkappa$ durch $\varkappa\varphi$. Im Falle II. sind alle Coefficienten der beiden letzten Differentialgleichungen (5) durch φ theilbar, so dass der Exponent h um 1 erniedrigt werden kann; ersetzen wir $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ bezw. durch $\varphi A_1, \varphi A_2; \varphi B_1, \varphi B_2; \varphi C_1, \varphi C_2$, so geht in diesem Falle das System (5) über in

$$\begin{aligned}
\varphi dz_0 &= \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} z_0 + z_1\right)dx + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y} z_0 + z_2\right)dy,\\
\varphi^h dz_1 &= (A_0 z_0 + A_1 z_1 + A_2 z_2)dx + (B_0 z_0 + B_1 z_1 + B_2 z_2)dy,\\
\varphi^h dz_2 &= (B_0 z_0 + B_1 z_1 + B_2 z_2)dx + (C_0 z_0 + C_1 z_1 + C_2 z_2)dy,
\end{aligned}$$

wofür wir in der oben angegebenen Weise die Regularitätsbedingungen bilden.

Jedes reguläre System (1) *hat eine der beiden folgenden Formen:*

$$\text{I.}\qquad \begin{aligned}
\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= A_0 z + A_1\frac{\partial z}{\partial x} + A_2\frac{\partial z}{\partial y},\\
\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= B_0 z + B_1\frac{\partial z}{\partial x} + B_2\frac{\partial z}{\partial y},\\
\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{dy^2} &= C_0 z + C_1\frac{\partial z}{\partial x} + C_2\frac{\partial z}{\partial y};
\end{aligned}\tag{13}$$

die Coefficienten A, B, C sind in der Umgebung der Stellen (a, b) des singulären Gebildes $\varphi = 0$ Potenzreihen; keine der Grössen (12) *ist durch φ theilbar; es lassen sich ganze Functionen $\varkappa, \lambda, \mu$ so bestimmen, dass alle durch die Gleichungen*

$$\begin{aligned}
&\mu A_1 - \lambda A_2 = \varphi^h A, \quad &&\varkappa A_2 - \mu A_0 = \varphi^{h-1}A', \quad &&\lambda A_0 - \varkappa A_1 = \varphi^{h-1}A'',\\
&\mu B_1 - \lambda B_2 = \varphi^h B, \quad &&\varkappa B_2 - \mu B_0 = \varphi^{h-1}B', \quad &&\lambda B_0 - \varkappa B_1 = \varphi^{h-1}B'',\\
&\mu C_1 - \lambda C_2 = \varphi^h C, \quad &&\varkappa C_2 - \mu C_0 = \varphi^{h-1}C', \quad &&\lambda C_0 - \varkappa C_1 = \varphi^{h-1}C'',
\end{aligned}\tag{14}$$

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
\lambda A_0 + \mu B_0 &= \varphi^h L_0, & \lambda B_0 + \mu C_0 &= \varphi^h M_0,\\
\lambda A_1 + \mu B_1 &= \varphi^h L_1, & \lambda B_1 + \mu C_1 &= \varphi^h M_1,\\
\lambda A_2 + \mu B_2 &= \varphi^h L_2, & \lambda B_2 + \mu C_2 &= \varphi^h M_2,
\end{aligned}
$$

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
\lambda A + \mu B &= \mu L_1 - \lambda L_2 = \varphi^h L + \varphi\left(\lambda\frac{\partial\mu}{\partial x} - \mu\frac{\partial\lambda}{\partial x} - \varkappa\mu\right),\\
\frac{\lambda A' + \mu B'}{\varphi} &= \varkappa L_2 - \mu L_0 = \varphi^{h-1}L' + \varphi\left(\mu\frac{\partial\varkappa}{\partial x} - \varkappa\frac{\partial\mu}{\partial x}\right),\\
\frac{\lambda A'' + \mu B''}{\varphi} &= \lambda L_0 - \varkappa L_1 = \varphi^{h-1}L'' + \varphi\left(\varkappa\frac{\partial\lambda}{\partial x} - \lambda\frac{\partial\varkappa}{\partial x} + \varkappa^2\right),\\
\lambda B + \mu C &= \mu M_1 - \lambda M_2 = \varphi^h M + \varphi\left(\lambda\frac{\partial\mu}{\partial y} - \mu\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \varkappa\lambda\right),\\
\frac{\lambda B' + \mu C'}{\varphi} &= \varkappa M_2 - \mu M_0 = \varphi^{h-1}M' + \varphi\left(\mu\frac{\partial\varkappa}{\partial y} - \varkappa\frac{\partial\mu}{\partial y} - \varkappa^2\right),\\
\frac{\lambda B'' + \mu C''}{\varphi} &= \lambda M_0 - \varkappa M_1 = \varphi^{h-1}M'' + \varphi\left(\varkappa\frac{\partial\lambda}{\partial y} - \lambda\frac{\partial\varkappa}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

definirten Functionen Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ sind;

II.

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= A_0 z + \varphi A_1\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi A_2\frac{\partial z}{\partial y},\\
\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= B_0 z + \varphi B_1\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi B_2\frac{\partial z}{\partial y},\\
\varphi^{h+1}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= C_0 z + \varphi C_1\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi C_2\frac{\partial z}{\partial y};
\end{aligned}
$$

die Coefficienten A, B, C sind Potenzreihen von $x - a$, $y - b$; A_0, B_0, C_0 sind nicht sämmtlich durch φ theilbar; es existiren drei ganze Functionen $\varkappa$, λ, μ von solcher Beschaffenheit, dass sämmtliche durch die Gleichungen

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
\mu A_1 - \lambda A_2 &= \varphi^{h-1}A, & \varkappa A_2 - \mu A_0 &= \varphi^{h-1}A', & \lambda A_0 - \varkappa A_1 &= \varphi^{h-1}A'',\\
\mu B_1 - \lambda B_2 &= \varphi^{h-1}B, & \varkappa B_2 - \mu B_0 &= \varphi^{h-1}B', & \lambda B_0 - \varkappa B_1 &= \varphi^{h-1}B'',\\
\mu C_1 - \lambda C_2 &= \varphi^{h-1}C, & \varkappa C_2 - \mu C_0 &= \varphi^{h-1}C', & \lambda C_0 - \varkappa C_1 &= \varphi^{h-1}C'',
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\lambda A_0 + \mu B_0 = \varphi^{h-1} L_0, \qquad \lambda B_0 + \mu C_0 = \varphi^{h-1} M_0,\\
(19)\qquad &\lambda A_1 + \mu B_1 = \varphi^{h-1} L_1, \qquad \lambda B_1 + \mu C_1 = \varphi^{h-1} M_1,\\
&\lambda A_2 + \mu B_2 = \varphi^{h-1} L_2, \qquad \lambda B_2 + \mu C_2 = \varphi^{h-1} M_2,
\end{aligned}$$

$$(20)\quad \begin{aligned}
\lambda A + \mu B &= \mu L_1 - \lambda L_2 = \varphi^{h-1} L + \varphi\left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) - \varkappa \mu,\\
\lambda A' + \mu B' &= \varkappa L_2 - \mu L_0 = \varphi^{h-1} L' + \varphi\left(\mu \frac{\partial \varkappa}{\partial x} - \varkappa \frac{\partial \mu}{\partial x}\right) - \varkappa \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x},\\
\lambda A'' + \mu B'' &= \lambda L_0 - \varkappa L_1 = \varphi^{h-1} L'' + \varphi\left(\varkappa \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \varkappa}{\partial x}\right) + \varkappa^2 + \varkappa \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x},\\
\lambda B + \mu C &= \mu M_1 - \lambda M_2 = \varphi^{h-1} M + \varphi\left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial y} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) + \varkappa \lambda,\\
\lambda B' + \mu C' &= \varkappa M_2 - \mu M_0 = \varphi^{h-1} M' + \varphi\left(\mu \frac{\partial \varkappa}{\partial y} - \varkappa \frac{\partial \mu}{\partial y}\right) - \varkappa^2 - \varkappa \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y},\\
\lambda B'' + \mu C'' &= \lambda M_0 - \varkappa M_1 = \varphi^{h-1} M'' + \varphi\left(\varkappa \frac{\partial \lambda}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \varkappa}{\partial y}\right) + \varkappa \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}
\end{aligned}$$

definirten Functionen in Potenzreihen entwickelbar sind.

Die Systeme I. *und* II. *sind unter den angegebenen Bedingungen wirklich regulär.*

Wir wollen die Fälle I. und II. als Systeme erster und zweiter Gattung bezeichnen. Wir sehen nun auch, dass das früher behandelte System (3) das einfachste System II. Gattung ist, welches dem Werte $h = 1$ entspricht; die Bedingungen (18), (19), (20) sind in diesem besonderen Falle von selbst erfüllt. Das zu dem Werthe $h = 1$ gehörige System I. Gattung hat die Form

$$(21)\qquad \begin{aligned}
\varphi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= A_0 z + A_1 \frac{\partial z}{\partial x} + A_2 \frac{\partial z}{\partial y},\\
\varphi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= B_0 z + B_1 \frac{\partial z}{\partial x} + B_2 \frac{\partial z}{\partial y},\\
\varphi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= C_0 z + C_1 \frac{\partial z}{\partial x} + C_2 \frac{\partial z}{\partial y};
\end{aligned}$$

sowohl die Coefficienten A, B, C als auch sämmtliche in den Gleichungen[1]

$$A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi A,$$

$$B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi B,$$

$$C_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi C,$$

$$(22) \qquad \begin{aligned} A_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \varphi L_0, & B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - C_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \varphi M_0, \\ A_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \varphi L_1, & B_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - C_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \varphi M_1, \\ A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - B_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \varphi L_2, & B_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - C_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \varphi M_2, \end{aligned}$$

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial y} - B \frac{\partial \varphi}{\partial x} = L_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + L_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi L,$$

$$B \frac{\partial \varphi}{\partial y} - C \frac{\partial \varphi}{\partial x} = M_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + M_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi M$$

enthaltenen Grössen sind Potenzreihen.

Will man *die Form der Integrale der Systeme* I. *und* II. *genauer untersuchen,* so beachtet man, dass dieselben in Systeme von der Form (9), welche Potenzreihen zu Coefficienten haben, übergeführt werden können. Zu den im zweiten Abschnitt der früheren Arbeit über totale Differentialgleichungensysteme enthaltenen Entwicklungen ist eine wichtige Ergänzung hinzuzufügen. Ist p der Exponent einer regulären Lösung

$$z_0 = \varphi^p \zeta_0, \qquad z_1 = \varphi^p \zeta_1, \qquad z_2 = \varphi^p \zeta_2$$

---

[1] Diese Gleichungen folgen aus (14), (15), (16) mit Rücksicht auf die für Systeme I. Gattung stets geltende Beziehung

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} \equiv 0, \ \text{mod}\ \varphi^h.$$

des Systems der Differentialgleichungen

$$(23)\quad \begin{aligned}
\varphi dz_0 &= (A_{00}z_0 + A_{01}z_1 + A_{02}z_2)dx + (B_{00}z_0 + B_{01}z_1 + B_{02}z_2)dy,\\
\varphi dz_1 &= (A_{10}z_0 + A_{11}z_1 + A_{12}z_2)dx + (B_{10}z_0 + B_{11}z_1 + B_{12}z_2)dy,\\
\varphi dz_2 &= (A_{20}z_0 + A_{21}z_1 + A_{22}z_2)dx + (B_{20}z_0 + B_{21}z_1 + B_{22}z_2)dy,
\end{aligned}$$

deren Coefficienten Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ sind, so sieht man aus den Differentialgleichungen für ζ, dass alle aus je drei der sechs Zeilen

$$(24)\quad \begin{array}{ccc}
A_{00} - p\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{01}, & A_{02},\\
A_{10}, & A_{11} - p\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{12},\\
A_{20}, & A_{21}, & A_{22} - p\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\\
B_{00} - p\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, & B_{01}, & B_{02},\\
B_{10}, & B_{11} - p\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, & B_{12},\\
B_{20}, & B_{21}, & B_{22} - p\dfrac{\partial\varphi}{\partial y},
\end{array}$$

gebildeten Determinanten durch φ theilbar sein müssen. Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem sämmtliche aus (24) gebildeten Congruenzen drei Wurzeln p (verschiedene oder zusammenfallende), zwei Wurzeln p oder nur eine Wurzel p gemein haben, oder, was dasselbe ist, je nachdem alle Elemente oder alle Determinanten zweiten Grades oder nur die Determinante dritten Grades des Systems

$$(25)\quad \begin{array}{ccc}
A_{00}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - B_{00}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{01}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - B_{01}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{02}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - B_{02}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\\
A_{10}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - B_{10}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{11}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - B_{11}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - B_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\\
A_{20}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - B_{20}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{21}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - B_{21}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, & A_{22}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - B_{22}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},
\end{array}$$

durch φ theilbar ist. Hiernach unterscheiden wir *Systeme* (23) *von der* *ersten, zweiten und dritten Art.* Die gewöhnliche Form eines Fundamentalsystems ist in den drei Fällen bezw.

$$(26)\qquad \begin{array}{llll} \text{a)}\ z_i^0 = \varphi^{p^0}\zeta_i^0, & \text{b)}\ z_i^0 = \varphi^{p_1}\zeta_i^0, & \text{c)}\ z_i^0 = \varphi^{p_0}\zeta_i^0, & \\ \phantom{\text{a)}}\ z_i' = \varphi^{p'}\zeta_i', & \phantom{\text{b)}}\ z_i' = \varphi^{p_1}\zeta_i', & \phantom{\text{c)}}\ z_i' = \varphi^{p_0}\zeta_i', & (i=0,1,2) \\ \phantom{\text{a)}}\ z_i'' = \varphi^{p''}\zeta_i'', & \phantom{\text{b)}}\ z_i'' = \varphi^{p_2}\zeta_i'', & \phantom{\text{c)}}\ z_i'' = \varphi^{p_0}\zeta_i'', & \end{array}$$

wobei ζ_i^0, ζ_i', ζ_i'' Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ sind.[1]

Um über die Form der Integrale der aufgestellten regulären partiellen Systeme Aufschluss zu erhalten, denken wir uns dieselben in der oben angegebenen Weise in totale Systeme (9) übergeführt; wir finden so, dass das System (9) von der ersten oder zweiten Art ist, wenn es aus einem partiellen System I. Gattung, von der zweiten oder dritten[2] Art, wenn es aus einem partiellen System II. Gattung für $h = 1$, und von der dritten Art, wenn es aus einem partiellen System II. Gattung für $h > 1$ hervorgeht. Aus der Beschaffenheit des totalen Systems (9) folgt aber die Form der Integrale des regulären partiellen Systems; die betreffenden Sätze kann man so aussprechen, dass das beim Beweise benutzte System (9) in ihrem Ausdruck nicht mehr vorkommt.

Es sind somit alle an dem singulären Gebilde $\varphi = 0$ regulären Systeme linearer partieller Differentialgleichungen von der Form (1) aufgestellt, und man kennt die Form ihrer Integrale in der Umgebung solcher Stellen des singulären Gebildes $\varphi = 0$, durch welche nicht noch andere singuläre Gebilde gehen.[3]

Rehbach (Hessen), 15. November 1889.

---

[1] A. a. O. ist die Form der Integrale in allen Fällen untersucht. Unter anderm ergiebt sich, dass bei einem System der dritten Art nie Logarithmen in den Integralen auftreten, während bei der zweiten Art $\log\varphi$ höchstens in der ersten Potenz, bei der ersten Art möglicherweise auch in der zweiten Potenz vorkommen kann.

[2] In meiner Arbeit Acta mathematica, Bd. 12, muss nämlich der S. 156 unten beginnende Absatz unterdrückt werden.

[3] Im letzten Paragraphen meiner Habilitationsschrift finden sich noch einige Erörterungen über die Form der Integrale in der Umgebung der Schnittstellen zweier singulärer Gebilde.