EINIGE ANWENDUNGEN DER FUNCTION $[x]$

VON

JACOB HACKS
in COBLENZ.

Wenn m eine beliebige Zahl ist, so soll die Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m$ bestimmt werden, welche durch ein von der Einheit verschiedenes Quadrat teilbar sind.

Diejenigen Zahlen aus der Reihe von 1 bis m, welche durch 2^2 teilbar sind, sind offenbar in der Anzahl $\left[\frac{m}{2^2}\right]$ vorhanden, wo $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl bedeutet, ebenso die durch 3^2 teilbaren Zahlen in der Anzahl $\left[\frac{m}{3^2}\right]$. Die durch 4^2 teilbaren Zahlen sind in den durch 2^2 teilbaren Zahlen schon einbegriffen. In der Reihe von 1 bis m gibt es ferner $\left[\frac{m}{5^2}\right]$ Zahlen, welche durch 5^2 aufgehen. Wir haben also bis jetzt die Anzahl

$$\left[\frac{m}{2^2}\right] + \left[\frac{m}{3^2}\right] + \left[\frac{m}{5^2}\right].$$

Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, dass diejenigen Zahlen, welche bezw. durch 2^2 und 3^2, durch 2^2 und 5^2, durch 3^2 und 5^2 gleichzeitig aufgehen, zweimal mitgezählt worden sind. Es muss also die Zahl

$$\left[\frac{m}{2^2 . 3^2}\right] + \left[\frac{m}{2^2 . 5^2}\right] + \left[\frac{m}{3^2 . 5^2}\right]$$

subtrahiert werden. Es ist jedoch wiederum der Umstand zu beachten, dass diejenigen Zahlen, welche durch 2^2, 3^2 und 5^2 zugleich teilbar sind, bis jetzt dreimal additiv und dreimal subtraktiv in Rechnung gekommen, also noch gar nicht mitgerechnet sind. Demnach ist die Zahl $\left[\frac{m}{2^2 . 3^2 . 5^2}\right]$ zu addieren. Durch Fortsetzung dieser Betrachtung ergibt sich, wenn man die gesuchte Anzahl mit $p_2(m)$ bezeichnet, die Gleichung

$$(1) \qquad p_2(m) = \left[\frac{m}{2^2}\right] + \left[\frac{m}{3^2}\right] + \left[\frac{m}{5^2}\right] - \left[\frac{m}{2^2 . 3^2}\right] + \left[\frac{m}{7^2}\right] - \left[\frac{m}{2^2 . 5^2}\right]$$
$$+ \left[\frac{m}{11^2}\right] + \left[\frac{m}{13^2}\right] - \left[\frac{m}{2^2 . 7^2}\right] \mp \ldots + \left[\frac{m}{2^2 . 3^2 . 5^2}\right] \pm \ldots .$$

Die Nenner sind die Quadrate derjenigen Zahlen, welche durch kein von der Einheit verschiedenes Quadrat teilbar sind, die Einheit selbst ausgeschlossen. Das Vorzeichen eines jeden Gliedes ist $(-1)^{\rho-1}$, wo ρ die Anzahl der verschiedenen in dem betreffenden Nenner enthaltenen Primfaktoren bezeichnet. Die Allgemeingültigkeit der Gleichung (1) beruht auf dem bekannten Satze: Wenn λ eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, so ist

$$\lambda - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 . 2} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1 . 2 . 3} \pm \ldots + (-1)^{\lambda-1} = 1,$$

welcher aussagt, dass, wenn man von der Anzahl sämtlicher aus λ Elementen gebildeten Unionen die Anzahl sämtlicher Amben subtrahiert, dann zu der Differenz die Anzahl der Ternen positiv, die Anzahl der Quaternionen negativ hinzufügt u. s. w., das Ergebnis dieser Operationen die Einheit sein wird.

Bedeutet allgemein $p_n(m)$ die Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m$, welche durch eine von der Einheit verschiedene n^{te} Potenz teilbar sind, so ergibt sich ganz auf die nämliche Weise

$$(2) \qquad p_n(m) = \left[\frac{m}{2^n}\right] + \left[\frac{m}{3^n}\right] + \left[\frac{m}{5^n}\right] - \left[\frac{m}{2^n . 3^n}\right] \pm \ldots .$$

Mit Hülfe der Gleichung (1) lässt sich jetzt sofort die Anzahl $\Psi_2(m)$ derjenigen Zahlen aus der Reihe von 1 bis m bestimmen, welche *nicht* durch ein von der Einheit verschiedenes Quadrat teilbar sind, indem man die Anzahl $p_2(m)$ von der Zahl m subtrahiert. Es ist also

$$(3) \qquad \Psi_2(m) = \left[\frac{m}{1^2}\right] - \left[\frac{m}{2^2}\right] - \left[\frac{m}{3^2}\right] - \left[\frac{m}{5^2}\right] + \left[\frac{m}{2^2 . 3^2}\right] - \left[\frac{m}{7^2}\right] \pm \ldots .$$

Hier treten als Nenner die Quadrate aller derjenigen Zahlen auf, welche die Zahl m nicht übertreffen und durch kein von der Einheit verschiedenes Quadrat teilbar sind. Das Vorzeichen jedes einzelnen Gliedes richtet sich nach der Anzahl der in der Basis des Nenners enthaltenen Primfaktoren; ist dieselbe ρ, so ist das Vorzeichen $(-1)^\rho$.

An diese Darstellung der Function $\Psi_2(m)$ schliesst sich ein interessanter Satz an. Dividiert man die Zahl m der Reihe nach durch die Quadrate der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, [\sqrt{m}]$, bildet von der in jedem Quotienten enthaltenen grössten ganzen Zahl die Function Ψ_2 und nimmt deren Summe, so erhält man wieder die Zahl m.

Zum Beweise dieses Satzes ist ein Hülfssatz erforderlich, welcher sich in DIRICHLET's *Vorlesungen über Zahlentheorie*, p. 28, findet und folgendermassen lautet:

Ist q die grösste in dem Bruche $\frac{c}{a}$ enthaltene ganze Zahl und q_1 die grösste in $\frac{q}{b}$ enthaltene ganze Zahl, so ist q_1 auch die grösste in dem Bruche $\frac{c}{ab}$ enthaltene ganze Zahl. In Zeichen:

$$\left[\frac{\left[\frac{c}{a}\right]}{b}\right] = \left[\frac{c}{ab}\right].$$

Auf Grund dieses Satzes ist man berechtigt, folgende Gleichungen aufzustellen

$$\begin{aligned}
\Psi_2(m) &= \left[\frac{m}{1^2}\right] - \left[\frac{m}{2^2}\right] - \left[\frac{m}{3^2}\right] - \left[\frac{m}{5^2}\right] + \left[\frac{m}{6^2}\right] - \left[\frac{m}{7^2}\right] + \left[\frac{m}{10^2}\right] \pm \cdots \\
\Psi_2\left[\frac{m}{4}\right] &= \left[\frac{m}{2^2}\right] - \left[\frac{m}{4^2}\right] - \left[\frac{m}{6^2}\right] - \left[\frac{m}{10^2}\right] \pm \cdots \\
\Psi_2\left[\frac{m}{9}\right] &= \left[\frac{m}{3^2}\right] - \left[\frac{m}{6^2}\right] - \left[\frac{m}{9^2}\right] \mp \cdots \\
\Psi_2\left[\frac{m}{16}\right] &= \left[\frac{m}{4^2}\right] - \left[\frac{m}{8^2}\right] \mp \cdots \\
\Psi_2\left[\frac{m}{25}\right] &= \left[\frac{m}{5^2}\right] - \left[\frac{m}{10^2}\right] \mp \cdots \\
\Psi_2\left[\frac{m}{36}\right] &= \left[\frac{m}{6^2}\right] \mp \cdots .
\end{aligned}$$

Die Addition aller dieser Gleichungen ergibt die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes

$$(4)\qquad \Psi_2(m) + \Psi_2\left[\frac{m}{4}\right] + \Psi_2\left[\frac{m}{9}\right] + \Psi_2\left[\frac{m}{16}\right] + \dots + \Psi_2\left[\frac{m}{[\sqrt{m}]^2}\right] = m.$$

Zur vollständigen Begründung dieser Gleichung greifen wir ein beliebiges Glied $(-1)^\rho\left[\frac{m}{a^2b^2c^2\dots}\right]$ des für $\Psi_2(m)$ aufgestellten Ausdruckes heraus, wo $a, b, c, \dots$ lauter verschiedene Primzahlen bedeuten und ρ deren Anzahl bezeichnet. In dem Ausdrucke für $\Psi_2\left[\frac{m}{a^2}\right]$ wird die Zahl $\left[\frac{m}{a^2b^2c^2\dots}\right]$ mit dem Vorzeichen $(-1)^{\rho-1}$ behaftet sein, desgleichen in dem Ausdrucke $\Psi_2\left[\frac{m}{b^2}\right]$ u. s. w. In der Gleichung für $\Psi_2\left[\frac{m}{a^2b^2}\right]$ wird das Glied

$$(-1)^\rho\left[\frac{m}{a^2b^2c^2\dots}\right]$$

vorkommen, ebenso in der Gleichung für $\Psi_2\left[\frac{m}{a^2c^2}\right]$ u. s. w., kurz, bei Addition der obigen Gleichungen wird die Zahl $\left[\frac{m}{a^2b^2c^2\dots}\right]$ in der Verbindung

$$(-1)^\rho\left[\frac{m}{a^2b^2c^2\dots}\right]\left(1-\rho+\frac{\rho(\rho-1)}{1\,.\,2}\mp\dots+(-1)^\rho\right)$$

erscheinen, also vollständig wegfallen. In gleicher Weise kann man zeigen, dass jedes Glied $\left[\frac{m}{a^{2\lambda}b^{2\mu}c^{2\nu}}\right]$ ebenso oft mit dem positiven als mit dem negativen Vorzeichen erscheinen, also sich gleichfalls wegheben muss.

Die Gleichung (4) lässt sich noch auf einem andern Wege ableiten, und dann umgekehrt aus (4) die Gleichung (3), wir wollen jedoch diese Ableitung für die Function $\Psi_3(m)$ machen, welche die Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe von 1 bis m bezeichnet, die durch keine dritte Potenz teilbar sind.

Die Zahlen $1, 2, 3, \dots, m$ mögen in folgender Weise geordnet werden. In die erste Reihe schreiben wir diejenigen Zahlen, welche durch keine dritte Potenz teilbar sind; die Anzahl dieser Zahlen ist $\Psi_3(m)$. In die zweite Reihe schreiben wir diejenigen Zahlen, welche durch 2^3, aber nicht durch die dritte Potenz einer die Zahl 2 übertreffenden Zahl teilbar sind; ihre Anzahl ist $\Psi_3\left[\frac{m}{2^3}\right]$ u. s. w. So entsteht das Schema

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, \ldots \\ 8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5, 8.6, 8.7, 8.9, 8.10, 8.11, \ldots \\ 27.1, 27.2, 27.3, 27.4, 27.5, 27.6, 27.7, 27.9, \ldots \end{array}$$

Es leuchtet ein, dass man auf diese Weise alle Zahlen von 1 bis m erhält; denn wenn eine Zahl μ gegeben ist, so gibt es immer eine dritte Potenz, welche die höchste in μ aufgehende dritte Potenz ist. Andererseits ist es klar, dass keine einzige Zahl in dem vorstehenden Schema zweimal vorkommen kann; denn es ist unmöglich, dass es zwei verschiedene dritte Potenzen gibt, welche die höchsten in eine und dieselbe Zahl μ aufgehenden dritten Potenzen sind. Nun ist die Anzahl der Glieder der ersten Horizontalreihe gleich $\Psi_3(m)$, die Anzahl der Glieder der zweiten Horizontalreihe gleich $\Psi_3\left[\frac{m}{2^3}\right]$, u. s. w., die Anzahl aller Glieder ist m; es entsteht also die Gleichung

$$\Psi_3(m) + \Psi_3\left[\frac{m}{2^3}\right] + \Psi_3\left[\frac{m}{3^3}\right] + \cdots + \Psi_3\left[\frac{m}{[\sqrt[3]{m}]^3}\right] = m. \tag{5}$$

Stellt man diese Gleichung für die Zahlen m, $\left[\frac{m}{2^3}\right]$, $\left[\frac{m}{3^3}\right]$, $\left[\frac{m}{5^3}\right]$, $\left[\frac{m}{6^3}\right]$, $\ldots$ auf, multipliziert in geeigneter Weise mit der positiven oder negativen Einheit und addiert, so ergibt sich eine Darstellung der Function $\Psi_3(m)$

$$\begin{array}{l} \Psi_3(m) + \Psi_3\left[\frac{m}{2^3}\right] + \Psi_3\left[\frac{m}{3^3}\right] + \Psi_3\left[\frac{m}{4^3}\right] + \Psi_3\left[\frac{m}{5^3}\right] + \Psi_3\left[\frac{m}{6^3}\right] + \cdots = m \\ \qquad - \Psi_3\left[\frac{m}{2^3}\right] - \Psi_3\left[\frac{m}{4^3}\right] - \Psi_3\left[\frac{m}{6^3}\right] - \cdots\cdots = -\left[\frac{m}{2^3}\right] \\ \qquad - \Psi_3\left[\frac{m}{3^3}\right] - \Psi_3\left[\frac{m}{6^3}\right] - \cdots\cdots = -\left[\frac{m}{3^3}\right] \\ \qquad - \Psi_3\left[\frac{m}{5^3}\right] - \cdots\cdots = -\left[\frac{m}{5^3}\right] \\ \qquad + \Psi_3\left[\frac{m}{6^3}\right] + \cdots\cdots = \left[\frac{m}{6^3}\right] \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich

$$(6)\qquad \Psi_3(m) = m - \left[\frac{m}{2^3}\right] - \left[\frac{m}{3^3}\right] - \left[\frac{m}{5^3}\right] + \left[\frac{m}{6^3}\right] \mp \ldots$$ [1]

Die zur Begründung der Gleichungen (5) und (6) angewandten Schlüsse sind derart dass sie sich sofort verallgemeinern lassen. Bezeichnet demnach $\Psi_n(m)$ die Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m$, welche durch keine von der Einheit verschiedene n^{te} Potenz teilbar sind, so gelten die Gleichungen

$$(7)\qquad \Psi_n(m) + \Psi_n\left[\frac{m}{2^n}\right] + \Psi_n\left[\frac{m}{3^n}\right] + \Psi_n\left[\frac{m}{4^n}\right] + \ldots = m,$$

$$(8)\qquad \Psi_n(m) = m - \left[\frac{m}{2^n}\right] - \left[\frac{m}{3^n}\right] - \left[\frac{m}{5^n}\right] + \left[\frac{m}{6^n}\right] \pm \ldots .$$

Natürlich lässt sich die letzte Gleichung auch aus (2) ableiten.

Vielleicht verdient der Umstand erwähnt zu werden, dass kein einziges Moment des obigen Beweisverfahrens die Annahme $n = 1$ unmöglich macht. Bedeutet $\Psi_1(m)$ die Anzahl derjenigen Zahlen aus der Reihe von 1 bis m, welche durch keine von der Einheit verschiedene erste Potenz, d. h. durch keine von der Einheit verschiedene ganze Zahl aufgehen, so ist offenbar $\Psi_1(m) = 1$, $\Psi_1\left[\frac{m}{2}\right] = 1, \ldots,$ und die Gleichung (7) geht für $n = 1$ in $m = m$ über; aus der Gleichung (8) hingegen fliesst der Satz

$$(9)\qquad m - \left[\frac{m}{2}\right] - \left[\frac{m}{3}\right] - \left[\frac{m}{5}\right] + \left[\frac{m}{6}\right] - \left[\frac{m}{7}\right] + \left[\frac{m}{10}\right] \mp \ldots = 1.$$

Diese merkwürdige Gleichung kann man auch auf folgende Art beweisen. Man denke sich die Zahl m in m Einheiten zerlegt und dieselben mit fortlaufenden Zeigern versehen, so dass die letzte Einheit den Zeiger m hat. Sodann entferne man diejenigen Einheiten, deren Zeiger gerade sind, dann diejenigen, deren Zeiger durch 3, durch 5, durch $7, \ldots$ teilbar sind. Darauf füge man diejenigen Einheiten, deren Zeiger durch $6 = 2.3$,

[1] Die Gleichungen (1), (3), (5) und (6), sowie deren Beweise sind einer Vorlesung des Herrn Professor LIPSCHITZ entnommen.

durch 10, durch 14, durch 15, ... teilbar sind, wieder hinzu. Hierauf streiche man wieder diejenigen Einheiten, deren Zeiger durch $30 = 2.3.5$ teilbar sind, u. s. w., u. s. w. Es folgt dann aus einem schon mehrfach benutzten Satze, dass nur die erste Einheit übrig geblieben ist, und dass mithin Gleichung (9) zu Recht besteht. Der Kern dieses zweiten Beweises ist, wie man sieht, von dem des ersten Beweises nicht verschieden.

Die Gleichung (3) lässt sich zu einem Beweise des Satzes verwerten, dass die Anzahl der Primzahlen jede Grenze übersteigt. Aus (3) folgt, wie man leicht sieht, die Ungleichheit

$$\Psi_2(m) > m - \left[\frac{m}{2^2}\right] - \left[\frac{m}{3^2}\right] - \left[\frac{m}{5^2}\right] - \left[\frac{m}{7^2}\right] - \dots,$$

oder bei Anwendung des Summenzeichens

$$\Psi_2(m) > m - \sum \left[\frac{m}{p^2}\right],$$

wo p die Reihe der nicht über m gelegenen Primzahlen durchläuft.

Nun ist

$$\sum \left[\frac{m}{p^2}\right] < m \sum \frac{1}{p^2} < m \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{1}{s^2},$$

also

$$\Psi_2(m) > m\left(1 - \sum_2^\infty \frac{1}{s^2}\right),$$

oder da

$$\sum_1^\infty \frac{1}{s^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ist,

$$\Psi_2(m) > m\left(2 - \frac{\pi^2}{6}\right).$$

Lässt man jetzt m über jedes Mass hinaus wachsen, so nimmt auch $\Psi_2(m)$ einen beliebig grossen Wert an, da der Faktor $2 - \frac{\pi^2}{6}$ einen positiven endlichen Wert hat. $\Psi_2(m)$ ist aber die Anzahl aller diejenigen

Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m$, welche entweder selbst Primzahlen oder aus lauter verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt sind. Diese Anzahl wächst also mit wachsendem m über jedes Mass hinaus. Hieraus folgt, dass auch die Anzahl der Primzahlen jedes Mass übersteigt; denn aus einer endlichen Anzahl von Elementen lassen sich nicht beliebig viele Combinationen ohne Wiederholung bilden.