ÜBER DIE DARSTELLUNG DER DETERMINANTE EINES SYSTEMS

WELCHES AUS ZWEI ANDEREN COMPONIRT IST

VON

K. HENSEL

in BERLIN.

Aus den beiden Systemen variabler Elemente:

$$(1)\qquad (a_{h,i})\,,\ (b_{k,l}) \qquad \binom{h,i=1,2,\ldots,m}{k,l=1,2,\ldots,n}$$

denke man sich das dritte System von $(mn)^2$ Elementen:

$$(2)\qquad (c_{h,k}^{i,l}) = (a_{h,i}\,.\,b_{k,l})$$

so gebildet, dass den verschiedenen Werthecombinationen von $h\,,\,k$ die Horizontalreihen, denen von $i\,,\,l$ die Verticalreihen entsprechen.

Eine derartige Composition tritt sehr häufig bei arithmetisch-algebraischen Untersuchungen auf,[1] und es ist der Zweck der folgenden Zeilen, die Determinante des componirten Systems (2) durch diejenigen der componirenden Systeme auszudrücken.

Es seien nun:

$$D_a = |\,a_{h,i}\,|,\qquad D_b = |\,b_{k,l}\,|,\qquad D_{ab} = |\,a_{h,i}\,.\,b_{k,l}\,|$$

jene drei Determinanten; man erkennt dann unmittelbar, dass D_{ab} in Bezug auf die Elemente beider Systeme von der mn^{ten} Dimension ist, und sie

[1] Vgl. z. B. meine Arbeit *Über Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen,* Crelles Journal, Bd. 105, pag. 337.

kann von vorn herein so geordnet angenommen werden, dass sie sich auf das Glied:

$$(3) \qquad (a_{11} \dots a_{m,m})^n (b_{11} \dots b_{n,n})^m$$

reducirt, sobald alle Glieder mit ungleichen Indices verschwinden.

Bekanntlich verschwindet nun D_{ab} dann und nur dann, wenn die (mn) homogenen linearen Gleichungen:

$$(4) \qquad \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{h,k} \cdot a_{h,i} \cdot b_{k,l} = 0 \qquad \binom{i=1,\dots,m}{l=1,\dots,n}$$

mindestens eine Lösung ausser der selbstverständlichen $x_{h,k} = 0$ zulassen. Diese Gleichungen lassen sich aber auf zwei verschiedene Arten durch ein System von $2mn$ homogenen linearen Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten ersetzen. Setzt man nämlich:

$$X_{h,l} = \sum_{k=1}^{n} x_{h,k} b_{k,l}, \qquad Y_{k,i} = \sum_{h=1}^{m} x_{h,k} a_{h,i}, \qquad \binom{h,i=1,2,\dots,m}{k,l=1,2,\dots,n}$$

so ergeben sich für (4) die folgenden beiden äquivalenten Systeme:

$$(5^a) \qquad \sum_{h=1}^{m} a_{h,i} X_{h,l} = 0, \qquad (5^b) \qquad \sum_{k=1}^{n} x_{h,k} b_{k,l} = X_{h,l}, \qquad \binom{h,i=1,2,\dots,m}{l=1,2,\dots,n}$$

$$(6^a) \qquad \sum_{k=1}^{n} b_{k,l} Y_{k,i} = 0, \qquad (6^b) \qquad \sum_{h=1}^{m} x_{h,k} a_{h,i} = Y_{k,i}. \qquad \binom{i=1,2,\dots,m}{k,l=1,2,\dots,n}$$

Ist nun zunächst $D_a . D_b$ von Null verschieden, so kann den (mn) Gleichungen (5^a), da ihre Determinante D_a nicht verschwindet, nur durch verschwindende Werthe der $X_{h,l}$ genügt werden, und diesen entsprechen auch nur verschwindende Werthe der $x_{h,k}$, da auch die Determinante D_b der Gleichungen (5^b) von Null verschieden ist. In diesem Falle ist also D_{ab} nicht Null.

Ist dagegen $D_a . D_b$ gleich Null, verschwindet also z. B. D_b, so ergiebt sich aus den Gleichungen (5^b) auch dann noch ein System von nicht verschwindenden Werthen für die $x_{h,k}$, wenn man alle $X_{h,l}$ gleich Null annimmt. Da also in diesem Falle die Gleichungen (5^a) und (5^b), oder, was dasselbe ist, die Gleichungen (4) eine Lösung zulassen, so ergiebt sich das Verschwinden ihrer Determinante D_{ab}. Ist endlich D_a gleich Null, so ergiebt sich durch dieselben Schlüsse dasselbe Resultat aus den Gleichungen (6^a) und (6^b).

Es ergiebt sich also der folgende Satz:

Die Determinante D_{ab} des componirten Systems verschwindet dann und nur dann, wenn das Product der Determinanten der componirenden Systeme verschwindet.

Berücksichtigt man aber, dass die Elemente $a_{h,i}$ und $b_{k,l}$ unabhängige Variable sind, so ergiebt sich aus diesem Satze durch bekannte Schlüsse, dass D_{ab} mit D_a und D_b durch eine Gleichung:

$$D_{ab} = cD_a^{\lambda} . D_b^{\mu} \tag{7}$$

verbunden ist, in welcher c eine noch zu bestimmende Constante und λ und μ ganzzahlige Exponenten sind. Setzt man hier voraus, dass in beiden Systemen alle Elemente verschwinden, deren Indices von einander verschieden sind, so ergiebt sich aus der Vergleichung von (7) mit (3):

$$c = 1, \qquad \lambda = n, \qquad \mu = m,$$

und man erhält die wichtige Determinantenrelation:

$$|a_{h,i} . b_{k,l}| = |a_{h,i}|^n . |b_{k,l}|^m. \qquad \binom{h, i=1,2,\ldots,m}{k, l=1,2,\ldots,n} \tag{8}$$

Ich bemerke noch, dass Herr Kronecker diesen Satz schon vor längerer Zeit in seinen algebraischen Vorlesungen angeführt und ihn durch eine elegante Umformung der zu untersuchenden Determinante mit Hülfe des Multiplicationssatzes bewiesen hat. Ferner hat Herr G. Rados (Mathematisch-naturwissenschaftliche Mittheilungen aus Ungarn, Bd. 4, pag. 268) dieselbe Aufgabe mit Hülfe der Grassmann'schen Theorie gelöst. Ich glaubte indessen diese Herleitung angeben zu sollen, da sie von den soeben erwähnten ganz verschieden und, wie mir scheint, völlig elementar ist.

Berlin den 12. Mai 1889.