# SUR DEUX THÉORÈMES RELATIFS AUX PROBABILITÉS

PAR

P. TCHEBYCHEFF

à S:t PÉTERSBOURG.

(Traduit du russe[1] par I. Lyon.)

§ 1. Dans un mémoire, sous le titre: *des valeurs moyennes,*[2] nous avons montré comment on obtient des *inégalités,* d'où l'on déduit facilement un théorème sur les probabilités qui contient comme cas particuliers le théorème de BERNOULLI et la loi des grands nombres. Ce théorème nous l'avons ainsi formulé:

*Si les espérances mathématiques des quantités*

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

*et de leurs carrés*

$$u_1^2, u_2^2, u_3^2, \ldots$$

*ne dépassent pas une limite finie quelconque, la probabilité que la différence entre la moyenne arithmétique d'un nombre $n$ de ces quantités et la moyenne arithmétique de leurs espérances mathématiques sera moindre qu'une quantité donnée, se réduit à l'unité, lorsque $n$ devient infini.*

---

[1] О двухъ теоремахъ относительно вѣроятностей. Записки Академіи Наукъ. Томъ 55, книжка 2. Приложеніе, № 6. С.-Петербургъ. 1887.

[2] О среднихъ величинахъ. Математическій Сборникъ, т. 2. — Traduction française, Journal de Liouville, 2me série, tome 12.

Nous avons été conduit à ce résultat en cherchant à déterminer les valeurs limites d'une intégrale d'après les valeurs données des autres intégrales qui contiennent sous le signe $\int$, outre des fonctions connues, une fonction inconnue, assujettie à la seule condition de ne pas devenir négative entre les limites d'intégration. En développant la méthode employée dans ces recherches nous arrivons, dans un cas particulier, au théorème suivant sur les intégrales:[1]

*Si la fonction $f(x)$ reste constamment positive et si l'on a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{q^2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x)dx = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-2} f(x)dx = \frac{1.3.5\ldots(2m-3)}{q^{2m-2}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1} f(x)dx = 0,$$

*la valeur de l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)dx$$

*sera comprise entre les limites*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx - \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx + \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}},$$

*pour toutes les valeurs réelles de $v$.*

---

[1] *Sur les résidus intégraux qui donnent des valeurs approchées des intégrales*, ce journal, t. 12, p. 287. (Traduction du mémoire: Объ интегральныхъ вычетахъ, доставляющихъ приближенныя величины интеграловъ. Записки Академіи Наукъ, т. 55.)

Nous allons montrer maintenant, comment ce théorème sur les intégrales conduit à un théorème sur les probabilités, à l'aide duquel la détermination des valeurs les plus sûres des inconnues, quand on a un grand nombre d'équations qui contiennent des erreurs accidentelles plus ou moins considérables, se ramène à la méthode *des moindres carrés.* Ce théorème peut être ainsi formulé:

*Si les espérances mathématiques des quantités*

$$u_1\,,\ u_2\,,\ u_3\,,\ \ldots$$

*sont toutes nulles et si les espérances mathématiques de toutes leurs puissances ne dépassent pas une limite finie quelconque, la probabilité que la somme d'un nombre $n$ de ces quantités, divisée par la racine carrée de la double somme des espérances mathématiques de leurs carrés, sera comprise entre deux limites quelconques $t$ et $t'$, se réduit à*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{t'} e^{-x^2}\,dx$$

*lorsque le nombre $n$ devient infini.*

§ 2. Pour démontrer ce théorème sous la forme la plus générale, nous prendrons $-\infty$ et $+\infty$ pour les limites entre lesquelles sont comprises toutes les valeurs possibles des quantités

$$u_1\,,\ u_2\,,\ u_3\,,\ \ldots$$

En désignant par

$$\varphi_1(x)dx\,,\ \varphi_2(x)dx\,,\ \varphi_3(x)dx\,,\ \ldots$$

les probabilités que les valeurs des quantités $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sont comprises entre les limites infiniment voisines

$$x\,,\ x+dx,$$

nous remarquons:

1) que les fonctions

$$\varphi_1(x)\,,\ \varphi_2(x)\,,\ \varphi_3(x)\,,\ \ldots$$

ne peuvent pas avoir des valeurs négatives;

2) que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(u_1)du_1\,,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(u_2)du_2\,,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_3(u_3)du_3\,,\,\ldots,$$

qui représentent les probabilités que les quantités $u_1\,,\,u_2\,,\,u_3\,,\,\ldots$ auront des valeurs quelconques comprises entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, seront égales à l'unité;

3) que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_1\varphi_1(u_1)du_1\,,\quad \int_{-\infty}^{\infty}u_2\varphi_2(u_2)du_2\,,\quad \int_{-\infty}^{\infty}u_3\varphi_3(u_3)du_3\,,\,\ldots,$$

qui représentent les espérances mathématiques des quantités $u_1, u_2, u_3, \ldots$, d'après notre hypothèse, doivent être nulles;

4) qu'en général, toutes les quantités $a_i^{(\mu)}$ définies par l'égalité

$$a_i^{(\mu)} = \int_{-\infty}^{\infty}u_i^{\mu}\varphi_i(u_i)\,du_i,$$

qui représentent les espérances mathématiques des différentes puissances des quantités $u_1, u_2, \ldots$, seront, par hypothèse, comprises entre des limites finies.

D'autre part, en désignant par

$$f(x)dx$$

la probabilité que la valeur de la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{n}}$$

sera comprise entre les limites infiniment voisines

$$x\,,\,x + dx,$$

nous remarquons que cette probabilité sera donnée par l'égalité

$$f(x)dx = \iint\ldots\int\varphi_1(u_1)\varphi_2(u_2)\,\ldots\,\varphi_n(u_n)du_1du_2\,\ldots\,du_n,$$

dans laquelle l'intégration par rapport à $u_1\,,\,u_2\,,\,\ldots,\,u_n$ s'étend sur toutes les valeurs de ces quantités pour lesquelles la valeur de la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{n}}$$

ne sort pas des limites infiniment voisines $x, x+dx$. En multipliant cette égalité membre à membre avec l'égalité

$$e^{sx} = e^{s\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{n}}}$$

où $s$ désigne une constante arbitraire quelconque, et en intégrant de $x = -\infty$ à $x = \infty$, nous trouvons l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f(x)dx = \iint \ldots \int e^{s\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1)\varphi_2(u_2) \ldots \varphi_n(u_n) du_1 du_2 \ldots du_n.$$

Comme dans le second membre l'intégration par rapport à

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

s'étend sur toutes les valeurs de ces quantités entre $-\infty$ et $+\infty$, le second membre de cette égalité se réduit au produit des intégrales simples

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1) du_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}} \varphi_2(u_2) du_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}} \varphi_n(u_n) du_n.$$

Nous aurons donc l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f(x) dx = \prod_{i=1}^{i=n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}} \varphi_i(u_i) du_i. \tag{1}$$

En développant les deux membres de cette égalité suivant les puissances de la constante arbitraire $s$ et en égalant les coefficients des mêmes puissances de $s$, nous trouverons les valeurs des intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx, \ldots$$

qui représentent les espérances mathématiques des différentes puissances de la quantité

$$x = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{n}}$$

et qui nous serviront à déterminer les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)dx$$

qui représente la probabilité que la valeur de la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{n}}$$

ne dépassera pas la valeur d'une quantité quelconque $v$.

§ 3. En nous bornant à la détermination de $2m$ intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\,,\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\,, \ldots,\ \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1}f(x)dx$$

nous remarquons que le premier membre de l'égalité (1), développé suivant les puissances de $s$ jusqu'au terme de l'ordre $s^{2m-1}$, donnera la somme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \frac{s}{1}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + \frac{s^2}{1\,.\,2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{s^{2m-1}}{1\,.\,2\ldots(2m-1)}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1}f(x)dx.$$

Pour déterminer les termes correspondants dans le second membre, nous allons le mettre sous la forme

$$e^{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \log \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}}\varphi_i(u_i)du_i}$$

et l'on voit que le développement du second membre de (1), rigoureux jusqu'au terme de l'ordre $s^{2m-1}$ inclusivement, s'obtiendra en y remplaçant les logarithmes par leurs développements en séries arrêtés aux termes de l'ordre $s^{2m-1}$. Pour déterminer les développements de ces logarithmes, nous remarquons que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}}\varphi_i(u_i)du_i$$

sera donnée par l'expression approximative suivante, rigoureuse jusqu'au terme de l'ordre $s^{2m-1}$ inclusivement:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(u_i)du_i + \frac{s}{1\,.\,\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty} u_i\varphi_i(u_i)du_i + \frac{s^2}{1\,.\,2\,.\,(\sqrt{n})^2}\int_{-\infty}^{\infty} u_i^2\varphi_i(u_i)du_i + \ldots$$

$$\ldots + \frac{s^{2m-1}}{1\cdot 2\ldots(2m-1)(\sqrt{n})^{2m-1}}\int_{-\infty}^{\infty} u_i^{2m-1}\varphi_i(u_i)du_i$$

et cette expression, d'après le § 2, se réduit à

$$1+\frac{a_i^{(2)}}{1.2.(\sqrt{n})^2}s^2+\frac{a_i^{(3)}}{1.2.3.(\sqrt{n})^3}s^3+\ldots+\frac{a_i^{(2m-1)}}{1.2\ldots(2m-1)(\sqrt{n})^{2m-1}}s^{2m-1}$$

où, par hypothèse, les quantités $a_i$ sont toutes finies. En développant le logarithme de cette expression suivant les puissances de $s$ et en s'arrêtant au terme de l'ordre $s^{2m-1}$, nous trouverons une expression de la forme

$$\frac{a_i^{(2)}}{2(\sqrt{n})^2}s^2+\frac{A_i^{(3)}}{(\sqrt{n})^3}s^3+\ldots+\frac{A_i^{(2m-1)}}{(\sqrt{n})^{2m-1}}s^{2m-1},$$

dans laquelle les quantités $A_i$ seront des fonctions entières des quantités $a_i$ ne contenant pas $n$; elles seront donc aussi toutes finies.

On aura donc, avec un degré d'approximation jusqu'au terme de l'ordre $s^{2m-1}$ inclusivement

$$\log\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}}\varphi_i(u_i)du_i=\frac{a_i^{(2)}}{2(\sqrt{n})^2}s^2+\frac{A_i^{(3)}}{(\sqrt{n})^3}s^3+\ldots+\frac{A_i^{(2m-1)}}{(\sqrt{n})^{2m-1}}s^{2m-1}.$$

En y faisant $i=1,2,\ldots,n$ et en posant

$$\frac{a_1^{(2)}+a_2^{(2)}+\ldots+a_n^{(2)}}{n}=\frac{1}{q^2},$$

$$\frac{A_1^{(3)}+A_2^{(3)}+\ldots+A_n^{(3)}}{n}=M^{(3)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{A_1^{(2m-1)}+A_2^{(2m-1)}+\ldots+A_n^{(2m-1)}}{n}=M^{(2m-1)},$$

on trouve, avec le même degré d'approximation,

$$\sum_{i=1}^{i=n}\log\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{su_i}{\sqrt{n}}}\varphi_i(u_i)du_i=\frac{s^2}{2q^2}+\frac{M^{(3)}}{\sqrt{n}}s^3+\ldots+\frac{M^{(2m-1)}}{(\sqrt{n})^{2m-3}}s^{2m-1},$$

où les quantités $M$, comme les moyennes arithmétiques des quantités finies $A_1, A_2, \ldots, A_n$, seront aussi toutes finies. On aura donc, avec un degré d'approximation jusqu'au terme de l'ordre $s^{2m-1}$,

$$(2)\qquad\int_{-\infty}^{\infty}e^{sx}f(x)dx=e^{\frac{s^2}{2q^2}+\frac{M^{(3)}}{\sqrt{n}}s^3+\ldots+\frac{M^{(2m-1)}}{(\sqrt{n})^{2m-3}}s^{2m-1}}.$$

§ 4. Quel que soit $n$, nous pourrons tirer de cette égalité les valeurs de $2m$ intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,\ \ldots,\ \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1}f(x)dx,$$

en arrêtant les développements des deux membres de cette égalité aux termes de l'ordre $s^{2m-1}$.

Dans le cas particulier de $n = \infty$, l'égalité (2) se réduit à

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}f(x)dx = e^{\frac{s^2}{2q^2}},$$

puisque les quantités $M$, comme on a vu, sont toutes finies. En développant les deux membres de cette égalité suivant les puissances de $s$ et en s'arrêtant aux termes de l'ordre $s^{2m-1}$, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \frac{s}{1}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + \frac{s^2}{1\,.\,2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx + \ldots$$

$$\ldots + \frac{s^{2m-1}}{1\,.\,2\ldots(2m-1)}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1}f(x)dx = 1 + \frac{s^2}{2q^2} + \frac{s^4}{1\,.\,2(2q^2)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{s^{2m-2}}{1\,.\,2\ldots(m-1)(2q^2)^{m-1}},$$

et en égalant les coefficients des mêmes puissances de $s$, nous trouvons

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx = \frac{1}{q^2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^3f(x)dx = 0,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-2}f(x)dx = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2m-3)}{q^{2m-2}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1}f(x)dx = 0.$$

Comme la fonction $f(x)$ qui figure sous le signe $\int$, par sa nature même, ne peut pas avoir des valeurs négatives, nous concluons, d'après le théorème sur les intégrales cité au § 1, que la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)\,dx$$

est comprise entre les limites

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx - \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx + \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}}.$$

D'où, en remarquant que la valeur de la fraction

$$\frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}},$$

tend vers zéro lorsque le nombre $m$ augmente indéfiniment, nous tirons l'égalité

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx.$$

En y faisant successivement

$$v = \frac{\sqrt{2}}{q}t, \qquad v = \frac{\sqrt{2}}{q}t'$$

nous trouvons les égalités

$$\int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{2}}{q}t} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-x^2}dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{2}}{q}t'} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t'} e^{-x^2}dx,$$

qui par la soustraction nous donnent

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{q}t}^{\frac{\sqrt{2}}{q}t'} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{t'} e^{-x^2}dx.$$

Le premier membre de cette égalité, d'après le § 2, représente la probabilité que la valeur de la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{n}}$$

sera comprise entre les limites $\frac{\sqrt{2}}{q}t$ et $\frac{\sqrt{2}}{q}t'$, et par conséquent la valeur de la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{\frac{2n}{q^2}}} = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{2(a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \ldots + a_n^{(2)})}}$$

sera comprise entre les limites $t$ et $t'$; en vertu de quoi cette égalité qui a lieu pour $n = \infty$ montre que la probabilité que la valeur de la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{2(a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \ldots + a_n^{(2)})}}$$

sera comprise entre deux limites quelconques $t$ et $t'$, a pour limite lorsque $n$ augmente indéfiniment la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{t'} e^{-x^2}dx.$$

C. Q. F. D.

Dans le cas de $n$ fini, la probabilité que la fraction

$$\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{\sqrt{2(a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + \ldots + a_n^{(2)})}}$$

sera comprise entre les limites $t$ et $t'$, différera plus ou moins de sa valeur limite

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{t'} e^{-x^2}dx,$$

selon la valeur de $n$ et des quantités

$$q\,,\, M^{(3)}\,,\, \ldots\,,\, M^{(2m-1)}$$

qui figurent dans l'égalité (2) et dont les valeurs, comme on a vu, dépendent des valeurs des espérances mathématiques des différentes puissances des quantités

$$u_1\,,\, u_2\,,\, \ldots\,,\, u_n.$$

Sans nous arrêter ici à la détermination de la limite supérieure de cette différence pour $n$ assez grand, nous remarquerons seulement que, d'après les formules de notre mémoire *sur le développement des fonctions à une seule variable,*[1] cette probabilité pour $n$ quelconque sera donnée par l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{t'}\left[1 - K_3\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^3 \psi_3(x) + K_4\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)^4 \psi_4(x) + \ldots\right] e^{-x^2} dx$$

dans laquelle les quantités $K_3\,,\, K_4\,,\, \ldots$ sont les coefficients de $s^3$, $s^4$, ... dans le développement de la fonction

$$e^{\frac{M^{(3)}}{\sqrt{n}}s^3 + \frac{M^{(4)}}{(\sqrt{n})^2}s^4 + \ldots}$$

suivant les puissances de $s$; et les fonctions

$$\psi_3(x)\,,\, \psi_4(x)\,,\, \ldots$$

sont des polynômes qui s'obtiennent par la formule

$$\psi_i(x) = e^{x^2}\frac{d^i e^{-x^2}}{dx^i}.$$

[1] Bulletin de l'académie des sciences de S:t Pétersbourg, tome I. 1859.