# LES INVARIANTS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

PAR

F. BRIOSCHI

à MILAN.

I. Si l'on transforme une équation différentielle linéaire:

$$y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2} p_2 y^{(n-2)} + \ldots + n p_{n-1} y' + p_n y = 0, \tag{1}$$

dans laquelle:

$$y^{(r)} = \frac{d^r y}{dx^r}$$

et $p_2, p_3, \ldots, p_n$ fonctions de $x$, en posant:

$$y = \rho v, \tag{2}$$

$\rho$ fonction de $x$, $v$ fonction d'une nouvelle variable $z$, elle aussi fonction de $x$, et l'on suppose:

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{n-1}{2} \frac{z''}{z'},$$

la transformée aura la forme:

$$\frac{d^n v}{dz^n} + \frac{n(n-1)}{2} q_2 \frac{d^{n-2} v}{dz^{n-2}} + \ldots + n q_{n-1} \frac{dv}{dz} + q_n v = 0.$$

Soient:

$$\frac{z''}{z'} = Z, \qquad -Z' + \frac{1}{2} Z^2 = P_2, \qquad P_{r+1} = P_r' - rZP_r,$$

on trouve très facilement que les quantités:

$$q_2 z'^2, \; q_3 z'^3, \; \ldots, \; q_n z'^n$$

peuvent s'exprimer en fonction de $p_2, p_3, \ldots, Z, P_2, P_3, \ldots$. On a, par exemple:

$$q_2 z'^2 = p_2 + \frac{n+1}{2 \cdot 3} P_2,$$

$$q_3 z'^3 = p_3 - 3p_2 Z + \frac{n+1}{4} P_3,$$

$$q_4 z'^4 = p_4 - 6p_3 Z + 9p_2 Z^2 + (n+5)p_2 + \frac{(n+1)(5n+7)}{3 \cdot 4 \cdot 5} P_2^2 + \frac{3(n+1)}{2 \cdot 5} P_4,$$

et ainsi de suite. En différentiant par rapport à $x$ la première de ces relations on a:

$$\frac{dq_2}{dz} z'^3 = p_2' - 2p_2 Z + \frac{n+1}{2 \cdot 3} P_3$$

et à cause de la seconde:

$$\left[q_3 - \frac{3}{2}\frac{dq_2}{dz}\right] z'^3 = p_3 - \frac{3}{2} p_2'.$$

L'expression:

$$p_3 - \frac{3}{2} p_2' = a_3 \quad \text{ou encore:} \quad q_3 - \frac{3}{2}\frac{dq_2}{dz} = \alpha_3$$

a été nommée par Laguerre invariant de l'équation différentielle linéaire.

Une équation différentielle linéaire de l'ordre $n$ a $n-2$ invariants de cette espèce, qu'on peut nommer invariants fondamentaux, parce que les autres, comme on verra dans la suite, se forment avec ceux-ci. Pour chacun d'eux on a:

$$\alpha_r z'^r = a_r,$$

$a_r$ étant fonction de $p_2, p_3, \ldots, p_r$ et de leurs dérivées, et analoguement pour $\alpha_r$.

M. Forsyth dans son travail *Invariants, Covariants associated with Linear Differential Equations,*[1] a calculé les expressions de $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$; lesquelles avec de petites modifications de forme sont les suivantes:

[1] Philosophical Transactions, Vol. 179, 1888.

$$
\begin{aligned}
& a_3 = p_3 - \frac{3}{2} p_2', \\
& a_4 = p_4 - 2p_3' + \frac{6}{5} p_2'' - \frac{3}{5} \frac{5n+7}{n+1} p_2^2, \\
& a_5 = p_5 - \frac{5}{2} p_4' + \frac{15}{7} p_3'' - \frac{5}{7} p_2''' - \frac{10}{7} \frac{7n+13}{n+1} p_2 a_3, \\
(4) \quad & a_6 = p_6 - 3p_5' + \frac{10}{3} p_4'' - \frac{5}{3} p_3''' + \frac{5}{14} p_2^{\mathrm{IV}} - 5 \frac{3n+7}{n+1} p_2 a_4 \\
& \qquad - \frac{7n+8}{14(n+1)} (4p_2 p_2'' - 5p_2'^2) - \frac{3}{7} \frac{35n^2 + 112n + 93}{(n+1)^2} p_2^3, \\
& a_7 = p_7 - \frac{7}{2} p_6' + \frac{105}{22} p_5'' - \frac{35}{11} p_4''' + \frac{35}{33} p_3^{\mathrm{IV}} - \frac{7}{44} p_2^{\mathrm{V}} \\
& \qquad - \frac{21}{11} \frac{11n+31}{n+1} p_2 a_5 - \frac{9}{22} \frac{385n^2 + 1728n + 1919}{(n+1)^2} p_2^2 a_3 \\
& \qquad - \frac{3n+4}{11(n+1)} [10 p_2 a_3'' - 35 p_2' a_3' + 21 p_2'' a_3].
\end{aligned}
$$

Le calcul de la partie linéaire d'un invariant quelconque $a_r$ ne présente pas de difficulté; on trouve en effet qu'elle est la suivante:

$$
(5) \qquad \sum\nolimits_s A_{r,s} \left[ p_{r-2s}^{(2s)} - \frac{(r-2s)(r-2s-1)}{2(2s+1)(r-s-1)} p_{r-2s-1}^{(2s+1)} \right],
$$

où l'on a

$$
A_{r,0} = 1, \qquad A_{r,s+1} = \frac{(r-2s-2)(r-2s-1)^2(r-2s)}{4(s+1)(2s+1)(r-s-1)(2r-2s-3)} A_{r,s},
$$

et $s = 0, 1, \ldots, \frac{r}{2} - 1$ pour $r$ pair; $s = 0, 1, \ldots, \frac{r-3}{2}$ pour $r$ impair. L'autre partie doit se calculer dans chaque cas; pourtant on peut la rendre moins compliquée de la manière suivante.

2. Soient $\xi_1$, $\xi_2$ deux intégrales de l'équation différentielle du second ordre:

$$
\xi'' + \frac{3}{n+1} p_2 \xi = 0;
$$

en posant:

$$y = \varphi(\xi_1, \xi_2),$$

$\varphi$ étant une forme de l'ordre $n - 1$ à coefficients constants, on aura l'équation différentielle linéaire suivante, de l'ordre $n$ en $y$:

$$y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2} l_2 y^{(n-1)} + \ldots + n l_{n-1} y' + l_n y = 0, \tag{6}$$

dans laquelle:

$$l_2 = p_2, \qquad l_3 = \frac{3}{2} p_2', \qquad l_4 = \frac{9}{5} p_2'' + \frac{3(5n+7)}{5(n+1)} p_2^2,$$

$$l_5 = 2 p_2''' + \frac{3(5n+7)}{n+1} p_2 p_2',$$

$$l_6 = \frac{15}{7} p_2^{\text{IV}} + \frac{9(21n+29)}{7(n+1)} p_2 p_2'' + \frac{5 \cdot 9}{2 \cdot 7} \frac{7n+10}{n+1} p_2'^2 + \frac{3(35n^2+112n+93)}{7(n+1)^2} p_2^3,$$

$$l_7 = \frac{9}{4} p_2^{\text{V}} + \frac{3(14n+19)}{n+1} p_2 p_2''' + \frac{27(7n+10)}{2(n+1)} p_2' p_2'' + \frac{9(35n^2+112n+93)}{2(n+1)^2} p_2^2 p_2',$$

et ainsi de suite. Si l'on transforme l'équation différentielle ci-dessus au moyen de la relation (2) on obtiendra la transformée

$$\frac{d^n v}{dz^n} + \frac{n(n-1)}{2} m_2 \frac{d^{n-2} v}{dz^{n-2}} + \ldots + n m_{n-1} \frac{dv}{dz} + m_n v = 0$$

et les coefficients $m_2, m_3, \ldots, m_n$ seront formés avec $q_2$ et ses dérivées par rapport à $z$, comme les $l_2, l_3, \ldots, l_n$ le sont avec $p_2$ et ses dérivées par rapport à $x$. Mais d'autre part les expressions:

$$m_2 z'^2, \; m_3 z'^3, \ldots, m_n z'^n$$

doivent se déduire des correspondantes pour $q_2 z'^2$, $q_3 z'^3, \ldots$ en substituant $l_2, l_3, \ldots$ à $p_2, p_3, \ldots$; et réciproquement. En conséquence si l'on pose:

$$\mu_r = q_r - m_r, \qquad \lambda_r = p_r - l_r$$

on aura:

$$\mu_3 z'^3 = \lambda_3, \qquad \mu_4 z'^4 = \lambda_4 - 6\lambda_3 Z,$$

$$\mu_5 z'^5 = \lambda_5 - 10\lambda_4 Z + 30\lambda_3 Z^2 + \frac{5(n+7)}{3}\lambda_3 P_2,$$

$$\mu_6 z'^6 = \lambda_6 - 15\lambda_5 Z + 5\lambda_4\left[15Z^2 + \frac{n+9}{2}P_2\right]$$
$$- 5\lambda_3[30Z^3 - (n+4)P_3 + 3(n+9)ZP_2],$$

et ainsi de suite.

Les invariants $a_3, a_4, \ldots$ peuvent en conséquence s'exprimer comme il suit:

$$a_3 = \lambda_3, \qquad a_4 = \lambda_4 - 2\lambda_3', \qquad a_5 = \lambda_5 - \frac{5}{2}\lambda_4' + \frac{15}{7}\lambda_3'' - \frac{10}{7}\frac{7n+13}{n+1}p_2\lambda_3$$

et analoguement pour $a_6, a_7, \ldots$.

De ces expressions on déduit que si $a_3, a_4, \ldots, a_n$ sont nuls, $\lambda_3$, $\lambda_4, \ldots, \lambda_n$, sont nuls aussi et l'équation (1) se réduit dans ce cas à (6). Donc: si les invariants $a_3, a_4, \ldots, a_n$ d'une équation différentielle linéaire de l'ordre $n$ sont nuls, les intégrales de cette équation peuvent s'exprimer par des formes binaires à coefficients constants des deux arguments $\xi_1, \xi_2$, qui sont les intégrales d'une équation différentielle du second ordre.

Un second résultat peut s'obtenir en observant que si les invariants impairs $a_3, a_5, a_7, \ldots$ sont nuls, la partie linéaire de l'expression de chacun de ces invariants est égale à zéro. Au moyen de la formule (5) on démontre que dans ce cas l'équation *adjointe* de LAGRANGE se réduit à l'équation différentielle primitive, donc: une équation différentielle linéaire d'ordre $n$ pour laquelle tous les invariants impairs $a_3, a_5, \ldots$ sont nuls est à elle-même sa propre adjointe.

3. Deux invariants fondamentaux:

$$\alpha_r z'^r = a_r, \qquad \alpha_s z'^s = a_s$$

conduisent à un troisième invariant de la forme suivante:

$$(7) \quad a_{r,s} = \frac{12rs}{n+1}p_2 a_r a_s + \frac{(2r+1)(2s+1)}{r+s+1}a_r' a_s' - \frac{r(2r+1)}{r+s+1}a_r a_s'' - \frac{s(2s+1)}{r+s+1}a_s a_r''$$

et en indiquant avec $\beta_{r,s}$ la même expression formée de $q_2$, $\alpha_r$, $\alpha_s$ et les dérivées de $\alpha_r$, $\alpha_s$ relativement à la variable $z$, on a:

$$\beta_{r,s} z'^{r+s+2} = b_{r,s}.$$

En second lieu, des invariants absolus:

$$\frac{\alpha_r^s}{\alpha_s^r} = \frac{a_r^s}{a_s^r}; \qquad \frac{\beta_{r,s}^m}{\alpha_m^{r+s+2}} = \frac{b_{r,s}^m}{a_m^{r+s+2}}, \quad \text{etc.},$$

on déduit les invariants:

$$(8) \qquad c_{r,s} = s a_s a'_r - r a_r a'_s; \qquad d_{r,s,m} = m a_m b'_{r,s} - (r + s + 2) b_{r,s} a'_m$$

pour lesquels:

$$\gamma_{r,s} z'^{r+s+1} = c_{r,s}; \qquad \delta_{r,s,m} z'^{m+r+s+3} = d_{r,s,m}.$$

4. Les deux théorèmes que j'ai démontrés précédemment prouvent déjà le rôle important des invariants dans la théorie des équations différentielles linéaires. Halphen dans ses remarquables travaux sur cette théorie a donné d'autres preuves de grande valeur relativement aux équations différentielles du troisième et du quatrième ordre. Peut-être une préoccupation continue de rattacher ses nouvelles recherches aux résultats de sa Thèse *Sur les invariants différentiels* a eu pour effet de rendre un peu compliquée et pas toujours claire et complète la méthode qu'il a suivie. Cette petite remarque ne diminue en rien l'importance des résultats de Halphen, d'autant plus que d'ordinaire dans tous ses travaux, »avec le génie de l'invention, on remarque le don si précieux de la clarté, et une conscience scrupuleuse qui ne laisse jamais rien d'incomplet et d'inachevé dans les sujets qu'il traite.»[1]

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les intégrales de l'équation (1) et:

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \varphi(x)$$

une forme de l'ordre $m$ à coefficients constants. La fonction $\varphi(x)$, comme il est connu, doit satisfaire à une équation différentielle linéaire de l'ordre:

$$g = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1\,.\,2\ldots(n-1)} = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\ldots m}$$

[1] Allocution prononcée par M. Hermite, Président de l'Académie des sciences, Comptes rendus du 30 décembre 1889.

dont les coefficients sont fonctions de $p_2, p_3, \ldots$ et de leurs dérivées. J'ai donné il y a quelques années une formule générale pour le calcul de cette équation d'ordre $g$.[1] En considérant les $g$ fonctions de $x$:

$$(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}), \qquad {\scriptstyle (r_1, r_2, \ldots, r_{n-1} = 0, 1, 2, \ldots, m)}$$

pour lesquelles ont lieu les relations:

$$(0, 0, \ldots, 0) = \varphi(x),$$
$$(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}) = 0$$

pour

$$r = r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1} > m,$$

$$(9) \qquad \frac{d(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})}{dx} = \sum_1^{n-2}{}_s r_s(r_1 \ldots r_{s-1} - 1, r_{s+1} + 1 \ldots r_{n-1})$$
$$+ (m - r)(r_1 + 1, r_2 \ldots r_{n-1})$$
$$- r_{n-1}\sum_2^n{}_s \frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1.2\ldots s} p_s(r_1, r_2, \ldots, r_{n-s} + 1 \ldots r_{n-1} - 1)$$

on arrive à l'équation cherchée par la dérivation successive et l'élimination. Si l'on suppose $\varphi(x) = 0$, c'est-à-dire que les intégrales de l'équation (1) vérifient une relation homogène de l'ordre $m$, les opérations indiquées conduisent à deux résultats remarquables; 1° aux relations qui doivent subsister entre les coefficients de l'équation (1); 2° à la recherche d'une transformée (2) laquelle satisfait à ces relations.

Ces relations, comme Halphen l'a démontré pour $n = 3, m = 3$; $n = 4, m = 2$, sont formées avec les invariants des équations différentielles des ordres 3, 4.

Dans l'un et l'autre de ces cas $g = 10$; comme en général $g$ conserve la même valeur si $n = i, m = j$; ou $n = j + 1, m = i - 1$. Les relations entre les invariants conservent alors la même forme.

5. Je suppose dans les paragraphes suivants $\varphi(x) = 0$. Soit $n = 3$ et $h(y_1, y_2, y_3)$ le hessien de la forme $f(y_1, y_2, y_3)$. Si l'on pose:

$$\Delta = \Sigma(\pm\, y_1 y_2' y_3'')$$

---

[1] Annali di Matematica, Tome 13.

on a en général:

$$h\,.\,\Delta^2 = \begin{vmatrix} (0\,,\,0) & (1\,,\,0) & (0\,,\,1) \\ (1\,,\,0) & (2\,,\,0) & (1\,,\,1) \\ (0\,,\,1) & (1\,,\,1) & (0\,,\,2) \end{vmatrix},$$

mais si $(0\,,\,0) = 0$ la formule (9) donne $(1\,,\,0) = 0$ et:

$$(0\,,\,1) + (m - 1)(2\,,\,0) = 0.$$

En conséquence si l'on pose $(2\,,\,0) = \lambda$ on a $(0\,,\,1) = -(m-1)\lambda$ et:

$$(10) \qquad h\Delta^2 = -(m-1)^2.\lambda^3.$$

Soit $m = 3$, on a encore à considérer les six expressions $(r_1\,,\,r_2)$:

$$(1\,,\,1)\,,\,(1\,,\,2)\,,\,(3\,,\,0),$$
$$(0\,,\,2)\,,\,(2\,,\,1)\,,\,(0\,,\,3),$$

pour lesquelles on obtient à l'aide de la formule (9):

$$(1\,,\,1) = -\lambda', \qquad (3\,,\,0) = 3\lambda',$$
$$(2\,,\,1) = \lambda'', \qquad (0\,,\,2) = -2\lambda'' + 3p_2\lambda,$$

et pour $(1\,,\,2)$ les deux valeurs:

$$\frac{1}{2}[\lambda''' + 9p_2\lambda' + p_3\lambda]\ ;\ -2\lambda''' - 3p_2\lambda' + 3p_2'\lambda - 4p_3\lambda$$

et en conséquence:

$$(11) \qquad \lambda''' + 3p_2\lambda' + \frac{3}{5}(3p_3 - 2p_2')\lambda = 0,$$

$$(1\,,\,2) = 3p_2\lambda' - \frac{2}{5}a\lambda,$$

étant:

$$a = p_3 - \frac{3}{2}p_2'$$

le seul invariant fondamental dans ce cas. La formule (9) donne encore:

$$(0\,,\,3) = 9p_2\lambda'' - \frac{12}{5}a\lambda' - \frac{2}{5}a'\lambda,$$

$$\frac{d(0\,,\,3)}{dx} + 3[3p_2(1\,,\,2) + p_3(0\,,\,2)] = 0$$

ou, à cause de (11):

$$21a\lambda'' + 7a'\lambda' + (a'' + 27p_2a)\lambda = 0.$$

En éliminant $\lambda''$ et $\lambda'''$ entre cette équation, celle qui en découle par différentiation et l'équation (11), on obtient:

$$(12) \qquad 8b\lambda' + \left(b' + \frac{2\cdot 7\cdot 3^4}{5}a^3\right)\lambda = 0,$$

où

$$b = 27p_2a_3^2 + 7a_3'^2 - 6a_3a_3''$$

est un second invariant de l'équation différentielle du $3^{\text{me}}$ ordre (voir formule (7)). Enfin si l'on pose:

$$c = 8ba' - 3ab', \qquad p = 72p_2ab + \frac{7\cdot 17}{12}a'b' - \frac{7}{4}ab'' - \frac{2\cdot 17}{3}ba'',$$

$$q = 192p_2b^2 + 17b'^2 - 16bb'',$$

invariants des ordres 12, 13, 18, on trouve pour l'équation de condition la suivante:

$$\frac{1}{17}(32bp - 63aq) + 4\cdot 7^2\cdot 3^3a^3c - \frac{4\cdot 7^3\cdot 3^8}{5^2}a^7 = 0,$$

expression invariantive de l'ordre 21.

En supposant cette équation de condition satisfaite, on peut transformer l'équation différentielle:

$$y''' + 3p_2y' + p_3y = 0$$

de la manière suivante. Je pose:

$$Z = -\frac{\lambda'}{\lambda}$$

(paragraphe 1r); l'équation (11) devient:

$$P_3 - 3p_2 Z + \frac{3}{5}(3p_3 - 2p_2') = 0;$$

mais pour la transformée:

$$\frac{d^3v}{dz^3} + 3q_2\frac{dv}{dz} + q_3 v = 0$$

on a:

$$q_3 z'^3 = p_3 - 3p_2 Z + P_3;$$

on aura donc:

$$q_3 z'^3 + \frac{4}{5}a = 0 \quad \text{ou} \quad q_3 + \frac{4}{5}\alpha = 0$$

ou enfin:

$$q_3 = \frac{2}{3}\frac{dq_2}{dz},$$

qui complète la recherche relativement à la transformée.

On peut encore observer que l'équation (12) donne:

$$\lambda = \frac{c}{b^8} e^{-\frac{7.3^4}{4.5}\int \frac{a^3}{b} dx}$$

et vu que $\Delta$ dans l'équation (10) est une constante, on en déduira la valeur du hessien $h(y_1, y_2, y_3)$.

6. Je passe à l'autre cas pour lequel $g = 10$, ou $n = 4, m = 2$. Ce cas forme l'objet principal du mémoire de Halphen *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre* publié dans ce journal (tome 3).

Etant $(0, 0, 0) = 0$, on aura $(1, 0, 0) = 0$; et en posant:

$$(2, 0, 0) = \lambda, \quad \text{on a} \quad (0, 1, 0) = -\lambda.$$

Les six autres fonctions sont:

$$(0, 2, 0) = \mu, \qquad (0, 0, 2) = \nu,$$

$$(1, 1, 0) = l, \qquad (1, 0, 1) = m, \qquad (0, 1, 1) = n$$

et:

$$(0\,,0\,,1) = -(\lambda' + l).$$

On a ainsi:

$$(13)\qquad h\Delta^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda & \lambda' + l \\ 0 & \lambda & l & m \\ \lambda & l & \mu & n \\ \lambda' + l & m & n & \nu \end{vmatrix};$$

mais dans ce cas $h$ est constant, la valeur du déterminant sera donc une constante.

La formule (9) donne:

$$l = \frac{1}{2}\lambda', \qquad m = -\frac{3}{2}(\lambda'' + 4p_2\lambda), \qquad \mu = 2\lambda'' + 6p_2\lambda$$

et pour $n$ les deux valeurs:

$$\lambda''' + 3p_2\lambda' + 3p_2'\lambda\,;\ -\frac{3}{2}\lambda''' - 3p_2\lambda' + (4p_3 - 6p_2')\lambda$$

et en conséquence:

$$(14)\qquad \lambda''' + \frac{12}{5}p_2\lambda' - \frac{2}{5}(4p_3 - 9p_2')\lambda = 0,$$

$$n = \frac{3}{5}p_2\lambda' + \frac{1}{5}(8p_3 - 3p_2')\lambda$$

et:

$$\nu = \frac{63}{5}p_2\lambda'' + \frac{18}{5}p_3\lambda' + \left(\frac{8}{5}p_3' - \frac{3}{5}p_2'' + 36p_2^2 - p_4\right)\lambda.$$

Enfin la même formule (9) donne:

$$\frac{d\nu}{dx} + 12p_2n + 8p_3m - 2p_4(\lambda' + l) = 0,$$

et suivant le même procédé que pour le cas précédent, on arrive à l'équation:

$$(15)\qquad 8t\lambda' + (t' + k)\lambda = 0,$$

où nous avons posé:

$$t = 25a_4^2 + 7b_{3,3} + \frac{7\cdot 5^2}{8}c_{3,4}, \tag{16}$$

$$k = 15b_{3,4} - \frac{3^2\cdot 4^2\cdot 7^2}{5}a_3^2,$$

$b_{3,3}$, $b_{3,4}$, $c_{3,4}$ étant les invariants qui se déduisent des expressions (7), (8).

L'analogie entre les formules (12) et (15) est évidente; l'équation de condition sera en conséquence aussi dans ce cas une relation invariantive de l'ordre 21 et de la même forme que la supérieure.

Pour la transformée, posant encore $Z = -\frac{\lambda'}{\lambda}$, l'équation (14) donne en premier lieu:

$$\frac{5}{4}P_3 - 3p_2Z - 2p_3 + \frac{9}{2}p_2' = 0$$

ou:

$$q_3 - 3\alpha_3 = 0 \quad \text{et en conséquence} \quad q_3 = \frac{9}{4}\frac{dq_2}{dz}.$$

La valeur de $q_4$ peut être déterminée par l'équation (13). On trouve en effet par la substitution de $Z$ à $-\frac{\lambda'}{\lambda}$, que:

$$h\Delta^2 = \lambda^4 z'^4\left[q_4 - \frac{8}{5}\frac{dq_3}{dz} + \frac{3}{5}\frac{d^2q_2}{dz^2}\right];$$

mais $\lambda z' =$ const., en conséquence:

$$q_4 - \frac{8}{5}\frac{dq_3}{dz} + \frac{3}{5}\frac{d^2q_2}{dz^2} = C,$$

$C$ étant une constante; et enfin:

$$q_4 = 3\frac{d^2q_2}{dz^2} + C.$$

On a ainsi démontré le théorème du à HALPHEN:[1] Toute équation du quatrième ordre dont les intégrales sont liées par une relation quadratique est réductible par une substitution de la forme (2) au type:

---

[1] Acta mathematica, tome 3, pag. 349.

$$\frac{d^4v}{dz^4} + 6q_2\frac{d^2v}{dz^2} + 9\frac{dq_2}{dz}\frac{dv}{dz} + \left(3\frac{d^2q_2}{dz^2} + C\right)v = 0.$$

J'ajoute ici une observation qui regarde aussi le cas précédent. La quantité $t$ (16) est un invariant du huitième ordre: on aura donc:

$$\tau z'^8 = t,$$

$\tau$ étant formé avec $q_2, q_3, q_4$ et leurs dérivées par rapport à $z$, comme $t$ l'est avec $p_2, p_3, p_4$ et leurs dérivées par rapport à $x$. Cette dernière équation donne:

$$\frac{d\tau}{dz}z'^9 = t' - 8tZ.$$

Or si dans l'équation (15) on pose $\frac{\lambda'}{\lambda} = -Z$, on déduit:

$$\frac{d\tau}{dz} + \varkappa = 0,$$

étant $\varkappa z'^9 = k$.

Cette dernière équation est l'équation de condition pour la transformée, et l'on prouve facilement qu'elle est satisfaite par les valeurs supérieures de $q_3, q_4$.

7. Les cas qui suivent peuvent être traités avec la même méthode directe, et sauf des calcul plus longs ne présentent aucune difficulté. Par exemple, dans le cas de $n = 3$, $m = 4$ et en conséquence $g = 15$, si l'on pose:

$$(1, 0) = \lambda, \qquad (2, 1) = \mu$$

les deux valeurs de (1, 2) données par la formule (9) conduisent à une première relation:

$$\mu' = -\frac{1}{6}\lambda''' - 2p_2\lambda' - \frac{4}{15}(7p_3 - 3p_2')\lambda$$

et les deux valeurs de (1, 3) à la suivante:

$$a\mu + \frac{1}{12}\lambda^{\mathrm{v}} + \frac{5}{4}p_2\lambda''' + \frac{1}{12}(13p_3 + 3p_2')\lambda'' + \frac{1}{12}(11p_3' - 3p_2'' + 36p_2^2)\lambda'$$
$$+ \frac{1}{7}\left(\frac{11}{6}p_3'' - p_2''' + 25p_2p_3 - \frac{33}{2}p_2p_2'\right)\lambda = 0,$$

où $\alpha = p_3 - \frac{3}{2}p_2'$ est l'invariant du $3^{\mathrm{me}}$ ordre.

Enfin l'équation qu'on déduit de la formule (9):

$$\frac{d(0\,,4)}{dx}+12p_2(1\,,3)+4p_3(0\,,3)=0$$

donne la troisième relation:

$$a\lambda^{\mathrm{IV}}+\frac{2}{3}a'\lambda'''+\frac{1}{7}(2a''+75p_2a)\lambda''+\frac{1}{2\,.\,7}\left(a'''+77a^2+55p_2a'+\frac{3\,.\,5\,.\,19}{2}p_2'a\right)\lambda'$$

$$+\frac{1}{2\,.\,7\,.\,9}\left(a^{\mathrm{IV}}+6.7.11.aa'+75p_2a''+\frac{3\,.\,5\,.\,31}{2}p_2'a'+\frac{9\,.\,83}{2}p_2''a+4^2.3^4.p_2^2a\right)\lambda=0.$$

Pour la transformée, en posant $Z=-\frac{1}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}$, et:

$$\frac{\mu}{\lambda}+\frac{1}{2}Z^2-P_2=s$$

les trois relations supérieures deviennent:

$$s'=2sZ+\frac{4}{5}\left(\frac{dq_2}{dz}-\frac{7}{3}q_3\right)z'^3,$$

$$7as=\left[-\frac{11}{6}\frac{d^2q_3}{dz^2}+\frac{d^3q_2}{dz^3}-25q_2q_3+\frac{33}{2}q_2\frac{dq_2}{dz}\right]z'^5.$$

Si l'on pose:

$$\sigma z'^2=s$$

la première se reduit à:

$$\frac{d\sigma}{dz}=-2\left(\frac{14}{15}\alpha+\frac{dq_2}{dz}\right)$$

et la seconde à:

$$7\alpha\sigma=-\left[\frac{11}{6}\frac{d^2\alpha}{dz^2}+25q_2\alpha+\frac{7}{4}\frac{d^3q_2}{dz^3}+21q_2\frac{dq_2}{dz}\right],$$

où l'on a substitué à $q_3$ sa valeur $\alpha+\frac{3}{2}\frac{dq_2}{dz}$.

L'élimination de $\sigma$ donne ainsi une première équation de condition entre $\alpha$ et $q_2$ et leurs dérivées.

La troisième conduit de même à une seconde équation de condition entre $\alpha$ et $q_2$; ou à la suivante:

$$\frac{d^4\alpha}{dz^4} + 6.7.11.\alpha\frac{d\alpha}{dz} + 75q_2\frac{d^2\alpha}{dz^2} + \frac{3.5.31}{2}\frac{dq_2}{dz}\frac{d\alpha}{dz}$$

$$+ \frac{9.83}{2}\alpha\frac{d^2q_2}{dz^2} + 4^2.3^4.q_2^2\alpha = 0.$$

Dans ce cas, comme on sait, sont comprises certaines équations différentielles hypergéométriques du $3^{me}$ ordre liées aux équations modulaires Jacobiennes pour la transformation du septième ordre.[1]

Le cas de $n = 5$, $m = 2$, et en conséquence comme dans le cas précédent $g = 15$ conduit analoguement à deux équations de condition. En posant:

$$(2, 0, 0, 0) = \lambda, \qquad (0, 2, 0, 0) = \mu$$

et:

$$Z = -\frac{1}{2}\frac{\lambda'}{\lambda}, \qquad \frac{\mu}{\lambda} - 3Z^2 + 4P_2 = s,$$

$$\sigma z'^2 = s,$$

on trouve:

$$q_3 = \frac{1}{4}\frac{d\sigma}{dz}$$

et:

$$20\alpha\sigma = 2q_5 - 15\frac{dq_4}{dz} + 20\frac{d^2q_3}{dz^2} + 80q_2q_3,$$

$\alpha$ étant l'invariant du $3^{me}$ ordre. L'élimination de $\sigma$ donne la première équation de condition. La seconde équation est la suivante:

$$\left[2q_5 - 5\frac{dq_4}{dz} + 5\frac{d^3q_2}{dz^3} + 300q_2\frac{dq_2}{dz} - 200q_2q_3\right]\sigma + 4\frac{d^4q_3}{dz^4} - \frac{5}{4}\frac{d^3q_4}{dz^3} - 100q_2\frac{dq_4}{dz}$$

$$+ 10q_4\left(2q_3 - 5\frac{dq_2}{dz}\right) + 180q_2\frac{d^2q_3}{dz^2} - 80q_3\frac{dq_3}{dz} + 140\frac{dq_2}{dz}\frac{dq_3}{dz} + 60q_3\frac{d^2q_2}{dz^2}$$

$$+ 800q_2^2q_3 = 0.$$

---

[1] Voir mes lettres à M. KLEIN *Sur quelques équations différentielles,* Mathematische Annalen, Bd. 26.

En substituant au lieu de $q_3$ sa valeur supérieure, et posant:

$$10 q_2 = \sigma + k,$$

les deux équations se simplifient beaucoup et l'on a:

$$\frac{d^3\sigma}{dz^3} + \frac{1}{5}\left(2k\frac{d\sigma}{dz} + 3\sigma\frac{dk}{dz}\right) + \frac{2}{5}q_5 - 3\frac{dq_4}{dz} = 0,$$

$$\frac{d^5\sigma}{dz^5} + \frac{1}{2}\left[9k\frac{d^3\sigma}{dz^3} + 7\frac{dk}{dz}\frac{d^2\sigma}{dz^2} + 3\frac{d^2k}{dz^2}\frac{d\sigma}{dz} + \frac{d^3k}{dz^3}\sigma\right]$$
$$+ k\left[2k\frac{d\sigma}{dz} + 3\sigma\frac{dk}{dz}\right] - 5\left[\frac{1}{4}\frac{d^3q_4}{dz^3} + 2k\frac{dq_4}{dz} + \frac{dk}{dz}q_4\right] = 0.$$

Ces équations sont satisfaites en supposant $k = 0$, et en conséquence:

$$q_3 = \frac{5}{2}\frac{dq_2}{dz}, \qquad \frac{d^3q_4}{dz_3} = 8\frac{d^5q_2}{dz^5}, \qquad q_5 = \frac{15}{2}\frac{dq_4}{dz} - 25\frac{d^3q_2}{dz^3} = 0.$$

On arrive ainsi au théorème: »L'équation du $5^{me}$ ordre:

$$\frac{d^5v}{dz^5} + 10q_2\frac{d^3v}{dz^3} + 10q_3\frac{d^2v}{dz^2} + 5q_4\frac{dv}{dz} + q_5 v = 0$$

dans laquelle:

$$q_3 = \frac{5}{2}\frac{dq_2}{dz}, \qquad q_4 = 8\frac{d^2q_2}{dz^2} + \varphi(z), \qquad q_5 = 5\left[7\frac{d^3q_2}{dz^3} + \frac{3}{2}\frac{d\varphi}{dz}\right]$$

et $\varphi(z) = Az^2 + Bz + C$; $A$, $B$, $C$ constantes; a ses intégrales liées par une relation quadratique».

Février 1890.