MESURE DE LA COURBURE DES SURFACES SUIVANT L'IDÉE COMMUNE.[1]

SES RAPPORTS AVEC LES MESURES DE COURBURE GAUSSIENNE ET MOYENNE

PAR

F. CASORATI

À PAVIE.

Dans l'histoire des mathématiques la page qui se rapporte à l'idée et à la mesure de la courbure des surfaces est une de celles qui doivent, ce me semble, étonner plutôt que satisfaire les amis de cette science. Car on y apprend que, nonobstant la découverte des lois très simples qui régissent les courbures des lignes autour d'un point dans une surface et les nombreuses recherches qui s'y rattachent, l'idée de la courbure de la surface elle-même dans le point n'a jamais été suffisamment étudiée. En effet, l'on ne voit paraître aucune manière satisfaisante de mesurer une telle courbure jusqu'à la publication du célèbre Mémoire *Disquisitiones generales circa superficies curvas*,[2] et après cette publication on voit la plupart des géomètres se contenter des notions qui y sont données, comme si le dernier mot sur la courbure avait été prononcé.

---

[1] Les pages suivantes sont la traduction d'une Note parue dans les Rendiconti dell' Istituto Lombardo (année 1889), refondue et accompagnée de réflexions que l'auteur a désiré ajouter par suite de l'intérêt qu'ont pris à cette Note beaucoup de savants illustres, notamment MM. BELTRAMI, BOUSSINESQ, SCHIAPARELLI et SCHLÄFLI.

[2] Dans le vol. 6 des Comment. societatis regiae scientiarum Gottingensis recent. (Göttingen 1828), GAUSS' Werke, Vierter Band.

Laissant de côté l'idée des contacts et prenant en considération le rapport entre l'aire d'une *calotte infinitésimale,* c'est à dire, d'un fragment infiniment petit de la surface, entourant le point auquel on veut rapporter la mesure de la courbure, et l'aire d'une image de cette calotte, construite d'une certaine manière à l'aide des normales à la surface, GAUSS ouvrit une voie qui conduit, comme on le verra dans cette Note, très facilement à la solution, peut-être la meilleure possible, de la question envisagée au point de vue ordinaire ou même vulgaire si l'on veut.

Mais, quant à la mesure de courbure qui a été fixée par le grand géomètre, bien qu'elle paraît avoir satisfait la plupart des mathématiciens jusqu'à présent, elle ne saurait satisfaire les hommes en général; car, dans des cas assez ordinaires, elle ne s'accorde pas avec l'idée que tout homme, ayant ou non des connaissances spéciales de mathématiques, conçoit d'une manière plus ou moins vague et pourrait exprimer par les mots *courbure d'une surface dans un point.* Malgré cela, la mesure Gaussienne a une grande importance, principalement par suite de sa propriété de rester invariable pour tout changement de forme qu'une surface peut subir sans que les longueurs de ses lignes en soient altérées. Il est superflu de rappeler que la manière d'envisager les surfaces expliquée dans l'article 13 des *Disquisitiones* a provoqué une série de nouvelles recherches très intéressantes et dont l'étendue va toujours en augmentant. En poursuivant les belles conséquences de l'invariabilité qu'il venait de découvrir, GAUSS n'avait pas l'occasion de chercher une mesure de la courbure des surfaces envisagées de la manière ordinaire, c'est à dire comme limites des solides, ayant une forme unique et invariable. S'il s'était proposé ce dernier but, il aurait voulu l'atteindre en se conformant, je crois, à l'idée commune.

Le désaccord entre l'idée ordinaire de courbure et la mesure Gaussienne devient, pour ainsi dire, palpable dans le cas des surfaces développables sur le plan. Car, dans ce cas, l'image sphérique[1] de la calotte se réduit à *une seule* dimension, et par conséquent, le numérateur du rapport

$$\frac{\text{Aire de l'image}}{\text{Aire de la calotte}}$$

[1] Que nous appellerons Gaussienne, suivant l'usage, bien qu'elle ait été étudiée avant GAUSS.

étant nul, le rapport même et sa limite sont nuls aussi. Un géomètre peu soigneux pourrait donc dire, par exemple, que les surfaces cylindriques *n'ont pas de courbure,* tandis que tout le monde croit qu'elles sont *courbes,* comme on apprend à les considérer et à les nommer dès les premiers pas dans la vie et dans l'école. Parmi les innombrables lignes que l'on peut concevoir issues d'un point sur la surface d'un cylindre, *deux seules,* à savoir les deux parties de la génératrice, ne sont pas courbes. Nier, à cause de ces deux lignes seules, la courbure de l'ensemble de toutes les autres, cela doit paraître injuste à quiconque ne se met pas au point de vue de GAUSS.

Poussé par le désir d'établir une mesure de la courbure qui s'accordât dans tous les cas possibles avec l'idée générale, je remarquais tout d'abord que c'était à cause de l'*altération azimutale,* si une telle expression m'est permise, que l'image Gaussienne ne correspond pas, *quantitativement,* d'une manière satisfaisante à cette idée, et même en est une contradiction dans le cas des surfaces développables. Je vais m'expliquer d'une façon plus claire. Soit O le point de la surface, auquel la courbure se rapporte, et soient

$$OP_1, OP_2, \ldots, OP_n$$

n lignes ou rayons vecteurs tracés du point O jusqu'au contour de la calotte, *isogonalement,* à savoir, de manière que les angles

$$P_1OP_2, P_2OP_3, \ldots, P_nOP_1$$

soient égaux entre eux. Les lignes correspondantes

$$O'P'_1, O'P'_2, \ldots, O'P'_n$$

dans l'image Gaussienne ne résultent pas distribuées de même *isogonalement* autour de O'; et cette *altération azimutale* peut devenir très forte; tellement que, si la courbure de l'une des deux sections normales principales tend à s'évanouir, toutes les lignes

$$O'P'_1, O'P'_2, \ldots, O'P'_n$$

tendent à se diriger suivant une direction unique, qui est celle de l'image sphérique de l'autre section principale, en donnant par là naissance au cas d'une seule dimension pour l'image de la calotte.

Il m'a paru que, voulant faire servir le rapport

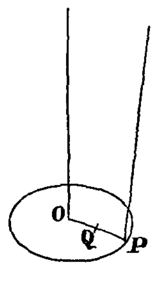
$$\frac{\text{Aire de l'image}}{\text{Aire de la calotte}}$$

à la mesure de la courbure suivant l'idée commune, il était convenable de construire l'image de manière que, à la distribution isogonale des rayons vecteurs OP_1, OP_2, ..., dans la calotte, correspondît aussi une distribution isogonale dans l'image; en faisant, bien entendu, les rayons vecteurs de l'image plus ou moins longs relativement aux rayons, tous égaux entre eux, de la calotte, suivant que la calotte se courbe plus ou moins dans les directions respectives de ces rayons. Si dans la construction des rayons vecteurs de l'image on créait quelque autre inégalité, on donnerait, ce me semble, une prépondérance arbitraire à certaines directions parmi toutes celles qui émanent du point.

Voici donc de quelle manière je propose de mesurer la courbure d'une surface en un point, conformément à l'idée commune, dans les cas où il existe autour du point un fragment de la surface ayant partout un plan tangent.

I.

Soit toujours O le point de la surface auquel on rapporte la courbure. Supposons qu'un fil de longueur infiniment petite σ ait l'une de ses extrémités fixée au point O, et tourne en restant tendu sur la surface. Ce fil décrira un cercle géodésique qui sera notre calotte. Je prends l'aire de ce cercle comme dénominateur du rapport dont la limite, si elle existe, sera notre mesure de la courbure en O.



Pour numérateur je prends l'aire de l'image du cercle construite, non à la manière de Gauss, mais comme il suit. Sur chaque position OP du fil σ je prends OQ d'une longueur égale à la mesure de l'angle infiniment petit que la normale à la surface en P fait avec la normale en O.

L'aire de la figure formée par cette infinité de rayons géodésiques, issues du point O suivant tous les azimuts dans la calotte, me paraît offrir une mesure assez naturelle et simple de l'ensemble des angles que les normales à la surface, élevées sur le contour du cercle, font avec la normale centrale. Il va sans dire que nous regardons chacun de ces angles comme la mesure la plus naturelle de l'incurvation de la surface le long du rayon OP qui y correspond.

II.

Nous allons maintenant traduire en formule analytique la définition qui vient d'être donnée.

En désignant par C notre mesure de courbure, et par α l'angle compris entre le rayon OP, regardé comme étant dans le plan tangent en O, et une direction fixée dans ce plan; nous pourrons écrire, d'après l'expression bien connue d'une aire en coordonnées polaires:

$$(1) \qquad C = \frac{\text{Aire de l'image}}{\text{Aire du cercle}} = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \overline{OQ}^2 . d\alpha}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \overline{OP}^2 . d\alpha},$$

où les rapports sont censés pris *à la limite*.

Le dénominateur de ce rapport peut s'exprimer par $\pi\sigma^2$, puisque la longueur de OP, à savoir σ, a été supposée constante par rapport à α.

Quant au numérateur, en admettant que les formules ordinaires de la théorie des surfaces s'appliquent à notre calotte, on trouve facilement pour lui aussi une expression bien simple et qui est très importante.

En effet, rapportons la surface à trois axes cartésiens orthogonaux. Soient x, y, z les coordonnées du point O, et $x + dx$, etc. celles du point P. Et, en adoptant une notation habituelle, posons:

$$dz = pdx + qdy, \qquad dp = rdx + sdy, \qquad dq = sdx + tdy.$$

Les cosinus des angles que les normales à la surface en O et en P font avec les axes s'expriment par

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

$$\frac{p+dp}{\sqrt{(p+dp)^2+(q+dq)^2+1}}, \quad \frac{q+dq}{\sqrt{(p+dp)^2+(q+dq)^2+1}},$$

$$\frac{-1}{\sqrt{(p+dp)^2+(q+dq)^2+1}}.$$

Mais, pour plus de simplicité, nous prendrons la normale en O pour l'axe des z, et la tangente en O à l'une des sections normales principales pour l'axe des x. D'après cela, nous avons:

$$x = y = z = 0, \qquad p = q = 0, \qquad s = 0,$$

$$dp = r dx, \qquad dq = t dy.$$

Et, puisque r et t mesurent, comme on sait, les *courbures* (des sections normales) *principales*, au point O, nous écrivons aussi

$$r = \frac{1}{R_1}, \qquad t = \frac{1}{R_2}.$$

De plus, en supposant que la direction initiale $\alpha = 0$ soit celle de l'axe Ox, on pourra poser:

$$dx = OP\cos\alpha = \sigma\cos\alpha, \qquad dy = OP\sin\alpha = \sigma\sin\alpha,$$

$$dp = r\sigma\cos\alpha, \qquad dq = t\sigma\sin\alpha.$$

Maintenant l'angle des deux normales en O et en P n'est autre chose que l'angle de la normale en P avec l'axe des z, dont le cosinus s'exprime par:

$$\pm\frac{1}{\sqrt{dp^2+dq^2+1}}$$

et le sinus par:

$$\sqrt{1-\cos^2} = \frac{\sqrt{dp^2+dq^2}}{\sqrt{dp^2+dq^2+1}} = \frac{\sigma\sqrt{r^2\cos^2\alpha+t^2\sin^2\alpha}}{\sqrt{1+\sigma^2(r^2\cos^2\alpha+t^2\sin^2\alpha)}}.$$

Il s'ensuit qu'en négligeant les infiniment petits dont l'ordre est supérieur à celui de σ, la mesure de l'angle infinitésimal que la normale en P fait avec la normale en O, c'est à dire, la longueur de OQ, sera exprimée par:

$$(2)\qquad OQ = \sigma\sqrt{r^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha} = \sigma\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2^2}}.$$

Le numérateur du rapport (1) s'exprimera donc par la formule:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\overline{OQ}^2 d\alpha = \frac{\sigma^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2^2}\right)d\alpha,$$

et le rapport même par:

$$(3)\qquad C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2^2}\right)d\alpha,$$

ou, en effectuant l'intégration, par:

$$(4)\qquad C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right).$$

Ce résultat, par lequel la courbure C se rattache d'une manière si simple aux grandeurs R_1, R_2 habituellement employées et jouant un rôle vraiment essentiel dans la théorie des surfaces, confirme, ce me semble, l'opportunité de la nouvelle définition.[1]

III.

Les mesures de courbure de surface dont l'usage s'est établi dans la science et qui y jouent à présent un rôle important, sont: la *mesure Gaussienne,* dont nous avons parlé, et que nous désignerons par G; et

---

[1] Pour abréger et suivant l'usage reçu, nous avons dit et nous dirons souvent *courbure* au lieu de *mesure de courbure.*

celle qui a été proposée par SOPHIE GERMAIN [1] sous la dénomination de *courbure moyenne,* et que nous désignerons par M.

La présence de ces trois mesures G, M, C nous porte à faire quelques comparaisons et réflexions à leur égard.

Ces quantités s'exprimant en termes de

$$\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$$

par les formules

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad G = \frac{1}{R_1 R_2}, \qquad C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right), \tag{5}$$

on voit que nos mesures de courbure de surface sont les fonctions symétriques les plus simples possibles des mesures des courbures *linéaires* principales.

Chacune d'elles peut s'exprimer par les deux autres en vertu de l'équation:

$$M^2 = \frac{G + C}{2}, \tag{6}$$

tandis qu'il n'y a pas *d'équation* entre deux seules.

En valeur absolue, la courbure G est la *moyenne géométrique* pendant que C est la *moyenne arithmétique* des *carrés* des deux courbures principales.

L'égalité de ces carrés entraînant celle des moyennes, on a:

$$C = G = M^2 = \frac{1}{R^2}$$

dans les ombilics, et:

$$C = -G = \frac{1}{R^2}$$

partout où $M = 0$.

Pour les surfaces à courbure uniforme de la Géométrie élémentaire, c'est à dire, pour le plan, le cylindre circulaire et la sphère, la mesure C offre graduellement les valeurs:

$$0, \frac{1}{2R^2}, \frac{1}{R^2},$$

pendant que G retient la valeur zéro pour le cylindre.

[1] Dans le *Mémoire sur la courbure des surfaces,* publié dans le t. 7 du Journal de CRELLE (Berlin, 1831).

IV.

On peut se demander: N'est-il pas trop d'introduire dans la Science plusieurs mesures pour la courbure d'une surface en un point? N'est-il pas possible d'en trouver une qui mérite la préférence et qui puisse, à elle seule, satisfaire à tout besoin?

La présence de deux mesures de courbure dans la théorie des lignes courbes peut bien à elle seule nous disposer à croire utile la pluralité des mesures pour la courbure des surfaces. Mais dans la nature même des surfaces on trouve facilement des raisons plus concluantes.

La voussure, pour ainsi dire, d'une surface en un point ou, ce qui revient au même, l'ensemble des courbures des lignes que l'on peut concevoir tracées sur la surface et émanant de ce point, dépend (dans les suppositions ordinaires de la théorie des surfaces) à un degré égal de deux éléments indépendants entre eux, que nous pouvons supposer être les courbures linéaires principales

$$\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}.$$

Par conséquent, si l'on veut établir un système de quantités nécessaires et suffisantes pour individualiser et représenter complètement dans nos recherches cette voussure ou forme de la surface en un point, quantités que l'on peut nommer *mesures de la courbure* de la surface, il faut prendre, non pas une seule, mais deux fonctions de ces éléments indépendants. Dans ce but il paraît assez naturel de choisir deux fonctions simples et symétriques des dites courbures linéaires; soit deux d'entre les fonctions

$$G, M, C.$$

La raison qui vient d'être exposée en faveur de la pluralité des courbures de surface, pourrait cependant provoquer une dispute que nous voudrions pouvoir écarter. Deux quantités paraissant suffire pour représenter le rôle que peut jouer la forme d'une surface en un point dans les questions de la Géométrie et de la Philosophie naturelle, on pourrait être tenté de ne prendre en considération que deux d'entre les fonctions

G, M, C; en décorant ces deux seules du nom de *mesure de courbure* et en ensevelissant l'autre dans l'oubli. Or, refuser de prendre en considération une quantité qui se présente aussi naturellement dans la science que chacune des trois G, M, C, ce serait, à notre avis, un acte arbitraire, qui n'aurait d'autres suites que de nous dérober les conclusions intéressantes auxquelles la considération de la quantité pourrait mener. Quant à la pure question des noms, nous ferons remarquer qu'elle n'a rien d'essentiel.

Dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* M. DARBOUX dit à propos de G et M:[1] »On a écrit des Mémoires pour chercher laquelle de ces deux quantités doit servir de mesure à la courbure de la surface en un point donné. Les géomètres qui ont traité ce sujet ne se sont pas aperçus qu'ils renouvelaient, sous d'autres espèces, la célèbre question des forces vives, ...»

Et nous, nous dirons: de même que le débat entre les Cartésiens et Leibniz n'exprimait, au fond, que le besoin qu'on éprouvait d'avoir deux noms pour distinguer l'une de l'autre et affirmer l'importance des deux quantités pour chacune desquelles les antagonistes réclamaient la dénomination de *force vive,* de même nous croyons qu'il n'y a, à présent, d'autre chose à faire, par rapport à G, M, C, que de les distinguer par des dénominations commodes, et de s'en servir à l'occasion, sans se donner la peine de supprimer ou dégrader l'une ou l'autre.

Il va sans dire que, pour simplifier les formules, il sera toujours permis de faire disparaître celle que l'on voudra des trois fonctions, à l'aide de la relation $2M^2 = G + C$. Mais en Géométrie, comme en Mécanique et Physique mathématique, il faut laisser chacune d'elles jouer le rôle qui lui est propre, et qui doit peu à peu se faire valoir avec nos progrès dans ces sciences. Si à l'égard de G et M on connaît déjà nombre de résultats très intéressants, il serait arbitraire de nier d'avance que la considération de C ne puisse mener à des résultats pareillement importants.[2]

---

[1] Deuxième partie, pag. 365.

[2] Nous verrons ailleurs que beaucoup d'autres quantités, outre ces trois principales, se présentent assez spontanément à l'esprit de celui qui réfléchit sur l'idée de courbure d'une surface, avec des titres pour servir de mesures ou de fonctions caractérisant la forme de la surface en un point.

Jusqu'à ce qu'une raison plausible ou l'usage général me fasse changer d'avis, je continuerai d'appeler, dans mes leçons, *M courbure moyenne*,[1] et

[1] Si cette dénomination n'était déjà établie par l'usage, j'eus nommé cette courbure *Germainienne;* parceque la plupart des autres quantités, auxquelles nous venons de faire allusion (notre C y comprise, comme moyenne arithmétique des courbures principales carrés et comme moyenne exprimée par la formule (3) dont nous parlerons ailleurs) auraient aussi plus ou moins droit à cette dénomination de *courbure moyenne.*

Parmi ces quantités on peut classer, par exemple, outre le premier terme, qui est M, tous les autres de la série $M_1, M_2, M_3, \ldots$, définis par:

$$M_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^\nu}\,d\alpha,$$

où $\frac{1}{\rho}$ désigne la courbure de la section normale faisant l'angle α avec la section principale $\alpha = 0$. Comme on a:

$$\frac{1}{\rho^\nu} = \left(\frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2}\right)^\nu,$$

on obtient promptement M_ν à l'aide des formules connues:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\alpha\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^{2n}\alpha\,d\alpha = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ \ldots\ 2n},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^{2m}\alpha.\cos^{2n}\alpha\,d\alpha = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)\,1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots\ldots\ldots(2m+2n)}.$$

Mais je n'ajouterai ici qu'une remarque concernant M_2. On peut écrire:

$$M_2 = \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^2 d\alpha}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sigma^2 d\alpha},$$

d'où l'on voit que M_2 peut être envisagée comme limite du rapport:

$$\frac{\text{Aire de l'image}}{\text{Aire du cercle}},$$

pourvu que l'on construise cette image comme dans le cas de C, mais en prenant OQ égal à l'angle que Oz fait, non pas avec la normale en P à la *surface,* mais avec la normale en P à la *section* faite dans la surface par le plan OzP.

G courbure Gaussienne, et *C* simplement *courbure,* lorsque cela n'engendre de confusion.

Cette espèce de prééminence que je donne par là à *C*, comme mesure de courbure, me paraît justifiée par plusieurs motifs dont les suivants se présentent immédiatement à l'esprit.

C est, comme nous avons déjà dit, une traduction de l'idée commune de courbure d'une surface plus fidèle que *M* et *G*.

C caractérise par sa valeur zéro le manque total de courbure, de même que la *première* des deux courbures des lignes, que l'on a déjà l'habitude de nommer tout simplement *courbure.*

Avec cette signification du mot *courbure* on peut dire:

Si la courbure est nulle en tout point, la surface est plane (la ligne est droite).

Il n'y a que la surface plane (resp. la ligne droite) dont la courbure soit nulle en tout point.

V.

Dans l'expression (1) de C, c'est à dire, dans le rapport:

$$\frac{\int \frac{1}{2}\overline{OP}^2(r^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha)d\alpha}{\int \frac{1}{2}\overline{OP}^2 d\alpha},$$

la longueur infiniment petite de OP a été supposée indépendante de α. Si l'on fait OP fonction de α, la limite du rapport dépend, en général, de cette fonction. Si la fonction ne dépend nullement de r et t, la limite s'exprimera toujours en r et t par la formule:

$$\frac{cr^2 + c't^2}{c + c'},$$

dont on obtiendrait pour les coefficients les expressions:

$$c = \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha)^2 \cos^2\alpha d\alpha, \qquad c' = \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha)^2 \sin^2\alpha d\alpha,$$

en faisant $OP = \sigma\varphi(\alpha)$, σ ayant la signification précédente et n'entrant pas en φ.

Mais contentons-nous, en ce moment, d'avoir constaté que ces coefficients dépendent de la forme du contour de la calotte évanouissante; dont dépend par suite le plus ou moins de prépondérance de r ou de t dans la valeur limite du rapport.

La limite du rapport Gaussien, au contraire, ne dépend nullement, comme on le sait, de la forme du dit contour; pourvu qu'il se réduise, non pas à une ligne, mais au seul point considéré. On peut supposer que la calotte, au lieu d'entourer le point, soit, par exemple, un triangle ayant dans le point un sommet infiniment aigu. Or, je pose la question: Est-ce qu'un mode de représentation jouissant de cette propriété est propre à fournir, en la valeur limite du rapport entre l'aire de l'image et celle de la figure originale sur la surface, une mesure de la courbure correspondante à l'idée commune? Mais j'en renvois la réponse à une autre occasion, et je termine maintenant ce paragraphe par une courte analyse ayant pour but de démontrer, à l'aide de nos formules polaires, la propriété infinitésimale, qui est la substance de l'article 7 des *Disquitiones,* et dont découle la dite propriété du rapport Gaussien.

Soit O' l'image Gaussienne de O sur la sphère de rayon 1 et de centre arbitraire, $O'P'$ l'image de OP, et $O'x'$ la parallèle à Ox. Lorsque OP, en tournant autour de O, fait avec Ox l'angle α, l'image $O'P'$ formera avec $O'x'$ un autre angle que je désignerai par β. Par suite, le rapport Gaussien sera:

$$\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\overline{O'P'}^2 d\beta}{\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\overline{OP}^2 d\alpha}.$$

Mais $O'P'$ mesure, comme OQ dans le rapport C, l'angle que la normale en P fait avec la normale en O; on a donc:

$$O'P' = OQ = OP\sqrt{r^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha};$$

et le rapport Gaussien pourra s'exprimer comme suit:

$$\frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\overline{OP}^2 (r^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha)\,d\beta}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\overline{OP}^2\,d\alpha}.$$

Pour calculer cette formule par des intégrations par rapport à α, il semblerait nécessaire d'avoir tant OP que $d\beta$ en termes de α. Mais il suffit d'avoir $d\beta$. En effet, on trouve:[1]

$$d\beta = \frac{rt\,.\,d\alpha}{r^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha},$$

d'où l'équation:

$$\frac{1}{2}\overline{O'P'}^2 d\beta = rt\,.\,\frac{1}{2}\overline{OP}^2 d\alpha,$$

qui exprime la propriété infinitésimale. Elle nous montre que, par le changement de l'azimut α dans l'azimut β qu'implique la construction de Gauss, on détruit en quelque sorte l'influence des différences d'incurvation de la surface autour de O sur la valeur du rapport des aires. En effet, dans cette construction, à tout élément $\frac{1}{2}\overline{OP}^2 d\alpha$ de la surface on fait correspondre dans l'image un élément $\frac{1}{2}\overline{O'P'}^2 d\beta$ dont le rapport au premier est toujours le même, c'est-à-dire, est la quantité rt indépendante de l'azimut α, tandis que dans notre construction chaque élément $\frac{1}{2}\overline{OP}^2 d\alpha$ de la surface est représenté dans l'image par un élément $\frac{1}{2}\overline{OQ}^2 d\alpha$ ayant avec lui un rapport proportionnel au carré de la déviation que la normale subit le long de OP.

[1] La relation finie entre α et β est: $\operatorname{tang}\beta = \frac{t}{r}\operatorname{tang}\alpha$.

VI.

Je ne crois pas inutile, en terminant cette Note, de recommander aux jeunes mathématiciens les recherches que suscite tout naturellement la considération de la nouvelle mesure C, et d'exhorter les auteurs de *traités*, particulièrement d'Analyse et de Géométrie infinitésimale, à lui accorder une place dans leurs livres. Nombre de ces traités, tout en exposant, avec quelque extension, les propriétés qui se rapportent aux courbures des lignes issues d'un point sur une surface, ne contiennent pas même la phrase *courbure propre de la surface,* en laissant presque croire aux lecteurs novices qu'une telle courbure ne peut pas être l'objet de la spéculation mathématique.

Parmi les ouvrages qui n'ont pas ce défaut, je tiens à rappeler ici le *Traité de calcul différentiel* de M. Bertrand, pour avoir l'occasion de commenter brièvement deux des paragraphes que l'illustre auteur consacre à la courbure des surfaces. Au § 720 il écrit: »L'idée de courbure appliquée aux surfaces est extrêmement complexe; on peut en effet concevoir en chaque point une infinité de courbes tracées sur la surface, et la courbure de chacune d'elles est un des éléments qui figurent dans l'idée vague que nous exprimons par le mot *courbure* appliqué à la surface.» Or, l'aire que nous avons pris comme numérateur du rapport C, n'étant qu'une mesure de l'ensemble, pour ainsi dire, des angles que les normales tout autour du point font avec la normale en ce point, semblerait pouvoir satisfaire l'éminent géomètre, et peut-être lui faire agréer aussi les réflexions que nous venons de faire dans le § IV.

Après avoir exposé les notions Gaussiennes de courbure totale et de courbure en un point, M. Bertrand fait remarquer, au § 721, »l'analogie complète des définitions précédentes avec celles qui se rapportent aux courbes planes». J'avoue que cette analogie ne me paraît pas aussi complète qu'à M. Bertrand. Cette analogie suppose que l'on doit substituer la sphère au cercle lorsqu'on passe des lignes planes aux surfaces. Mais une ligne et un cercle n'ont qu'*une* direction d'incurvation, tandis qu'une surface et une sphère, en ayant une infinité, nous présentent cette discordance, bien connue, mais dont ici je tiens à dire que l'analogue ne se trouve pas dans les lignes, à savoir que la sphère se courbe *également*, mais la surface *inégalement* dans les différentes directions.[1]

---

[1] M. DARBOUX aussi paraît n accorder aucune importance à cette discordance. Voir a page citée de ses *Leçons*.