SUR UNE PROPRIÉTÉ DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

QUI DÉFINIT LA ROTATION

D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI
À STOCKHOLM.

Dans mon mémoire *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*[1] j'ai dit que les équations différentielles[2]

$$
\begin{aligned}
&A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr + y_0\gamma'' - z_0\gamma', &\qquad& \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'',\\
(1)\qquad &B\frac{dq}{dt} = (C - A)rp + z_0\gamma - x_0\gamma'', && \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma,\\
&C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq + x_0\gamma' - y_0\gamma, && \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma',
\end{aligned}
$$

auxquelles se ramène le problème considéré, n'admettent point en général de système d'intégrales uniformes, renfermant cinq constantes arbitraires et jouissant de la propriété de n'avoir que des pôles dans toute l'étendue du plan de la variable t.

---

[1] Acta mathematica, T. 12.

[2] Pour cause de brièvete j'écrirai toujours dans le présent mémoire x_0, y_0, z_0 au lieu de Mgx_0, Mgy_0, Mgz_0. x_0, y_0, z_0 désignent donc les coordonnées du centre de gravité du corps solide, multipliées par la masse de ce corps et par l'intensité de la force de gravité.

Si tel était le cas il faudrait en effet pouvoir intégrer les équations différentielles (1) par des séries de la forme

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
p &= t^{-1}\sum_0^\infty {}_n p_n t^n, & \gamma &= t^{-2}\sum_0^\infty {}_n f_n t^n,\\
q &= t^{-1}\sum_0^\infty {}_n q_n t^n, & \gamma' &= t^{-2}\sum_0^\infty {}_n g_n t^n,\\
r &= t^{-1}\sum_0^\infty {}_n r_n t^n, & \gamma'' &= t^{-2}\sum_0^\infty {}_n h_n t^n,
\end{aligned}
$$

ces séries devant être uniformément convergentes dans un certain domaine et devant *contenir en outre cinq constantes arbitraires.* Mais, comme je l'ai fait voir dans mon mémoire cité, pour $n = 1, 2, \ldots$ les coefficients $p_n, q_n, r_n, f_n, g_n, h_n$ dans les séries (2) sont définis par le système d'équations linéaires suivantes

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
(n-1)Ap_n - A_1(q_0r_n + r_0q_n) + z_0g_n - y_0h_n &= P_n,\\
(n-1)Bq_n - B_1(r_0p_n + p_0r_n) + x_0h_n - z_0f_n &= Q_n,\\
(n-1)Cr_n - C_1(p_0q_n + q_0p_n) + y_0f_n - x_0g_n &= R_n,\\
(n-2)f_n - r_0g_n - g_0r_n + q_0h_n + h_0q_n &= F_n,\\
(n-2)g_n - p_0h_n - h_0p_n + r_0f_n + f_0r_n &= G_n,\\
(n-2)h_n - q_0f_n - f_0q_n + p_0g_n + g_0p_n &= H_n,
\end{aligned}
$$

où les $P_n \ldots H_n$ désignent des fonctions entières des coefficients $p_m \ldots h_m$ tels que $m < n$.

Pour $n = 0$ on a le système d'équations suivantes

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
-Ap_0 &= A_1q_0r_0 + y_0h_0 - z_0g_0, & -2f_0 &= r_0g_0 - q_0h_0,\\
-Bq_0 &= B_1r_0p_0 + z_0f_0 - x_0h_0, & -2g_0 &= p_0h_0 - r_0f_0,\\
-Cr_0 &= C_1p_0q_0 + x_0g_0 - y_0f_0, & -2h_0 &= q_0f_0 - p_0g_0.
\end{aligned}
$$

J'ai montré dans mon mémoire cité que, sauf pour trois cas spéciaux, il n'y a qu'un nombre fini de systèmes de valeurs de $p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0$ qui satisfont aux équations (4).

Pour chacun de ces systèmes les valeurs de tous les coefficients $p_n \dots h_n$ sont complètement déterminées par les équations linéaires (3), à moins que le déterminant de ces équations ne soit nul pour certaines valeurs entières positives de n. C'est donc ce déterminant que je vais maintenant calculer.

Je dois de nouveau, comme je l'ai fait dans mon mémoire cité, distinguer deux cas.

Premier cas. Les quantités réelles positives A, B, C sont telles qu'aucune des différences

$$A_1 = B - C, \qquad B_1 = C - A, \qquad C_1 = A - B$$

n'est nulle. Dans ce cas j'ai montré dans mon mémoire que les équations (4) ne peuvent être satisfaites que par le système suivant de valeurs de $p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0$.

Si l'on pose

$$a = \sqrt{\frac{2A + \lambda}{A_1}}, \qquad b = \sqrt{\frac{2B + \lambda}{B_1}}, \qquad c = \sqrt{\frac{2C + \lambda}{C_1}}$$

(en définissant le signe de chacune de ces racines d'une manière arbitraire) on doit avoir

$$\begin{aligned} p_0 &= bc, \\ q_0 &= ca, \\ r_0 &= -ab. \end{aligned}$$

En posant ensuite

$$\mu = Ax_0p_0 + By_0q_0 + Cz_0r_0,$$

on trouve

$$\begin{aligned} f_0 &= -A_1q_0r_0\frac{\lambda}{\mu} = (2A + \lambda)p_0\frac{\lambda}{\mu}, \\ g_0 &= -B_1r_0p_0\frac{\lambda}{\mu} = (2B + \lambda)q_0\frac{\lambda}{\mu}, \\ h_0 &= -C_1p_0q_0\frac{\lambda}{\mu} = (2C + \lambda)r_0\frac{\lambda}{\mu}, \end{aligned}$$

la quantité λ désignant une racine quelconque de l'équation algébrique

$$Ax_0p_0 + By_0q_0 + Cz_0r_0 = -(A_1x_0q_0r_0 + B_1y_0r_0p_0 + C_1z_0p_0q_0).$$

(Cette équation, mise sous une forme rationnelle, est du 8[me] degré par rapport à λ lorsque les constantes A, B, C, x_0, y_0, z_0 sont indépendantes les unes des autres.)

Pour plus de facilité dans les calculs j'écris 2λ au lieu de λ. On a alors, en posant

$$a^2 = \frac{A+\lambda}{A_1}, \qquad b^2 = \frac{B+\lambda}{B_1}, \qquad c^2 = \frac{C+\lambda}{C_1},$$

$$\mu = 2(Ax_0bc + By_0ca - Cz_0ab),$$

$$(5) \qquad \begin{aligned} p_0 &= 2bc, & f_0 &= -\frac{2\lambda}{\mu}A_1q_0r_0 = \frac{4\lambda(A+\lambda)}{\mu}p_0, \\ q_0 &= 2ca, & g_0 &= -\frac{2\lambda}{\mu}B_1r_0q_0 = \frac{4\lambda(B+\lambda)}{\mu}q_0, \\ r_0 &= -2ab, & h_0 &= -\frac{2\lambda}{\mu}C_1p_0q_0 = \frac{4\lambda(C+\lambda)}{\mu}r_0, \end{aligned}$$

λ étant une racine de l'équation algébrique

$$x_0(A+2\lambda)\sqrt{\frac{B+\lambda}{B_1}}\sqrt{\frac{C+\lambda}{C_1}} + y_0(B+2\lambda)\sqrt{\frac{C+\lambda}{C_1}}\sqrt{\frac{A+\lambda}{A_1}}$$
$$+ z_0(C+2\lambda)\sqrt{\frac{A+\lambda}{A_1}}\sqrt{\frac{B+\lambda}{B_1}} = 0.$$

Pour calculer le déterminant des équations (3) je vais tâcher de résoudre ces équations sous la supposition que $P_n = Q_n = R_n = F_n = G_n = H_n = 0$.

Je pose

$$(6) \qquad \begin{aligned} u_1 &= p_0p_n + q_0q_n + r_0r_n, \\ u_2 &= Ap_0p_n + Bq_0q_n + Cr_0r_n, \\ u_3 &= A^2p_0p_n + B^2q_0q_n + C^2r_0r_n, \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\begin{aligned} p_0p_n &= -\frac{BCu_1 - (B+C)u_2 + u_3}{B_1C_1}, \\ q_0q_n &= -\frac{CAu_1 - (C+A)u_2 + u_3}{C_1A_1}, \\ r_0r_n &= -\frac{ABu_1 - (A+B)u_2 + u_3}{A_1B_1}. \end{aligned}$$

Je pose en plus

$$v_1 = g_0 r_n - h_0 q_n,$$
(7) $$v_2 = h_0 p_n - f_0 r_n,$$
$$v_3 = f_0 q_n - g_0 p_n.$$

Les trois premières des équations (3) se réduisent alors à

$$(n-2)f_n - r_0 g_n + q_0 h_n = v_1,$$
$$r_0 f_n + (n-2)g_n - p_0 h_n = v_2,$$
$$-q_0 f_n + p_0 g_n + (n-2)h_n = v_3.$$

Si je pose $n-2=m$, le déterminant de ce système d'équations est égal à

$$\begin{vmatrix} m & -r_0 & q_0 \\ r_0 & m & -p_0 \\ -q_0 & p_0 & m \end{vmatrix}$$
$$= m(m^2 + p_0^2 + q_0^2 + r_0^2) = m(m^2 - 4) = n(n-2)(n-4).$$

En supposant donc que n n'est pas égal ni à 2, ni à 4, on trouve

$$n(n-2)(n-4)f_n = (m^2 + p_0^2)v_1 + (p_0 q_0 + m r_0)v_2 + (p_0 r_0 - m q_0)v_3$$
$$= (n-4)\frac{2\lambda}{\mu} p_0[(Am - 2\lambda)u_1 - (m+2)u_2].$$

En divisant par $(n-4)$ il vient donc

$$n(n-2)f_n = \frac{2\lambda}{\mu} p_0(Amu_1 - 2\lambda u_1 - nu_2),$$
(8) $$n(n-2)g_n = \frac{2\lambda}{\mu} q_0(Bmu_1 - 2\lambda u_1 - nu_2),$$
$$n(n-2)h_n = \frac{2\lambda}{\mu} r_0(Cmu_1 - 2\lambda u_1 - nu_2).$$

Prenons maintenant les trois premières des équations (3)

$$(n-1)Ap_n - A_1(q_0 r_n + r_0 q_n) = y_0 h_n - z_0 g_n,$$
(9) $$(n-1)Bq_n - B_1(r_0 p_n + p_0 r_n) = z_0 f_n - x_0 h_n,$$
$$(n-1)Cr_n - C_1(p_0 q_n + q_0 p_n) = x_0 g_n - y_0 f_n.$$

En les multipliant respectivement par p_0, q_0, r_0 et en les additionant on trouve

$$(10)\qquad (n-1)u_2 + \Sigma A_1 q_0 r_0 p_n = \Sigma x_0 (r_0 g_n - q_0 h_n).$$

(Les signes Σ impliquent une sommation respectivement aux trois quantités symmétriques ABC, $A_1B_1C_1$, $p_0q_0r_0$ ou $x_0y_0z_0$). Mais

$$\Sigma A_1 q_0 r_0 p_n = -2\Sigma(A+\lambda)p_0 p_n = -2(u_2+\lambda u_1),$$

$$n(n-2)(r_0 g_n - q_0 h_n) = \frac{2\lambda}{\mu} r_0 q_0 A_1 m u_1, \qquad m = n-2,$$

par conséquent, vu que $\Sigma x_0 A_1 q_0 r_0 = -\mu$,

$$n\Sigma x_0 (r_0 g_n - q_0 h_n) = -2\lambda u_1.$$

L'équation (10) se réduit donc à la suivante

$$n\{(n-1)u_2 - 2(u_2+\lambda u_1)\} = -2\lambda u_1$$

ou

$$(11)\qquad n(n-3)u_2 - 2(n-1)\lambda u_1 = 0.$$

De même, en multipliant les deux côtés de chacune des équations (9) respectivement par Ap_0, Bq_0, Cr_0 et en les additionnant on trouve

$$(12)\qquad (n-1)u_3 + \Sigma A A_1 q_0 r_0 p_n = \Sigma x_0 (C r_0 g_n - B q_0 h_n).$$

Mais

$$\Sigma A A_1 q_0 r_0 p_n = -2\Sigma A(A+\lambda)p_0 p_n = -2(\lambda u_2 + u_3),$$

$$n(n-2)(C r_0 g_n - B q_0 h_n) = \frac{2\lambda}{\mu} A_1 r_0 q_0 (2\lambda u_1 + n u_2),$$

$$n(n-2)\Sigma x_0 (C r_0 g_n - B q_0 h_n) = -2\lambda(2\lambda u_1 + n u_2).$$

L'équation (12) se réduit donc à la suivante

$$n(n-2)\{(n-3)u_3 - 2\lambda u_2\} = -4\lambda^2 u_1 - 2\lambda n u_2$$

ou bien

$$(13)\qquad n(n-2)(n-3)u_3 - 2n(n-3)\lambda u_2 + 4\lambda^2 u_1 = 0.$$

En combinant les équations (12) et (13) on trouve

$$4\lambda^2 u_1 = n(n-3)u_3,$$
$$2\lambda u_2 = (n-1)u_3.$$

En portant ces valeurs de u_1 et de u_2 dans les équations (8) on trouve

$$(14)\qquad \begin{aligned} f_n &= \frac{p_0}{2\mu\lambda}\{(n-3)A - 4\lambda\}u_3, \\ g_n &= \frac{q_0}{2\mu\lambda}\{(n-3)B - 4\lambda\}u_3, \\ h_n &= \frac{r_0}{2\mu\lambda}\{(n-3)C - 4\lambda\}u_3. \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$(15)\qquad k_0 = A + B + C, \qquad k_1 = BC + CA + AB, \qquad k_2 = ABC,$$

multiplions chacune des équations (9) respectivement par BCp_0, CAq_0, ABr_0 et faisons-en la somme

$$(16)\quad k_2(n-1)u_1 - \Sigma(ABC_1 + ACB_1)q_0 r_0 p_n = \Sigma x_0(ABr_0 g_n - ACq_0 h_n).$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \Sigma(ABC_1 + ACB_1)q_0 r_0 p_n &= 2\Sigma A(A+\lambda)(B+C-A)p_0 p_n \\ &= 2[-2k_2 u_1 + (2k_1 + \lambda k_0)u_2 - (k_0 + 2\lambda)u_3], \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} &k_2(n-1)u_1 - \Sigma(ABC_1 + ACB_1)q_0 r_0 p_n \\ &= (n+3)k_2 u_1 - 2(2k_1 + \lambda k_0)u_2 + 2(k_0 + 2\lambda)u_3 \end{aligned}$$

ou bien, en portant dans cette équation les valeurs de u_1 et de u_2 exprimées en u_3, on a

$$\begin{aligned} &k_2(n-1)u_1 - \Sigma(ABC_1 + ACB_1)q_0 r_0 p_n \\ &= \frac{u_3}{4\lambda^2}\{n^3 k_2 - n(9k_2 + 8\lambda k_1 + 4\lambda^2 k_0) + 4\lambda(2k_1 + 3\lambda k_0 + 4\lambda^2)\}. \end{aligned}$$

D'un autre côté on trouve

$$ABr_0g_n - ACq_0h_n = \frac{r_0q_0}{2\mu\lambda}\{(n-3)A(B+C)A_1 - 4\lambda AA_1\}$$

$$= -\frac{p_0}{\mu\lambda}(A+\lambda)\{(n-3)A(B+C) - 4\lambda A\}$$

$$= \frac{p_0}{\mu\lambda}\{(n-3)k_2 - [(n-3)(k_1+\lambda k_0) - 4\lambda^2]A + (n+1)\lambda A^2\}.$$

On a

$$\Sigma Ax_0p_0 = \mu, \qquad \Sigma x_0p_0 = -\frac{\mu}{2\lambda}.$$

Posons encore

$$\Sigma A^2x_0p_0 = \mu_1.$$

On a trouve alors

$$\Sigma x_0(ABr_0g_n - ACq_0h_n)$$

$$= \frac{u_3}{2\lambda^2}\left\{-(n-3)k_2 - 2(n-3)(k_1+\lambda k_0)\lambda + 8\lambda^3 + 2(n+1)\lambda^2\frac{\mu_1}{\mu}\right\}$$

$$= \frac{u_3}{2\lambda^2}\left\{-n(k_2+2k_1\lambda+2k_0\lambda^2) + 3k_2 + 6k_1\lambda + 6k_0\lambda^2 + 8\lambda^3 + 2(n+1)\lambda^2\frac{\mu_1}{\mu}\right\}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (16) on trouve

$$(n-1)k_2u_1 - \Sigma(ABC_1+ACB_1)q_0r_0p_n - \Sigma x_0(ABr_0g_n - ACq_0h_n)$$

$$= \frac{u_3}{4\lambda^2}\left\{n^3k_2 - n(7k_2+4k_1\lambda) - 6k_2 - 4k_1\lambda - 4(n+1)\lambda^2\frac{\mu_1}{\mu}\right\}$$

$$= \frac{u_3}{4\lambda^2}(n+1)\left\{n(n-1)k^2 - 6k_2 - 4k_1\lambda - 4\lambda^2\frac{\mu_1}{\mu}\right\} = 0.$$

Par la manière même dont nous sommes arrivés à cette expression, il est clair que le facteur de u_3, multiplié par $n(n-2)(n-4)$, est le déterminant du système d'équations (3)

$$\Delta = (n+1)n(n-2)(n-4)\left(n(n-1)k_2 - 6k^2 - 4k_1\lambda - 4\lambda^2\frac{\mu_1}{\mu}\right).$$

L'équation $\Delta = 0$ n'ayant pour aucun système de valeurs des constantes A, B, C, x_0, y_0, z_0 *cinq* de ses racines égales à des nombres entiers positifs, il en suit que, tant que les quantités A_1, B_1, C_1 sont toutes trois différentes de zéro les séries (2) ne peuvent jamais contenir le nombre nécessaire de constantes arbitraires pour représenter le système *général* des intégrales des équations différentielles (1). Les intégrales générales de ces équations ne peuvent donc pas être des fonctions uniformes du temps n'ayant que des pôles dans chaque domaine fini de la variable t.

Considérons maintenant le *second cas,* et supposons que l'on ait $A = B$.

Posons:

$$\begin{aligned} u &= p + qi, & \alpha &= \gamma + \gamma' i, \\ v &= p - qi, & \beta &= \gamma - \gamma' i, \end{aligned} \qquad A_1 = A - C = -B_1, \qquad C_1 = 0.$$

Vu que l'on peut toujours dans ce cas choisir les axes des coordonnées de manière que $y_0 = 0$, les équations différentielles du problème peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} A\frac{du}{dt} + iA_1 ru &= i(z_0\alpha - x_0\gamma''), & \frac{d\alpha}{dt} &= -i(r\alpha - u\gamma''), \\ A\frac{dv}{dt} - iA_1 rv &= -i(z_0\beta - x_0\gamma''), & \frac{d\beta}{dt} &= i(r\beta - v\gamma''), \\ C\frac{dr}{dt} &= -\frac{x_0 i}{2}(\alpha - \beta), & \frac{d\gamma''}{dt} &= -\frac{i}{2}(u\beta - v\alpha). \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} u &= t^{-1}\sum_0^\infty{}_n u_n t^n, & \alpha &= t^{-2}\sum_0^\infty{}_n \alpha_n t^n, \\ v &= t^{-1}\sum_0^\infty{}_n v_n t^n, & \beta &= t^{-2}\sum_0^\infty{}_n \beta_n t^n, \\ r &= t^{-1}\sum_0^\infty{}_n r_n t^n, & \gamma'' &= t^{-2}\sum_0^\infty{}_n h_n t^n, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} u_0 &= p_0 + q_0 i, & \alpha_0 &= f_0 + g_0 i, \\ v_0 &= p_0 - q_0 i, & \beta_0 &= f_0 - g_0 i. \end{aligned}$$

Dans mon mémoire cité (page 182) j'ai montré que dans le cas où $A = B$ les équations auxquels doivent satisfaire les six quantités p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0 admettent deux systèmes de solutions.

Dans le premier de ces deux systèmes on a

$$p_0 = \varepsilon i \frac{z_0}{A-2C}\frac{2C}{x_0}, \qquad f_0 = -\frac{2C}{x_0},$$

$$q_0 = \varepsilon i p_0, \qquad g_0 = \varepsilon i f_0, \qquad \varepsilon^2 = 1,$$

$$r_0 = 2\varepsilon i, \qquad h_0 = 0.$$

Supposons $\varepsilon = 1$, on a alors

$$u_0 = 0, \qquad \alpha_0 = 0,$$

$$v_0 = 2p_0 = 2i\frac{z_0}{A-2C}\frac{2C}{x_0}, \qquad \beta_0 = -\frac{4C}{x_0},$$

$$r_0 = 2i, \qquad h_0 = 0.$$

Pour chaque valeur entière positive de n, les six quantités u_n, v_n, r_n α_n, β_n, h_n doivent satisfaire au système d'équations linéaires suivant

$$\begin{aligned}
&(n-1)Au_n + iA_1(r_0u_n + u_0r_n) - z_0 i\alpha_n + ix_0h_n = U_n,\\
&(n-1)Av_n - iA_1(r_0v_n + v_0r_n) + z_0 i\beta_n - ix_0h_n = V_n,\\
&(n-1)Cr_n \qquad\qquad + \frac{x_0 i}{2}(\alpha_n - \beta_n) = R_n,\\
&(n-2)\alpha_n + r_0 i\alpha_n - iu_0h_n + i\alpha_0 r_n - ih_0u_n = \mathfrak{A}_n,\\
&(n-2)\beta_n - r_0 i\beta_n + iv_0h_n - i\beta_0 r_n + ih_0v_n = \mathfrak{B}_n,\\
&(n-2)h_n - \frac{i}{2}v_0\alpha_n + \frac{i}{2}u_0\beta_n - \frac{i}{2}\alpha_0 v_n + \frac{i}{2}\beta_0 u_n = H_n.
\end{aligned}$$

Les quantités $U_n \ldots H_n$ désignent des fonctions entières des coefficients $u_m, v_m, r_m, \alpha_m, \beta_m, h_m$ pour lesquels $m < n$.

Si l'on porte dans ces équations les valeurs précédemment trouvées de $u_0, v_0, r_0, \alpha_0, \beta_0, h_0$, elles se simplifient sensiblement et deviennent

$$[(n-3)A + 2C]u_n + ix_0h_n = U_n,$$

$$[(n+1)A - 2C]v_n - iA_1v_0r_n + iz_0\beta_n - ix_0h_n = V_n,$$

$$(n-1)Cr_n - i\frac{x_0}{2}\beta_n = R_n,$$

$$(n-4)\alpha_n = \mathfrak{A}_n,$$

$$n\beta_n + iv_0 h_n - i\beta_0 r_n = \mathfrak{B}_n,$$

$$(n-2)h_n - \frac{i}{2}v_0\alpha_n + \frac{i}{2}\beta_0 u_n = H_n.$$

Le déterminant D de ces dernières équations peut sans difficulté être calculé directement. On a

$$D = (n-4)(nA + A - 2C)\begin{vmatrix} (n-3)A + 2C & 0 & 0 & ix_0 \\ 0 & (n-1)C & -\frac{ix_0}{2} & 0 \\ 0 & -i\beta_0 & n & v_0 i \\ \frac{i}{2}\beta_0 & 0 & 0 & n-2 \end{vmatrix}$$

$$= (n-4)(nA + A - 2C)D_1,$$

$$D_1 = [(n-3)A + 2C]\begin{vmatrix} (n-1)C & -i\frac{x_0}{2} & 0 \\ -i\beta_0 & n & v_0 i \\ 0 & 0 & n-2 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{i}{2}\beta_0\begin{vmatrix} 0 & 0 & ix_0 \\ (n-1)C & -i\frac{x_0}{2} & 0 \\ -i\beta_0 & n & v_0 i \end{vmatrix}$$

$$= \left(n(n-1)C + \frac{x_0}{2}\beta_0\right)\left((n-2)[(n-3)A + 2C] + \frac{x_0}{2}\beta_0\right)$$

$$= (n+1)(n-2)(n-3)C(nA - 2A + 2C).$$

Par conséquent

$$D = (n+1)(n-2)(n-3)(n-4)C(nA + A - 2C)(nA - 2A + 2C).$$

Afin que cinq des racines de l'équation

$$D = 0$$

soient des nombres entiers positifs, il faudrait que les quantités

$$\frac{2C}{A} - 1 \quad \text{et} \quad 2 - \frac{2C}{A}$$

soient toutes les deux des nombres entiers positifs; mais ceci n'est evidemment pas possible.

Seulement dans le cas $2C = A$ l'une de ces quantités est égale à 0, l'autre à 1.

Dans ce cas-là on a, en faisant abstraction d'un facteur constant,

$$D = (n + 1)n(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4).$$

Mais en regardant les formules précédentes ont voit que $v_0 = \infty$ si $A = 2C$, à moins que l'on n'ait en même temps $z_0 = 0$. Dans ce cas v_0 reste indéterminé. Ce cas, où $A = B = 2C$, $x_0 \neq 0$, $z_0 = 0$, est justement celui que j'ai étudié dans mon mémoire précité.

Le deuxième système de valeurs qui peuvent satisfaire aux équations qui definissent les six quantités $p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0$ dans le cas de $A = B$, est le suivant (voir mon mémoire cité)

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, & f_0 &= -\frac{2A}{x_0 - iz_0}, \\ q_0 &= 2i, & g_0 &= 0, \\ r_0 &= 0, & h_0 &= -if_0, \end{aligned}$$

où, pour simplifier, j'ai écrit i seulement au lieu de εi ($\varepsilon^2 = 1$). En portant ces valeurs dans les équations (6), on voit qu'elles se divisent en deux groupes

$$\begin{aligned} A(n-1)p_n - 2A_1 ir_n + z_0 g_n &= P_n, \\ C(n-1)r_n - x_0 g_n &= R_n, \\ if_0 p_n + f_0 r_n + (n-2)g_n &= G_n, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A(n-1)q_n - z_0 f_n + x_0 h_n &= Q_n, \\ -f_0 q_n - 2if_n + (n-2)h_n &= H_n, \\ -if_0 q_n + (n-2)f_n + 2ih_n &= F_n, \end{aligned}$$

dont le premier ne contient que les trois quantités p_n, r_n, g_n, tandis que le second ne contient que les quantités q_n, f_n, h_n. En calculant les déterminants de chacun de ces deux groupes d'équations à part, on trouve que le premier est donné par l'équation

$$D_1 = \frac{n-3}{x_0 - iz_0} A\{[(n^2 - n + 2)C - 2A]x_0 - in(n-1)Cz_0\},$$

tandis que le second a la valeur

$$D_2 = A(n+1)(n-2)(n-4).$$

Vu que toutes les constantes A, B, C, x_0, z_0 sont réelles, on voit facilement que l'équation en n

$$D = D_1 D_2 = 0$$

ne peut avoir cinq racines égales à des nombres entiers positifs que dans l'un des deux cas

$$A = C = B$$

ou bien

$$x_0 = 0, \qquad A = B.$$

Résumé: on voit donc que la condition nécessaire pour que les séries (2) puissent représenter les intégrales générales du système d'équations différentielles (1), n'est remplie que si les constantes A, B, C, x_0, y_0, z_0 satisfont à l'une des quatre conditions suivantes:

(1) $$A = B = C,$$

(2) $$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

(3) $$A = B, \qquad x_0 = y_0 = 0,$$

(4) $$A = B = 2C, \qquad z_0 = 0.$$