ÜBER DIE INTEGRATION
DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG
IN WELCHEN DIE UNABHÄNGIGE VERÄNDERLICHE NICHT VORKOMMT

VON

WALTHER RASCHKE.[1]

In dem Journal de l'École polytechnique (36^e cahier) haben die Herren BRIOT und BOUQUET folgendes Theorem aufgestellt:

Wenn eine algebraische, irreductible Differentialgleichung zwischen u und $\frac{du}{dz}$, welche die Veränderliche z nicht explicite enthält, ein eindeutiges Integral besitzt, so müssen folgende nothwendigen und hinreichenden Bedingungen erfüllt sein:

1. Die Gleichung muss die Form haben:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + f_2(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-2} + \ldots + f_m(u) = 0,$$

wenn $f_1(u)$, $f_2(u)$, ... ganze, rationale Functionen in u bedeuten, von

[1] Das Original der hier reproducirten Arbeit wurde im December 1887 von Herrn FUCHS der Redaction zum Abdruck übergeben. In Folge verschiedener Umstände, welche hauptsächlich mit der von König OSCAR II ausgeschriebenen Preisbewerbung in Verbindung stehen, ist es uns doch erst jetzt möglich geworden, für dieselbe Platz zu bereiten. Wir geben unten einige Worte wieder, welche Herr FUCHS der Abhandlung beizufügen die Güte hatte. *Der Hauptredacteur.*

Die vorliegende Arbeit ist der Inhalt einer Dissertation, auf Grund deren der Verfasser im Jahre 1883 von der philosophischen Facultät der Universität Heidelberg zum Doctor philosophiae promovirt worden ist. Leider wurde der talentvolle junge Mann im darauf folgenden Jahre in seiner Vaterstadt Danzig das Opfer eines Unglücksfalles. Die Arbeit enthält Gesichtspunkte, welche sowohl für die vorliegende Frage, als auch für andere welche über dieselbe hinausgehen, bemerkenswerth sind. Dieser Umstand wird, wie ich hoffe, in genügender Weise den Abdruck an dieser Stelle rechtfertigen. FUCHS.

denen $f_1(u)$ höchstens vom 2^{ten} Grade, $f_2(u)$ höchstens vom 4^{ten} Grade u. s. w., schliesslich $f_m(u)$ höchstens vom $2m^{\text{ten}}$ Grade ist.

2. Wenn $\frac{du}{dz}$ für den endlichen Werth $u = u_1$ nicht verschwindet, so muss es sich nach ganzen Potenzen von $(u - u_1)$ entwickeln lassen.

3. Verschwindet aber $\frac{du}{dz}$ für den endlichen Werth $u = u_1$, so muss in jeder Entwicklung von $\frac{du}{dz}$ nach $(u - u_1)$ der Exponent der niedrigsten Potenz von $(u - u_1)$ entweder gleich oder grösser als 1 sein, oder die Form haben $1 - \frac{1}{p}$, wenn p eine ganze, positive Zahl bedeutet.

4. Schliesslich muss die Differentialgleichung, welche man erhält, wenn in obige Gleichung $u = \frac{1}{w}$ gesetzt wird, für $w = 0$ dieselben Bedingungen erfüllen.

Herr Fuchs hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass es von Interesse sein würde, im Anschluss an ein Verfahren, welches Herr Hermite in seinen Vorlesungen an der École polytechnique 1874—75 an einzelnen Beispielen erläutert hat, eine algebraische Gleichung zwischen u und v zu Grunde zu legen, deren Veränderliche sich mit Hülfe eines Parameters x und einer Quadratwurzel aus einer ganzen Function in x von höchstens dem 4^{ten} Grade ausdrücken lassen, und die Bedingungen dafür aufzustellen, dass diese Gleichung ein eindeutiges Integral hat, sobald $v = \frac{du}{dz}$ gesetzt wird, wie er es in einem Briefe an Hermite (Comptes rendus 1881, p. 1065) für den besonderen Fall der binomischen Gleichungen ausgeführt hat.

In der That ist es mir gelungen auf diesem Wege die Formen der Differentialgleichungen in Übereinstimmung mit den Resultaten von Briot und Bouquet abzuleiten (Abschnitt III dieser Arbeit).

Alle algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die unabhängige Variable nicht explicite enthalten, gehören in die Classe derjenigen algebraischen Gleichungen zwischen u und v, in welchen sich u und v als eindeutige Functionen eines Parameters z ausdrücken lassen und u eine algebraische Function von $\frac{du}{dz}$ ist. Von dieser Classe ist im Abschnitt I gezeigt, dass jede Veränderliche, als algebraische Function der andern betrachtet, nur eine gewisse Anzahl von Verzweigungspunkten besitzen darf, so dass die algebraische Gleichung zwischen u und v ein Geschlecht hat, welches kleiner als zwei ist. Mit Hülfe des bekannten Satzes, dass in jeder Gleichung, deren Geschlecht kleiner als zwei ist, sich die Veränderlichen mit Hülfe eines Parameters x unter Adjunction einer Quadratwurzel, deren Radicand höchstens vom 4^{ten} Grade in x ist, rational ausdrücken lassen, ergiebt sich, dass die Formen, welche in III aufgestellt sind, sämmtliche Formen unserer Differentialgleichung umfassen, die ein eindeutiges Integral besitzen. Für den eben erwähnten Satz ist im Abschnitt II ein analytischer Beweis gegeben, welcher auch für solche algebraische Gleichungen bestehen bleibt, deren Veränderliche mehrfache Verzweigungspunkte besitzen.

I.

Es sei

$$(1) \qquad f(u\,,\,U) = 0$$

eine algebraische irreductible Gleichung zwischen u und U. Wenn $U = \frac{du}{dz}$ gesetzt wird, so stellt dieselbe eine Differentialgleichung erster Ordnung dar, in welcher die Variable z explicite nicht vorkommt. Es wird angenommen, dass (1) ein Integral u besitzt, welches für endliche Werthe von z eindeutig ist.

Nach der Theorie der algebraischen Gleichungen lässt sich U für irgend einen endlichen Werth $u = a$ nach $u - a$ in folgender Form entwickeln:

$$(2) \qquad U = A_1(u-a)^{\frac{k+h}{k+1}} + A_2(u-a)^{\frac{k+h+1}{k+1}} + \ldots .$$

Hierin sind $A_1\,,\,A_2\,,\,\ldots$ Constanten, k und h bedeuten ganze Zahlen, von diesen kann $k+1$ stets positiv angenommen werden, h kann positiv, auch negativ sein. Wenn $k > 0$ ist, so nennt man den Punkt $u = a$, welcher zur Entwicklung (2) gehört, einen k-fachen Verzweigungspunkt der algebraischen Function U. Wenn U für $u = a$ verschwindet, so dass $k + h > 0$ ist, so hat die Gleichung $f(u, 0) = 0$ mindestens eine $(k + h)$-fache Wurzel $u = a$.

Aus (2) erhält man nach dem Verfahren von Briot und Bouquet in folgender Weise eine Entwicklung von z nach Potenzen von $(u - a)$:

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{A_1}(u - a)^{\frac{-(k+h)}{k+1}} + B_2(u - a)^{\frac{1-(k+h)}{k+1}} + \ldots .$$

Die Integration giebt, wenn kein Exponent gleich -1 ist — in welchem Falle z unendlich gross würde für $u = a$ —

$$z - z_0 = C_1(u - a)^{\frac{1-h}{k+1}} + C_2(u - a)^{\frac{2-h}{k+1}} + \ldots .$$

Es kann z nur endlich bleiben für $h < 1$. In diesem Falle ergiebt sich eine Entwicklung von u nach $z - z_0$:

$$u - a = D_1(z - z_0)^{\frac{k+1}{1-h}} + D_2(u - a)^{\frac{k+2}{1-h}} + \ldots .$$

Da u eindeutige Function von z sein soll, so muss $\frac{k+1}{1-h}$ eine ganze Zahl sein. Nach der Entwicklung (2) entsprechen einem Punkte in der Nähe von $u = a$ $(k + 1)$ unendlich wenig verschiedene Stellen U und daher mindestens $k + 1$ verschiedene Stellen z; dieses ist nur möglich, wenn die Entwicklung von $u - a$ nach $(z - z_0)$ mindestens mit der $k + 1$ Potenz von $(z - z_0)$ beginnt, daher ist $h = 0$. Für $z = \infty$ war $h > 0$, folglich gilt die nothwendige Bedingung, dass $h \geqq 0$ sein muss. Aus dieser Bedingung ergeben sich folgende Sätze:

1. Für endliche Werthe von u kann U nicht unendlich werden.

2. Wenn für $u = a$ der Werth von $U = 0$ wird, und es ist diese Stelle ein k-facher Verzweigungspunkt für U, so muss $u = a$ mindestens k-fache Wurzel von $f(u, 0) = 0$ sein.

Wenn die algebraische Gleichung (1) in Bezug auf U vom Grade m ist, so kann man sie in folgender Weise schreiben:

$$(1) \qquad f_0(u)U^m + f_1(u)U^{m-1} + \ldots + f_{m-1}(u)U + f_m(u) = 0.$$

Es bedeuten $f_0(u), f_1(u), \ldots$ ganze rationale Functionen von u. In Folge der Bedingung 1. muss $f_0(u)$ eine Constante sein. Ebenso wie u ist auch $w = \frac{1}{u}$ eine eindeutige Function von z; führt man daher in (1) die Transformation ein:

$$u = \frac{1}{w}, \qquad U = -\frac{1}{w^2}\frac{dw}{dz},$$

so darf in der transformirten Gleichung $\frac{dw}{dz}$ nur unendlich werden, wenn dieses für w der Fall ist, der Coefficient von $\left(\frac{dw}{dz}\right)^m$ muss in (1) constant sein; dieses ist nur möglich, wenn $f_1(u)$ höchstens vom 2^{ten} Grade, $f_2(u)$ höchstens vom 4^{ten} Grade in u ist, u. s. w., schliesslich $f_m(u)$ höchstens den Grad $2m$ hat, so dass die Gleichung (1) in Bezug auf u höchstens vom $2m^{\text{ten}}$ Grade ist.

Diese Resultate werden für die algebraische Gleichung von u und v:

$$F(u, v) = 0 \tag{3}$$

verallgemeinert, wenn hierin u und v eindeutige Functionen von z sind und die eindeutige Function u einer Differentialgleichung von der Form (1) genügt. Dann hat auch die eindeutige Function v diese Eigenschaft, denn durch Differentiation von (3) nach z erhält man eine algebraische Gleichung zwischen $u, v, \frac{du}{dz}$ und $\frac{dv}{dz}$. Eliminirt man aus dieser, aus (1) und (3) die Grössen u und $\frac{du}{dz}$, so erhält man eine algebraische Gleichung zwischen v und $\frac{dv}{dz}$.

Man bilde über der u-Ebene eine m-blättrige Riemann'sche Fläche T, auf welcher die algebraische Function $U = \frac{du}{dz}$, welche durch (1) definirt wird, eindeutig ist. Durchläuft man dieselbe mit der algebraischen Function v, so kann es vorkommen, dass demselben Punkte auf T mehrere Werthenpaare (u, v) entsprechen; dieser Fall soll zunächst ausgeschlossen werden, so dass auch v auf T eindeutig ist. Ferner kann zu l verschiedenen Stellen von T dasselbe Werthenpaar (u, v) gehören. Diese Stellen haben denselben Werth u, liegen also in der u-Ebene übereinander in l verschiedenen Blättern von T. Bewegt man die l Punkte auf gleichem

Wege in der u-Ebene, das heisst so, dass stets u in allen l Blättern denselben Werth behält, und überschreitet auf diesem Wege keine Verzweigungspunkte von U und v, so hat einerseits v in den l übereinanderliegenden Punkten einen gleichen Werth und andererseits müssen die l Punkte stets in verschiedenen Blättern liegen. Bei dieser Wanderung kann man zu allen Werthenpaaren $(u\,,\,v)$ gelangen und jedem entsprechen l Punkte von T. Es gilt dann der Satz:

Wenn einem Werthenpaare $(u\,,\,v)$ l und nur l verschiedene Stellen von T entsprechen, so müssen auch jedem anderen Werthenpaare l und nur l Stellen von T entsprechen. Ausgenommen sind nur die Verzweigungspunkte.

Jedem u entsprechen im Allgemeinen m verschiedene Werthe U und daher nach obigem Satze $\frac{m}{l}$ verschiedene Werthe v. Die Gleichung (3) ist in Bezug auf v vom Grade $\frac{m}{l}$.

Für einen k-fachen Verzweigungspunkt von v, der im Endlichen der u-Ebene liegt, gilt die Entwicklung:

$$(4) \qquad v = A_1(u-a)^{\frac{p}{k+1}} + A_2(u-a)^{\frac{p+1}{k+1}} + \dots, \qquad k > 0.$$

In der Nähe von $u = a$, z. B. für $u = a'$ giebt es $k + 1$ Werthe v:

$$v_1\,,\, v_2\,,\,\dots\,,\, v_\nu\,,\,\dots\,,\, v_{k+1}\,,$$

welche in einander übergehen, wenn man den Punkt der Fläche T, für welchen die Entwicklung (4) gilt, k-mal umkreist. Bei diesem Umkreisen muss aber auch U in $u = a'$ $k + 1$ verschiedene Werthe erhalten, da jedem Werthenpaare $(u\,,\,U)$ nur eine Stelle $(u\,,\,v)$ entspricht. Es ist daher $u = a$ mindestens ein k-facher Verzweigungspunkt von T.

Es soll aber jeder Werth v_ν für $u = a'$ in l verschiedenen Blättern von T vorkommen, so dass ihm l verschiedene U entsprechen, welche mit:

$$U_\nu'\,,\, U_\nu''\,,\,\dots\,,\, U_\nu^{(\mu)}\,,\,\dots\,,\, U_\nu^{(l)} \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\dots,k+1)}$$

bezeichnet werden sollen. Von diesen $l(k + 1)$ Werthen U müssen je $(k + 1)$ zu einem Verzweigungspunkt von T gehören, und es kann die Bezeichnung so gewählt werden, dass dieses immer diejenigen Werthe sind, deren oberer Index (μ) gleich ist. Ferner können einige der k-fachen Verzweigungspunkte von T zusammenfallen, dieses möge z. B. für die n_1 Gruppen $U_\gamma^{(\mu)}$ der Fall sein, für welche $\mu = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n_1}$ wird. Alsdann bilden diese einen q_1-fachen Verzweigungspunkt:

$$q_1 = n_1(k + 1) - 1.$$

Von den anderen Gruppen $U_\nu^{(\mu)}$ mögen noch $n_2, n_3, \ldots$ einen gemeinsamen Verzweigungspunkt bilden, welcher dann beziehungsweise $q_2 + 1$, $q_3 + 1, \ldots$ verschiedene Blätter von T verbindet. Die Summe aller Gruppen ist l, so dass: $\Sigma n = l$. Der k-fache Verzweigungspunkt von v verlangt dann $q_1 + q_2 + q_3 \ldots$ Verzweigungspunkte in T:

$$\Sigma q = \Sigma n . k + \Sigma(n - 1) \geqq lk.$$

Bezeichnet man mit Q die Anzahl sämmtlicher Verzweigungspunkte von v, für welche u endlich ist — hierbei wird jeder k-fache Verzweigungspunkt wie k einfache Verzweigungspunkte gezählt —, so verlangen diese mindestens $l . Q$ Verzweigungspunkte auf T.

Wie oben gezeigt wurde, muss jeder k-fache Verzweigungspunkt von U mindestens k-fache Wurzel von $f(u, 0) = 0$ sein, so dass jene $l . Q$ kritischen Punkte der Gleichung $f(u, 0) = 0$ ebensoviele Wurzeln geben; wenn ausserdem noch s Wurzeln vorhanden sind, so gilt die Ungleichung:

$$2m \geqq lQ + s, \tag{5}$$

denn (1) ist höchstens vom Grade $2m$ in u.

Um den wichtigen Einfluss dieser Bedingung auf (3) zu erkennen, betrachte man $F(u, v) = 0$ als algebraische Curve der rechtwinkligen Coordinaten u und v. Einem einfachen Verzweigungspunkt entspricht bekanntlich entweder eine einfache Tangente vom unendlich fernen Punkte der v-Axe oder ein einfacher Rückkehrpunkt. Im Allgemeinen giebt die Anzahl der Tangenten, welche von irgend einem Punkte an die Curve gezogen werden können, die Classe $= k$ derselben an. Unter der Annahme, dass in (3) dieses für den unendlich fernen Punkt der v-Axe der Fall ist und dass für sämmtliche Verzweigungspunkte von (3) sowohl v als auch u endlich bleiben, ist $Q = k + r$, wenn r die Anzahl der Rückkehrpunkte bezeichnet.

Ferner soll angenommen werden, dass in (3) der Grad von v, also $\frac{m}{l}$, zugleich die Ordnung der Curve ist. Bezeichnet p das Geschlecht von (3), so gilt folgende (PLÜCKER'sche) Formel:

$$2p - 2 = k + r - 2\frac{m}{l}.$$

Verbindet man dieselbe mit (5), so ergiebt sich:

$$p \leqq 1 - \frac{s}{2l}. \tag{6}$$

Es sind s, l und p ganze positive Zahlen oder Null, daher muss $p < 2$ und s entweder Null oder $2l$ sein, für $p = 1$ muss $s = 0$ sein. Hiermit ist die nothwendige Bedingung gefunden:

Das Geschlecht von (3) muss kleiner als zwei sein.

Im Laufe der Untersuchung wurden der Gleichung (3) einige Beschränkungen auferlegt, welche aber leicht durch die lineare Substitution

$$u = \frac{b_1 u' + b_2 v' + b_3}{a_1 u' + a_2 v' + a_3}, \qquad v = \frac{c_1 u' + c_2 v' + c_3}{a_1 u' + a_2 v' + a_3}, \tag{7}$$

in welcher a, b und c beliebige Constanten bedeuten, beseitigt werden können. Da u und v eindeutige Functionen von einem Parameter sind, so ist dieses auch für u' und v' der Fall. Ferner lässt die Substitution das Geschlecht von (3) ungeändert. Wenn daher für die transformirte Gleichung jene Bedingung für das Geschlecht gilt, so ist dieses für (3) selbst der Fall.

Es wurde verlangt, dass die Anzahl der Tangenten vom unendlich fernen Punkt der v-Axe gleich der Classe k von (3) sei. Man erreicht dieses für eine Curve in u' und v' auf folgende Weise. Wenn $u = u_1$ und $v = v_1$ einer der unzählig vielen Punkte ist, von dem aus die Anzahl der Tangenten $= k$ ist und der nicht auf der Curve (3) selbst liegt, so bestimme man:

$$\frac{b_2}{a_2} = u_1; \qquad \frac{c_2}{a_2} = v_1.$$

Dem Punkte $u = u_1$, $v = v_1$ entspricht in der transformirten Curve der unendlich ferne Punkt der v'-Axe, und es lassen sich von $u' = 0$, $v' = \infty$

k Tangenten ziehen; durch die lineare Substitution wird die Classe der Curve nicht geändert.

Ferner wurde vorausgesetzt, dass in der Gleichung (3) die Ordnung n mit dem Grad in v übereinstimmt, und dass für $u = \infty$ und für $v = \infty$ die algebraische Function v von u keinen Verzweigungspunkt besitzt. Um dieses durch die Substitution zu erreichen, bestimme man b_1, a_1 und c_1 derart, dass die Gerade, welche durch die Gleichungen:

$$u = \frac{b_1 t + b_2}{a_1 t + a_2}; \qquad v = \frac{c_1 t + c_2}{a_1 t + a_2}$$

bestimmt wird, wenn t einen beliebigen Parameter bedeutet, und welche durch den Punkt $u = u_1$, $v = v_1$ geht, in n verschiedenen Punkten, für welche t n verschiedene endliche Werthe $t_1, t_2, \ldots, t_\nu, \ldots, t_n$ annimmt, die Curve (3) schneidet. Die transformirte Curve erhält dann für $u' = \infty$ n verschiedene, endliche Werthe $\frac{u'}{v'} = t_\nu$, d. h. sie hat im Unendlichen keinen singulären Punkt und ihr Grad in v ist n.

Da im Allgemeinen die Wahl des Punktes (u_1, v_1) und die Richtung obiger Geraden beliebig sind, so tritt keine Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten auf; a_ν, b_ν und c_ν bleiben im Allgemeinen beliebig.

Die Gleichung (1) ist in Bezug auf U vom m^{ten} Grade; durch die Substitution $u = \frac{1}{u' + a}$, $U = -\frac{1}{(u' + a)^2}\frac{du'}{dz}$ wird die neue Gleichung für u' und $\frac{du'}{dz}$ im Allgemeinen vom $2m^{\text{ten}}$ Grade in u'; es kann dann auch durch die allgemeinere Substitution (7) erreicht werden, dass in der Gleichung zwischen u' und $\frac{du'}{dz}$ der Grad von u' das Doppelte vom Grade in $\frac{du'}{dz}$ ist. In diesem Falle muss es für $u' = \infty$ mindestens eine Stelle geben, für welche $\frac{1}{(u')^\mu} \cdot \frac{du'}{dz}$ endlich und von Null verschieden ist, wenn $\mu > 1$ ist.

Ausser den eben behandelten Annahmen wurde noch verlangt, dass die Gleichungen (1) und (3) in solcher Verbindung stehen, dass niemals einem Werthenpaare (u, U) verschiedene Werthenpaare (u, v) entsprechen. Es möge diese Annahme für die transformirte Curve in u' und v' nicht erfüllt sein, sondern zu dem Punkte $u' = u_1'$ und $\frac{du'}{dz} = U_1'$ zwei verschiedene Stellen (u', v') gehören. Man gehe dann von (u'_1, U'_1) in der u'-Ebene aus, beschreibe irgend eine Curve, ohne einen Verzweigungspunkt von $\frac{du'}{dz}$ und v' zu überschreiten, und bestimme in jedem Punkte derselben den Werth von v. Es ist dann ersichtlich, dass jedem Werthenpaare $\left(u', \frac{du'}{dz}\right)$ zwei Werthe von (u', v') entsprechen, daher müssen auch von den n verschiedenen Stellen (u', v') für $u' = \infty$ mindestens je zwei zu demselben Werthenpaare $\left(u', \frac{du'}{dz}\right)$ gehören.

Für $u' = \infty$ ist jede der n verschiedenen Stellen (u', v') durch einen der Werthe t_ν charakterisirt, welchen hier $\frac{u'}{v'} = \frac{du'}{dv'}$ annimmt. Für ein Werthenpaar $\left(u', \frac{du'}{dz}\right)$ im Unendlichen der u'-Ebene möge

$$\frac{1}{u'^{\mu}} \cdot \frac{du'}{dz} = \sigma, \qquad (\mu > 0)$$

einen endlichen von Null verschiedenen Werth annehmen. Zu dieser Stelle gehören zwei verschiedene Werthe t_ν und zwei verschiedene Werthe $\frac{1}{u'^{\mu}} \cdot \frac{dv'}{dz} = \frac{\sigma}{t_\nu}$. Betrachtet man aber die Functionen $u'' = u' + \alpha v'$ und v' und bezeichnet mit t'_ν und σ' die Grössen, welche für die neue Gleichung in u'' und v' analoge Bedeutung haben, wie t_ν und σ für die Gleichung in u' und v', so erhält man:

$$\sigma' = \frac{1}{(u' + \alpha v')^{\mu}} \left(\frac{du'}{dz} + \alpha \frac{dv'}{dz}\right); \qquad t_\nu = \frac{u' + \alpha v'}{v'} \qquad (\text{für } u' = \infty);$$

$$\sigma' = \sigma \frac{1}{\left(1 + \alpha \frac{1}{t_\nu}\right)^{\mu - 1}}; \qquad t'_\nu = t_\nu + \alpha.$$

Wenn $\mu \gtrless 1$ ist, so kann man α derart wählen, dass für verschiedene Werthe t_ν auch σ' einen verschiedenen Werth annimmt, und dass σ' mit keinem Werth übereinstimmt, den $\frac{1}{u''^{\lambda}} \cdot \frac{du''}{dz}$ für beliebige Werthe λ im Unendlichen von u'' annimmt. Alsdann kann diesem Werthe σ' nur ein t'_ν entsprechen. Wenigstens an einer Stelle im Unendlichen muss aber

$\mu > 1$ sein. Es giebt also ein Werthenpaar $\left(u'', \frac{du''}{dz}\right)$, zu dem nur ein Werthenpaar (u'', v') gehört, folglich kann überhaupt keine Stelle $\left(u'', \frac{du''}{dz}\right)$ mehreren Stellen (u'', v') entsprechen. Hierdurch ist auch die letzte Beschränkung für (3) beseitigt, so dass folgender Satz gilt:

Wenn in einer algebraischen irreductiblen Gleichung zwischen u und v die beiden Veränderlichen als eindeutige Functionen eines Parameters z ausgedrückt werden können und u eine algebraische Function von $\frac{du}{dz}$ ist, so muss das Geschlecht jener Gleichung kleiner als zwei sein.

Die Substitution (7) wird auf einen speciellen Fall von (3) nämlich auf (1) selbst angewendet.

$$(8) \qquad u' = \frac{B_1 u + B_2\left(\frac{du}{dz}\right) + B_3}{A_1 u + A_2\left(\frac{du}{dz}\right) + A_3}; \qquad v' = \frac{C_1 u + C_2\left(\frac{du}{dz}\right) + C_3}{A_1 u + A_2\left(\frac{du}{dz}\right) + A_3}.$$

Die transformirte Gleichung in u' und v' soll dann alle Annahmen erfüllen, mit Hülfe deren die Ungleichung (6) abgeleitet wurde, und für $\frac{du}{dz} = 0$ soll u' nicht unendlich werden. Jedem Werthenpaare (u', v') entspricht ein Werthenpaar $\left(u, \frac{du}{dz}\right)$, und diesem nur ein Werthenpaar $\left(u', \frac{du'}{dz}\right)$, folglich gehört zu jedem (u', v') nur eine Stelle $\left(u', \frac{du'}{dz}\right)$ und die Zahl l in (6) ist hier gleich 1. Es kann daher s nur 2 oder 0 sein. Es möge $\frac{du'}{dz}$ für $u' = a'_1, a'_2, \ldots, a'_\nu$ verschwinden und die Entwicklung nach $u' - a'_\nu$ lauten:

$$(9) \qquad \frac{du'}{dz} = A'_\nu(u' - a'_\nu)^{\frac{p_\nu + l_\nu}{p_\nu + 1}} + \ldots \qquad (p_\nu > 0\,;\ l_\nu \geqq 0).$$

Dann ist $u' = a'_\nu$ eine $(p_\nu + l_\nu)$-fache Wurzel der Gleichung zwischen u' und $\frac{du'}{dz}$ für $\frac{du'}{dz} = 0$, folglich ist $s = \sum l_\nu$. Höchstens für zwei Entwicklungen (9) kann $l_\nu > 0$ sein. Um zu erkennen, dass diese Beziehung auch für (1) selbst gilt, betrachte man die Stellen von (1), welche der Entwicklung (9) entsprechen. Die Substitution ist so eingerichtet, dass jedem

Werthenpaar $\left(u', \frac{du'}{dz}\right)$ nur ein Werthenpaar (u', v') entspricht; hierfür ergiebt sich nur eine Stelle $\left(u, \frac{du}{dz}\right)$, folglich gehört zu (9) nur eine Stelle von (1); für dieselbe soll die Entwicklung gelten:

$$(10) \qquad \frac{du}{dz} = A_\nu (u - a_\nu)^{\frac{h_\nu}{k_\nu + 1}} + A'_\nu (u - a_\nu)^{\frac{h_\nu + 1}{k_\nu + 1}} + \ldots \qquad (k_\nu > 0).$$

Wenn $u = a_\nu$ eine Wurzel von $f(u, 0) = 0$ sein soll, so muss $h_\nu > 0$ sein. Setzt man diese Entwicklung in (8) ein, so ergiebt sich:

$$(11) \qquad u' - a'_\nu = B(u - a_\nu)^{\frac{n_\nu}{k_\nu + 1}} + B_1 (u - a_\nu)^{\frac{n_\nu + 1}{k_\nu + 1}} + \ldots;$$

$$\frac{du'}{dz} = \frac{n_\nu}{k_\nu + 1} B (u - a_\nu)^{\frac{n_\nu}{k_\nu + 1} - 1 + \frac{h_\nu}{k_\nu + 1}} + \ldots.$$

Wenn $u' = b$ in der Nähe von $u' = a'_\nu$ liegt, so giebt (9) nur $p_\nu + 1$ verschiedene Werthe $\frac{du'}{dz}$, und diese höchstens $p_\nu + 1$ verschiedene Werthe u, folglich kann n_ν nicht grösser als $p_\nu + 1$ sein. Eliminirt man aus den Entwicklungen (11) den Werth $(u - a_\nu)$, so erhält man:

$$\frac{du'}{dz} = A'_\nu (u' - a'_\nu)^{\frac{n_\nu + h_\nu - k_\nu - 1}{n_\nu}} + \ldots.$$

Der Vergleich mit (9) ergiebt:

$$n_\nu = c.(p_\nu + 1), \qquad h_\nu = (k_\nu + l_\nu).c \qquad (c \text{ ist eine ganze Zahl } > 0),$$

da $n_\nu \leqq p_\nu + 1$, so ist $c = 1$. Hiernach gilt der Satz:

Wenn $\frac{du}{dz}$ für $u = a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ verschwindet, und die Entwicklungen nach $(u - a_\nu)$ die Form (10) haben, so ist $h_\nu = k_\nu + l_\nu$; wenn die Gleichung (1) vom Geschlecht Eins ist, so muss l_ν überall gleich Null sein; wenn dagegen das Geschlecht von (1) Null ist, so muss $\Sigma l_\nu < 3$ sein.

II.

In diesem Abschnitt soll nachgewiesen werden, dass jene nothwendige Bedingung, welche verlangt, dass das Geschlecht von

$$F(u, v) = 0$$

niedriger als zwei ist, wenn u und v als eindeutige Functionen eines Parameters z:

$$u = \varphi(z), \qquad v = \psi(z)$$

dargestellt werden können, und wenn $\frac{du}{dz}$ eine algebraische Function von u ist, zugleich hinreichende Bedingung ist.

Um dieses nachzuweisen, gehe man von der Differentialgleichung:

$$s^2 - R(x) = 0, \tag{1}$$

$$s = \frac{dx}{dz}, \qquad R(x) = K_4 x^4 + K_3 x^3 + \ldots + K_0$$

aus. Wenn die vier Wurzeln von $R(x)$ verschieden sind, so ist die Gleichung (1) vom Geschlecht Eins, im andern Falle vom Geschlecht Null. Eine Untersuchung derselben lehrt, dass x eine eindeutige Function von z ist.

Jede rationale Function von x und s ist auch eindeutige Function von z. Die allgemeinste Form einer solchen ist:

$$y = \frac{g(x) + h(x) \, . \, s}{p(x)} = \frac{q(x)}{p(x)}; \tag{2}$$

$g(x)$, $h(x)$ und $p(x)$ bedeuten ganze rationale Functionen von x, welche keinen gemeinsamen Theiler haben. Es ist sofort ersichtlich, dass $\frac{dy}{dz}$ eine algebraische Function von y ist. Ebenso erkennt man, dass zwischen zwei verschiedenen Functionen y_1 und y_2 von der Form (2) eine algebraische Formel besteht.

Die Form (2) repräsentirt somit eine grosse Mannigfaltigkeit von eindeutigen Functionen in z, welche alle in die Classe derjenigen eindeutigen Functionen gehören, welche hier behandelt werden. Wir untersuchen den Fall, dass x eine m-deutige Function von y ist. Aus (2) ergiebt sich:

$$p^2(x)y^2 - 2g(x)p(x)y + g^2(x) - h^2(x)R(x) = 0. \tag{3}$$

x ist m-deutige Function von y, wenn $g^2(x) - h^2(x)R(x)$ durch $p(x)$ theilbar ist und $p(x)\,,g(x)$ und $h(x)R(x)$ vom m^{ten} Grade sind. Man bezeichne die Coefficienten von diesen ganzen rationalen Functionen in folgender Weise:

$$g(x) = A_0x^m + \ldots + A_\mu x^{m-\mu} + \ldots + A_m,$$
$$h(x) = B_0x^{m-2} + \ldots + B_\mu x^{m-2-\mu} + \ldots + B_{m-2},$$
$$p(x) = x^m + C_1x^{m-1} + \ldots + C_\mu x^{m-\mu} + \ldots + C_m.$$

Da in (3) das von y unabhängige Glied $g^2(x) - h^2(x)R(x)$ durch $p(x)$ theilbar sein soll, so müssen folgende Bedingungsgleichungen für die Coefficienten A_μ, B_μ und C_μ bestehen:

$$\begin{aligned} g(\alpha_\nu) + h(\alpha_\nu)\sqrt{R(\alpha_\nu)} &= 0, \\ p(\alpha_\nu) &= 0. \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, m)} \tag{4}$$

Wenn die Coefficienten A_μ und B_μ gegeben sind, so sind die C_μ bestimmt und zwar sind die letzteren algebraische Functionen der anderen Grössen. Es möge für die Coefficienten A_μ und B_μ eine bestimmte Wahl getroffen sein, z. B.

$$A_\mu = A'_\mu \quad \text{und} \quad B_\mu = B'_\mu,$$

dann mögen die Werthe $C_\mu = C'_\mu$ den Bedingungen (4) genügen und die Wurzeln α_ν die Werthe α'_ν annehmen. Die Coefficienten A'_μ und B'_μ können immer so gewählt werden, dass die Wurzeln α_ν alle verschieden sind. Für diese Bestimmung der Coefficienten bezeichne man die Gleichung (2) in folgender Weise:

$$P(x)y - Q(x) = 0, \tag{5}$$

so dass $P(x) = x^m + C'_1x^{m-1} + C'_2x^{m-2} + \ldots + C'_m$,

$$Q(x) = A'_0x^m + \ldots + A'_m + (B'_0x^{m-2} + \ldots + B'_{m-2})\sqrt{R(x)}.$$

Wenn sich die A_ν und B_ν unendlich wenig, um δA_ν und δB_ν ändern, so soll die Änderung von C_ν mit δC_ν und von α_ν mit $\delta\alpha_\nu$ bezeichnet werden. Es lässt sich dann allgemein δC_ν durch die Variationen δA_ν, δB_ν ausdrücken. Man bilde zu diesem Zweck das Differential der Gleichungen (4):

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial Q(\alpha'_\nu)}{\partial A'_0}\delta A_0 + \ldots + \frac{\partial Q(\alpha'_\nu)}{\partial B'_0}\delta B_0 + \ldots + \frac{\partial Q(\alpha'_\nu)}{\partial \alpha'_\nu}\delta\alpha_\nu = 0, \\ &\frac{\partial P(\alpha'_\nu)}{\partial C'_1}\delta C_1 + \ldots + \frac{\partial P(\alpha'_\nu)}{\partial C'_m}\delta C_m + \frac{\partial P(\alpha'_\nu)}{\partial \alpha'_\nu}\delta\alpha_\nu = 0. \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\ldots,m)}$$

Für den besonderen Fall $m = 2$ werden diese Gleichungen die Form annehmen:

$$\begin{aligned} &\alpha'^2_\nu\delta A_0 + \alpha'_\nu\delta A_1 + \delta A_2 - \sqrt{R(\alpha'_\nu)}\,\delta B + \frac{\partial Q(\alpha'_\nu)}{\partial \alpha'_\nu}\delta\alpha_\nu = 0, \\ &\alpha'_\nu\delta C_1 + \delta C_2 + \frac{\partial P(\alpha'_\nu)}{\partial \alpha'_\nu}\delta\alpha_\nu = 0. \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\ldots,m)}$$

Hieraus berechne man δC_ν und $\delta\alpha_\nu$. Es sind lineare Functionen von δA_ν und δB_ν:

$$(7)\qquad \delta C_\nu = \frac{\partial C'_\nu}{\partial A'_0}\delta A_0 + \ldots + \frac{\partial C'_\nu}{\partial A'_m}\delta A_m + \frac{\partial C'_\nu}{\partial B'_0}\delta B_0 + \ldots + \frac{\partial C'_\nu}{\partial B'_{m-2}}\delta B_{m-2};$$

die Coefficienten $\frac{\partial C_\nu}{\partial A'_\mu}$ und $\frac{\partial C_\nu}{\partial B'_\mu}$ werden nur dann unendlich, wenn die Determinante D_m der Coefficienten von δC_ν und $\delta\alpha_\nu$ in (6) verschwindet. Für $m = 2$ erhält man:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial Q(\alpha'_1)}{\partial \alpha'_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial Q(\alpha'_2)}{\partial \alpha'_2} \\ \alpha'_1 & 1 & \frac{\partial P(\alpha'_2)}{\partial \alpha'_2} & 0 \\ \alpha'_2 & 1 & 0 & \frac{\partial P(\alpha'_2)}{\partial \alpha'_2} \end{vmatrix}$$

oder

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha'_1 & 1 \\ \alpha'_2 & 1 \end{vmatrix} \prod_{\nu=1}^{\nu=2} \frac{\partial Q(\alpha'_\nu)}{\partial \alpha'_\nu}.$$

Allgemein heisst diese Determinante:

$$D_m = \begin{vmatrix} \alpha_1'^{m-1}, & \alpha_1'^{m-2}, & \ldots, & \alpha_1', & 1 \\ \alpha_2'^{m-1}, & \alpha_2'^{m-2}, & \ldots, & \alpha_2', & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m'^{m-1}, & \alpha_m'^{m-2}, & \ldots, & \alpha_m', & 1 \end{vmatrix} \prod_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\partial Q(\alpha_\nu')}{\partial \alpha_\nu'}.$$

Sie verschwindet nur dann, wenn $g(x) - h(x)\sqrt{R(x)}$ mehrfache Wurzeln hat und nur in diesem Falle können die Grössen $\frac{\partial C_\nu'}{\partial A_\mu'}, \frac{\partial C_\nu'}{\partial B_\mu'}$ unendlich werden.

Für die m-deutige algebraische Function x der Veränderlichen y, welche durch die Gleichung

$$(2) \qquad p(x)y - q(x) = 0$$

definirt wird, sind die Verzweigungspunkte von besonderer Wichtigkeit, und zwar hat dieselbe — wie gezeigt werden soll — $2m$ einfache Verzweigungspunkte. Wenn aber $R(x)$ einen Grad hat, der kleiner als 3 ist, so giebt es nur $2m - 2$ einfache Verzweigungspunkte.

Man kann sich darauf beschränken, solche algebraische Functionen x zu betrachten, für deren Verzweigungspunkte x und y endlich bleiben, denn man kann dieses stets durch die Substitution $x' = \frac{1}{x+a}$, $y' = \frac{1}{y+b}$ erreichen, wenn a und b beliebige Constanten bedeuten. Hat für die endlichen Werthe $x = \xi$ und $y = \eta$ die Function x einen Verzweigungspunkt, so müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$p(\xi)\eta - q(\xi) = 0,$$

$$\frac{\partial p(\xi)}{\partial \xi}\eta - \frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi} = 0.$$

In der Entwicklung von y nach $\xi - x$ muss der Coefficient von $(\xi - x)$ verschwinden:

$$(8) \qquad y = \eta + A_2(\xi - x)^2 + A_3(\xi - x)^3 + \ldots,$$

d. h. $\frac{dy}{dx}$ muss für diese Stelle Null werden und auch umgekehrt, wenn $\frac{dy}{dx}$ verschwindet, so hat x einen Verzweigungspunkt.

Man bezeichne $\frac{df(x)}{dx}$ mit $f'(x)$, dann ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\{2sg'(x) + 2h'(x)R(x) + h(x)R'(x)\}p(x) - \{g(x) + h(x)s\}2sp'(x)}{2sp^2(x)}.$$

In rationaler Form lautet diese Gleichung:

$$(9) \qquad 4p^4(x)R(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 8p^2(x)R(x)\{p(x)g'(x) - p'(x)g(x)\}\frac{dy}{dx} + t(x) = 0.$$

Hierin ist:

$$(10) \qquad \begin{aligned} t(x) &= p^2(x)\{4g'(x)^2R(x) - [2h'(x)R(x) + h(x)R'(x)]^2\} \\ &- 4p'(x)R(x)\{p(x)[2g(x)g'(x) - 2h(x)h'(x)R(x) - h^2(x)R'(x)] \\ &- [g^2(x) - h^2(x)R(x)]p'(x)\}. \end{aligned}$$

Es kann $t(x)$ auch in folgender Weise geschrieben werden:

$$(10') \qquad \begin{aligned} t(x) &= 4R(x)\{g(x)p'(x) - p(x)g'(x)\}^2 \\ &- \{2h'(x)p(x)R(x) + h(x)p(x)R'(x) - 2h(x)p'(x)R(x)\}^2. \end{aligned}$$

Da $g^2(x) - h^2(x)R(x)$ durch $p(x)$ theilbar sein soll, so ist:

$$r(x) = \frac{g^2(x) - h^2(x)R(x)}{p(x)}$$

eine ganze rationale Function vom m^{ten} Grade und

$$r'(x) = \frac{p(x)[2g(x)g'(x) - 2h(x)h'(x)R(x) - h^2(x)R'(x)] - [g^2(x) - h^2(x)R(x)]p'(x)}{p^2(x)}$$

eine ganze rationale Function vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade. Ein Vergleich von $r'(x)$ mit (10) ergiebt, dass $t(x)$ durch $p^2(x)$ theilbar sein muss. Andererseits zeigt (10'), dass $t(x)$ im Allgemeinen vom Grade $4m$ sein muss daher ist $\frac{t(x)}{p^2(x)}$ eine ganze rationale Function von x vom Grade $2m$. — Wenn der Grad von $R(x)$ kleiner als 3 ist, so kann in ähnlicher Weise bewiesen werden, dass dann $\frac{t(x)}{p^2(x)}$ vom Grade $2m-2$ ist. — Die Gleichung (9) ist im Allgemeinen, wie der Coefficient von $\frac{dy}{dx}$ zeigt, höchstens durch $p^2(x)$ theilbar, folglich geben die $2m$ Wurzeln von $\frac{t(x)}{p^2(x)}$ die Stellen an, für welche $\frac{dy}{dx}$ verschwindet.

Wenn $\frac{t(x)}{p^2(x)}$ eine mehrfache Wurzel hat, so zeigt die Differentiation von (9) nach x, dass für diese Wurzel auch $\frac{d^2y}{dx^2}$ verschwinden muss, wenn nicht $p(x)g'(x)-p'(x)g(x)$ verschwindet, und dann ist in der Entwicklung (8) auch $A_2=0$, so dass an dieser Stelle x einen mehrfachen Verzweigungspunkt hat. Die Wurzeln von $\frac{t(x)}{p^2(x)}=0$ sollen mit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\lambda, \ldots, \xi_{2m}$ bezeichnet werden. Sie sind algebraische Functionen der Coefficienten A_μ und B_μ. Es ist zu untersuchen, ob bei jeder beliebigen Wahl der Coefficienten in Folge der Bedingung (4) zwei Wurzeln gleich sind. Wenn A_0 unendlich wenig, um δA_0, geändert wird, so ändern sich auch die ξ_λ unendlich wenig, daher kann δA_0 so klein angenommen werden, dass diejenigen Wurzeln ξ_λ, welche vor der Änderung verschieden waren, auch nach derselben dasselbe Verhalten zeigen. Wenn also stets 2 Wurzeln ξ_λ gleich bleiben sollen, so kann dieses nur geschehen, wenn 2 Werthe, z. B. ξ_1 und ξ_2, welche vor der Änderung coincidirten, auch nach derselben gleich geblieben sind. Die Differenz $\xi_1-\xi_2$, welche eine algebraische Function von A_0 ist, hat dann auf einer unendlich kleinen Strecke von A_0 bis $A_0+\delta A_0$ den constanten Werth Null und muss nach einem bekannten Satze der Functionentheorie (siehe Briot und Bouquet, *Théorie des fonc. ellipt.* No. 114) für jeden Werth der Veränderlichen verschwinden. Man kann A_0 in solcher Weise stetig ändern, dass ξ_1 in irgend eine andere Wurzel ξ_λ übergeht, also muss auch ξ_λ mit einer anderen Wurzel $\xi_{\lambda'}$ coincidiren. Wenn für jede beliebige Wahl der Coefficienten A_μ und B_μ irgend zwei Wurzeln coincidiren, so muss stets jede Wurzel von $\frac{t(x)}{p^2(x)}$ mindestens eine zweifache Wurzel sein.

Für eine mehrfache Wurzel hat aber x mehrfache Verzweigungspunkte, wenn $p(x)g'(x)-p'(x)g(x)$ von Null verschieden ist. Man kann aber die Coefficienten A_μ und B_μ so wählen, dass x einen einfachen Verzweigungspunkt besitzt:

$$y = \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots}{C_m + C_{m-1}x + \ldots + C_1 x^{m-1} + x^m},$$

$$a_0 = A_m \quad + B_{m-2}\sqrt{R(0)};$$

$$a_1 = A_{m-1} + B_{m-2}\left(\frac{d\sqrt{R(x)}}{dx}\right)_{x=0} + B_{m-3}\sqrt{R(0)};$$

$$a_2 = A_{m-2} + B_{m-2}\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\sqrt{R(x)}}{dx^2}\right)_{x=0} + B_{m-3}\left(\frac{d\sqrt{R(x)}}{dx}\right)_{x=0} + B_{m-4}\sqrt{R(0)}.$$

Hierin können die Coefficienten A_μ und B_μ stets so gewählt werden, dass:

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 0, \qquad a_2 \neq 0,$$

d. h. man hat die Coefficienten von $q(x)$ so bestimmt, dass nur 2 Wurzeln gleich Null sind. Von den anderen $2m - 2$ Wurzeln wähle man m als Wurzeln von $p(x)$, dann sind die Bedingungen (4) erfüllt und $C_m \neq 0$. Da hierbei alle Constanten bis auf 2 beliebig geblieben sind, so kann man es stets so einrichten, dass $C_m A_{m-1} - C_{m-1}A_m \neq 0$, so dass

$$p(x)g'(x) - p'(x)g(x)$$

für $x = 0$ nicht verschwindet. Die Entwicklung für $y = 0$ und $x = 0$ ist dann:

$$y = c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots, \qquad c_2 = \frac{a_2}{C_0},$$

d. h. $y = 0$ ist ein einfacher Verzweigungspunkt von x.

Man kann daher allgemein die $2m$ Constanten A_μ und B_μ so bestimmen, dass alle $2m$ Werthe ξ_λ und daher auch alle $2m$ Werthe η_λ, welche hierzu gehören, verschieden sind. Durch unendlich kleine Änderung der Coefficienten bleiben die ξ_λ verschieden; diese Änderung lässt sich so einrichten, dass auch die Wurzeln von $q(x) = 0$ verschieden sind.

Es ist somit die Existenz einer Gleichung (2) nachgewiesen, bei welcher alle Wurzeln von $q(x)$ verschieden sind und die algebraische Function x von y, welche durch diese Gleichung definirt wird, $2m$ einfache Verzweigungspunkte besitzt. Es möge die Gleichung (5)

$$(5) \qquad P(x)y - Q(x) = 0$$

diese Eigenschaften besitzen. Die $2m$ Verzweigungspunkte sollen mit $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_{2m}$ bezeichnet werden; die Werthe x, welche zu diesen gehören, seien $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{2m}$, die $2m$ Wurzeln von $Q(x)$ heissen $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{2m}$.

In der Gleichung (2) hat man $2m$ beliebige Coefficienten A_μ und B_μ zur Verfügung. Um dieselben zu bestimmen, können $2m$ Bestimmungsstücke gegeben werden. Zum Beispiel könnte verlangt werden, dass die Gleichung (2) für die $2m$ Werthenpaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_\nu, y_\nu), \ldots, (x_{2m}, y_{2m})$ erfüllt werde, so dass die Bedingungsgleichungen gelten:

$$p(x_\nu)y_\nu - q(x_\nu) = 0. \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, 2m)$$

Wenn ausserdem verlangt wird, dass für $y = y_{2m}$ die algebraische Function einen Verzweigungspunkt habe, so tritt noch die Bedingung hinzu:

$$p'(x_{2m})y_{2m} - q'(x_{2m}) = 0.$$

Alsdann wären zu viel Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Coefficienten gegeben, und man könnte nur verlangen, dass die Gleichung (2) für die $(2m - 1)$ Werthenpaare $(x_1, y_1), \ldots, (x_{2m-1}, y_{2m-1})$ erfüllt werde, aber ausserdem, dass die algebraische Function x für $y = y_{2m}$ einen einfachen Verzweigungspunkt habe. Hiermit ist die Aufgabe begründet:

Es soll eine Gleichung von der Form (2) *gebildet werden, so dass sie durch die n Werthenpaare* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_\nu, y_\nu), \ldots, (x_n, y_n)$ *erfüllt wird, und dass die algebraische m-deutige Function x von y, welche durch* (2) *definirt wird, für* $y = \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \ldots, \eta_\lambda, \ldots, \eta_{2m}$ *einfache Verzweigungspunkte hat.*

Die Bedingungsgleichungen sind:

$$(11) \qquad p(x_\nu)y_\nu - q(x_\nu) = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\left.\begin{aligned} &(12) \qquad p(\xi_\lambda)\eta_\lambda - q(\xi_\lambda) = 0 \\ &(13) \qquad p'(\xi_\lambda)\eta_\lambda - q'(\xi_\lambda) = 0 \end{aligned}\right| \qquad (\lambda = n+1, \ldots, 2m)$$

Die Werthe ξ_λ, welche zu den Verzweigungspunkten gehören, sind beliebig.

Um die Lösbarkeit der Aufgabe zu beweisen, müssen gewisse Determinanten untersucht werden. Hierbei legen wir die Function (5) zu Grunde, welche $2m$ verschiedene Verzweigungspunkte η_λ besitzt. Es mögen die Werthenpaare $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), \ldots, (x'_\nu, y'_\nu), \ldots, (x'_n, y'_n)$ der Gleichung (5) genügen. Unter x'_ν wird stets eine einzige Stelle $(x, \sqrt{R(x)})$ verstanden, bei welcher $\sqrt{R(x)}$ ein gegebenes Vorzeichen hat. Durch unendlich kleine Änderung der (x_ν, y_ν) und η_λ um $\delta x_\nu, \delta y_\nu$, beziehungsweise $\delta\eta_\lambda$ erhalten die Coefficienten A_μ und B_μ gewisse Änderungen δA_μ und δB_μ. Das Differential der Gleichungen (11) und (12) wird dann:

$$(14)\qquad \begin{aligned} & y'_\nu \frac{\partial P(x'_\nu)}{\partial C'_1}\delta C_1 + \ldots + y'_\nu \frac{\partial P(x'_\nu)}{\partial C'_m}\delta C_m - \frac{\partial Q(x'_\nu)}{\partial A'_0}\delta A_0 - \ldots \\ & - \frac{\partial Q(x'_\nu)}{\partial A'_m}\delta A_m - \frac{\partial Q(x'_\nu)}{\partial B'_0}\delta B_0 - \ldots - \frac{\partial Q(x'_\nu)}{\partial B'_{m-2}}\delta B_{m-2} \\ & + P(x'_\nu)\delta y_\nu + \frac{\partial[P(x'_\nu)y'_\nu - Q(x'_\nu)]}{\partial x'_\nu}\delta x_\nu = 0. \end{aligned}$$

$$(15)\qquad \begin{aligned} & \eta'_\lambda \frac{\partial P(\xi'_\lambda)}{\partial C'_1}\delta C_1 + \ldots + \eta'_\lambda \frac{\partial P(\xi'_\lambda)}{\partial C'_m}\delta C_m - \frac{\partial Q(\xi'_\lambda)}{\partial A'_0}\delta A_0 - \ldots \\ & - \frac{\partial Q(\xi'_\lambda)}{\partial A'_m}\delta A_m - \frac{\partial Q(\xi'_\lambda)}{\partial B'_0}\delta B_0 - \ldots - \frac{\partial Q(\xi'_\lambda)}{\partial B'_{m-2}}\delta B_{m-2} \\ & + P(\xi'_\lambda)\delta\eta_\lambda + \frac{\partial[P(\xi'_\lambda)\eta'_\lambda - Q(\xi'_\lambda)]}{\partial \xi'_\lambda}\delta\xi_\lambda = 0. \end{aligned}$$

Wenn hier die Determinante $R_{m,n}$ welche aus den Coefficienten von δA_μ, δB_μ, $\delta\xi_\lambda$ gebildet wird, nicht verschwindet, so lassen sich A_μ und B_μ nach ganzen positiven Potenzen von $(x'_\nu - x_\nu)$, $(y'_\nu - y_\nu)$ und $(\eta'_\nu - \eta_\nu)$ entwickeln. Der Coefficient von $\delta\xi_\nu$ in der Gleichung (15) verschwindet, da ξ'_λ, η'_λ ein Verzweigungspunkt von x ist. Nur unter den Gleichungen (13) ist eine solche vorhanden, bei welcher der Coefficient von $\delta\xi_\lambda$ nicht verschwindet; derselbe hat den Werth:

$$\frac{\partial^2[P(\xi_\lambda)\eta'_\lambda - Q(\xi'_\lambda)]}{\partial^2\xi'_\lambda}.$$

Für den besonderen Fall $m = 2$ werden die Gleichungen (14) und (15) folgende Form erhalten:

$$\begin{aligned} & x'_\nu y'_\nu \delta C_1 + y'_\nu \delta C_2 - x'^2_\nu \delta A_0 - x'_\nu \delta A_1 - \delta A_2 - \sqrt{R(x'_\nu)}\delta B_0 \\ & + P(x'_\nu)\delta y_\nu + \frac{\partial[P(x'_\nu)y'_\nu - Q(x'_\nu)]}{\partial x'_\nu}\delta x_\nu = 0, \end{aligned}$$

$$\xi'_\lambda\eta'_\lambda\delta C_1 + \eta'_\lambda\delta C_2 - \xi'^2_\lambda\delta A_0 - \xi'_\lambda\delta A_1 - \delta A_2 - \sqrt{R(\xi'_\lambda)}\delta B_0 + P(\xi'_\lambda)\delta\eta_\lambda = 0.$$

Hierin sind für ∂C_μ die Ausdrücke (7) zu setzen. Für $n = 1$ wird die Determinante $R_{m,n}$ folgende Form erhalten:

$$R_{2,1} = \begin{vmatrix} x_1'^2 + *, & x_1' + *, & 1 + *, & -\sqrt{R(x_1')} + *, & 0, & 0, & 0 \\ \xi_2'^2 + *, & \xi_2' + *, & 1 + *, & -\sqrt{R(\xi_2')} + *, & 0, & 0, & 0 \\ \xi_3'^2 + *, & \xi_3' + *, & 1 + *, & -\sqrt{R(\xi_3')} + *, & 0, & 0, & 0 \\ \xi_4'^2 + *, & \xi_4' + *, & 1 + *, & -\sqrt{R(\xi_4')} + *, & 0, & 0, & 0 \\ \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & S_2, & 0, & 0 \\ \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & 0, & S_3, & 0 \\ \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, & 0, & 0, & S_4 \end{vmatrix},$$

$$S_\lambda = \frac{\partial^2[P(\xi_\lambda')\eta_\lambda' - Q(\xi_\lambda')]}{\partial \xi_\lambda'^2}. \qquad (\lambda = 2, 3, 4)$$

Die Glieder, welche durch ein Sternchen ersetzt sind, haben die Form:

$$y_\nu' \sum_{\pi=1}^{m} \frac{\partial C_\pi'}{\partial A_\mu'} x_\nu'^{m-\pi}, \qquad y_\nu' \sum_{\pi=1}^{m} \frac{\partial C_\pi'}{\partial B_\mu'} x_\nu'^{m-\pi},$$

$$\eta_\lambda' \sum_{\pi=1}^{m} \frac{\partial C_\pi'}{\partial A_\mu'} \xi_\lambda'^{m-\pi}, \qquad \eta_\lambda' \sum_{\pi=1}^{m} \frac{\partial C_\pi'}{\partial B_\mu'} \xi_\lambda'^{m-\pi}.$$

Da die Wurzeln von $Q(x) = 0$ verschieden sind, so sind $\frac{\partial C_\pi'}{\partial A_\mu'}$ und $\frac{\partial C_\pi'}{\partial B_\mu'}$ endlich, wenn y_ν' und η_λ' verschwinden, so verschwinden auch die durch ein Sternchen angedeuteten Glieder. Die Terme von $R_{2,1}$, für welche ein Punkt gesetzt ist, haben auf den Werth der Determinante keinen Einfluss.

$$R_{2,1} = -\Delta_{2,1} \prod_{\lambda=2}^{4} \frac{\partial^2[P(\xi_\lambda')\eta_\lambda' - Q(\xi_\lambda')]}{\partial \xi_\lambda'^2},$$

$$\Delta_{2,1} = \begin{vmatrix} x_1'^2 + *, & x_1' + *, & 1 + *, & \sqrt{R(x_1')} + * \\ \xi_2'^2 + *, & \xi_2' + *, & 1 + *, & \sqrt{R(\xi_2')} + * \\ \xi_3'^2 + *, & \xi_3' + *, & 1 + *, & \sqrt{R(\xi_3')} + * \\ \xi_4'^2 + *, & \xi_4' + *, & 1 + *, & \sqrt{R(\xi_4')} + * \end{vmatrix}.$$

Allgemein und unabhängig von der speciellen Wahl der Gleichung (5) ergiebt sich:

$$R_{m,n} = \pm \Delta_{m,n} \prod_{\lambda=n+1}^{2m} \frac{\partial^2[p(\xi_\lambda)\eta_\lambda - q(\xi_\lambda)]}{\partial \xi_\lambda^2},$$

$$\Delta_{m,n} = \begin{vmatrix} x_1^m + *, & x_1^{m-1} + *, & \dots, & 1 + *, & x_1^{m-2}\sqrt{R(x_1)} + *, & \dots, & \sqrt{R(x_1)} + * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^m + *, & x_n^{m-1} + *, & \dots, & 1 + *, & x_n^{m-2}\sqrt{R(x_n)} + *, & \dots, & \sqrt{R(x_n)} + * \\ \xi_{n+1}^m + *, & \xi_{n+1}^{m-1} + *, & \dots, & 1 + *, & \xi_{n+1}^{m-2}\sqrt{R(\xi_{n+1})} + *, & \dots, & \sqrt{R(\xi_{n+1})} + * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{2m}^m + *, & \xi_{2m}^{m-1} + *, & \dots, & 1 + *, & \xi_{2m}^{m-2}\sqrt{R(\xi_{2m})} + *, & \dots, & \sqrt{R(\xi_{2m})} + * \end{vmatrix}.$$

Es wird angenommen, dass $\Delta_{m,n}$ für $n = n_1$ nicht identisch verschwindet, so dass die Aufgabe für $n = n_1$ möglich ist und sich die Coefficienten A_μ und B_μ im Allgemeinen nach Potenzen von $(x_1' - x_1)$, $(y_1' - y_1)$, $\dots$, $(x_{n_1}' - x_{n_1})$, $(y_{n_1}' - y_{n_1})$, $(\eta_{n_1+1}' - \eta_{n_1+1})$, $\dots$, $(\eta_{2m}' - \eta_{2m})$ entwickeln lassen, aber Δ_{m,n_1-1} soll identisch verschwinden.

Die Determinante Δ_{m,n_1} ist auch algebraische Function jener Veränderlichen; wir schreiben sie in folgender Weise:

$$\Delta_{m,n_1} = \Delta\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_{n_1} & \\ & \eta_{n_1+1}, \dots, \eta_{2m} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n_1} & \end{pmatrix}.$$

Es möge Δ_{m,n_1} für $x_\nu = x_\nu'$, $y_\nu = y_\nu'$, $\eta_\lambda = \eta_\lambda'$ nicht verschwinden. Lässt man allen Veränderlichen diese bestimmten Werthe und ändert nur (x_{n_1}, y_{n_1}), aber so, dass dieses Werthenpaar stets der Gleichung (5) genügt, so ist Δ_{m,n_1} eine algebraische Function von x_{n_1}, welche für $x_{n_1} = x_{n_1}'$ von Null verschieden ist, daher auch nicht identisch, sondern nur für eine endliche Anzahl von Werthen verschwindet. Zu diesen Nullstellen gehört der Werth $x = \xi_{n_1}'$, für welchen $y = \eta_{n_1}'$ ist, denn hier wird $\Delta_{m,n_1} = \Delta_{m,n_1-1}$. Obwohl $\Delta_{m,n_1} = 0$ wird, besitzen hier die algebraischen Functionen A_μ und B_μ keinen Pol, denn sie haben die endlichen Werthe: A_μ' und B_μ'.

Werden die Veränderlichen $x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_1}, \eta_{n_1}, \ldots, \eta_{2m}$ unendlich wenig geändert, so ändert sich auch der Werth von Δ_{m,n_1} unendlich wenig und auch die algebraischen Functionen A_μ und B_μ erhalten eine unendlich kleine Änderung, wenn sie keine Pole an dieser Stelle haben.

In Δ_{m,n_1} setze man folgende Werthe:

$$\eta_{n_1+1} = \eta'_{n_1+1}, \ldots, \eta_{2m} = \eta'_{2m},$$

ferner

$$x_1 = x'_1, y_1 = y'_1, \ldots, x_{n_1-1} = x'_{n_1-1}, y_{n_1-1} = y'_{n_1-1}$$

und schliesslich

$$x_{n_1} = X, \qquad y_{n_1} = Y.$$

Y bedeutet irgend einen Werth in der Nähe von η'_{n_1}. Schliesslich wird aber X so bestimmt, dass die Gleichung besteht:

$$(16) \qquad \Delta\begin{pmatrix} x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n_1-1}, X & \\ & \eta'_{n_1+1}, \ldots, \eta'_{2m} \\ y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n_1-1}, Y & \end{pmatrix} = 0$$

und dass X in unendlicher Nähe von ξ'_{n_1} liegt.

Die Coefficienten A_μ, B_μ, welche auf diese Weise gebildet werden, sind von A'_μ, B'_μ unendlich wenig verschieden. Die neue Gleichung bezeichne man mit (17):

$$(17) \qquad P_1(x)y - Q_1(x) = 0.$$

In der Nähe jedes Werthenpaares (x, y), welches der Curve (5) entspricht, gibt es ein Werthenpaar, dass der neuen Gleichung genügt: z. B. möge die Stelle $x = x''_{n_1}, y = y''_{n_1}$, durch welche (17) erfüllt wird, in der Nähe von $x = x'_{n_1}, y = y'_{n_1}$ liegen. Es ist dann

$$(18) \qquad \Delta\begin{pmatrix} x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n_1-1}, x''_{n_1} & \\ & \eta'_{n_1+1}, \ldots, \eta'_{2m} \\ y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n_1-1}, y''_{n_1} & \end{pmatrix} \neq 0,$$

da es sich nur unendlich wenig ändert, wenn man x''_{n_1} in x'_{n_1} und y''_{n_1} in y'_{n_1} verwandelt; nach obiger Annahme ist aber Δ_{m,n_1} für $x_\nu = x'_\nu, y_\nu = y'_\nu$ und $\eta_\lambda = \eta'_\lambda$ von Null verschieden.

In der Nähe jedes Werthenpaares (x, y), welches sowohl der Gleichung (5) $P(x)y - Q(x) = 0$ als auch der Gleichung $P'(x)y - Q'(x) = 0$ genügt, muss ein Werthenpaar der neuen Gleichung liegen, welches ein analoges Verhalten zeigt. Daher giebt es in der Nähe von $(\xi'_{n_1}, \eta'_{n_1})$ ein Werthenpaar $(\xi''_{n_1}, \eta''_{n_1})$, für welches die algebraische Function x von y, welche durch (17) definirt wird, einen einfachen Verzweigungspunkt hat. Da $\Delta_{m,n_1-1} = 0$ ist, so besteht noch folgende Gleichung:

$$(19) \qquad \Delta\begin{pmatrix} x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n_1-1}, \xi''_{n_1} \\ & , \eta'_{n_1+1}, \ldots, \eta'_{2m} \\ y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n_1-1}, \eta''_{n_1} \end{pmatrix} = 0.$$

Man betrachte schliesslich die algebraische Function von x_{n_1}, y_{n_1}:

$$\Delta\begin{pmatrix} x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n_1-1}, x_{n_1} \\ & , \eta'_{n_1+1}, \ldots, \eta'_{2m} \\ y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n_1-1}, y_{n_1} \end{pmatrix},$$

in welcher x_{n_1} und y_{n_1} nur solche Werthe annehmen sollen, welche der neuen Gleichung genügen — so dass sie also nur algebraische Function von x_{n_1} ist. Diese Function wird wegen der Gleichung (18) nicht identisch Null, kann also in der Nähe von $x_{n_1} = \xi'_{n_1}$ nur für einen Punkt verschwinden und aus den Gleichungen (16) und (19) folgt, dass

$$\xi''_{n_1} = X, \qquad \eta''_{n_1} = Y.$$

Es ist daher möglich, eine Gleichung (2) zu bilden, welche durch die $(n_1 - 1)$ Werthenpaare $(x'_1, y'_1), \ldots, (x'_{n_1-1}, y'_{n_1-1})$ erfüllt wird und in welcher x ausser für den Punkt $y = \eta'_{n_1+1}, \ldots, \eta'_{2m}$ noch für $y = Y$ einen einfachen Verzweigungspunkt hat, wenn Y irgend einen Punkt in der Nähe von η'_{n_1} bedeutet. Da $\Delta_{m,n_1} \neq 0$ ist, so sind die Werthe

$$(x'_1, y'_1), \ldots, (x'_{n_1-1}, y'_{n_1-1}), \eta'_{n_1+1}, \ldots, \eta'_{2m}$$

ganz beliebig. Obiger Satz kann daher in folgender Weise erweitert werden: Obwohl Δ_{m,n_1-1} identisch verschwindet, ist es möglich, eine Gleichung (2) zu bilden, welche von $(n_1 - 1)$ beliebigen Werthenpaaren (x_ν, y_ν) erfüllt wird und in welcher die algebraische Function x für $(2m - n_1 + 1)$ gegebene Werthe η_λ einfache Verzweigungspunkte hat, so dass die auf Seite 50 gestellte Aufgabe auch für $n_1 - 1$ Werthenpaare (x_ν, y_ν) möglich ist.

Das identische Verschwinden von Δ_{m,n_1-1} drückt also keine Unmöglichkeit der Aufgabe aus, sondern nur eine Unbestimmtheit. Es giebt dann unendlich viele verschiedene Formen (2), welche die betreffenden Bedingungen erfüllen.

Die algebraische Gleichung:

$$\Delta\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n_1-1}, \xi_{n_1} \\ & , \eta_{n_1+1}, \eta_{n_1+2}, \ldots, \eta_{2m} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n_1-1}, \eta_{n_1} \end{pmatrix} = 0,$$

welche bestehen muss, wenn Δ_{m,n_1-1} identisch verschwindet, hat im Allgemeinen nur eine endliche Anzahl von Wurzeln ξ_{n_1}, wenn man für x_ν, y_ν und η_λ irgend welche bestimmte Werthe einsetzt, denn Δ_{m,n_1} ist nicht identisch Null. Ferner giebt es nur eine endliche Anzahl von Gleichungen, welche den Werthenpaaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n_1-1}, y_{n_1-1}), (\xi_{n_1}, \eta_{n_1})$ genügen und bei welcher die algebraische Function x für $y = \eta_{n_1+1}, \ldots, \eta_{2m}$ einfache Verzweigungspunkte hat, folglich giebt es nur eine endliche Anzahl von Gleichungen, welche den Punkten $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n_1-1}, y_{n_1-1})$ genügen und bei welchen x die Verzweigungspunkte $y = \eta_{n_1}, \eta_{n_1+1}, \ldots, \eta_{2m}$ hat. Daher kann Δ_{m,n_1-1} überhaupt nicht identisch verschwinden.

Wenn also Δ_{m,n_1} nicht identisch verschwindet, so ist dieses auch für Δ_{m,n_1-1} nicht der Fall.

Der grösste Werth, welchen n annehmen kann, ist $2m$. Für diesen Fall ist aber leicht zu erkennen, dass:

$$\Delta\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_{2m} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{2m} \end{pmatrix}$$

nicht identisch verschwindet. Der Gleichung (5) genügen die Werthenpaare $y = 0$, $x = \alpha'_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 2m)$ wenn α'_ν die Wurzeln von $Q(x)$ bezeichnet. Diese sind alle verschieden; die Glieder von $\Delta_{m,n}$, welche durch ein Sternchen (*) bezeichnet sind, verschwinden für $y = 0$, aber die Determinante in α'_ν ist nicht identisch gleich Null.

Hiermit ist bewiesen, dass die Aufgabe, welche auf Seite 50 gestellt wurde, im Allgemeinen zu lösen ist. Der Fall $n = 0$ hat für unseren Zweck besondere Wichtigkeit. In Folge desselben gilt der Satz:

In der Gleichung (2) sind die Coefficienten A_μ, B_μ und C_μ algebraische Functionen der $2m$ Verzweigungspunkte η_λ, welche die algebraische m-deutige Function x von y besitzt.

Im Allgemeinen lassen sich dann für irgend ein endliches Werthsystem $\eta_\lambda = \eta'_\lambda$ die Coefficienten in folgender Form entwickeln:

$$(20) \qquad A_\mu = \sum_{l_1, l_2, \ldots, l_{2m}} \alpha_{l_1, l_2, \ldots, l_{2m}} (\eta'_1 - \eta_1)^{l_1} (\eta'_2 - \eta_2)^{l_2} \ldots (\eta'_{2m} - \eta_{2m})^{l_{2m}}.$$

$l_1, l_2, \ldots, l_{2m}$ sind ganze positive Zahlen, $\alpha_{l_1, l_2, \ldots, l_{2m}}$ bedeutet eine Constante. Für gewisse Werthsysteme, für welche einige algebraische Functionen Pole haben oder unbestimmt sind, giebt es keine solche Entwicklungen. Um die Abhängigkeit der Coefficienten von den Verzweigungspunkten auszudrücken, sollen jene beziehungsweise mit $A_\mu(\eta_\lambda)$, $B_\mu(\eta_\lambda)$ und $C_\mu(\eta_\lambda)$ bezeichnet werden. Wenn für das System η_λ die Werthe der Coefficienten und damit die Gleichung (2) gefunden sind, so ist dieses auch für das System

$$\tau_\lambda = \frac{a\eta_\lambda + b}{c\eta_\lambda + d}$$

der Fall. Man führe zu diesem Zwecke in (2) die Substitution ein:

$$t = \frac{ay + b}{cy + d},$$

dann ergiebt sich:

$$t = \frac{ac[g^2(x) - h^2(x)R(x)] + p(x)[(bc + da)g(x) - (bc - da)h(x)\sqrt{R(x)}]}{c^2[g^2(x) - h^2(x)R(x)] + 2cdp(x)g(x) + d^2p^2(x)}.$$

Nach der Bedingung (4) ist:

$$g^2(x) - h^2(x)R(x) = p(x)r(x),$$

wenn $r(x)$ eine ganze rationale Function m^{ten} Grades in x bedeutet, also

$$(21) \qquad t = \frac{acr(x) + (bc + da)g(x) - (bc - da)h(x)\sqrt{R(x)}}{c^2r(x) + 2cdg(x) + d^2p(x)}.$$

Hieraus sind die Coefficienten $A_\mu(\tau_\lambda)$, $B_\mu(\tau_\lambda)$ und $C_\mu(\tau_\lambda)$ zu berechnen; durch Division von Zähler und Nenner mit einem constanten Factor kann bewirkt werden, dass einer der Coefficienten C_μ den Werth 1 erhält. Jeder Coefficient von $r(x)$, welcher in der Gleichung für y nur im Zähler $q(x)$ eine Rolle spielt, tritt in (21) auch in den Nenner; er ist ebenso wie die Coefficienten $d(x)$, algebraische Function der η_λ. Wenn für ein Werthsystem η_λ einige Coefficienten unendlich werden, so enthält in (21) sowohl Zähler als auch Nenner diese unendlich grossen Werthe und zwar zu derselben

Ordnung; durch Division mit einem geeigneten Factor werden alle Coefficienten in (21) endlich und mindestens ein Coefficient des Zählers und ein Coefficient des Nenners von Null verschieden. Durch obige Substitution können daher die Pole der algebraischen Functionen von η_λ vermieden werden.

Wenn für ein Werthsystem η_λ einige Coefficienten unbestimmt werden, so setze man $\tau_\lambda = \eta_\lambda + b$. Die Coefficienten sind dann entweder algebraische Functionen einer Variabeln b und haben einen bestimmten Werth oder sie sind von b unabhängig und dann Constanten.

Durch continuirliche Änderung des Werthsystems η_λ erhält man immer neue Gleichungen (2), doch ist durch dieselben nicht immer eine bestimmte m-deutige Function x von y definirt. Die Gleichung

$$y = \frac{g(x) + h(x)\sqrt{R(x)}}{p(x)}$$

zeigt, dass x nicht mehr m-deutige Function von y ist, wenn für ein bestimmtes Werthsystem η_λ, $g(x)$, $h(x)$ und $p(x)$ eine gleiche Wurzel $x = x_1$ haben. Es muss dann in (9) die ganze Function $\frac{t(x)}{p^2(x)}$ von x, deren Wurzeln die Verzweigungspunkte geben, durch $(x - x_1)^2$ theilbar sein; $x = x_1$ ist aber kein Verzweigungspunkt. In der Nähe von η_λ giebt es unendlich viele Werthsysteme $\eta_\lambda + \delta\eta_\lambda$, für welche x eine m-deutige Function von y ist und jede der ganzen Functionen $g(x)$, $h(x)$ und $p(x)$ eine Wurzel in der Nähe von x'_1 hat. Für $\eta_\lambda + \delta\eta_\lambda$ hat dann $\frac{t(x)}{p^2(x)}$ zwei Wurzeln in der Nähe von x', für welche x einen Verzweigungspunkt hat. Die hierzu gehörigen Werthe $\eta_\lambda + \delta\eta_\lambda$ sind unendlich wenig verschieden, wenn sie nicht unendlich gross sind. Sobald sie zusammenfallen, vernichten sie sich gegenseitig, d. h. wenn man um beide in der y-Ebene einen unendlich kleinen Kreis beschreibt und denselben mit der algebraischen Function x durchläuft, so kommt man zu dem Anfangswerth zurück.

Ein specieller Fall der eben behandelten Singularität tritt auf, wenn die Coefficienten B_μ sämmtlich verschwinden, ferner wenn die Coefficienten, welche zu x^m und $x^m\sqrt{R(x)}$ gehören, zu Null werden. Haben $g(x)$, $h(x)$ und $p(x)$ keine gemeinsamen Factoren — und dieses ist nach Obigem stets der Fall, wenn alle Werthe des Systems η_λ verschieden und nicht unendlich sind — so erhält man in der Gleichung (2) stets eine algebraische m-deutige Function von x.

Es ist leicht zu erkennen, dass sich der specielle Fall $n = 0$ unserer Aufgabe auch in folgender Weise aussprechen lässt:

Zu jeder m-blättrigen zusammenhängenden Riemannschen Fläche, welche über der y-Ebene construirt ist und 2m einfache Verzweigungspunkte besitzt, lässt sich eine algebraische Function x von der Form

$$y = \frac{g(x) + h(x)\sqrt{R(x)}}{p(x)}$$

bilden, welche auf derselben eindeutig ist.

Um diesen Satz nachzuweisen, kann angenommen werden, dass kein Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche im Unendlichen liegt. Man gehe von der Gleichung (5) aus, für welche $\eta_\lambda = \eta'_\lambda$ Verzweigungspunkte sind und bilde die Riemannsche Fläche T, auf welcher x eindeutig ist. Die m Blätter von T werden mit $B_1, \ldots, B_\nu, \ldots, B_m$, die Werthe, welche x auf B_ν annimmt, mit x_ν bezeichnet. Für einen Verzweigungspunkt, der B_ν mit B_λ verbindet, ist $x_\nu = x_\lambda$; nur in der Nähe eines solchen Punktes sind zwei Werthe von x unendlich wenig verschieden. Ferner bilde man die Entwicklungen (20).

In diese setze man $\eta_1 = \eta_1 + \delta\eta_1$, während für die anderen Variablen η_λ die Werthe η'_λ gesetzt werden, das heisst, man verschiebe η'_1 continuirlich nach $\eta'_1 + \delta\eta'_1$. Durch diese unendlich kleine Änderung erhält x für jeden Punkt y den Werth $x + \delta x$, der von dem früheren Werthe an dieser Stelle im Allgemeinen unendlich wenig verschieden ist; wenn daher für eine Stelle der y-Ebene die beiden Werthe x_ν und x_μ um eine endliche Grösse verschieden waren, so sind auch $x_\nu + \delta x_\nu$ und $x_\mu + \delta x_\mu$ verschieden. Nur in der Nähe der Verzweigungspunkte von T können durch diese Änderung zwei Werthe gleich werden. Die Punkte η'_λ $(\lambda > 1)$, welche auch nach der Variation Verzweigungspunkte bleiben müssen, verbinden dann genau dieselben Blätter, auf welchen sie vor derselben lagen. Bis auf die Verschiebung von η'_1 und $\eta'_1 + \delta\eta'_1$ ist die Riemannsche Fläche der neuen Function x mit T in allen Verzweigungspunkten und Verzweigungsschnitten congruent. Einer unendlich kleinen Änderung des Systems η_λ entspricht eine unendlich kleine Deformation von T.

Man kann auf diese Weise η'_1 nach einem beliebigen Punkte von T bringen, welcher nicht mit den anderen Verzweigungspunkten zusammenfällt und im Endlichen bleibt. Wenn hierbei kein Verzweigungsschnitt überschritten wird, so verbindet η'_1 dieselben Blätter von T, welche es vor der Bewegung verzweigt hat; es mögen dieses die Blätter B_1 und B_2 sein. Hat η'_1 einen Verzweigungsschnitt S überschritten, welcher B_2 und B_3 verbindet, so wird es auf die Blätter B_1 und B_2 zu liegen kommen. Da x nur einfache Verzweigungspunkte besitzt, so ist jeder derselben nur mit einem anderen durch einen Schnitt verbunden. Wenn dieser Schnitt auf B_ν und B_μ liegt, so soll er mit $S_{\nu,\mu}$ bezeichnet werden. Es sei η'_2 der Verzweigungspunkt, welcher zu η'_1 gehört, und da η'_1 die Blätter B_1 und B_2 verbindet, so kommt dem Schnitt zwischen η'_1 und η'_2 das Zeichen $S_{1,2}$ zu. Nachdem bei der Änderung von η'_1 dieser Punkt einen Schnitt $S_{2,3}$ überschritten hat, kreuzt sich derselbe mit $S_{1,2}$. Um dieses zu vermeiden, muss entweder $S_{2,3}$ verlegt werden, oder es muss auch η'_2 über $S_{2,3}$ bewegt werden, so dass aus $S_{1,2}$ ein Schnitt $S_{1,3}$ wird.

Da T zusammenhängend ist, so kann man von jedem Punkte dieser Fläche zu jedem anderen gelangen und im Besondern auch vom Verzweigungsschnitt $S_{\nu,\mu}$ zu der Fläche B_1. Da es gleichgültig ist, ob man von B_ν oder B_μ ausgeht, so ist es möglich, diesen Weg nach B_1 auszuführen, ohne einen Schnitt $S_{\nu,\mu}$ selbst zu benutzen. Führt man nach einander beide Verzweigungspunkte von $S_{\nu,\mu}$ nach B_1, so wird dieser Schnitt das Blatt B_1 mit irgend einem anderen verbinden. Ein ähnliches Verfahren führe man mit allen Verzweigungspunkten aus, so dass alle auf dem Blatt B_1 liegen. Alsdann haben wir nur Schnitte von der Form $S_{1,\mu}$, und da die neue Fläche zusammenhängend bleibt, so muss auf jedem Blatt B_μ $(\mu \neq 1)$ ein Schnitt liegen, so dass μ mindestens ein Mal die Werthe $2, 3, \ldots, m$ annimmt. Es giebt nur m Schnitte, daher tritt nur ein Zeichen $S_{1,\nu}$ doppelt auf; welchen Werth ν hat, ist vollständig gleichgültig; durch Änderung der Bezeichnung der Blätter kann jede Zahl von 2 bis m für ν angenommen werden. In dem Blatte B_1 können nun alle Verzweigungspunkte beliebig verschoben werden. Die neue Fläche werde mit T_1 bezeichnet. Ebenso wie die beliebige Fläche T in T_1 transformirt werden kann, ist dieses für jede andere m-blätterige Riemannsche Fläche

T' mit $2m$ einfachen Verzweigungspunkten der Fall und folglich kann man mit Hülfe von T_1 auch T in T' überführen.

Da das System η_λ bei dieser Transformation stets im Endlichen bleibt und alle Werthe desselben verschieden sind, so ist die Function x, welche man schliesslich erhält, wohl definirt und hat die verlangte Form. Wir erhalten, wie oben gezeigt wurde, nur dann keine Function von der verlangten Eigenschaft, wenn man zwei solche Verzweigungspunkte zusammenfallen lässt, welche dieselben Blätter verbinden, so dass sie sich aufheben. Nähert man aber einen Verzweigungspunkt, der auf B_1 und B_2 liegt, und einen Verzweigungspunkt, der B_2 und B_3 verbindet, so heben sie sich nicht auf, die neue Function x behält die verlangte Form und hat einen dreifachen Verzweigungspunkt, der B_1, B_2 und B_3 verbindet.

Daher kann man auch zu jeder Fläche T_1, bei welcher die $2m$ einfachen Verzweigungspunkte in beliebiger Weise zu mehrfachen Verzweigungspunkten zusammenfallen, die Function x bilden, und obiger Satz ist allgemein bewiesen.

Wir wenden denselben auf eine Riemannsche Fläche T an, welche zu der algebraischen m-deutigen Function v von u gehört, die durch die algebraische Gleichung

$$F(u, v) = 0 \tag{22}$$

definirt ist, welche vom Geschlechte Eins ist, so dass v im Allgemeinen $2m$ Verzweigungspunkte besitzt. Es sei:

$$u = \frac{g_1(x) + h_1(x)\sqrt{R(x)}}{p_1(x)} \tag{23}$$

die algebraische Function x von u, welche zu dieser Fläche gehört. Eliminirt man aus (22) und (23) die Variable u, so erhält man eine algebraische Gleichung zwischen v und $(x, \sqrt{R(x)})$ und da zu jedem Punkte von T nur ein Werthenpaar $\{v; x, \sqrt{R(x)}\}$ gehört und ferner jeder Stelle $(x, \sqrt{R(x)})$ nur ein Punkt auf T entspricht, so entspricht jedem $(x, \sqrt{R(x)})$ nur ein Werth v und die algebraische Gleichung zwischen v und x hat die Form:

$$v = \frac{g_2(x) + h_2(x)\sqrt{R(x)}}{p_2(x)}.$$

Bei dieser Darstellung von u und v durch den Parameter x entspricht jedem Werthenpaar (u, v) der Gleichung (22) nur eine Stelle $(x, \sqrt{R(x)})$, wie leicht zu erkennen ist.

Wie am Anfange dieses Abschnittes erwähnt wurde, können x und $\sqrt{R(x)}$ mit Hilfe der Gleichung $\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 - R(x) = 0$ als eindeutige Functionen des Parameters z ausgedrückt werden. Es sind dann auch u und v eindeutige Functionen von z.

Wenn die Gleichung (22) vom Geschlecht Null ist, so hat v als Function von u nur $2m - 2$ Verzweigungspunkte; in diesem Falle können u und v als Functionen von x und $\sqrt{R(x)}$ ausgedrückt werden, wenn $\sqrt{R(x)}$ vom zweiten oder nullten Grade in x ist, und zwar sind für jede Gleichung (22) vom Geschlechte Null beide Fälle möglich.

III.

In dem Abschnitt I wurde gezeigt, dass die Differentialgleichung (1):

$$(1) \qquad f(u, U) = 0, \qquad U = \frac{du}{dz},$$

folgende Form haben muss, wenn u eine eindeutige Function von z ist:

$$U^m + f_1(u)U^{m-1} + \ldots + f_{m-1}(u)U + f_m(u) = 0;$$

$f_1(u)$, $f_2(u)$ u. s. w. bedeuten ganze rationale Functionen von u und zwar ist $f_1(u)$ höchstens vom 2^{ten} Grade in u, $f_2(u)$ höchstens vom 4^{ten} Grade und $f_m(u)$ höchstens vom Grade $2m$. Da (1) eine irreductible Gleichung sein soll, so darf $f_m(u)$ nicht identisch verschwinden.

In Folge dieser nothwendigen Eigenschaft kann (1) durch eine Substitution von der Form:

$$u = \frac{1}{w} + a, \qquad U = -\frac{1}{w^2} W$$

stets in eine solche Gleichung transformirt werden, dass der Quotient: $\frac{1}{w^2} W$ für $w = \infty$ m verschiedene Werthe erhält, welche sämmtlich von Null verschieden sind. Für $w = \infty$ wird nämlich obige Gleichung auf folgende Glieder reducirt:

$$(2) \qquad \left(\frac{W}{w^2}\right)^m - f_1(a)\left(\frac{W}{w^2}\right)^{m-1} + \ldots \mp f_{m-1}(a) \cdot \frac{W}{w^2} \pm f_m(a) = 0.$$

Die algebraische Gleichung (2) zwischen a und $\left(\frac{W}{w^2}\right)$ ist irreductibel; es kann daher a stets so gewählt werden, dass obige Bedingungen für die Wurzeln $\frac{W}{w^2}$ erfüllt werden.

Diese neue Gleichung zwischen w und W:

$$(3) \qquad \Phi(w, W) = 0$$

ist auch eine Differentialgleichung von der Form (1), wenn $W = \frac{dw}{dz}$ gesetzt wird und es ist dann w eine eindeutige Function von z, wenn dieses für u der Fall ist und umgekehrt. Man erhält für $w = \infty$ m verschiedene Entwicklungen von der Form:

$$(4) \qquad W = A_\mu w^2 + A'_\mu w^3 + \ldots \qquad {\scriptstyle (\mu = 1, 2, \ldots, m)}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_\mu, \ldots, A_m$ sind die Wurzeln $\frac{W}{w^2}$ der Gleichung (2).

Betrachtet man (3) als algebraische Curve der rechtwinkligen Coordinaten w und W, so hat dieselbe für $w = \infty$ und $W = \infty$ m verschiedene Zweige, welche sich sämmtlich in zwei Punkten berühren. Die algebraische Curve hat daher im Unendlichen $m(m - 1)$ Doppelpunkte.

Wenn w eine eindeutige Function von z ist, so muss die Gleichung (3), wie im Abschnitt I gezeigt wurde, noch folgende nothwendige Bedingungen erfüllen:

1) Das Geschlecht der Curve (3) muss niedriger als zwei sein.

2) Wenn $w = a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ die Wurzeln von $\Phi(w, 0) = 0$ sind, so muss die Entwicklung von W nach $(w - a_\nu)$ folgende Form haben:

$$(5) \qquad W = B_\nu (w - a_\nu)^{\frac{k_\nu + l_\nu}{k_\nu + 1}} + B'_\nu (w - a_\nu)^{\frac{k_\nu + l_\nu + 1}{k_\nu + 1}} + \ldots$$

Hierin bedeuten k_ν und l_ν ganze positive Zahlen, welche auch gleich Null sein können. Ist das Geschlecht von (3) gleich Eins, so muss l_ν stets verschwinden. Ist aber das Geschlecht von (3) gleich Null, so kann l_ν höchstens für zwei verschiedene Stellen a_ν grösser als Null sein, und Σl_ν muss kleiner als 3 sein.

Diese Bedingungen sind aber auch hinreichende Bedingungen dafür, dass w eindeutige Function von z ist. Der Beweis ist leicht zu geben.

Da das Geschlecht von (3) kleiner als zwei ist, so lassen sich w und W eindeutig mit Hülfe eines Parameters ζ ausdrücken, und zwar betrachten wir insbesondere die Darstellung, welche im Abschnitt II entwickelt wurde:

$$(6)\qquad \begin{aligned} w &= \frac{g(x) + h(x)\sqrt{R(x)}}{p(x)}, \\ W &= \frac{G(x) + H(x)\sqrt{R(x)}}{P(x)}, \end{aligned} \qquad \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 - R(x) = 0.$$

Es sollen hier nur solche Darstellungen gewählt werden, für welche w nicht unendlich wird, wenn x unendlich gross wird oder verschwindet; dieses kann durch eine Substitution erreicht werden. Auch wurde oben gezeigt, dass bei diesen Darstellungen von w und W jedem Werthenpaare (w, W), welches der Gleichung (3) genügt, nur ein Werthenpaar $(x, \sqrt{R(x)})$ entspricht. Zu jedem Werthe w gehören daher m Stellen $(x, \sqrt{R(x)})$ und den m verschiedenen Zweigen für $w = \infty$ müssen m verschiedene Werthenpaare $(x, \sqrt{R(x)})$ entsprechen. Es hat dann $p(x)$ nur einfache Wurzeln. Ferner zeigt die Form der Entwicklungen (4), welche für $w = \infty$ gelten, dass $P(x) = p^2(x)$ sein muss.

Man vergleiche W und $\frac{dw}{d\zeta}$.

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{p(x)\frac{d}{dx}\left(g(x) + h(x)\sqrt{R(x)}\right) - \frac{dp(x)}{dx}\left(g(x) + h(x)\sqrt{R(x)}\right)}{p^2(x)}\sqrt{R(x)}.$$

Nur für $w = \infty$ werden W und $\frac{dw}{d\zeta}$ unendlich, aber $\frac{dw}{d\zeta}\frac{1}{W}$ bleibt hier endlich. Dieser Quotient kann daher nur unendlich werden, wenn W verschwindet. Für $W = 0$ gelten die Entwicklungen welche durch die Bedingung (2) bestimmt werden. Es kann angenommen werden, dass für $w = a_\nu$ der Parameter x nicht unendlich gross wird. Der Entwicklung (5) entspricht dann eine Entwicklung von w nach $(x - x_\nu)$, welche zweideutig ist, wenn $\sqrt{R(x_\nu)} = 0$ ist:

$$w - a_\nu = C_\nu (x - x_\nu)^{\frac{p_\nu}{2}} + C'_\nu (x - x_\nu)^{\frac{p_\nu + 1}{2}} + \ldots \qquad p_\nu \geqq 1.$$

Setzt man dieselbe in (5) ein, so muss sich W in gleicher Weise nach $(x - x_\nu)$ entwickeln. Folglich ist, wenn $R(x_\nu) \neq 0$, $\left(\frac{p_\nu}{2}\right) = q_\nu (k_\nu + 1)$, im anderen Falle: $p_\nu = q_\nu (k_\nu + 1)$; hier bedeutet q_ν eine ganze positive Zahl.

$$\frac{dw}{dx}\frac{dx}{d\zeta} = \left\{ \frac{p_\nu}{2} C_\nu (x - x_\nu)^{\left(\frac{p_\nu}{2}\right) - 1} + \ldots \right\} \sqrt{R(x)}.$$

Wenn die Entwicklungen nach ganzen Potenzen fortschreiten, so ist:

$$\sqrt{R(x)} = \sqrt{R(x_\nu)} + R_1 (x - x_\nu) + \ldots,$$

daher:

$$\frac{dw}{d\zeta} = D_\nu (w - a_\nu)^{\frac{\left(\frac{p_\nu}{2}\right) - 1}{\left(\frac{p_\nu}{2}\right)}} + \ldots; \quad \frac{\left(\frac{p_\nu}{2}\right) - 1}{\left(\frac{p_\nu}{2}\right)} > \frac{k_\nu}{k_\nu + 1}, \quad \text{wenn } k_\nu \geqq 1.$$

Im anderen Falle ist $\sqrt{R(x)} = R_1 (x - x_\nu)^{\frac{1}{2}} + \ldots$

$$\frac{dw}{d\zeta} = D_\nu (w - a_\nu)^{\left(\frac{p_\nu - 1}{p_\nu}\right)} + \ldots; \quad \frac{p_\nu - 1}{p_\nu} > \frac{k_\nu}{k_\nu + 1}, \quad \text{wenn } k_\nu \geqq 1.$$

Wenn daher in (5) $l_\nu = 0$ ist, so ist, weil dann $k_\nu \geqq 1$ sein muss, der niedrigste Exponent von $(w - a_\nu)$ in der Entwicklung von $\frac{dw}{d\zeta}$ grösser als der kleinste Exponent von $(w - a_\nu)$ in der Entwicklung von W. Der Quotient $\frac{1}{W}\frac{dw}{d\zeta}$ wird dann für $w = a_\nu$ nicht unendlich.

Hat die Gleichung (3) das Geschlecht Eins, in welchem Falle $R(x)$ vom vierten Grade ist, so verlangt die Bedingung (2), dass stets $l_\nu = 0$ ist. Es wird also jener Quotient $\frac{dw}{d\zeta}\frac{1}{W}$ niemals unendlich.

Hat die Gleichung (3) das Geschlecht Null, so können w und W als rationale Functionen von x dargestellt werden, so dass in den Formeln (6): $\frac{dw}{d\zeta} = \sqrt{R(x)}$ eine Constante wird. Wird auch hier l_ν stets Null, so kann $\frac{dw}{dx}\frac{1}{W}$ nie unendlich werden. Es kann aber auch l_ν an zwei Stellen z. B. für a_1 und a_2 gleich Eins werden. Durch eine lineare Substitution kann immer erreicht werden, dass für $x = \infty$ w nicht gleich a_1 oder a_2 wird. Es mögen vielmehr diesen Stellen, für welche die Entwicklungen (5) gelten, die endlichen Werthe x_1 beziehungsweise x_2 entsprechen, und man kann w, W und $\frac{dw}{dx}$ nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_1$ entwickeln:

$$w - a_1 = C_1(x - x_1)^{q(k_1+1)} + \dots, \qquad q > 0,$$

$$W = C_1'(x - x_1)^{q(k_1+1)} + \dots,$$

$$\frac{dw}{dx} = q(k_1 + 1)C_1(x - x_1)^{q(k_1+1)-1} + \dots,$$

$$\frac{dw}{dx}\frac{1}{W} = \frac{q(k_1+1)C_1}{C_1'}\frac{1}{x - x_1} + \dots.$$

Ebenso wird $\frac{dw}{dx}\frac{1}{W}$ unendlich für $x = x_2$. An die Stelle von x substituirt man folgende eindeutige Function von ζ:

$$\log\frac{x - x_1}{x - x_2} = \zeta, \qquad x = \frac{x_1 - x_2 e^\zeta}{1 - e^\zeta}$$

und betrachtet den Quotienten

$$\frac{dw}{d\zeta}\frac{1}{W} = \frac{dw}{dx}\frac{1}{W}\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Auch dieser Quotient könnte nur unendlich werden für $w = a_1$ und $w = a_2$, d. h. für $x = x_1$ und $x = x_2$; derselbe bleibt aber hier endlich.

Schliesslich kann noch l_ν für eine der Stellen a_ν z. B. für $a_\nu = a_1$ den Werth 2 erhalten. Dann betrachten wir wieder eine solche Darstellung von w und W als rationale Functionen von x, in welcher der Punkt $x = \infty$ nicht der Entwicklung (5) für $w = a_1$ entspricht. Es möge demselben vielmehr ein endlicher Werth x_1 entsprechen. Für $x = x_1$ hat man die Entwicklung:

$$w - a_1 = C_1(x - x_1)^{q(k_1+1)} + \ldots, \qquad q \geqq 1.$$

Durch Umkreisung des Punktes $w = a_1$ erhält man für einen Punkt in der Nähe von a_ν, z. B. für $w = w'$, $q(k_1 + 1)$ verschiedene Werthe x; zu gleicher Zeit erhält man aber nur $k_1 + 1$ verschiedene Werthe W in Folge der Entwicklung (5), da aber bei jeder Darstellung von der Form (6) jedem Werthenpaare (w, W) nur eine Stelle x entspricht, so muss $q = 1$ sein.

$$\left.\begin{aligned} W &= C_1'(x - x_1)^{k_1+2} + \ldots. \\ \frac{dw}{dx} &= (k_1 + 1)C_1(x - x_1)^{k_1} + \ldots. \end{aligned}\right\} \frac{dw}{dx}\frac{1}{W} = \frac{(k_1+1)}{C_1'}\frac{1}{(x - x_1)^2} + \ldots.$$

Man führe folgende Substitution ein:

$$\frac{1}{x - x_1} = \zeta, \qquad x = \frac{x_1\zeta + 1}{\zeta},$$

so dass w und W eindeutige Functionen von ζ sind. Der Quotient $\frac{dw}{d\zeta}\frac{1}{W}$ kann nur für $w = a_1$ unendlich werden.

$$\frac{dw}{d\zeta}\frac{1}{W} = -\frac{dw}{dx}\frac{1}{W}(x - x_1)^2.$$

Doch diese letzte Gleichung zeigt, dass auch an der Stelle $w = a_1$, $W = 0$ der Quotient endlich bleibt.

In jedem Falle haben wir eine solche Darstellung von w und W als eindeutige Functionen von ζ gefunden, dass $\frac{dw}{d\zeta}\frac{1}{W}$, welches auch algebraische Function von w ist, für keinen Werth unendlich wird, d. h. es ist gleich einer Constanten C:

$$\frac{dw}{d\zeta} = CW.$$

Setzt man $C\zeta = z$, so wird

$$\frac{dw}{dz} = W.$$

Wenn daher die Gleichung zwischen w und W jene nothwendigen Bedingungen erfüllt, so kann eine solche eindeutige Darstellung von w und W nach einem Parameter z gefunden werden, dass W die Ableitung von w nach z ist.[1]

Es ist hiermit folgendes Kriterium abgeleitet worden:

Eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung zwischen u und $\frac{du}{dz}$, welche die Variable z nicht explicite enthält:

$$f_0(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^m + f_1(u)\left(\frac{du}{dz}\right)^{m-1} + \dots + f_{m-1}(u)\left(\frac{du}{dz}\right) + f_m(u) = 0$$

hat ein eindeutiges Integral, wenn sie folgende nothwendige Bedingungen erfüllt:

1. Das Geschlecht der algebraischen Gleichung muss kleiner als Zwei sein.

2. Der Coefficient von $\left(\frac{du}{dz}\right)^\nu$, welcher mit $f_\nu(u)$ bezeichnet ist, muss eine ganze rationale Function in u sein, die höchstens vom Grade 2ν ist. Man kann dann durch eine Substitution von der Form:

$$u = \frac{1}{w} + a, \qquad \frac{du}{dz} = -\frac{1}{w^2}\frac{dw}{dz}$$

eine algebraische Gleichung zwischen w und $\frac{dw}{dz}$ erhalten, welche für $w = \infty$ m verschiedene Wurzeln $\frac{dw}{dz}\frac{1}{w^2}$ hat, von denen keine verschwindet.

3. In dieser neuen Gleichung zwischen w und $\frac{dw}{dz}$ möge $\frac{dw}{dz}$ verschwinden für $w = a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots, a_n$; die Entwicklungen von $\frac{dw}{dz} = 0$ nach $w - a_\nu$ mögen folgende Form haben:

$$W = B_\nu(w - a_\nu)^{\frac{k_\nu + l_\nu}{k_\nu + 1}} + B'_\nu(w - a_\nu)^{\frac{k_\nu + l_\nu + 1}{k_\nu + 1}} + \dots.$$

Hierin sind $B_\nu, B'_\nu, \dots$ Constanten, k_ν und l_ν sind ganze Zahlen; dieselben müssen aber $\geqq 0$ sein.

[1] Auf ähnliche Weise lässt sich direkt aus der Darstellbarkeit von w und W in der Form (6) die Nothwendigkeit jener Bedingungen nachweisen.

4. Wenn das Geschlecht der algebraischen Gleichung gleich Eins ist, so muss l_ν stets $= 0$ sein.

Wenn aber die Gleichung das Geschlecht Null hat, so muss $\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu < 3$ sein.

Am Anfange dieser Arbeit ist das Theorem von BRIOT und BOUQUET mitgetheilt worden. Der Vergleich ergiebt nun, dass die Bedingung (4) jenes Theorems hier durch die Transformation $u = \frac{1}{w} + a$ ersetzt ist. Ein wesentlicher Unterschied ist nur darin zu erkennen, dass hier eine Bedingung für das Geschlecht und die Bedingung (4) auftreten, während das Theorem von BRIOT und BOUQUET verlangt, dass die algebraische Function W keine Verzweigungspunkte hat, wenn $W \neq 0$ ist.

Es schien von Interesse, die Beziehung, in welcher diese verschiedenen Bedingungen nothwendig stehen müssten, direkt nachzuweisen.

Zu diesem Zwecke betrachte man die Resultante, welche sich durch Elimination von W aus den Gleichungen:

$$\Phi(w, W) = W^m + f_1\left(\frac{1}{w} + a\right)w^2 W^{m-1} + \ldots + f_m\left(\frac{1}{w} + a\right)w^{2m} = 0,$$

$$\frac{d}{dW}\Phi(w, W) = m W^{m-1} + (m-1)f_1\left(\frac{1}{w} + a\right)w^2 W^{m-2} + \ldots$$
$$+ f_{m-1}\left(\frac{1}{w} + a\right)w^{2m-1} = 0$$

ergiebt.

Wenn man kurz $w^2 f_1\left(\frac{1}{w} + a\right)$ mit f_1, $w^4 f_2\left(\frac{1}{w} + a\right)$ mit f_2 u. s. w. bezeichnet, so heisst diese Resultante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & f_1, & f_2, & \ldots, & f_m, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & f_1, & \ldots, & f_{m-1}, & f_m, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f_m \\ m, & (m-1)f_1, & (m-2)f_2, & \ldots, & f_{m-1}, & 0, & \ldots, & \ldots, & 0 \\ 0, & m, & (m-1)f_1, & \ldots, & 2f_{m-2}, & f_{m-1}, & \ldots, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f_{m-1} \end{vmatrix}.$$

Der Grad von $\Delta = 0$ in w giebt die Anzahl der Schnittpunkte von obigen beiden Gleichungen im Endlichen an. Dieser Grad ist nur abhängig von denjenigen Gliedern in $f_1, f_2, \ldots$, welche die höchsten Potenzen von w enthalten. In f_1 ist $f_1(a)w^2$ dieses Glied, in f_2 ist es $f_2(a)w^4$ u. s. w., daher wird die folgende Determinante D von demselben Grad sein wie Δ:

$$D = \begin{vmatrix} 1, & f_1(a)w^2, & f_2(a)w^4, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & f_1(a)w^2, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f_m(a)w^{2m} \\ m, & (m-1)f_1(a)w^2, & (m-2)f_2(a)w^4, & \ldots, & 0 \\ 0, & m, & (m-1)f_1(a)w^2, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f_{m-1}(a)w^{2m-2} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist aber die Discriminante von:

$$(7) \qquad W^m + f_1(a)w^2W^{m-1} + \ldots + f_{m-1}(a)w^{2m-2}W + f_m(a)w^{2m} = 0,$$

$$(8) \qquad mW^{m-1} + (m-1)f_1(a)w^2W^{m-2} + \ldots + f_{m-1}(a)w^{2m-2} = 0.$$

Die erstere von diesen beiden Gleichungen kann auch in folgender Weise geschrieben werden:

$$(W - A_1w^2)(W - A_2w^2)\ldots(W - A_mw^2) = 0.$$

$A_1, A_2, \ldots$ sind die Wurzeln von (2), also sämmtlich verschieden von einander. Diese Gleichung stellt ein System von m Parabeln vor. Ebenso repräsentirt die Gleichung (8) ein System von $(m-1)$ Parabeln; keine derselben ist mit einer Parabel von (7) identisch, da die Wurzeln $A_1, A_2, \ldots$ verschieden sind. Für endliche Werthe von w und W hat jede Parabel in (7) nur den Scheitelpunkt $w = 0$ und $W = 0$ mit den Parabeln (8) gemeinsam, und zwar ist es ein zweifacher Schnittpunkt, da sich sämmtliche Parabeln hier berühren. Folglich hat jede Parabel von

(7) mit den Curven (8) im Endlichen $2(m-1)$ gemeinsame Punkte, und die Gleichung (7) mit der Gleichung (8) $2m(m-1)$ gleiche Wurzeln:

$$w = 0.$$

Es ist:

$$D = Cw^{2m(m-1)}.$$

Auch Δ ist daher vom Grade $2m(m-1)$ in w.

Man betrachte $\Phi(w, W) = 0$ als algebraische Curve der rechtwinkligen Coordinaten w und W. Aus der Theorie der algebraischen Curven ist bekannt, dass jeder endliche Werth, für welchen eine Parallele zur W-Axe einfache Tangente an die Curve $\Phi(w, W) = 0$ ist, eine einfache Wurzel der Resultante $\Delta = 0$ sein muss, dass ferner jeder endliche Werth w, der zu einem Doppelpunkte gehört, zweifache Wurzel und jeder endliche Werth w, für den die Curve einen Rückkehrpunkt hat, dreifache Wurzel der Resultante $\Delta = 0$ ist.

Man bezeichne die Anzahl der Doppelpunkte im Endlichen mit d, die Anzahl der Rückkehrpunkte im Endlichen, für welche $W = 0$ ist, mit r, und für welche $W \neq 0$ ist mit r'. Schliesslich sei die Anzahl der Tangenten vom unendlich fernen Punkte der W-Axe, für welche w endlich und $W = 0$ ist, gleich t; wenn dagegen $W \neq 0$ ist, so nenne man die Anzahl derselben t'. Es ist dann:

$$2m(m-1) = t + t' + 2d + 3(r + r'),$$

$$2(d + r + r') = 2m(m-1) - (t + r + t' + r'). \tag{9}$$

Für jede k-fache Tangente vom unendlich fernen Punkte der W-Axe und für jeden k-fachen Rückkehrpunkt hat die algebraische Function W von w einen k-fachen Verzweigungspunkt; $t + r$ ist folglich die Anzahl der Verzweigungspunkte von W, für welche $W = 0$ ist, und $t' + r'$ die Anzahl dieser Verzweigungspunkte von W, für welche $W \neq 0$ ist.

Nach einer nothwendigen Bedingung, welche in beiden Kriterien besteht, muss für $W = 0$ und $w = a_\nu$ folgende Entwicklung gelten:

$$W = B_\nu (w - a_\nu)^{\frac{k_\nu + l_\nu}{k_\nu + 1}} + B'_\nu (w - a_\nu)^{\frac{k_\nu + l_\nu + 1}{k_\nu + 1}} + \dots, \qquad l_\nu \overline{\gtrless} 0.$$

Für $W = 0$ ist folglich die Anzahl der Verzweigungspunkte $(t + r)$ gleich Σk_ν.

Es giebt $\Sigma(k_\nu + l_\nu)$ die Anzahl der Wurzeln der Gleichung:

$$\Phi(w, 0) = 0$$

an, also:

$$\Sigma(k_\nu + l_\nu) = 2m, \qquad t + r + \Sigma l_\nu = 2m.$$

Die algebraische Curve $\Phi(w, W) = 0$ hat im Unendlichen keine Rückkehrpunkte, dagegen eine bekannte Anzahl d' von Doppelpunkten (siehe Seite 63)

$$d' = m(m - 1).$$

Aus der Gleichung (9) ergiebt sich dann:

$$2(d + d' + r + r') = 4m(m - 1) - 2m + (\Sigma l_\nu - t' - r').$$

Es ist nun $d + d' + r + r'$ die Anzahl sämmtlicher Doppel- und Rückkehrpunkte, welche die Curve (3) besitzt. Nennt man p das Geschlecht der Curve, so ist

$$p = \frac{(2m - 1)(2m - 2)}{2} - (d + d' + r + r'),$$

$$p = 1 + \frac{t' + r'}{2} - \frac{\Sigma l_\nu}{2}. \tag{10}$$

Nach dem Kriterium, welches in diesem Abschnitte abgeleitet wurde, soll für $p = 1$ auch $\Sigma l_\nu = 0$, für $p = 0$ aber $\Sigma l_\nu < 3$ sein. In beiden Fällen muss also $t' + r' = 0$ sein, d. h. für $W \neq 0$ darf es keine Verzweigungspunkte geben. Auch ergiebt sich, dass für $p = 0$ $\Sigma l_\nu = 2$ ist.

Sollte $t' + r'$ nicht verschwinden, so ist der Widerspruch nur dadurch zu erklären, dass die algebraische Gleichung reductibel ist.

Nach dem Theorem von Briot und Bouquet soll $t' + r' = 0$ sein. Für diesen Fall zeigt die Formel (10), dass $p < 2$ sein muss; ferner wenn $p = 1$, so ist $\Sigma l_\nu = 0$, im anderen Falle gleich 2.[1]

[1] Auf diese Weise würde sich auch der Satz ergeben, welcher von Briot und Bouquet aufgestellt ist, dass wenn l_ν diese Bedingung nicht erfüllt, die Gleichung (3) reductibel ist.

In dem Werke von BRIOT und BOUQUET: *Théorie des fonctions elliptiques* sind mit Hülfe des dort entwickelten Kriteriums die binomischen und trinomischen Differentialgleichungen aufgestellt, welche ein eindeutiges Integral besitzen. Die hier aufgestellten Bedingungen führen natürlich zu denselben Resultaten; da in beiden Kriterien einzelne Bedingungen gleich sind, so wird auch die betreffende Untersuchung mit derjenigen, welche die Herren BRIOT und BOUQUET geführt haben, in einigen Punkten übereinstimmend sein. Es wird im Folgenden nur auf den Unterschied beider Methoden aufmerksam gemacht. Zum Schlusse wird das eindeutige Integral einer einfachen Differentialgleichung berechnet, welche in dem Werke von BRIOT und BOUQUET nicht behandelt ist.

A. Binomische Gleichungen.

Wie oben erwähnt, hat Herr FUCHS die Formen der binomischen Differentialgleichungen aufgestellt, welche ein eindeutiges Integral besitzen, dadurch dass er den Satz vom Geschlecht der algebraischen Gleichungen zu Grunde legte. Indem hierauf verwiesen wird, geben wir nur die Anzahl der Doppel- und Rückkehrpunkte, welche jede dieser Formen besitzen.

Die betreffenden Differentialgleichungen sind:

$$U^2 + G(u-a)(u-b)(u-c)(u-d) = 0, \tag{1}$$

$$U^3 + G(u-a)^2(u-b)^2(u-c)^2 = 0, \tag{2}$$

$$U^4 + G(u-a)^2(u-b)^3(u-c)^3 = 0, \tag{3}$$

$$U^6 + G(u-a)^3(u-b)^4(u-c)^5 = 0, \tag{4}$$

$$U - G(u-a)(u-b) = 0, \tag{5}$$

$$U^2 - G(u-a)^2(u-b)(u-c) = 0, \tag{6}$$

$$U - G(u-a)^2 = 0, \tag{7}$$

$$U^m - G(u-a)^{m+1}(u-b)^{m-1} = 0. \tag{8}$$

Die Curve (1) hat im Unendlichen 2 Doppelpunkte, im Endlichen keinen Doppel- und Rückkehrpunkt. Die Curve (2) hat im Unendlichen 6 Doppelpunkte. Dem Punkt $U = 0$, $u = a$ entspricht ein einfacher

Rückkehrpunkt, dasselbe ist für $U = 0$ und $u = b$ resp. $u = c$ der Fall. Die Curve (3) besitzt im Unendlichen 12 Doppelpunkte. Im Punkte $U = 0$ und $u = a$ berühren sich 2 Zweige in einer zur U-Axe parallelen Geraden; es giebt hier 2 Doppelpunkte. Durch den Punkt $U = 0$, $u = b$ geht nur ein Zweig, derselbe repräsentirt zwei Rückkehrpunkte und einen Doppelpunkt; dasselbe ist für $U = 0$ und $u = c$ der Fall. Im Unendlichen der Curve (4) liegen 30 Doppelpunkte, für $U = 0$ und $u = a$ berühren sich 3 Zweige, es giebt hier 6 Doppelpunkte. Durch den Punkt $U = 0$ und $u = b$ gehen zwei Zweige, in beiden beginnt die Entwicklung von U nach $(u - b)$ mit der Potenz $(u - b)^{\frac{2}{3}}$, es fallen hier 2 Rückkehrpunkte zusammen, welche sich in 6 Doppelpunkten schneiden. Für $U = 0$ und $u = c$ giebt es nur eine Entwicklung nach $(u - c)$, dieselbe repräsentirt 6 Doppelpunkte und 4 Rückkehrpunkte. Berechnet man hiernach für diese 4 Curven das Geschlecht, so ergiebt sich dasselbe bei allen gleich Eins.

Die Curve (5) hat keinen Doppel- und Rückkehrpunkt, die Curve (6) besitzt im Unendlichen 2 und für $U = 0$ und $u = 0$ einen Doppelpunkt. Die Parabel (7) kann keinen Doppelpunkt besitzen und die Curve (8) endlich hat $m(m - 1)$ Doppelpunkte im Unendlichen; für $U = 0$ und $u = a$ ist nur eine Entwicklung nach $(u - a)$ möglich, die Anzahl der Doppel- und Rückkehrpunkte an dieser Stelle ist $\frac{1}{2}m(m - 1)$, unter diesen giebt es $(m - 1)$ Rückkehrpunkte. Ebenso giebt es für $U = 0$ und $u = b$ nur eine Entwicklung von u nach Potenzen von U, unter den

$$\frac{1}{2}(m - 1)(m - 2)$$

Doppel- und Rückkehrpunkten giebt es $m - 2$ Rückkehrpunkte. Die Curven von (5) bis (8) sind vom Geschlecht Null.[1]

B. Trinomische Gleichungen.

$$U^m + f_1(u)U^{m-1} + f_m(u) = 0. \tag{1}$$

Im Unendlichen liegen $m(m - 1)$ Doppelpunkte. Diejenigen Rück-

[1] Es wurde bei dieser Bestimmung der Singularität eines Punktes die Methode benutzt, welche Herr NÖTHER in den Göttinger Nachrichten 1871 angegeben hat.

kehr- und Doppelpunkte, welche im Endlichen liegen und für die $U \neq 0$ ist, müssen ausser obiger noch folgenden Gleichungen genügen:

$$(2) \qquad mU + (m-1)f_1(u) = 0.$$

$$(3) \qquad f_1'(u)U^{m-1} + f_m'(u) = 0.$$

Die Elimination von U aus (1) und (2) ergiebt:

$$(-1)^{m-1}\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}f_1^m(u) + f_m(u) = 0 = P(u).$$

Aus (2) und (3) erhält man:

$$(-1)^{m-1}\frac{(m-1)^{m-1}}{m^{m-1}}f_1^{m-1}(u)f_1'(u) + f_m'(u) = 0 = Q(u).$$

Es ist daher:

$$Q(u) = \frac{dP(u)}{du}.$$

Der Werth u, welcher zu einem Doppelpunkt gehört, muss Wurzel von $P(u)$ und von $Q(u)$ sein, d. h. er ist mindestens zweifache Wurzel von $P(u)$. Es ist somit nöthig zu bestimmen, wie viele Doppel- resp. Rückkehrpunkte zu einer mehrfachen Wurzel von $P(u)$ gehören. Hierzu wird folgende eindeutige Transformation eingeführt:

$$U = V - \frac{m-1}{m}f_1(u),$$

deren Fundamentalpunkte im Unendlichen liegen.

Die transformirte Gleichung (1) heisst:

$$(4) \qquad V^m + \ldots + (-1)^{m-1}.\frac{(m-1)^{m-2}}{2m^{m-3}}.f_1^{m-2}(u).V^2 + P(u) = 0.$$

Wenn $u = u_1$ gemeinsame Wurzel von $P(u)$ und $f_1(u)$ ist, so hat auch $f_m(u)$ diese Wurzel und U wird für $u = u_1$ verschwinden. Hier sollen aber nur solche Doppelpunkte betrachtet werden, für welche $U \neq 0$ ist; für diese ist dann auch $f_1(u) \neq 0$. Es sei $u = u_1$ eine p-fache Wurzel von $P(u)$; wenn $p = 2\rho$ also eine gerade Zahl ist, so berühren sich an dieser Stelle zwei Äste von (4) in ρ Punkten und bilden ρ Doppelpunkte.

Ist dagegen $p = 2\rho + 1$, so giebt es an dieser Stelle nur einen Zweig, derselbe bildet einen Rückkehrpunkt, dessen beide Seiten sich noch in $\rho - 2$ Punkten berühren, so dass es $\rho - 2$ Doppelpunkte und einen Rückkehrpunkt giebt. Da $P(u)$ vom Grade $2m$ ist, so giebt es höchstens m Doppelpunkte und dieses ist der Fall, wenn $P(u)$ ein vollständiges Quadrat ist. Eine gleiche Anzahl Doppelpunkte hat (1) selbst.

Betrachtet man z. B. die Curve:

$$U^3 + A(u-a)(u-b)U^2 + C(u-a')(u-b')(u-c')(u-d')(u-e')(u-f') = 0.$$

Diese erfüllt die Bedingungen (3) und (4) des Kriteriums auf Seite 68. Im Unendlichen liegen 6 Doppelpunkte, für $U = 0$ giebt es keinen singulären Punkt, daher müssen noch 3 Doppelpunkte für $U \neq 0$ vorhanden sein, d. h.

$$P(u) = \frac{4}{27} f_1^3(u) + f_3(u)$$

muss ein vollständiges Quadrat sein, damit die Curve das Geschlecht Eins hat. Hierdurch werden den 10 Coefficienten $a, b, a', \ldots$ 3 Bedingungen auferlegt.

Eine Gleichung 10^{ter} Ordnung, welche den Bedingungen (3) und (4) genügt, ist:

$$U^5 + A(u-a)(u-b)U^4 + C(u-a)^4(u-b)^4(u-c')^2 = 0.$$

Im Unendlichen liegen 20 Doppelpunkte. Dem Punkte $U = 0$ und $u = a$ entspricht eine Entwicklung nach $(u-a)$, welche mit der Potenz $(u-a)^{\frac{4}{5}}$ beginnt, dieselbe repräsentirt 3 Doppel- und 3 Rückkehrpunkte, dasselbe ist für $U = 0$ und $u = b$ der Fall. Im Punkte $U = 0$ und $u = c'$ liegen 2 Doppelpunkte. Für endliche Werthe von U, welche von Null verschieden sind, muss es noch einen Doppelpunkt geben, damit die Curve vom Geschlecht Eins sei. Für diesen Fall ist:

$$P(u) = (u-a)^4(u-b)^4\left[\frac{4^4}{5^5} A^5(u-a)(u-b) + C(u-c')^2\right].$$

Der Factor, welcher für $u = a$ und $u = b$ nicht verschwindet, muss ein Quadrat sein.

Wie in dem Werke von BRIOT und BOUQUET gezeigt wird, lassen sich die Coefficienten nicht immer so bestimmen, dass die Bedingung für $P(u)$ erfüllt ist.

C. Eine Gleichung achter Ordnung,

welche die Bedingungen (3) und (4) erfüllt, ist folgende:

$$U^4 + Ap(u)U^3 + Bp^2(u)U^2 + Cp^3(u)r(u) = 0, \tag{1}$$

$$p(u) = u^2 + 2\alpha_1 u + \alpha_2,$$

$$r(u) = u^2 + 2\beta_1 u + \beta_2.$$

Im Unendlichen liegen 12 Doppelpunkte, für jede der beiden Wurzeln von $p(u) = 0$ und für $U = 0$ gibet es 2 Rückkehr- und einen Doppelpunkt. Damit (1) vom Geschlecht Eins sei, muss es noch zwei singuläre Punkte geben. Für diese beiden Punkte gelten ausser (1) noch die Bedingungsgleichungen:

$$4U^2 + 3Ap(u)U + 2Bp^2(u) = 0, \tag{2}$$

$$Ap'(u)U^3 + 2Bp'(u)p(u)U^2 + 3Cp'(u)p^2(u)r(u) + Cp^3(u)r'(u) = 0. \tag{3}$$

Wenn K_1 und K_2 die Wurzeln von

$$4K_\nu^2 + 3AK_\nu + 2B = 0$$

bedeuten, so kann (2) in folgender Weise geschrieben werden:

$$\{U - K_1 p(u)\}\{U - K_2 p(u)\} = 0.$$

Die Elimination von U aus den 3 Gleichungen (1), (2) und (3) ergiebt:

$$(K_\nu^4 + AK_\nu^3 + BK_\nu^2)p^4(u) + Cp^3(u)r(u) = 0 = P_\nu(u), \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2)}$$

$$(AK_\nu^3 + 2BK_\nu^2)p'(u)p^3(u) + C[3p'(u)r(u) + p(u)r'(u)]p^2(u) = 0 = Q_\nu(u),$$

$$\frac{d}{du}P_\nu(u) = Q_\nu(u) + (4K_\nu^4 + 3AK_\nu^3 + 2BK_\nu^2)p'(u)p^3(u).$$

In Folge der Definitionsgleichung für K_ν verschwindet der Factor von $p'(u)p^3(u)$ in der letzten Gleichung.

$$\frac{d}{du}P_\nu(u) = Q_\nu(u). \qquad (\nu=1,2)$$

Jeder Werth u eines Doppelpunktes, für welchen $U \neq 0$ ist, muss mindestens zweifache Wurzel von $P(u)$ sein.

Durch die Substitution

$$U = V + K_\nu p(u)$$

wird (1) in folgende Gleichung transformirt:

$$V^4 + (4K_\nu + A)p(u)V^3 + (6K_\nu^2 + 3AK_\nu + B)p^2(u)V^2 + P_\nu(u) = 0.$$

Für eine zweifache Wurzel von $P_\nu(u)$, welche nicht Wurzel von $p(u)$ ist, hat dann (1) einen Doppelpunkt. Der Factor von $P_\nu(u)$, welcher verschwinden kann, ohne dass dieses für $p(u)$ der Fall ist, heisst:

$$R_\nu(u) = (K_\nu^4 + AK_\nu^3 + BK_\nu^2)p(u) + Cr(u).$$

Er ist vom zweiten Grade und muss daher ein vollständiges Quadrat sein. Bezeichnet man

$$K_\nu^4 + AK_\nu^3 + BK_\nu^2$$

mit C_ν, so wird $R_\nu(u)$:

$$R_\nu(u) = (C + C_\nu)u^2 + 2(C\beta_1 + C_\nu\alpha_1)u + (C\beta_2 + C_\nu\alpha_2) = (M_\nu x + N_\nu)^2.$$

Die Bedingung ist daher:

$$(C\beta_1 + C_\nu\alpha_1)^2 = (C + C_\nu)(C\beta_2 + C_\nu\alpha_2).$$

Hiermit ist gefunden, dass die Differentialgleichung (1) dann ein eindeutiges Integral besitzt, wenn

$$C_\nu = K_\nu^4 + AK_\nu^3 + BK_\nu^2 \tag{4} \qquad (\nu=1,2.)$$

die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind:

$$(\alpha_1^2 - \alpha_2)C_\nu^2 - (\alpha_2 - 2\alpha_1\beta_1 + \beta_2)CC_\nu + (\beta_1^2 - \beta_2)C = 0. \tag{5}$$

Man kann in folgender Weise dieses Resultat direct nachweisen. Durch die Substitution $U = xp(u)$ wird (1)

$$(6) \qquad p(u)\{x^4 + Ax^3 + Bx^2\} + Cr(u) = 0 = f.$$

Durch Differentiation nach z erhält man:

$$\{p'(u)(x^4 + Ax^3 + Bx^2) + Cr'(u)\}\frac{du}{dz}$$

$$+ (4x^2 + 3Ax + 2B)p(u)x\frac{dx}{dz} = 0 = \frac{df}{dz},$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial u}xp(u) + Wxp(u)\frac{dx}{dz},$$

$$W = 4x^2 + 3Ax + 2B = 4(x - K_1)(x - K_2).$$

Setzt man ferner:

$$V = x^4 + Ax^3 + Bx^2,$$

so erhält man für u, x und $\frac{dx}{dz}$ folgende Gleichungen:

$$(V + C)u^2 + (2V\alpha_1 + 2C\beta_1)u + (V\alpha_2 + C\beta_2) = 0 = f.$$

$$(7) \qquad 2(V + C)u + (2V\alpha_1 + 2C\beta_1) + W\frac{dx}{dz} = 0.$$

Durch Elimination von u ergiebt sich folgende Differentialgleichung für x:

$$(\alpha_1^2 - \alpha_2)V^2 - (\alpha_2 - 2\alpha_1\beta_1 + \beta_2)CV + (\beta_1^2 - \beta_2)C^2 = \frac{1}{4}W^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2.$$

Die linke Seite hat in Folge der Gleichung (5) die Wurzeln

$$V = C_\nu, \qquad (\nu = 1, 2);$$

$$(\alpha_1^2 - \alpha_2)(V - C_1)(V - C_2) = 4(x - K_1)^2(x - K_2)^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2.$$

Die ganze rationale Function von x:

$$V - C_\nu = x^4 + Ax^3 + Bx^2 - C_\nu$$

hat die Wurzel $x = K_\nu$ wegen der Bedingung (4), und zwar ist dieses eine doppelte Wurzel, da

$$\frac{d(V - C_\nu)}{dx} = 4x^3 + 3Ax^2 + 2Bx$$

auch für $x = K_\nu$ verschwindet. Es ist daher $V - C_\nu$ durch $(x - K_\nu)^2$ theilbar:

$$\frac{V - C_\nu}{(x - K_\nu)^2} = x^2 + (2K_\nu + A)x + (3K_\nu^2 + 2AK_\nu + B),$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2}{4} \frac{1}{K_1^2 K_2^2} [K_1^2 x^2 + (2K_1 + A) K_1^2 x - C_1] . [K_2^2 x^2 + (2K_2 + A) K_2^2 x - C_2],$$

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{R(x)}.$$

Hier bedeutet $R(x)$ eine ganze Function in x vom vierten Grade. Aus (7) erhält man schliesslich für u folgenden Werth:

$$u = -\frac{2\alpha_1 x^4 + 2\alpha_1 Ax^3 + 2\alpha_1 Bx^2 + 2\beta_1 C + (4x^2 + 3Ax + 2B)\sqrt{R(x)}}{2x^4 + 2Ax^3 + 2Bx^2 + 2C}.$$