# ÜBER EINIGE GRUNDGEBILDE DER PROJECTIVEN GEOMETRIE

VON

C. JUEL

in KOPENHAGEN.

Seit dem Erscheinen der v. STAUDT'schen Geometrie der Lage ist es wie bekannt der synthetischen Geometrie möglich ihre Sätze ganz allgemein aufzustellen d. h. ohne Rücksicht darauf, ob einige oder auch alle der eingehenden Elemente im Sinne der analytischen Geometrie imaginär sind. Nachdem die geometrischen Bedeutungen der imaginären Grundelemente eingeführt worden sind, ist es nun systematisch richtig und in der projectiven Geometrie genau besehen nothwendig von vorne herein alle Elemente als unbedingt complex aufzufassen und z. B. die Beweise der Sätze in der Geometrie der Ebene gleich so zu führen, dass sie auch in der imaginären Ebene ihre Gültigkeit behalten. Hierbei fällt aber fürs erste die besondere Stellung der reellen Elemente innerhalb der Sammlung aller Elemente der Ebene weg, und dies ist für gewisse weitere Untersuchungen ein Hinderniss. Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist nun der, eine Grundlage für die *allgemein projective* Behandlung derjenigen Fragen zu geben, welche grade auf eine Unterscheidung des reellen und des imaginären hinauslaufen.

Im ersten Abschnitte gebe ich eine Theorie der Sammlung derjenigen Punkte einer Ebene, in welche die reellen Punkte einer reellen Ebene durch eine allgemeine projective Transformation übergehen. Diese Sammlung wird eine zweidimensionale Kette genannt, in Übereinstimmung mit der v. STAUDT'schen Terminologie, wo Kette (welche im vorliegenden einfache Kette genannt wird) die Sammlung derjenigen Punkte einer

Graden bedeutet, in welche die reellen Punkte einer reellen Graden durch eine projective Transformation übergehen. Als ein einfaches Beispiel wähle ich die Aufgabe zu bestimmen durch wie viele centrische Projectionen vier allgemeine Punkte einer imaginären Ebene in vier reelle Punkte projicirt werden können.

Im zweiten Abschnitte werden zunächst die vorstehenden Sätze dazu benutzt, die Paare von reellen oder conjugirt imaginären entsprechenden Punkten bei der projectiven Transformation einer reellen Ebene in sich zu bestimmen. Dann werden ferner besonders die hier sog. symmetralen Beziehungen behandelt. Es sind diese bisher ziemlich wenig untersucht, und soviel ich weiss, nirgends in systematischem Aufbau.[1]

Obgleich ich die algebraischen Ausführungen bis auf spätere Zeit verschiebe, lassen sich die hier behandelten Probleme am leichtesten in analytischer Form andeuten. Bedeutet nämlich $\bar{x}$ die conjugirt imaginäre Zahl zu $x$, wird eine allgemeine symmetrale Transformation der Ebene durch die Transformationsformeln

$$\rho \bar{x}_1 = ax + by + cz \quad \text{u. s. w.}$$

bestimmt. Es werden die Doppelelemente und involutorischen Paare in derjenigen ebenen Correlation bestimmt, deren entsprechende Punkte symmetral gepaart sind. Diese Correlation nenne ich eine zweidimensionale Symmetralität, freilich inconsequent, indem sonst überall, wenn von einer einfach unendlichen Zahl (von Lösungen) die Rede ist, damit die Zahl der reellen Punkte einer reellen Graden gemeint wird. Es zeigt sich ferner, dass $\bar{x} = x$ der allgemeinsten Form einer involutorischen Symmetraltransformation entspricht.

Der wesentlichste Theil dieses Abschnittes behandelt aber — in synthetischer und directer d. h. construirender Form — die Frage, in wie fern sich die Transformationsgleichungen mit reellen Coefficienten schreiben lassen. Es ist dies für die projectiven Transformationen im Allgemeinen nicht möglich — für die symmetralen dagegen immer, im Allgemeinen entweder durch zwei oder durch vier Gruppen von Transformationen (Coordinatenänderungen). Ich habe hier eine gewisse Voll-

[1] In Felix Klein *Über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale* finden sich wichtige Sätze über weitergehende Beziehungen dieser Art.

ständigkeit beabsichtigt und die Resultate für alle nicht zerfallenden Transformationen angegeben.

Es mag noch auf die Beziehungen dieser Arbeit zu denjenigen Untersuchungen von MÖBIUS, welche sich an die Theorie der Kreisverwandtschaften anknüpfen, hingewiesen werden. Die hier gewonnenen Resultate welche, wenn man sich allein an das Gebiet der imaginären Graden hält, auch ganz elementargeometrische Sätze geben, reichen jedoch wesentlich über die MÖBIUS'schen hinaus.

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass die Hauptresultate dieser Untersuchung obgleich zum Theil mit anderer Begründung, schon in meiner Doctordissertation v. J. 1885 zu finden sind.

---

## *Die zweidimensionale Kette.*

In einer reellen Ebene giebt es nach der projectiven Zählung v. STAUDT's $n^4 + n^2 + 1$ reelle und imaginäre Punkte, insbesondere $n^2 + 1$ reelle Punkte, wenn die reelle Grade $n + 1$ reelle Punkte enthält. Die imaginäre Ebene ist von derselben Mächtigkeit wie die reelle; man wird desshalb auch die Sammlung der $n^2 + 1$ Punkte einer imaginären Ebene bestimmen können, welche wie die Sammlung der reellen Punkte einer reellen Ebene dadurch characterisirt ist, dass der Schnittpunkt zweier Graden, welche zwei der Sammlung angehörigen Paare von Punkten verbinden, selbst ein Punkt der Sammlung ist.

Diese Sammlung oder Gruppe von Punkten sei eine *zweidimensionale Kette* genannt und $K^{\mathrm{II}}$ geschrieben. Es seien $A$ und $B$ zwei Punkte von $K^{\mathrm{II}}$, $C$ ein Schnittpunkt von $AB$ und einer Verbindungsgraden zwischen zwei anderen Punkten der Kette. Die ganze in der Graden $AB$ enthaltene durch $A, B$ und $C$ gehende einfache Kette $k$ wird dann in $K^{\mathrm{II}}$ enthalten sein. Nach dem Vorgange des Herrn MORITZ PASCH in den *Vorlesungen über neuere Geometrie*, kann man nämlich durch Constructionen, welche die Kette $K^{\mathrm{II}}$ nicht verlassen, ein »Netz» von Punkten $A, C_1, C_2, \ldots, C_n = B$ herstellen, dergestallt dass

$$(AC_r) = (AC_1) + (AC_1) + \ldots + (AC_1) \quad (r \text{ Addenden}),$$

wo die Additionen im v. STAUDT'schen Sinne zu nehmen sind, so dass $A$ der Nullpunkt und $C$ der Unendlichkeitspunkt der additiven Transformation ist. Weil man $n$ so gross nehmen kann, wie man will, lässt sich durch fortgesetzte Construction von Punkten des Netzes $AC_1C_2\ldots$ jeder Punkt der einfachen Kette $ABC$ mit beliebiger Genauigkeit erreichen.[1]

Wenn die Grade $AB$ noch einen nicht in $k$ liegenden Punkt mit $K^{II}$ gemein hat, muss jeder Punkt von $AB$ in $K^{II}$ liegen, und diese wird dann gradezu aus den Punkten der Graden bestehen; diesen Fall schliessen wir aus.

Eine Grade, welche mit $K^{II}$ eine einfache Kette von Punkten gemein hat, sei der zweidimensionalen Kette *adjungirt* genannt.

Die einfachen Ketten, welche in einer und derselben zweidimensionalen enthalten sind, bilden eine Sammlung, welche in projectiver Beziehung ganz der Sammlung der in einer reellen Ebene liegenden reellen Graden analog ist. Ebenso wie man die imaginären Elementargebilde einer reellen Ebene durch reelle involutorische Gebilde darstellen kann, wird man auch in der imaginären Ebene jeden Punkt und jede Grade durch involutorische Gebilde darstellen können, welche in einer beliebigen festen zweidimensionalen Kette enthalten sind. Es ist nicht nöthig dies näher auszuführen[2] und ich schliesse gleich hieraus:

*Jede Grade einer Ebene, welche einer gegebenen $K^{II}$ nicht adjungirt ist, hat einen und nur einen Punkt mit der Kette gemein*, und

*Durch jeden Punkt einer Ebene, welcher nicht in einer gegebenen $K^{II}$ liegt, geht eine und nur eine Grade, welche der Kette adjungirt ist.*

Das duale Gebilde zu den Punkten einer $K^{II}$ wird aus den Graden gebildet, welche einer anderen $K^{II}$ adjungirt sind. Insbesondere werden die Graden, welche durch einen festen Punkt einer $K^{II}$ gehen und derselben Kette adjungirt sind, eine »einfache Kette von Graden» bilden d. h. sie werden eine beliebige Grade in Punkten einer einfachen Kette schneiden.

Durch eine Involution von Punktpaaren, welche in einer in $K^{II}$ enthaltenen einfachen Kette liegen, werden zwei Punkte der Ebene bestimmt, weil man die Involution in zwei Sinnen durchlaufen kann. Von zwei

[1] Vgl. M. PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, § 15.

[2] Siehe v. STAUDT, *Beiträge*, No. 138.

solchen Punkten werden wir sagen, dass sie in Bezug auf die Kette $K^{\text{II}}$ symmetrisch liegen, oder dass sie durch die Kette $K^{\text{II}}$ harmonisch getrennt werden. Man sieht leicht, dass die Punkte, welche zu den Punkten einer Graden oder den Punkten einer beliebigen Kette in Bezug auf eine feste Kette $K^{\text{II}}$ symmetrisch liegen, selbst bzw. in einer Graden oder in einer Kette liegen werden.

Wir wollen jetzt die Sammlung der Träger derjenigen Punkte bestimmen, welche einer festen $K^{\text{II}}$ angehören.

Es seien $A$ und $B$ zwei Graden, welche der $K^{\text{II}}$ adjungirt sind und demnach zwei einfache Ketten $a^1$ und $b^1$ mit $K^{\text{II}}$ gemein haben werden. Die Träger der $a^1$ und $b^1$ angehörigen Punkte bilden zwei Regelschaaren $\alpha^2$ und $\beta^2$, die nach dem obigen eine Grade $m$ gemein haben. Durch jeden reellen Punkt von $m$ gehen zwei Graden, die eine der Regelschaar $\alpha^2$, die andere der $\beta^2$ angehörig. In der durch zwei solche Graden bestimmten Ebene liegt eine Grade — eine imaginäre Grade erster Art — die mit $K^{\text{II}}$ zwei Punkte gemein hat und demnach der Kette adjungirt ist. Umgekehrt wird jede reelle Ebene $\mu$, welche eine der $K^{\text{II}}$ adjungirte imaginäre Grade erster Art enthält, einen Strahl mit $\alpha^2$ sowie mit $\beta^2$ gemein haben und also die beiden durch $\alpha^2$ und $\beta^2$ bestimmten Hyperboloide berühren. Die Ebenen $\mu$ werden also auch den um die Hyperboloide umgeschriebenen Torso berühren; dieser ist hier reell, weil $\alpha^2$ und $\beta^2$ reelle Graden enthalten und einen gemeinsamen reellen Strahl besitzen. Betrachten wir nun eine beliebige in $K^{\text{II}}$ enthaltene einfache Kette $k^1$, so bestimmt diese wie oben ein Hyperboloid, und auch dieses wird wie $\alpha^2$ und $\beta^2$ in dem genannten Torso eingeschrieben sein. Hieraus folgt, dass die Träger der Punkte der $k^1$ — und demnach die Träger aller Punkte der $K^{\text{II}}$ — Doppeltangenten des Torsos sein werden; die Berührungspunkte sind entweder reell oder conjugirt imaginär.

Umgekehrt sieht man auch leicht, dass zwei Regelschaaren, welche in einen Torso dritter Classe eingeschrieben sind, immer einen Strahl gemein haben, und dass zwei Doppeltangenten des Torsos eine und nur eine eingeschriebene Regelschaar bestimmen.[1] Man hat also:

*Die Trägerkongruenz der Punkte einer zweidimensionalen Kette wird aus den reellen Doppeltangenten eines reellen Torsos dritter Classe gebildet.*

[1] Das entwickelte wird leicht übersichtlich, wenn das Dualitätsprincip angewendet wird.

Eine Kette zweiter Dimension kann der Definition zufolge nicht durch weniger als vier Punkte bestimmt sein. Sind aber $ABCD$ vier Punkte einer Kette $K^{\text{II}}$ und $E$ der Schnittpunkt $(AB\,.\,CD)$, so werden die einfachen Ketten $(ABE)$ und $(CDE)$ zwei Regelschaaren und diese ferner einen Torso dritter Classe und damit die $K^{\text{II}}$ bestimmen. Weil zwei einer Kette adjungirte Graden sich in einem Punkte der Kette schneiden, hat man gleich:

*Eine zweidimensionale Kette ist eindeutig bestimmt durch* 1) *vier Punkte* 2) *drei Punkte und eine adjungirte Grade* 3) *einen Punkt und drei adjungirte Graden* 4) *vier adjungirte Graden.*

Dabei dürfen selbstverständlich nicht drei der Punkte in einer Graden liegen und nicht drei der Graden durch denselben Punkt gehen.

Weiter hat man:

*Eine zweidimensionale Kette ist eindeutig bestimmt, wenn sie zwei Punkte $A$ und $B$ enthalten und zwei andere $C$ und $D$ harmonisch trennen soll.*

Wenn $AB$ und $CD$ — die nicht zusammenfallen dürfen — einander in $E$ schneiden, lege man in der Graden $CD$ eine einfache Kette $k^1$, welche durch $E$ geht und $C$ und $D$ harmonisch trennt,[1] ebenso in $AB$ eine Kette $k_1^1$, welche durch $A$, $E$ und $B$ geht. Die Ketten $k^1$ und $k_1^1$ bestimmen die gesuchte Kette $K^{\text{II}}$.

Auf diese Bestimmung lässt sich die folgende zurückführen:

*Eine zweidimensionale Kette ist eindeutig bestimmt, wenn sie zwei Paare von Punkten $CD$ und $EF$ harmonisch trennen soll.*

Die genannte Kette muss nämlich auch durch die Punkte $(CE.DF)$ und $(CF.DE)$ gehen.

Noch sei bemerkt, dass eine zweidimensionale Kette durch zwei einfache Ketten von Graden bestimmt ist, wenn diese einen Strahl gemein haben.

Wenn man die in eine Grade zerfallenen Ketten ganz von der Betrachtung ausschliesst, sind in projectiver Beziehung alle Ketten gleich

[1] Siehe v. Staudt, *Beiträge,* No. 141.

allgemein. In nicht projectiver Beziehung finden sich dagegen specielle Ketten, die in mehreren Problemen auftreten können, und ich werde diese hier anführen, indem ich bei der Classification von der Lage der Kette zur reellen Axe $u$ der imaginären Ebene ausgehe.

I. *Die reellen Punkte der Axe u gehören alle der Kette an.*

Es seien $A$ und $B$ zwei Punkte der Kette; die Grade $AB$ wird dann einen reellen Punkt enthalten nämlich $(AB.u)$. $AB$ muss desshalb eine imaginäre Grade erster Art sein, und die Träger der Punkte $A$ und $B$ müssen sich schneiden. Indem $A$ und $B$ beliebige Punkte von $K^{\text{II}}$ sind, folgt daraus, dass in diesem Falle alle Träger von Punkten der Kette durch einen festen Punkt gehen müssen. Eine Kette dieser Art erhält man, wenn man die reellen Punkte einer reellen Ebene aus einem reellen Punkte auf eine imaginäre Ebene projicirt.

II. *Die Axe u ist der Kette adjungirt.*

Sind $A, B, C, D$ vier Punkte der Kette, deren Träger sich nicht schneiden, werden die durch $A, B, (AB.u)$ und $C, D, (CD.u)$ gehenden einfachen Ketten zwei Regelschaaren $\alpha^2$ und $\beta^2$ bestimmen; diese haben hier zwei Strahlen gemein, nämlich $u$ und den Träger $f$ von $(AB.CD)$. Die Träger der Punkte von $K^{\text{II}}$ werden desshalb in diesem Falle eine lineare Congruenz bilden, deren Leitgraden die zwei (reellen oder imaginären) Graden sind, in denen sich die durch $\alpha^2$ und $\beta^2$ bestimmten Hyperboloide ausser in $u$ und $f$ schneiden. Die einfache Kette von Punkten, welche $u$ hier mit $K^{\text{II}}$ gemein hat, wird keinen oder auch zwei reelle Punkte enthalten; jenachdem der eine oder der andere Fall eintritt, wird die lineare Congruenz zwei conjugirt imaginäre oder auch zwei reelle Leitgraden haben.

III. *Die Axe u hat einen und nur einen reellen Punkt mit der Kette gemein.*

Wenn $O$ der reelle Punkt der Kette $K^{\text{II}}$ ist, gehen durch $O$ unendlich viele zu $K^{\text{II}}$ adjungirte Graden erster Art, also auch unendlich viele Berührungsebenen zu dem durch die Kette bestimmten Torso. Dieser muss desshalb hier in einen Kegel zweiter Classe, dessen Spitze in $O$ fällt, und noch eine Grade $p$ zerfallen. Die Träger der Punkte dieser speciellen Kette werden demnach alle einen Kegel zweiter Classe berühren und ausserdem eine feste Tangente $p$ dieses Kegels schneiden; $p$ ist selbst Träger eines Punktes der Kette.

Auf eine Kette der letzten Art kommt man, wenn man die reellen Punkte einer reellen Ebene aus einem imaginären Punkte $P$ des Raumes auf eine imaginäre Ebene projicirt; die Träger der Projektionen werden dann den Träger $p$ von $P$ schneiden und müssen demnach auch einen festen Kegel berühren — was übrigens auch eine von dem obigen unabhängige kurze Überlegung direct zeigen würde.

Umgekehrt kann man sich jede Kette der Art III in der oben genannten Weise erzeugt denken. Auf der Graden $p$, welche von sämmtlichen Trägern geschnitten wird, wähle man nur einen beliebigen imaginären Punkt $P$. Die reellen Punkte derjenigen Graden, welche $P$ mit drei imaginären Punkten von $K^{\text{II}}$ verbinden, bestimmen eine reelle Ebene, deren reelle Punkte aus $P$ in die Punkte von $K^{\text{II}}$ projicirt werden.

Nach diesen Bemerkungen ist es leicht die Frage zu behandeln, durch wie viele céntrische Projectionen sich vier allgemeine Punkte $ABCD$ einer imaginären Ebene in vier reelle Punkte einer reellen Ebene übertragen lassen. Durch eine Projection ist dies im Allgemeinen jedenfalls nicht möglich, denn die durch $ABCD$ gehende Kette $K^{\text{II}}$ müsste dann von der speciellen Art III sein. Man kann es aber immer durch eine Projection erreichen, dass eine beliebige Kette in einer Ebene $\pi$ in eine Kette von dieser besonderen Art, welche in einer anderen imaginären Ebene $\pi_1$ liegt, transformirt wird. Man braucht nämlich nur das (reelle oder imaginäre) Projectionscentrum in dem Träger $m$ eines Punktes $M$ der Kette — aber ausserhalb $\pi$ — und die reelle Axe von $\pi_1$ durch einen reellen Punkt von $m$ zu wählen. Durch zwei auf einander folgende Projectionen kann man also immer das verlangte leisten. Hierbei ist dass zuletzt benutzte Projectionscentrum im Allgemeinen imaginär. Man kann aber auch fragen, wie viele Projectionen nöthig sind, wenn sie sämmtlich reell sein sollen. Man wird dann sehen, dass man mit *drei Projectionen* auskommen kann. Durch Projection aus einem reellen Punkte kann man nämlich erst wie oben eine Kette $K_1^{\text{II}}$, der Art III herstellen. Die Träger der Punkte von $K_1^{\text{II}}$ schneiden alle eine Grade $p$ und berühren eine Kegelfläche $\varkappa$. Man lege nun eine reelle Berührungsebene $\alpha$ zu $\varkappa$, welche $p$ in $P$ schneiden möge. Die Projection von $K_1^{\text{II}}$ aus $P$ auf eine imaginäre Ebene $\pi_2$, deren Axe in $\alpha$ liegt, wird dann eine Kette in $\pi_2$ von der oben genannten Art I ergeben; diese Kette kann ferner aus einem bestimmten reellen Punkte in die Kette der reellen Punkte einer ganz beliebigen reellen Ebene projicirt werden.

Wir wollen jetzt zwei zweidimensionale Ketten betrachten, welche in derselben Ebene liegen, und die gemeinsamen Punkte derselben bestimmen. Die Anzahl dieser Punkte kann im Allgemeinen höchstens drei betragen, weil eine Kette schon durch vier Punkte bestimmt ist.

Die gegebenen Ketten seien $K^{\mathrm{II}}$ und $K_1^{\mathrm{II}}$; um die Schnittpunkte zu bestimmen, lege man durch einen beliebigen festen Punkt $A$ von $K^{\mathrm{II}}$, der nicht in $K_1^{\mathrm{II}}$ liegt, die Graden $a$, welche der $K^{\mathrm{II}}$ adjungirt sind, und deren Schnittpunkte mit $K_1^{\mathrm{II}}$ eine einfach unendliche kontinuirliche und geschlossene Reihe von Punkten bilden. Diese Punktreihe $\alpha$ kann mit einer in $K_1^{\mathrm{II}}$ liegenden einfachen Kette $k_1$ höchstens zwei Punkte gemein haben, denn durch $k_1$ wird eine Grade bestimmt, welche von den Graden $a$ in den Punkten einer neuen einfachen Kette $k_2$ geschnitten wird, und $k_1$ und $k_2$ können höchstens zwei Punkte mit einander gemein haben — wenn aber einen dann im Allgemeinen noch einen zweiten.

Ersetzt man $A$ durch einen neuen Punkt $B$ von $K^{\mathrm{II}}$, erhält man in $K_1^{\mathrm{II}}$ eine neue analoge Punktreihe $\beta$. Auf die Schnittpunkte von $\alpha$ und $\beta$ kann man die üblichen Sätze der geometria situs über reelle Curvenzweige anwenden, was desshalb angeht, weil man für diese Sätze projective Beweise geben kann. Indem nun $\alpha$ und $\beta$ von jeder der Kette $K_1^{\mathrm{II}}$ adjungirten Graden in zwei Punkten geschnitten werden, müssen $\alpha$ und $\beta$ einander in einer graden Anzahl von Punkten schneiden. Ein Schnittpunkt ist aber von vorne herein gegeben, nämlich der in $K_1^{\mathrm{II}}$ liegende Punkt von $AB$; jeder andere Schnittpunkt liegt sowohl in $K_1^{\mathrm{II}}$ — weil in $\alpha$ —, als in $K^{\mathrm{II}}$ — weil er der Schnittpunkt zweier zu $K^{\mathrm{II}}$ adjungirten Graden ist; $K^{\mathrm{II}}$ und $K_1^{\mathrm{II}}$ werden also im Allgemeinen einen oder drei Punkte gemein haben; diese letzteren können aber auch wie gewöhnlich zusammenfallen.

Bei besonderer Wahl von $A$ kann die zugehörige Kette $\alpha$ alle Punkte einer einfachen Kette $k_1$ enthalten. Weil $\alpha$ auch in diesem Falle mit jeder anderen in $K_1^{\mathrm{II}}$ liegenden einfachen Kette höchstens zwei Punkte gemein haben kann, muss $\alpha$ hier aus zwei einfachen Ketten zusammengesetzt sein.

Bei specieller Lage von $K^{\mathrm{II}}$ und $K_1^{\mathrm{II}}$ kann es ferner geschehen, dass auch $\beta$ in ein Paar von Ketten zerfällt, von welchen die eine mit einer derjenigen Ketten identisch ist, in welche $\alpha$ zerfällt. In diesem Falle werden dann $K^{\text{II}}$ und $K_1^{\text{II}}$ alle Punkte einer einfachen Kette und ausserdem noch einen isolirten Punkt gemein haben.

Weil die zweidimensionalen Ketten selbstdualistische Gebilde sind (siehe S. 4), sieht man gleich, dass zwei solche Ketten im Allgemeinen entweder eine oder auch drei adjungirte Graden gemein haben werden; wenn deren drei existiren, werden sie die drei gemeinsamen Punkte der Ketten verbinden.

Betrachten wir noch besonders den Fall, wo $K^{\text{II}}$ und $K_1^{\text{II}}$ nur einen Punkt gemein haben, der aber nicht mehrfach zu zählen ist. In diesem Falle giebt es auch eine (und nur eine) Grade $a$, die sowohl zu $K^{\text{II}}$ wie zu $K_1^{\text{II}}$ adjungirt ist, und demnach mit diesen die einfachen Ketten $k_1$ und $k_2$ gemein hat. Weil nun diese einander nicht schneiden, kann man wie folgt sehen, dass sie beide durch ein und dasselbe Punktpaar getrennt sein werden. Die Punkte, welche durch $k$ und $k_1$ von einem beliebigen Punkte $P$ der Graden $a$ harmonisch getrennt sind, seien bzw. $Q$ und $Q_1$. Durch $P$, $Q$ und $Q_1$ geht eine einfache Kette, welche $k$ und $k_1$ in $MN$ bzw. $M_1N_1$ schneiden möge, und diese zwei immer reellen Punktpaare werden einander nicht trennen, wenn, wie vorausgesetzt, $k$ und $k_1$ einander nicht schneiden.[1] Es finden sich demnach in der durch $PQQ_1$ gehenden Kette zwei Punkte $E$ und $F$, welche durch $MN$ sowie durch $M_1N_1$ harmonisch getrennt werden. Dieselben Punkte sind der Definition zufolge auch durch $K^{\text{II}}$ und $K_1^{\text{II}}$ harmonisch getrennt, oder liegen in Bezug auf diese symmetrisch.

Es folgt also:

*Zwei zweidimensionale Ketten haben im Allgemeinen einen oder auch drei Punkte, sowie bzw. eine oder auch drei adjungirte Graden gemein. Wenn sie einen und nur einen Punkt gemein haben, giebt es zwei Punkte — und auch zwei Graden — welche in Bezug auf die beiden Ketten symmetrisch liegen.*

*Wenn die zwei Ketten mehr als drei Punkte gemein haben, werden die gemeinsamen Punkte aus allen Punkten einer einfachen Kette und noch einem isolirten Punkte bestehen.*

---

[1] Siehe v. STAUDT, *Beiträge* No. 207.

Ich will hier noch die besondere Lage von zweidimensionalen Ketten hervorheben, welche eintritt, wenn man eine Kette $K_1^{\text{II}}$ durch zwei Paare von Punkten legt, welche in Bezug auf eine andere Kette $K^{\text{II}}$ symmetrisch liegen. Weil eine zweidimensionale Kette durch vier Punkte bestimmt ist, wird $K_1^{\text{II}}$ in Bezug auf $K^{\text{II}}$ selbstsymmetrisch sein, d. h. die Punkte von $K_1^{\text{II}}$ werden sich in Paare von Punkte vertheilen, welche durch $K^{\text{II}}$ harmonisch getrennt sind. Man kann nun zeigen, dass diese Lage gegenseitig ist, d. h., dass auch $K^{\text{II}}$ in Bezug auf $K_1^{\text{II}}$ selbstsymmetrisch sein wird. Es seien $AA'$ und $BB'$ zwei Paare von Punkten in $K_1^{\text{II}}$, welche in Bezug auf $K^{\text{II}}$ symmetrisch liegen. Die Grade $AA'$ ist zu $K^{\text{II}}$ wie zu $K_1^{\text{II}}$ adjungirt, und sie habe mit der ersteren die Punkte der einfachen Kette $k$, mit der zweiten die Punkte der Kette $k_1$ gemein. Dann wird $k_1$ in Bezug auf $k$ selbstsymmetrisch sein, und daraus folgt, dass auch $k$ in Bezug auf $k_1$ selbstsymmetrisch sein wird;[1] zwei solche Ketten kann man als einfache Orthogonalketten bezeichnen. Demnach finden sich in $k$ Punktpaare, welche in Bezug auf $K_1^{\text{II}}$ symmetrisch liegen. Ebenso kann man in der Graden $BB'$ Punktpaare bestimmen, welche in Bezug auf $K_1^{\text{II}}$ symmetrisch und zugleich in $K^{\text{II}}$ liegen, und hieraus folgt der Satz.

Zwei solche Ketten, welche wir als *gegenseitige Orthogonalketten* bezeichnen wollen, sind in dem oben erwähnten Fall unendlich viele Punkte mit einander gemein zu haben, nämlich einen isolirten Punkt $O$ und ausserdem noch alle Punkte einer gewissen einfachen Kette $k$. Durch $O$ gehen zugleich die Verbindungsgraden aller derjenigen Punktpaare in der einen Kette, welche in Bezug auf die andere symmetrisch liegen, und die Punkte eines beliebigen Paares werden durch $O$ und $k$ harmonisch getrennt.

### *Die zwei einfachsten Punkttransformationen einer Ebene.*

Die einfachste Transformation eines ebenen Punktsystems in ein anderes, wird diejenige sein, welche jeden Punkt und jede Grade der einen Figur in ein ebensolches Element der anderen transformirt. Wird ferner vorausgesetzt, dass Incidenz- und Coincidenzverhältnisse unverändert übergehen, in welchem Falle wir die Transformation continuirlich nennen,

[1] Siehe v. Staudt, *Beiträge* No. 240.

schliesst man aus der Grundeigenschaft des vollständigen Vierecks, dass vier harmonische Punkte wieder in vier harmonische Punkte übergehen. Daraus ist man aber bei allgemeiner projectiver Auffassung, welche alle Elemente als unbedingt complex voraussetzt, noch nicht berechtigt zu schliessen, dass jede Elementarreihe in eine damit projective übergehe. Die v. STAUDT'sche Definition der projectiven Beziehung von zwei einförmigen Elementarreihen lautet auch wie folgt: zwei einförmige Gebilde sollen zu einander projectivisch heissen, wenn sie so auf einander bezogen sind, dass jedem Elemente des einen Gebildes ein Element des anderen entspricht und überdies je zwei homologe Würfe, was den Sinn anbelangt, von einerlei Art sind.[1] Aus dieser Definition leitet er dann den *Satz* ab, dass in zwei projectiven graden Punktreihen vier harmonischen Punkten wieder vier harmonische Punkte entsprechen. v. STAUDT schlägt also bei der Bestimmung der Projectivität zweier complexen Elementarreihen einen ganz anderen Weg ein als bei den reellen projectiven Reihen. Dies war aber nothwendig; die v. STAUDT'schen Beweise zeigen nämlich in der That zugleich, dass wenn zwei einförmige Gebilde so auf einander bezogen sind, dass die Elemente derselben einander gegenseitig eindeutig entsprechen und überdies je zwei homologe Würfe, was den Sinn anbelangt, nicht von derselben Art sind, auch dann die vier harmonischen Elementen entsprechenden wieder vier harmonische Elemente sind.

Eben auf der v. STAUDT'schen Arbeit fussend muss es dann berechtigt erscheinen von vorne herein neben der projectiven Beziehung von zwei Ebenen noch eine andere aufzustellen, welche continuirlich ist, und in welcher Punkt und Grade wieder Punkt und Grade entsprechen, während entsprechende Würfe, was den Sinn anbelangt, nicht von derselben Art sind. Diese wollen wir eine *symmetrale* Beziehung und die zugehörige Transformation eine symmetrale Transformation nennen. Es giebt in der That nur zwei Möglichkeiten, denn die Punkte zweier graden Punktreihen $a$ und $b$ der einen Figur kann man immer perspectiv mit einander verknüpfen, wodurch die Punkte der entsprechenden Reihen $a_1$ und $b_1$ auch so mit einander verknüpft werden. Es ist desshalb nicht möglich, dass zwei Punktreihen $a$ und $a_1$ projectiv, während zwei andere $b$ und $b_1$ symmetral gepaart sein können.

---

[1] Siehe v. STAUDT, *Beiträge* No. 215.

Eine aus Punktpaaren $PP_1$ gebildete Figur nenne ich eine *Collineation* (*Projectivität*) oder eine *Symmetralität*, jenachdem die Punkte $P$ in die zugehörigen Punkte $P_1$ durch eine projective oder eine symmetrale Transformation übergehen. Der Satz, dass durch eine projective Transformation einer Ebene in sich im Allgemeinen drei Punkte in sich übergehen, kann man dann auch so ausdrücken, dass es in einer (zweidimensionalen) Projectivität drei Doppelpunkte giebt. Man hat als die einfachsten Sätze:

*Eine Symmetralität ist durch vier beliebige Paare bestimmt.*

Dieser Satz lässt sich ganz wie der analoge über die Projectivität beweisen, und ist denselben Beschränkungen wie dieser unterworfen.[1]

*Zwei Systeme, welche zu einem und demselben dritten Systeme symmetral sind, werden unter sich projectiv sein.*

Dieser Satz, der eine directe Folge der Definition ist, zeigt, dass die symmetralen Transformationen nicht wie die projectiven eine Gruppe bilden.

Ehe ich in der Untersuchung der symmetralen Beziehungen weiter gehe, will ich erst mit Benutzung der im vorigen Abschnitte eingeführten zweidimensionalen Kette die Frage beantworten, wie viele reelle Elemente durch eine projective oder symmetrale Transformation wieder in reelle Elemente übergehen, wobei die Figuren in derselben reellen Ebene gedacht sind. Die reellen Punkte der Ebene bilden dann eine Kette, während zwei conjugirt imaginäre Punkte durch diese Kette harmonisch getrennt sind. Weil nun eine Kette durch jede projective und symmetrale Transformation in eine ebensolche übergeht, und die Elemente, welche zwei zweidimensionale Ketten mit einander gemein haben können, früher untersucht worden sind, hat man:

*Durch eine allgemeine projective oder symmetrale Transformation einer reellen Ebene in sich werden entweder drei reelle Punkte und drei reelle Graden oder auch nur ein reeller Punkt und eine reelle Grade in reelle Elemente transformirt. In dem letzteren Falle giebt es zugleich ein Paar von conjugirt imaginären Punkten — und von conjugirt imaginären Graden — welche in ein ebensolches Paar transformirt werden. Speciell können*

---

[1] In diesem Satze liegt zugleich der Existenzbeweis.

*auch alle reellen Punkte einer reellen Graden und noch ein isolirter Punkt in reelle Punkte transformirt werden.*

In dem letzten speciellen Falle werden auch unendlich viele Paare von conjugirt imaginären Punkten in solche übergehen; diese Paare werden in jeder der Figuren in einer Graden liegen. Wenn aber zwei Paare von conjugirt imaginären Punkten, welche nicht in einer Graden liegen, wieder in solche übergehen, muss zugleich jeder reelle Punkt in einen reellen übergehen, weil eine zweidimensionale Kette, welche zwei Paare von nicht in einer Graden liegenden Punkten harmonisch trennt, dadurch eindeutig bestimmt ist.

Noch specieller kann die Kette der reellen Punkte in Punkte einer Kette transformirt werden, welche zur ersteren orthogonal ist. Man ersicht hieraus die Möglichkeit einer solchen projectiven Transformation einer reellen Ebene $\pi$ in eine andere $\pi_1$, dass die reellen Punkte von $\pi$, welche durch einen gewissen Punkt und eine gewisse Grade harmonisch getrennt werden, in conjugirt imaginäre Punkte von $\pi_1$ übergehen, und umgekehrt. Diesen Fall hat man z. B., wenn man einen reellen Kegelschnitt durch eine imaginäre Collineartransformation in sich transformirt.

Ich gehe jetzt dazu über zu untersuchen inwiefern zweidimensionale Ketten durch eine gegebene projective Transformation in sich übergehen können. Hierdurch wird zugleich entschieden, ob die allgemeine Projectivität durch eine projective Transformation in eine solche Projectivität transformirt werden kann, in welcher das jedem reellen Elemente entsprechende Element wieder reell ist; eine solche Transformation selbst kann man (sowie auch die zugehörige Projectivität) reell nennen. Um dies zu untersuchen denken wir uns erst, dass die Projectivität drei Doppelpunkte $E$, $F$, $G$ hat, von welchen nicht zwei zusammenfallen. Wenn nun $K^{II}$ eine Doppelkette in der Projectivität sein soll, werden denjenigen Punkten, welche in Bezug auf $K^{II}$ symmetrisch liegen, wieder solche Punkte entsprechen; desshalb müssen entweder alle drei Punkte $EFG$ in $K^{II}$ liegen, oder auch nur der eine Punkt $E$, während die zwei anderen in Bezug auf $K^{II}$ symmetrisch liegen.

Es seien nun $PP_1$ und $QQ_1$ zwei Punktpaare in der Projectivität; man hat dann

$$E(FGPQ) \barwedge E(FGP_1Q_1)$$

und

$$F(EGPQ) \overline{\wedge} F(EGP_1 Q_1).$$

Aus diesen folgen:

$$E(FGPP_1) \overline{\wedge} E(FGQQ_1)$$

und

$$F(EGPP_1) \overline{\wedge} F(EGQQ_1).$$

Wenn demnach $EE.FF.GG.PP_1.QQ_1$ Paare in einer gewissen Projectivität sind, werden $EE.FF.GG.PQ.P_1Q_1$ Paare in einer anderen Projectivität sein. Ist nun $K^{II}$ eine selbstentsprechende Kette und $P$ ein Punkt dieser Kette, werden demnach nicht nur $EFGPP_1$, sondern auch, wenn $QQ_1$ ein beliebiges neues Paar ist, $EFGQQ_1$ in einer Kette liegen. Ebenso werden $QQ_1$ in einer durch $E$ gehenden und $F$ und $G$ harmonisch trennenden Kette liegen, wenn dies für ein Punktpaar $PP_1$ gilt. Man hat also:

*Es giebt in einer Projectivität im Allgemeinen keine oder auch unendlich viele Doppelketten.*

Ein für alle Mal bemerke ich, dass ein Satz wie dieser sich auch wie folgt ausdrücken lässt:

*Man kann durch keine oder durch zweifach unendlich viele wesentlich verschiedene Lineartransformationen eine allgemeine Projectivität in eine reelle transformiren.*

Wesentlich verschieden sind hier diejenigen Transformationen, welche nicht durch eine reelle Transformation in einander übergehen können.

Beide Systeme von Doppelketten werden sich im Allgemeinen nicht vorfinden. Wenn nämlich durch $E$, $P$ und $P_1$ zwei Ketten gehen, von welchen die eine $F$ und $G$ enthält, während die andere $F$ und $G$ harmonisch trennt, werden die zwei Ketten orthogonal sein müssen, und zwar so, dass der isolirte gemeinsame Punkt der Ketten in $FG$ liegt (S. 11). Die anderen gemeinsamen Punkte $E$, $P$ und $P_1$ werden deshalb in einer einfachen Kette, also jedenfalls in einer Graden liegen, d. h. die gegebene Projectivität wäre in diesem Falle eine Centralcollineation.

Wenn man nun die Centralcollineation direct betrachtet, sieht man wie oben, dass eine Doppelkette nothwendig das Collineationscentrum $E$ enthalten und der Axe $e$ adjungirt sein muss. Auch hier wird sich im

Allgemeinen keine Doppelkette vorfinden, dagegen unendlich viele, wenn das charakteristische Doppelverhältniss reell ist, denn sind $PP_1$, $P_1P_1'$ zwei Paare in der Collineation, und schneidet die Grade $PP_1$ die Axe $e$ in $Q$, müssen $EQPP_1P_1'$ Punkte einer und derselben einfachen Kette sein; die Doppelketten sind offenbar alle diejenigen, welche $E$ und eine beliebige in $e$ liegende einfache Kette enthalten. Es giebt demnach hier *eine vierfach unendliche Menge von Doppelketten.* Die Bestimmung wird nur dann illusorisch, wenn $E$ in $e$ liegt.

Ich werde nun den Fall behandeln, dass zwei der Doppelpunkte $EFG$ oder auch alle drei zusammenfallen. Wenn erstens nur $F$ und $G$ in $F$ zusammenfallen, muss eine Doppelkette nothwendigerweise $E$ und eine in $e = FG$ liegende und durch $F$ gehende einfache Kette enthalten. Man hat nun den bekannten Satz, dass, wenn $MM_1$, $M_1M_1'$ zwei Paare in einer Projectivität im einförmigen Gebiete sind, in welcher die Doppelelemente in $O$ zusammenfallen, dann $OMM_1M_1'$ vier harmonische Elemente sind; demnach werden, wenn $PP_1$, $P_1P_1'$ zwei Paare in der hier betrachteten Projectivität sind, $EF$, $EP$, $EP_1$, $EP_1'$ vier harmonische Graden sein. Dagegen wird das Doppelverhältniss der Graden $FE$, $FP$, $FP_1$, $FP_1'$ im Allgemeinen nicht reell sein. Desshalb findet sich hier im Allgemeinen keine zweidimensionale Doppelkette, wenn aber eine dann zweifach unendlich viele.

Anders verhält es sich, wenn alle drei Doppelpunkte in einen Punkt $E$ zusammenfallen. Dann müssen auch die drei Doppelgraden $efg$ in eine Grade $e$ zusammenfallen; wenn nämlich nicht, würde die Collineation eine Centralcollineation sein, in welcher das Centrum $E$ in der Axe $e$ läge. Schliessen wir für einen Augenblick diesen Fall aus, und seien wieder $PP_1$ und $P_1P_1'$ zwei Paare in der Collineation. Wenn nun durch $P$ eine Doppelkette $K^{II}$ geht, wird diese durch $EPP_1P_1'$ bestimmt sein. Weil aber $e$, $EP$, $EP_1$, $EP_1'$ vier harmonische Graden sind, wird $e$ der Kette adjungirt sein, und deshalb werden auch die Punkte $Q = (e.PP_1)$ und $Q_1 = (e.P_1P_1')$ in $K^{II}$ liegen. $E$, $Q$ und $Q_1$ bestimmen aber in $e$ eine einfache Kette, welche in der Collineation sich selbst entspricht, weil der entsprechende Punkt $Q_1'$ zu $Q_1$ mit $EQQ_1$ zusammen vier harmonische Punkte bilden. Die Kette $K^{II}$ ist also wirklich eine Doppelkette, weil sie mit der entsprechenden die Punkte $EP_1P_1'Q_1'$ gemein hat. Es giebt demnach in diesem Falle *immer eine zweifach unendliche Menge von Doppelketten.*

Es steht nur noch zurück die Doppelketten in einer Centralcollineation zu bestimmen, deren Centrum $E$ und Axe $e$ incident sind. Man sieht hier leicht unmittelbar, dass jede zweidimensionale Kette, welche zwei beliebige entsprechende Punkte $P$ und $P_1$ sowie zwei beliebige Punkte von $e$ enthält — und nur eine solche — eine Doppelkette sein wird. Es giebt demnach hier wie in der allgemeinen Centralcollineation, dessen Doppelverhältniss reell ist, *immer vierfach unendlich viele Doppelketten.*

Es mag an dieser Stelle eine besondere Bestimmung einer projectiven — oder wenn man will, symmetralen — Transformation erwähnt werden, welche die besondere Stellung der reellen Punkte innerhalb der Sammlung aller Punkte einer reellen Ebene scharf hervorhebt. Es seien zur Bestimmung einer projectiven Transformation drei Paare von entsprechenden Punkten $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ gegeben; dadurch wird eine vierfach unendliche Menge von Transformationen bestimmt. Wenn in zwei von diesen $M_1M'_1$, $N_1N'_1$ die zwei festen Punkten $M$ und $N$ entsprechenden sind, werden $A_1B_1C_1M_1N_1$ und $A_1B_1C_1M'_1N'_1$, also nach dem obigen auch $A_1B_1C_1M_1M'_1$ und $A_1B_1C_1N_1N'_1$ einander in einer gewissen Collineation entsprechen. Die Systeme von Punkten, welche in allen den gegebenen Systemen zwei festen Punkten entsprechen, werden also unter sich projectiv sein. Weil nun zwei zweidimensionale Ketten im Allgemeinen einen oder drei Punkte gemein haben, schliesst man:

*Wenn zur Bestimmung einer in einer reellen Ebene liegenden Projectivtransformation drei Paare von entsprechenden Punkten gegeben sind, und ausserdem noch, dass die zwei festen Punkten entsprechenden reell sein sollen, so werden hierdurch im Allgemeinen drei oder auch eine Transformation bestimmt.*

Die Zahl der Lösungen kann auch einfach oder zweifach unendlich werden, aber selbst das letztere besagt noch keineswegs, dass die Aufgabe vollständig unbestimmt ist.

Ich gehe jetzt zur näheren Untersuchung der Symmetraltransformation einer Ebene über. Um diese fördern zu können wird es jedoch erst nothwendig sein die Symmetraltransformation in einem einförmigen Gebiete zu untersuchen. Als solche nehme ich eine Grade, deren Punkte symmetral gepaart werden; diese Abhängigkeit ist, wie aus der Definition folgt, durch drei Paare von entsprechenden Punkten bestimmt. Wir suchen nun die Punkte, welche durch die Transformation $PP_1$ in sich übergehen. Entspricht dem Punkte $P_1$ wieder ein neuer Punkt $P_1'$, so bilden die Paare $PP_1'$ eine Projectivität; das Paar von Doppelpunkten $E$ und $F$ in dieser wird auch ein Doppelpaar in der gegebenen Symmetralität bilden, weil diese sonst involutorisch sein würde — ein Fall, den wir nachher behandeln. Dies ist aber auf doppelte Weise möglich: entweder werden $E$ und $E$, $F$ und $F$ oder auch $E$ und $F$, $F$ und $E$ entsprechende Punkte sein d. h.

*Durch eine Symmetraltransformation einer Graden in sich werden entweder zwei oder auch kein Punkt in sich transformirt; im letzten Falle giebt es ein* (und nur ein) *Paar von Punkten, die sich umgetauscht entsprechen.*

Die zwei Doppelpunkte einer Symmetralität können auch zusammenfallen; man sieht leicht, dass die Symmetralität auch durch ein Paar $PP_1$ und einen Punkt $E$, in welchen die zwei Doppelpunkte zusammenfallen, vollständig bestimmt ist.

Es bleibt noch die Möglichkeit zu untersuchen, dass $P$ und $P_1'$ identisch zusammenfallen, in welchem Falle die Symmetralität $PP_1$ involutorisch ist. Sind nun $PP_1$ und $QQ_1$ zwei Punktpaare in einer involutorischen Symmetralität, so hat man, wenn ich $\underline{\vee}$ als Zeichen der symmetralen Beziehung wähle,

$$(1) \qquad (PP_1QQ_1)\ \underline{\vee}\ (P_1PQ_1Q),$$

also auch

$$(2) \qquad (PP_1QQ_1)\ \underline{\vee}\ (PP_1QQ_1).$$

In der durch die Paare $PP.P_1P_1.QQ$ bestimmten neuen Symmetralität, wird die durch $PP_1Q$ gehende einfache Kette $k$ Punkt für Punkt sich selbst entsprechen, während — wie man direct aus der Definition der symmetralen Abhängigkeit schliesst — zwei beliebige entsprechende Punkte durch $k$ harmonisch getrennt sind. Desshalb muss auch der Punkt $Q_1$, der nach (2) ein weiterer Doppelpunkt ist, in $k$ liegen. Die involutorische Symmetralität ist also nicht wie die involutorische Projectivität durch zwei beliebig gegebene Punktpaare bestimmt, sondern nur durch solche, welche einer und derselben einfachen Kette angehören.

Wenn umgekehrt $PP_1, QQ_1$ vier Punkte einer Kette sind, wird die durch die Paare $PP_1 . P_1P . QQ_1$ bestimmte Symmetralität noch das Paar $QQ$ enthalten und involutorisch sein, denn, wenn $R$ ein beliebiger Punkt der Graden ist, folgt aus

$$(PP_1QQ_1) \veebar (P_1PQ_1Q)$$

und

$$(PP_1QR) \veebar (P_1PQ_1R_1)$$

zugleich

$$(PP_1Q_1R) \veebar (P_1PQR_1)$$

Wenn nun $PP_1$ und $QQ_1$ in $k$ einander nicht trennen, giebt es in $k$ zwei Punkte $E_1$ und $E_2$, welche in der gegebenen Symmetralität Doppelpunkte sind; innerhalb einer Kette ist nämlich eine symmetrale Beziehung von einer projectiven nicht verschieden, so dass $E_1E_2$ die Punkte sind, welche $PP_1$ und $QQ_1$ harmonisch trennen. Legt man ferner eine Kette durch $E_1$ und ein neues Paar von entsprechenden Punkten, wird es in dieser ausser $E_1$ noch einen anderen Doppelpunkt $E_3$ geben. Die durch $E_1E_2E_3$ gehende Kette $k^0$ wird in der gegebenen Symmetralität Punkt für Punkt sich selbst entsprechen, und zwei beliebige entsprechende Punkte werden durch diese feste Kette harmonisch getrennt. Weil incidente Punktreihen nur dann als symmetral gepaart aufgefasst werden können, wenn sie in einer und derselben einfachen Kette liegen, giebt es ausserhalb $k^0$ keinen Doppelpunkt.

Wenn dagegen $PP_1$ und $QQ_1$ sich in $k$ trennen, wird es überhaupt keine Doppelpunkte geben können. Man hat also:

*Die involutorische Symmetraltransformation einer Graden in sich ist durch zwei Punktpaare bestimmt, insofern diese einer und derselben einfachen Kette angehören. Es giebt entweder keinen selbstentsprechenden Punkt oder auch unendlich viele, welche eine einfache Kette füllen.*

Nach dem obigen giebt es, wenn $AA_1, BB_1$ zwei Paare einer involutorischen Symmetralität sind, in der durch diese Punkte gehenden Kette $k$ zwei Doppelpunkte, wenn die Symmetralität überhaupt Doppelpunkte hat, und umgekehrt. Wenn dies nicht der Fall ist, kann man dagegen ein aber auch nur ein Paar von entsprechenden Punkten $CC_1$ bestimmen, welche zugleich in Bezug auf $k$ symmetrisch liegen. Sind nämlich in der gegebenen Symmetralität $PP_1$ zwei beliebige entsprechende Punkte, und $P_1'$ der Punkt, der in Bezug auf $k$ symmetrisch zu $P_1$ liegt, so werden die Paare $PP_1'$ eine Projectivität bilden, in der die Kette $k$ sich selbst entspricht, und deren Doppelpunkte $CC_1$ daher entweder in $k$ liegen oder durch diese harmonisch getrennt sind. Das erstere findet hier nicht Statt, weil sonst auch die Symmetralität dieselben Punkte als Doppelpunkte haben würde, und dies wurde eben ausgeschlossen.

Es sei noch bemerkt, dass eine involutorische Symmetralität obgleich im Allgemeinen durch zwei Paare bestimmt dennoch nicht durch zwei Doppelpunkte (sondern erst durch drei) bestimmt ist.

Man sieht, dass eine involutorische Symmetralität unendlich viele Doppelketten hat, nämlich ausser der (eventuell existirenden) Kette der selbstentsprechenden Punkte — der Grundkette — noch jede durch ein Paar von entsprechenden Punkten gehende Kette.

Indem ich jetzt dazu übergehe die Doppelketten in einer allgemeinen Symmetralität zu bestimmen, müssen erst die Doppelketten in einer allgemeinen Projectivität gefunden werden. Man sieht aber ganz wie S. 15, dass durch eine projective Transformation im Allgemeinen keine Kette in sich übergeht, in speciellen Fällen jedoch unendlich viele, welche entweder alle durch die Doppelpunkte $E$ und $F$ gehen oder alle durch diese harmonisch getrennt werden. Beide Reihen finden sich nur dann, wenn die Transformation involutorisch ist. Fallen die Doppelpunkte in einen zusammen, so wird jede durch diesen Punkt und noch ein beliebiges Paar von entsprechenden Punkten gehende Kette in sich übergehen.[1]

Entspricht nun in einer Symmetralität dem Punkte $P$ ein Punkt $P_1$, diesem wieder ein Punkt $P_1'$, so werden die Paare $PP_1'$ eine Projectivität bilden. Eine Doppelkette in der Symmetralität $PP_1$ muss auch in der Projectivität $PP_1'$ eine Doppelkette sein. Wenn nun die Projectivität allgemein wäre, würde es nach dem obigen auch in einer allgemeinen Symmetralität keine Doppelkette geben. Man kann aber zeigen, dass die Projectivität $PP_1'$ stets von specieller Natur ist.

Wir nehmen erst an, dass die Symmetralität zwei Doppelpunkte $E$ und $F$ besitzt, und haben dann:

$$(EFPP_1) \veebar (EFP_1P_1') \overline{\wedge} (FEP_1'P_1).$$

[1] Vgl. v. STAUDT, *Beiträge* No. 243.

Die durch $EF.FE.PP'_1$ bestimmte Symmetralität muss involutorisch sein, weil sie ausser dem involutorischen Paare $EF$ noch einen Doppelpunkt $P_1$ hat. Es ist also

$$(EFPP'_1) \veebar (FEP'_1P)$$

oder

$$(EFPP'_1) \veebar (EFPP'_1),$$

und diese sagt eben, dass $EFPP'_1$ in einer und derselben Kette $k$ liegen. In dieser Kette werden die Paare $EF$ und $PP'_1$ einander nicht trennen, weil $P_1$ ein Doppelpunkt der involutorischen Symmetralität ist.

Die Doppelketten in der Symmetralität $PP_1$ müssen also nothwendigerweise durch $E$ und $F$ gehen. Eine explicite Bestimmung dieser Ketten erhält man am besten, wenn zuerst die Frage etwas umgestellt wird.

Wenn nämlich durch eine symmetrale Transformation $PP_1$ eine Kette $k$ in sich übergeht, wird die involutorische Symmetralität, in welcher die Punkte von $k$ Doppelpunkte sind, auch in sich übergehen. Eben weil die neue Symmetralität involutorisch ist, kann man aber auch sagen, dass diese durch die gegebene Transformation in ihre inverse übergehe. Wir werden demnach zuerst diejenigen Symmetralitäten suchen, welche durch die Transformation $PP_1$ in ihre inversen übergehen, und nachher prüfen, ob diese auch involutorisch sind.

Wenn wie angenommen $E$ und $F$ in der Symmetralität $PP_1$ Doppelpunkte sind, können wir uns die Aufgabe dadurch erleichtern, dass wir von vorne herein wissen, dass eine Doppelkette durch $E$ und $F$ gehen muss. Wir werden daher nur diejenigen Symmetralitäten der genannten Art zu bestimmen suchen, in welchen $E$ und $F$ Doppelpunkte sind. Werden nun die Punkte $P$ und $N$ in $P_1$ und $N_1$ transformirt, so kommt es, indem $P$ und $P_1$ fest genommen werden, darauf an $N$ und $N_1$ so zu bestimmen, dass die Symmetralitäten $EE.FF.PN$ und $EE.FF.P_1N_1$ invers sind, d. h. so dass $EE.FF.PN.N_1P_1$ Paare in einer und derselben Symmetralität sind. Wenn dies der Fall ist, müssen

(1) $$(EFPN_1) \veebar (EFNP_1)$$

und

(2) $$(EFPN) \veebar (EFP_1N_1)$$

gleichzeitig bestehen. Zur Bestimmung von $N_1$ ziehe man noch das Paar $P_1 P_1'$ zu Hilfe. Es ist dann:

$$(3) \qquad (EFP_1 N) \veebar (EFP_1' N_1).$$

Aus (1) und (3) folgt:

$$(EFP_1' N_1) \overline{\wedge} (EFN_1 P) \overline{\wedge} (FEPN_1).$$

$N_1$ ist also der eine oder der andere von denjenigen Punkten $N_1^1$ und $N_1^2$, welche $EF$ und $PP_1'$ harmonisch trennen.

Die zwei gefundenen Symmetralitäten

$$EE.FF.N_1^1 P_1 \ldots \text{ und } EE.FF.N_1^2 P_1 \ldots$$

müssen involutorisch sein, weil es nach dem obigen überhaupt nur zwei Symmetralitäten von der betrachteten Art giebt, welche in ihre inversen übergehen, und sich sonst vier solche gefunden hätten, nämlich diejenigen, welche die Paare $P_1 N_1^1$; $N_1^1 P_1$; $P_1 N_1^2$; $N_1^2 P_1$ enthalten. Hierbei ist freilich vorausgesetzt, dass die zwei gefundenen Symmetralitäten nicht unter sich invers sind, d. h. dass nicht

$$(EFN_1^2 P_1) \veebar (EFP_1 N_1^1).$$

Wenn dies aber der Fall wäre, müsste wegen $(EFN_1^2 P_1) \veebar (FEN_1^1 P_1)$ die Paare $EF.N_1^1 N_1^2$ eine involutorische Symmetralität bestimmen, in welcher $P_1$ ein Doppelpunkt wäre; in der durch $EFN_1^1 N_1^2$ gehenden Kette müsste dann auch ein Doppelpunkt liegen; dies ist aber unmöglich, weil $EF$ und $N_1^1 N_1^2$ einander (harmonisch) trennen.

In jeder der gefundenen involutorischen Symmetralitäten giebt es eine Grundkette, weil $E$ und $F$ Doppelpunkte derselben sind. Wir haben also ganz explicite zwei Ketten $k$ und $k_1$ bestimmt, welche durch die gegebene symmetrale Transformation in sich übergehen: sie gehen beide durch $E$ und $F$ und die eine trennt $P_1$ und $N_1^1$, die andere $P_1$ und $N_1^2$ harmonisch.

Wenn in derjenigen der gefundenen Symmetralitäten, in welcher $k$ eine Grundkette ist, der Kette $k_1$ eine Kette $k_2$ entspricht, wird auch diese durch die gegebene Transformation in sich übergehen müssen; weil es aber überhaupt nur zwei solche Ketten giebt, muss $k_2$, weil sie von $k$

verschieden ist, nothwendigerweise mit $k_1$ zusammenfallen, d. h. $k$ und $k_1$ müssen ein Paar von Orthogonalketten bilden:

*In einer Symmetralität mit zwei Doppelpunkten giebt es zwei Doppelketten, welche unter sich orthogonal sind.*

Wenn die zwei Doppelpunkte in einen Punkt $E$ zusammenfallen, wird es nur eine Doppelkette geben. Sind wieder $PP_1$, $P_1P_1'$ Paare von entsprechenden Punkten, und $EN_1$ durch $PP_1'$ harmonisch getrennt, so wird diejenige Kette, welche durch $E$ geht und $P_1$ und $N_1$ harmonisch trennt, die gesuchte sein.

Wir gehen jetzt zu dem Falle über, wo die Transformation $PP_1$ zwei Punkte $E$ und $F$ vertauscht in sich überführt. Man hat hier mit den früheren Bezeichnungen

$$(EFPP_1) \veebar (FEP_1P_1') \barwedge (EFP_1'P_1).$$

Die durch die Paare $EE.FF.PP_1'$ bestimmte Symmetralität muss also involutorisch sein, weil sie drei Doppelpunkte $EFP_1$ hat. Daraus folgt wieder:

$$(PP_1'EF) \veebar (P_1'PEF) \barwedge (PP_1'FE).$$

Die Symmetralität $PP.P_1'P_1'.EF\ldots$ muss dann auch involutorisch sein, weil sie ausser den zwei Doppelpunkten $P$ und $P_1'$ noch ein involutorisches Paar hat. Es geht demnach durch $P$ und $P_1'$ eine Kette, welche $E$ und $F$ harmonisch trennt, nämlich die Kette der Doppelpunkte in der letzterwähnten Symmetralität. Man ersieht hieraus, dass die durch Iteration der Transformation $PP_1$ gebildete projective Transformation $PP_1'$ jede Kette, welche $E$ und $F$ harmonisch trennt, in sich transformirt.

Um die nähere Bestimmung der Doppelketten in der Symmetralität zu erhalten, stelle man wie oben die Frage um, und suche die Symmetralitäten, welche durch die Transformation $PP_1$ in ihre inversen übergehen. Weil eine Doppelkette dem obigen zufolge jedenfalls $E$ und $F$ harmonisch trennen muss, setzen wir gleich voraus, dass $EF$ und $FE$ Paare in der gesuchten Symmetralität sind. Es sind dann wie in dem obigen Falle, zwei solche Punkte $N$ und $N_1$ zu bestimmen, so dass gleichzeitig

(1) $$(EFPN_1) \veebar (FENP_1),$$

und

(2) $$(EFPN) \veebar (FEP_1N_1)$$

Statt finden. Nimmt man noch das Paar $P_1P_1'$ zu Hilfe, so hat man

(3) $$(EFP_1N) \veebar (FEP_1'N_1),$$

und aus (1) und (3)

$$(FEP_1'N_1) \overline{\wedge} (FEN_1P) \overline{\wedge} (EFPN_1).$$

$N_1$ wird also der eine oder der andere der Punkte $N_1^1$ und $N_1^2$ sein, welche $EF$ und $PP_1'$ harmonisch trennen.

Es giebt demnach auch in diesem Falle zwei Symmetralitäten

$$EF.N_1^1P_1 \ldots \text{ und } EF.N_1^2P_1 \ldots,$$

welche in sich übergehen. Hieraus folgt schon, dass diese involutorisch sind; ich will dies jedoch hier direct zeigen, weil daraus zugleich ersichtlich wird, dass nur die eine derselben Doppelpunkte hat. Nach den obigen Bemerkungen S. 23 bestimmen die Paare $EE.FF.PP_1'$ eine involutorische Symmetralität $\Sigma_1$, deren Doppelpunkte in einer durch $E$, $F$ und $P_1$ gehende Kette $k_1$ liegen, und zugleich die Paare $PP.P_1'P_1'.EF$ eine andere involutorische Symmetralität $\Sigma_2$, deren Doppelpunkte in einer durch $P$ und $P_1'$ gehenden und $EF$ harmonisch trennenden Kette $k_2$ liegen. Diejenigen Doppelpunkte von $\Sigma_1$, welche in $k_2$ liegen, werden $P$ $P_1'$ harmonisch trennen und zugleich in $k_1$ liegen weil $k_1$ alle Doppelpunkte von $\Sigma_1$ enthält — und diejenigen Doppelpunkte von $\Sigma_2$, welche in $k_1$ liegen, werden $E$ und $F$ harmonisch trennen und zugleich in $k_2$ liegen weil $k_2$ alle Doppelpunkte von $\Sigma_2$ enthält. Daraus erhellt, dass $k_1$ und $k_2$ zwei Punkte gemein haben, welche grade die oben gesuchten Punkte $N_1^1$ und $N_1^2$ sind. Weil demnach $EFP_1N_1^1N_1^2$ Punkte derselben Kette sind, hat man:

$$(EFP_1N_1^1) \veebar (EFP_1N_1^1),$$

also auch

$$(EFP_1N_1^1) \veebar (FEN_1^1P_1),$$

woraus ersichtlich ist, dass $EF.FE.P_1N_1^1$ (und ebenso $EF.FE.P_1N_1^2$) wie verlangt eine involutorische Symmetralität bestimmen.

Weil $EFN_1^1N_1^2$ vier harmonische Punkte einer Kette $k_1$ sind, in welcher auch $P_1$ liegt, werden von den Paaren $P_1N_1^1$ und $P_1N_1^2$ das eine die Punkte $E$ und $F$ trennen, das andere aber nicht; desshalb hat nur die eine der gefundenen Symmetralitäten in $k_1$, also überhaupt, Doppelpunkte, d. h.:

*In einer Symmetralität, welche ein involutorisches Paar hat, giebt es eine und nur eine Doppelkette.*

Man zeigt an dieser Stelle leicht, dass jede projective und symmetrale Transformation eines einförmigen Gebildes in sich durch eine Reihe von involutorischen Symmetraltransformationen ersetzt werden kann. Ich betrachte erst eine Symmetraltransformation $PP_1$. Wird durch diese eine Kette $k_0$ in sich transformirt, und liegt $P'$ zu $P$ symmetrisch in Bezug auf $k_0$, so bestimmen die Paare $P'P_1$ eine Projectivität, in der $k_0$ und also unendlich viele Ketten sich selbst entsprechen. Es seien diese erstens diejenigen, welche durch die Doppelpunkte $E$ und $F$ gehen. Wir denken uns nun $P$ und $P'$ als feste Punkte von $k_0$ und bestimmen den symmetrischen Punkt $P''$ zu $P'$ in Bezug auf eine beliebige aber feste Kette, welche $E$ und $F$ harmonisch trennt und demnach zu $k_0$ orthogonal ist. Weil desshalb $E, F, P_1$ und $P''$ alle in derselben einfachen Kette $k_0$ liegen, kann man dem obigen zufolge eine involutorische Symmetralität bestimmen, in der $EF$ und $P_1P''$ zwei Paare sind. Die gegebene Transformation $PP_1$ kann also, weil sie durch $E, F$ und ein beliebiges Paar von entsprechenden Punkten bestimmt ist, durch drei involutorische ersetzt werden. Diese werden bzw. durch die folgenden Paare bestimmt

$$EE.FF.PP'\,;\; EF.FE.P'P''\,;\; EF.FE.P''P_1.$$

Wenn die gegebene Symmetraltransformation ein Paar $EF$ vertauscht in sich transformirt, kann man ganz ähnlich verfahren, und hat allgemein:

*Jede symmetrale Transformation kann durch drei involutorische ersetzt werden.*

Hieraus folgt unmittelbar:

*Jede projective Transformation kann durch vier involutorische Symmetraltransformationen ersetzt werden.*

Man schliesst nämlich gleich aus dem obigen, dass durch zwei involutorische Symmetraltransformationen nicht die allgemeine projective Transformation erzeugt wird, sondern nur eine solche, welche unendlich viele Ketten in sich transformirt.

Ich werde jetzt wieder zur Geometrie der Ebene zurückkehren und die in einer solchen liegenden Symmetralitäten untersuchen. Hier treten im wesentlichen dieselben Probleme auf, welche schon im eindimensionalen Gebiete erledigt sind, und es lassen sich auch diese mittels des vorhergehenden leicht behandeln.

Zuerst sollen die Punkte gesucht werden, welche durch eine symmetrale Transformation $PP_1$ einer Ebene in sich selbst in sich übergehen. Entspricht dem Punkte $P_1$ ein Punkt $P_1'$, so bilden die Paare $PP_1'$ eine Collineation, welche im Allgemeinen drei Doppelpunkte $EFG$ hat. Diese Gruppe von drei Punkten wird auch durch die symmetrale Transformation $PP_1$ in sich übergehen. Wenn dies nämlich nicht der Fall wäre, so dass z. B. $G$ in $G_1$ transformirt würde, so würde die Symmetralität $PP_1$ vier involutorische Paare etwa $EE$, $FF$, $GG_1$, $G_1G$ haben und demnach überhaupt involutorisch sein, ein Fall, den wir nachher betrachten werden. Die Punktgruppe $EFG$ kann aber entweder so in sich übergehen, dass (mit angemessenen Bezeichnungen) $EE.FF.GG$, oder so, dass $EE.FG.GF$ Paare in der durch die Transformation bestimmten (zweidimensionalen) Symmetralität sind. Beide Möglichkeiten sind gleich allgemein; eine Symmetralität $PP_1$ der letzteren Art erhält man z. B. wenn $PQ$ Paare in einer Collineation sind, deren Doppelpunkte $EFG$ sind, und ferner $Q$ und $P_1$ symmetrisch in Bezug auf eine feste zweidimensionale Kette liegen, welche durch $E$ geht und $F$ und $G$ harmonisch trennt.

Speciell können die Paare $PP_1'$ auch eine Centralcollineation bilden. Ist $E$ das Centrum, $e$ die Axe derselben, so wird durch die Symmetraltransformation $PP_1$ $e$ involutorisch in sich transformirt. Es entspricht desshalb in $PP_1$ ausser $E$ kein Punkt sich selbst oder auch noch alle Punkte einer in $e$ liegenden einfachen Kette. Man hat also:

*Eine nicht involutorische Symmetralität hat entweder drei Doppelpunkte oder auch einen Doppelpunkt in Verbindung mit einem involutorischen Paare. Speciell kann die Symmetralität ausser einem Doppelpunkte noch unendlich viele involutorische Paare enthalten, welche dann in einer Graden liegen.*

Das Verhalten der Doppelgraden folgt hieraus mittels des Dualitätprincips. Wenn die Symmetralität $PP_1$ involutorisch ist, wird die Beziehung $PP'_1$ identisch. Es seien $AA_1$ und $BB_1$ zwei nicht in derselben Graden liegende Paare von Punkten in einer involutorischen Symmetralität. Es ist dann eine zweidimensionale Kette $K^{II}$ eindeutig bestimmt, welche $A$ und $A_1$, $B$ und $B_1$ harmonisch trennt. Ist nun $P$ ein beliebiger Punkt der Ebene, $P_1$ der zu $P$ in der Symmetralität entsprechende Punkt, $P'$ der Punkt der zu $P$ in Bezug auf $K^{II}$ symmetrisch liegt, so bilden die Paare $PP'$ eine Collineation; diese muss nothwendig identisch sein, weil $P$ mit $P'$ in jedem der Punkte $A$, $A_1$, $B$ und $B_1$ zusammenfällt. Man hat also:

*Wenn eine zweidimensionale Symmetralität involutorisch ist, werden entsprechende Punkte durch eine feste zweidimensionale Kette (deren Punkte Doppelpunkte sind) harmonisch getrennt. Die Beziehung ist durch zwei beliebige getrennte Paare, welche nicht in derselben Graden liegen, vollständig bestimmt.*

Ausser der Kette der Doppelpunkte — der Grundkette — geht durch eine involutorische Symmetraltransformation noch jede Kette in sich über, welche zur ersteren orthogonal ist.

Es sollen nun die zweidimensionalen Doppelketten in einer allgemeinen Symmetralität bestimmt werden, und ich setze erst voraus, dass diese drei (und nur drei) getrennte Doppelpunkte $E$, $F$ und $G$ hat. Entspricht dem Punkte $P$ ein Punkt $P_1$, diesem wieder ein Punkt $P'_1$, werden die gesuchten Doppelketten auch Doppelketten in der Collineation $PP'_1$ sein. Eine gesuchte Doppelkette muss desshalb dem vorhergehenden zufolge entweder durch alle drei Punkte $E$, $F$ und $G$ gehen oder nur durch den einen, während sie die zwei anderen harmonisch trennt. Eine Kette der ersteren Art hat mit $EF$ sowie mit $EG$ eine einfache Kette von Punkten gemein. Durch die Transformation $PP_1$ geht jede dieser Graden z. B. $EF$ so in sich über, dass dabei zwei getrennte Doppelpunkte $E$ und $F$ auftreten. Es giebt demnach in $EF$ zwei einfache Ketten $k^1$ und $k^2$, in $EG$ zwei andere solche Ketten $k_1$ und $k_2$, welche in sich transformirt werden. Weil nun eine zweidimensionale Kette durch zwei einfache Ketten, welche einen Punkt gemein haben, vollständig bestimmt ist, sind hier vier Ketten gefunden, welche durch die Transformation $PP_1$ in sich übergehen, nämlich diejenigen, welche durch $k^1k_1$, $k^2k_1$, $k^1k_2$, $k^2k_2$

bestimmt sind. Weil $k^1$ und $k^2$, $k_1$ und $k_2$ bzw. orthogonal sind, werden auch je zwei der gefundenen zweidimensionalen Ketten gegenseitig orthogonal sein. Ausser diesen kann keine andere durch $EFG$ gehende Kette Doppelkette sein; dagegen wäre noch Doppelketten möglich, welche z. B. durch $E$ gehen und $F$ und $G$ harmonisch trennen. Diese neuen Ketten würden dann aber auch in der Collineation $PP'_1$ Doppelketten sein, und dann müssten, wie früher bewiesen, die Paare $PP'_1$ eine Centralcollineation bilden, wass mit dem im Streite ist, dass der Symmetralität drei und nur drei Doppelpunkte zugeschrieben wurden:

*Eine zweidimensionale Symmetralität, mit drei (aber auch nur drei) Doppelpunkten, enthält vier zweidimensionale Doppelketten, von welchen je zwei unter sich orthogonal sind.*

Fallen zwei der Doppelpunkte z. B. $F$ und $G$ zusammen, so findet sich in der Graden $FG$ nur eine einfache Doppelkette. Die zweidimensionale Symmetralität hat dann in dem Falle auch nur zwei Doppelketten. Fallen alle drei Doppelpunkte zusammen ohne dass auch die Doppelgraden zusammenfallen, wird die durch Iteration erzeugte Collineation $PP'_1$ eine Centralcollineation sein müssen, in welcher Axe und Centrum incident sind, ein Fall, den wir nachher betrachten. Fallen aber die Doppelpunkte und die Doppelgraden gleichzeitig zusammen, wird es nur eine Doppelkette geben.

Um die Doppelketten zu bestimmen, wenn die Symmetralität ein involutorisches Paar hat, muss man einen anderen Weg einschlagen, der übrigens auch im ersten Falle zum Ziele geführt haben würde. Man benutzt hier bequem den direct aus den Definitionen folgenden Satz:

*Die Schnittpunkte entsprechender Graden in zwei symmetral gepaarten Gradenbüscheln bilden, wenn diese eine entsprechende Grade gemein haben, eine zweidimensionale Kette.*

Sind die Büschel $mnp\ldots$ und $mn_1p_1\ldots$, so wird die durch $(nn_1)$ und $(pp_1)$ gehende und $(np_1)$ und $(n_1p)$ harmonisch trennende Kette die im Satze genannte sein.

Man hätte diesen Satz gradezu als Definition der zweidimensionalen Kette benutzen und dadurch die Lehre von den Ketten in die der Symmetraltransformationen hineinziehen können. Hier werden wir sie dazu benutzen diejenigen Doppelketten in einer mit einem (und nur einem) involutorischen Paare $FG$ versehenen Symmetralität zu bestimmen, welche $F$ und $G$ harmonisch trennen und ausserdem noch durch den Doppelpunkt $E$ gehen. Es sei $K^{II}$ eine solche Doppelkette. Eine beliebige feste durch $F$ gehende Grade $m$ muss dann einen (noch nicht bekannten) Punkt $M$ mit $K^{II}$ gemein haben. Der Graden $m$ entspreche in der Symmetralität eine durch $G$ gehende Grade $m_1 = n$, dieser wiederum eine durch $F$ gehende Grade $n_1$. Entspricht ferner dem Punkte $M$ ein Punkt $M_1$, so wird auch dieser in $K^{II}$ liegen, und $GM_1$ wird mit $m_1$ identisch sein. Die Grade $GM$ nennen wir $r$, die entsprechende $FM_1$ sei $r_1$. Werden nun $EF$, $EG$, $FG$ resp. $g$, $f$, $e$ genannt, so hat man, weil $F$ und $G$ durch $K^{II}$ harmonisch getrennt werden,

$$(egmr_1) \veebar (efrm_1),$$

und ferner

$$(efnr) \veebar (egn_1r_1).$$

Aus diesen folgt, weil $m_1 = n$

$$(egn_1r_1) \overline{\wedge} (egr_1m) \overline{\wedge} (gemr_1),$$

d. h. $r_1$ ist ein Doppelstrahl in der Involution, in welcher $eg$ und $mn_1$ zwei Paare sind. Aus $r_1$ wird $r$ abgeleitet und der Schnittpunkt von $r$ mit $m$ giebt $M$. Die obigen Beziehungen in der umgekehrten Ordnung genommen zeigen direct, dass eine Kette, welche durch $E$ und $M$ geht und $F$ und $G$ harmonisch trennt, auch $M_1 = (m_1r_1)$ enthalten wird und demnach eine Doppelkette ist. Ausser den hierdurch bestimmten zwei Ketten könnte es noch Doppelketten geben, welche durch alle drei Doppelpunkte gehen. Dann würde aber die durch Iteration erzeugte Collineation eine centrische sein, und die gegebene Symmetralität demnach unendlich viele involutorische Paare enthalten. Weil es also nur zwei Doppelketten giebt, müssen diese nothwendigerweise unter sich orthogonal sein. Man hat also:

*Eine zweidimensionale Symmetralität mit einem aber auch nur einem involutorischen Paare enthält zwei zweidimensionale Doppelketten, welche gegenseitig orthogonal sind.*

Wir haben früher gesehen, dass es in einer Collineation im Allgemeinen keine Doppelketten giebt. Die durch Iteration einer allgemeinen

Symmetraltransformation erzeugte projective Transformation muss desshalb eine specielle sein; es folgt dies auch einfach aus den S. 23 gegebenen Sätzen über Symmetraltransformationen im einförmigen Gebiete.

Es steht jetzt nur noch übrig die Symmetralitäten $PP_1$ zu behandeln, welche durch Iteration eine Centralcollineation erzeugen. Es giebt hier wie oben bemerkt zwei Möglichkeiten: entweder sind ausser einem immer existirenden Doppelpunkte $E$ noch alle Punkte einer gewissen einfachen Kette $k_0$ (in einer Graden $e$) Doppelpunkte, oder es giebt ausser $E$ keinen Doppelpunkt aber doch eine Grade $e$, deren entsprechende Punkte involutorisch gepaart sind.

Im ersteren Falle kann man in $k_0$ zwei beliebige Punkte $F_1$ und $G_1$ wählen, durch welche nach der Theorie der involutorischen Symmetralitäten im einförmigen Gebiete noch eine eindeutig bestimmte einfache Doppelkette $k$ geht. In der Graden $EF_1$ liegen zwei einfache Ketten $k^1$ und $k^2$ aber auch keine mehr, denn die Transformation von $EF_1$ in sich kann nur dann involutorisch sein, wenn die Transformation $PP_1$ involutorisch ist. Verbindet man $k$ (und die feste $k_0$) mit jeder der Ketten $k^1$ und $k^2$ erhält man zweidimensionale Doppelketten. Weil es in $e$ zweifach unendlich viele einfache Doppelketten $k$ giebt, finden sich auch zweifach unendlich viele zweidimensionale Doppelketten, nämlich zwei durch jede der Ketten $k$, und ausserdem noch zwei durch $k_0$. Ausser diesen kann es keine anderen geben, denn jede Doppelkette muss durch $E$ gehen und eine einfache Doppelkette von $e$ enthalten.

Auch in dem zweiten Falle, wo nur $E$ ein Doppelpunkt ist, muss eine zweidimensionale Doppelkette eine in $e$ liegende einfache Kette $k$ enthalten. Es giebt dann in $e$ ein aber auch nur ein Paar von entsprechenden Punkten $E_1$ und $F_1$, welche durch $k$ harmonisch getrennt sind (s. S. 20). Man kann nun ganz wie oben S. 29 zwei durch $k$ gehende zweidimensionale Doppelketten bestimmen, d. h. durch jede einfache Doppelkette in $e$ gehen auch hier zwei Doppelketten $K^{\text{II}}$. Man hat also:

*Jede Symmetralität, welche durch Iteration eine Centralcollineation erzeugt, enthält eine zweifach unendliche Menge von zweidimensionalen Doppelketten.*

Es gilt dies auch, wenn das Collineationscentrum $E$ der Axe $e$ incident ist.