UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE CONVERGENZ DER REIHEN WELCHE ZUR DARSTELLUNG DER COORDINATEN DER PLANETEN ANGEWENDET WERDEN

VON

H. GYLDÉN
in STOCKHOLM.

In letzterer Zeit hat man mehrfach die Frage in Erwägung gezogen, ob die analytischen Ausdrücke, durch welche man bisher die Lösung des s. g. Dreikörperproblems dargestellt hat, auch eine wirkliche, für alle Zeiten gültige Lösung dieser Aufgabe repräsentiren, oder ob sie bloss während einer begränzten, wenn auch für practische Bedürfnisse hinreichend langen Zeit die Bewegungen mit der gewünschten Genauigkeit wiedergeben können; ob, mit anderen Worten, diese Ausdrücke eine genügende Einsicht in die Natur der Bewegungen zu gewähren im Stande sind, oder ob sie bloss den Dienst von Interpolationsformeln verrichten. Diese Frage lässt sich auch in folgender Weise ausdrücken: sind die Functionen, welche die Coordinaten der sich gegenseitig anziehenden Körper und ihre Geschwindigkeiten analytisch angeben, von der Beschaffenheit, dass sie sich in gleichförmig convergirenden trigonometrischen Reihen entwickeln lassen? Die erwähnten Functionen sind uns nun zwar zunächst völlig unbekannt, so dass an eine directe Beantwortung der vorgelegten Frage nicht zu denken ist; unsere Bemühungen müssen daher darauf gerichtet sein, zu einer annähernden Kenntniss jener Functionen zu gelangen, indem wir die ursprünglichen Differentialgleichungen der Bewegung in einer Weise vereinfachen, welche uns eine wirkliche Annäherung und mithin eine beliebig genaue Lösung mittelst mehrerer auf einander folgenden Annäherungen erwarten lässt. Bei den bisherigen Versuchen das erwähnte Problem zu lösen hat man wohl auch immer, so oft es sich um ernstlich gemeinte Untersuchungen gehandelt hat, diesem Grundsatze zu genügen gesucht; bei der Feststellung der jedesmal vorzunehmenden Reduction ist es indessen bis jetzt kaum gelungen — weil die Lösung der Aufgabe mit zu grossen Schwierigkeiten verbunden war — den strengen Beweis dafür zu liefern, dass die eingeleitete Approximationsmethode wirklich dem richtigen Resultate entgegenführe. Hierzu wäre vor Allem nöthig, die Convergenz der successiven Annäherungen gesichert zu sehen. Convergiren aber die Reihenfolgen der Annäherungen nicht, so darf man selbstverständlich nicht aus einzelnen derselben irgend welche Schlüsse auf die analytische Form ziehen, durch welche die vollständige Lösung dargestellt werden kann.

Es lag nahe, bei den Bewegungsgleichungen der Planeten jene Vereinfachungen dadurch herbeizuführen, dass man in der ersten Annäherung bloss die Anziehung der Sonne berücksichtigte, in der zweiten die der störenden Planeten, aber bloss insofern diese den ersten Potenzen ihrer Massen proportional sind, u. s. w.; dass man mit einem Worte die successiven Annäherungen nach den Potenzen und Producten der Planetenmassen ordnete. Eine solche Anordnung der Annäherungen ist aber, wie man bei näherer Betrachtung bemerken wird, mit ganz wesentlichen Nachtheilen verknüpft. Man erhält nehmlich vor Allem Ausdrücke, welche die Zeit oder Potenzen der Zeit als Factoren enthalten und also beliebig anwachsen können; und von solchen Ausdrücken kann man nicht erwarten, dass sie die wahre Form der Integrale repräsentiren. Wenngleich man nun nachträglich auch derartige Factoren eliminiren, und demnach die reine trigonometrische Form herstellen kann, so hat das Resultat in theoretischer Hinsicht doch eine weniger tiefgehende Bedeutung, als wenn die reine trigonometrische Form sich unmittelbar ergeben hätte. Bei meinen Untersuchungen über die Theorie der Bewegungen der Himmelskörper habe ich mich daher bemüht, das Auftreten von Gliedern, welche mit der Zeit oder ihren Potenzen multiplicirt erscheinen, zu vermeiden.

Wenn aber auch die Entwicklung nach den Potenzen der störenden Kräfte nicht überall und durchgehend gestattet ist, so kann man sie anderseits doch nicht auf jeder Stufe der Untersuchung vermeiden; es bleibt demnach zu entscheiden ob man, trotz derartigen Entwicklungen, doch Schlüsse hinsichtlich der absoluten Gültigkeit der in solcher Weise erlangten Lösung zu ziehen berechtigt ist. Um sogleich jeder Begriffsverwechselung in Betreff dieses Punktes vorzubeugen, muss ich mir hier die Bemerkung erlauben, dass ich in meinen früheren Arbeiten unter der Benennung »eine absolute Lösung» eine Lösung verstanden habe, die in jeder Beziehung innerhalb der Grenzen unseres empirischen Erkennens gültig ist. Wenn man überhaupt von einem absoluten Planetensysteme reden darf, so bezieht sich das Wort *absolut* offenbar auf die Erkenntniss der allgemeinen und beständig geltenden Gesetze der Bewegung und namentlich auf die Entscheidung über die Frage von der Stabilität des Systems. Es wäre aber hierbei völlig unberechtigt, eine gleiche Genauigkeit bei den durch Berechnung ermittelten Örtern der Planeten zu verschiedenen Zeiten verlangen zu wollen; denn wie genau auch die mittleren Bewegungen der Planeten durch Beobachtungen erkannt sein mögen, immer wird man doch Zeiträume angeben können, nach deren Verlauf die vorausberechneten Örter sich als um beliebige Grössen falsch erweisen müssen. Die Bewegungsausdrücke müssen aber so beschaffen sein, dass sie, durch Einsetzung verbesserter Werthe der Integrationsconstanten, die zu beliebigen Zeiten beobachteten Örter der Planeten völlig genau wiedergeben. Dass auch dieses zu leisten nur in beschränktem Maasse möglich ist, beruht auf Umständen, deren Erörterung nicht hierher gehört.

Was von einer absoluten Lösung des Problems der Planetenbewegungen gefordert werden muss, ist demnach:

1° dass die analytischen Ausdrücke der Coordinaten und der Geschwindigkeiten bei der numerischen Berechnung dieselbe Genauigkeit bei jedem Werthe der Zeit erlauben, ganz abgesehen davon, ob das Berechnungsresultat ohne Änderung der Integrationsconstanten mit den Beobachtungen übereinstimmt oder nicht;

2° dass der zu einem gegebenen Zeitpunkte durch Beobachtungen bestimmte Ort und die für denselben Zeitpunkt gefundene Geschwindigkeit durch die Berechnungsresultate innerhalb des Genauigkeitsgrades der Beobachtungen wiedergegeben werden.

Zu diesen beiden Punkten kommt noch ein dritter, welcher zwar gewissermassen schon im ersten enthalten ist, seiner Wichtigkeit wegen aber doch besonders hervorgehoben werden muss. Punkt I könnte nehmlich scheinbar erfüllt sein, wenn z. B. die analytischen Ausdrücke für die Coordinaten und die Geschwindigkeiten aus lauter trigonometrischen Gliedern bestehen, und dabei die kleinsten eben auf der Grenze ständen, welche man für die Genauigkeit angenommen hätte. Man könnte nun, und zwar nicht ganz mit Unrecht meinen, die Reihe wäre wirklich gleichförmig convergent, denn die wirklich berechneten Glieder lassen sich in eine endliche Anzahl von Gruppen theilen, innerhalb welcher die einzelnen Glieder wie Potenzenreihen convergiren. Immerhin bleibt aber doch ein wirklicher Nachweis dafür sehr wünschenwerth, dass die Summe der vernachlässigten Glieder stets geringer bleibt als eine gegebene Grösse; und es ist die Forderung eines solchen Nachweises, welche ich als die dritte bezeichnen möchte, die erfüllt sein muss, damit die Lösung das Prädicat »absolut» verdiene.

Ich bin der Meinung gewesen, dass ein solcher Nachweis aus meinen früheren Untersuchungen ziemlich leicht hervorgehen würde, allein darin habe ich mich hinsichtlich eines gewissen Punktes getäuscht. Es erwiesen sich zum Theil ganz andere Betrachtungen erforderlich um über die Convergenzfrage einiges Licht zu werfen, als die, welche eine möglichst rapide und genaue Berechnung einzelner Ungleichheiten bezweckten. Anderseits liegt aber, so viel ich bis jetzt übersehen kann, kein Grund zu einer wesentlichen Abänderung in den Methoden vor, die ich früher zur Herstellung der analytischen Ausdrücke für die Coordinaten und die Geschwindigkeiten angegeben habe. Am allerwenigsten aber habe ich ein Indicium bemerken können, dass die von mir früher angewandten Reihen, welche im Wesentlichen mit den von Lagrange und Laplace eingeführten übereinstimmen, nicht convergiren. Das Resultat der Untersuchungen, von denen ich einen wesentlichen Theil hier vorlege, wird dieses bestätigen. Dasselbe bezieht sich auf die Convergenz einer gewissen Gattung von Gliedern, die ich *characteristische Glieder* nennen werde, weil sie nicht nur für die Bewegungsgesetze characteristisch sind, sondern auch die anzuwendende Berechnungsmethode bedingen. Von den vielen Gliedern, aus welchen die analytischen Ausdrücke der Coordinaten zusammengesetzt sind, ist es eine relativ geringe Anzahl, welche sich durch ihre Grösse unter den übrigen bemerklich machen und also die besonderen, für einen gegebenen Fall eigenthümlichen Bewegungsgesetze kennzeichnen. So ist z. B. die

Evection characteristisch für die Bewegung des Mondes und die Libration für die Bewegungen der drei inneren Jupitersmonde. Für die Bewegungen des Jupiter und des Saturn sind die grossen Ungleichheiten characteristisch, welche von der zweifachen Bewegung des Jupiter weniger der fünffachen des Saturn abhängen, und die kleinen Planeten bieten vielfache Beispiele zur Illustration von eigenthümlichen Fällen in der Theorie der Himmelsbewegungen. Glieder, welche solche Ungleichheiten darstellen, sind für die Theorie der Bewegung offenbar characteristisch, wodurch man veranlasst wird, dieselben einer besonderen Untersuchung zu unterwerfen, und dies um so mehr, als grade sie nebst den elementären Gliedern die einzigen sind, welche ernstliche Schwierigkeiten bereiten. Alle übrigen Glieder können leicht ermittelt werden und sind mit sehr wenigen Ausnahmen mehr als Correctionsgrössen anzusehen als eigentlich maassgebend für die Abstraction der Begriffe in Betreff der Gesetze der Bewegung.

In meinen früheren Arbeiten habe ich die Glieder, welche mit den störenden Massen nicht verschwinden sondern constante, endliche Werthe annehmen, *elementäre Glieder* genannt. In der jetzigen Abhandlung führe ich also die neue Benennung *characteristische Glieder* ein, und verstehe darunter alle die Glieder, welche die kleinsten, mit den störenden Massen nicht verschwindenden Integrationsdivisoren enthalten. — Es ist bekannt, dass diese Integrationsdivisoren näherungsweise aufgefunden werden, indem der Kettenbruch, welcher das Verhältniss der mittleren Bewegungen zweier Planeten darstellt, successive summirt wird und man die Differenzen aus den Näherungsbrüchen und dem strengen Werthe des erwähnten Verhältnisses bildet. Wären die mittleren Bewegungen streng commensurabel, so würde eine solche Differenz auch völlig verschwinden, wodurch indessen zunächst nur angezeigt würde, dass die Entwicklung, nach welcher man Integrationsdivisoren der besagten Form erhielte, nicht berechtigt war. Das Gesetz über das Vorkommen der elementären Glieder ist von ausserordentlich grosser Bedeutung für die Beurtheilung ihrer Convergenz. Wir müssen daher dieses Gesetz etwas näher beleuchten, zu welchem Zwecke ich zunächst an einige Sätze aus der Theorie der Kettenbrüche erinnere.

Soweit thunlich, werde ich mich bereits angenommener Bezeichnungen und Begriffe bedienen, und verstehe also unter n und n' die mittleren Bewegungen zweier Planeten um die Sonne: für das Verhältniss beider adoptire ich die übliche Bezeichnung μ, und zwar so dass:

$$\mu = \frac{n'}{n}$$

Unter der Voraussetzung dass μ eine irrationale Zahl bedeutet, können wir dieselbe durch einen unendlichen, convergenten Kettenbruch repräsentiren, nehmlich:

$$\mu = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}}$$

wobei a, a_1, ... ganze positive Zahlen bezeichnen. Sind nun, indem s_m und s'_m ebenfalls ganze positive Zahlen bezeichnen,

$$\frac{s}{s'}, \quad \frac{s_1}{s'_1}, \ldots$$

die Näherungsbrüche des obigen Kettenbruches, so sind die Differenzen:

$$\frac{s}{s'} - \mu; \qquad \frac{s_1}{s'_1} - \mu; \qquad \text{u. s. w.}$$

kleiner als irgend welche andere Differenzen des Verhältnisses μ von rationalen Brüchen, weil die $\frac{s}{s'}$, $\frac{s_1}{s'_1}$, ... sonst keine Näherungsbrüche wären. Es folgt hieraus, dass die Differenzen:

$$s - s'\mu, \qquad s_1 - s'_1\mu, \ldots$$

oder

$$sn - s'n', \qquad s_1 n - s'_1 n', \ldots$$

kleiner sind als alle andere Differenzen derselben Form, bei denen man für s, s', s_1, ... andere Zahlen einsetzte als die erwähnten Zähler und Nenner der Näherungsbrüche.

Die Werthe der ganzen Zahlen s, s', s_1, ... lassen sich sehr leicht ermitteln. Man hat zunächst:

$$s = 1; \qquad s' = a; \qquad s_1 = a_1; \qquad s'_1 = aa_1 + 1$$

und hiernach finden sich die folgenden mit Hülfe der Recursionsgleichungen:

$$s_m = a_m s_{m-1} + s_{m-2}$$

$$s'_m = a_m s'_{m-1} + s'_{m-2}$$

Auch die Näherungsbrüche lassen sich mittelst Recursionsformeln berechnen. Hierzu dient vor Allem die Gleichung:

$$\frac{s_{m+1}}{s'_{m+1}} - \frac{s_m}{s'_m} = -\frac{s'_{m-1}}{s'_{m+1}}\left[\frac{s_m}{s'_m} - \frac{s_{m-1}}{s'_{m-1}}\right]$$

Da nun überdies die Anfangswerthe:

$$\frac{s}{s'} = \frac{1}{s'}; \qquad \frac{s_1}{s'_1} = \frac{a_1}{aa_1 + 1} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{aa_1 + 1}\right) = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s's'_1}$$

gelten, so ist Alles gegeben, um die betreffenden Grössen nach und nach zu berechnen und man kann sie auch durch die Form einer Summe von rationalen Brüchen, in denen der Zähler immer 1 ist, darstellen. Man findet mit Hülfe obiger Formeln sehr leicht die Werthe:

$$\frac{s_2}{s'_2} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s's'_1} + \frac{1}{s'_1 s'_2}$$

$$\frac{s_3}{s'_3} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s's'_1} + \frac{1}{s'_1 s'_2} - \frac{1}{s'_2 s'_3}$$

u. s. w.

und lässt man den Index m oder die Anzahl der Glieder unendlich wachsen, so findet man die unendliche convergente Reihe:

$$\mu = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s's'_1} + \frac{1}{s'_1 s'_2} - \dots$$

Mit Hülfe der soeben angeführten Entwicklungen findet sich nun:

$$\frac{s_m}{s'_m} - \mu = (-1)^m \left\{\frac{1}{s'_m s'_{m+1}} - \frac{1}{s'_{m+1} s'_{m+2}} + \dots\right\}$$

oder:

$$s_m - s'_m \mu = (-1)^m \left\{\frac{1}{s'_{m+1}} - \frac{s'_m}{s'_{m+1} s'_{m+2}} + \dots\right\},$$

aus welcher Gleichung unmittelbar zu ersehen ist, dass eine Differenz der Form $s_m - s'_m\mu$ nur dann einen sehr kleinen Werth erhalten kann, wenn der Nenner des auf $\frac{s_m}{s'_m}$ folgenden Näherungsbruches sehr gross wird, d. h. wenn die beiden auf einander folgenden Näherungsbrüche sehr weit von einander liegen. Weil nun diese Differenzen, wenigstens näherungsweise und bevor sie unter eine gewisse Grenze sinken, auch die Werthe der Integrationsdivisoren repräsentiren, so schliesst man aus dem gefundenen Ausdrucke, dass wenn ein characteristisches Glied sehr gross wird, so liegt das folgende sehr weit entfernt. Diese Schlussfolgerung muss jedoch eine Modification erleiden, weil einem gegebenen Paare s_m, s'_m, als Indices betrachtet, immer eine ganze Gruppe von Gliedern angehört, bei denen die Bewegungen der Argumente von einander nur um Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte verschieden sind. Zu diesem Umstande werden wir sogleich zurückkommen, vorher aber noch eine Bemerkung hinsichtlich der Convergenz der Reihen:

$$\frac{\varepsilon}{s} + \frac{\varepsilon_1}{s_1} + \frac{\varepsilon_2}{s_2} + \frac{\varepsilon_3}{s_3} + \dots$$

oder

$$\frac{\varepsilon}{s'} + \frac{\varepsilon_1}{s'_1} + \frac{\varepsilon_2}{s'_2} + \frac{\varepsilon_3}{s'_3} + \dots$$

einfliessen lassen, bei denen die ε Grössen bezeichnen, die beliebige Werthe zwischen -1 und $+1$ annehmen können. Es ist nun in der That sehr leicht die Convergenz dieser Reihen nachzuweisen und dadurch einen Satz zu erhalten, welcher bei den folgenden Untersuchungen von der grössten Bedeutung sein wird.

Aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} s_{m+1} &= a_m s_m + s_{m-1} \\ s_m &= a_{m-1} s_{m-1} + s_{m-2} \end{aligned}$$

folgt augenblicklich:

$$s_{m+1} = (a_m a_{m-1} + 1) s_{m-1} + a_m s_{m-2}$$

oder

$$\frac{s_{m+1}}{s_{m-1}} = a_m a_{m-1} + 1 + a_m \frac{s_{m-2}}{s_{m-1}}$$

Weil nun die a_m nicht minder als die s_m ganze positive Zahlen sind, so ist offenbar bei jedem Werthe von m:

$$\frac{s_{m+1}}{s_{m-1}} > 2$$

Es ergiebt sich hieraus sofort, dass die Reihe:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_4} + \ldots$$

stärker convergirt als eine nach den Potenzen von $\frac{1}{2}$ laufende Entwicklung, und dasselbe gilt auch von der Reihe:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_5} + \ldots$$

Von der Summe dieser Reihen lässt sich aber sagen, dass sie durchschnittlich stärker convergirt als eine nach den steigenden Potenzen von $\frac{1}{\sqrt{2}}$ geordnete Reihe. Aus der Convergenz dieser Summe folgt offenbar auch die der oben angeführten Reihen.

Die Werthe der Integrationsdivisoren haben bei der absoluten Lösung die Form:

$$s_m n - s'_m n' + n\sigma_m,$$

wobei σ_m einen Factor von der Ordnung der störenden Massen bezeichnet. Wollte man auf eine absolute Lösung überhaupt verzichten und mithin eine durchgehende Entwicklung nach den Potenzen der störenden Massen als zulässig erachten, so wäre das Glied $n\sigma_m$ in den Argumenten ganz bei Seite zu lassen. Die Inconvenienzen eines solchen Verfahrens liegen aber zu offen am Tage um unberücksichtigt bleiben zu können; dasselbe würde Integrationsdivisoren, die in Wirklichkeit nicht unter einer gegebenen Grösse von der Ordnung $n\sigma_m$ wären, als beliebig klein erscheinen lassen, und anderseits für streng verschwindende Werthe von oben bezeichneten Differenzen endliche Grössen ergeben. In Fällen, die ich als critisch bezeichnen möchte, würden demnach die Integrationsdivisoren gänzlich entstellt gefunden werden; und die nothwendige Folge davon würde die Unmöglichkeit sein, die mittleren Bewegungen richtig zu bestimmen.

Hinsichtlich der oben näher bezeichneten Differenz haben wir noch eine Bemerkung hervorzuheben, auf welche bei der folgenden Darstellung Bezug genommen werden soll. Wenn das Glied $n\sigma_m$ eine Grösse von der Ordnung der störenden Kräfte ist, so wird die Kleinheit der besagten Differenz wesentlich durch die Glieder:

$$s_m n - s'_m n'$$

bedingt. Man schliesst hieraus, da n und n' nicht als kleine Grössen anzusehen sind, dass die Differenzen $s_m n - s'_m n'$ und $s_m n - s'_m n' + n\sigma_m$ für dieselben Werthe der ganzen Zahlen s_m und s'_m ihre kleinsten Werthe erhalten, wiewohl diese relativ sehr verschieden sein können. Das Vorhandensein des Gliedes $n\sigma_m$ bedingt also im Allgemeinen, d. h. so lange dasselbe als eine kleine Grösse neben n oder n' anzusehen ist, keine Änderung in der Lage der characteristischen Glieder.

Die Grössen σ_m sind im Probleme der drei Körper aus drei oder vier Theilen zusammengesetzt und sind dabei durch Ausdrücke der Form:

$$\sigma_m = p\varsigma + p'\mu\varsigma' + q\tau + q'\mu\tau'$$

gegeben. Die Grössen p, p', q und q' bezeichnen hier ganze Zahlen und ς, ς', τ und τ' kleine Quantitäten von der Ordnung der störenden Kräfte. Es leuchtet ein, dass σ_m nur dann mit n oder n' vergleichbare Werthe annehmen kann, wenn eine oder einige der bezeichneten ganzen Zahlen sehr grosse Werthe erhalten. In solchen Fällen könnte allerdings eine Verschiebung in der Lage eines characteristischen Gliedes stattfinden, aber eine relativ doch nur sehr geringe. Dieser Umstand bleibt ohne jeden wesentlichen Einfluss auf unsere folgenden Betrachtungen.

Die ganzen Zahlen p, p', q, q' nehmen bei jedem Paare s_m, s'_m sehr verschiedene Werthe an und hieraus folgt, dass mehrere Argumente derselben Form vorhanden sind, bei denen s_m und s'_m dieselben Werthe haben. Diese Coexistenz verschiedener Glieder, von denen mehrere Coefficienten derselben Ordnung sind, bewirkt eine erhebliche Complication der ganzen Untersuchung ohne jedoch der Lösung wesentlich hinderlich zu sein; wir können sogar bei den meisten Schritten, welche uns der Lösung unserer Aufgabe nähern, zunächst ganz davon absehen, dass mehrere Glieder neben einander coordonirt sind, und haben alsdann bloss ein einziges

Glied bei jedem Paare s_m, s'_m zu betrachten, wobei wir dasjenige als ausgewählt ansehen, bei dem die Differenz:

$$s_m n - s'_m n' + n\sigma_m$$

einen kleineren Werth hat als die übrigen, demselben Paare s_m, s'_m entsprechenden, aber von andern σ_m-Werthen abhängigen Differenzen.

I.

Eine jede Methode zur Auflösung des Problems der drei Körper setzt ein besonderes, aus den bekannten Differentialgleichungen der Dynamik abgeleitetes Gleichungssystem voraus, welches gewöhnlich mit besonderer Rücksicht auf eine bequeme numerische Anwendung und compendiöse Darstellung des Resultats aufgesucht worden ist. Die Untersuchungen aber, die auf den folgenden Blättern mitgetheilt werden, sind nicht nur von der besondern Form der zu Grunde gelegten Differentialgleichungen unabhängig, sondern gestalten sich auch nahezu in derselben Weise, wenn man die Zeit selbst, oder statt dieser eine von der Zeit in gegebener Weise abhängige Function als unabhängige Veränderliche anwendet. Da in dieser Hinsicht die Wahl also frei steht, so werde ich die für eine einfache und leicht verständliche Darstellung möglichst günstigen Bestimmungen adoptiren, und demgemäss die Zeit als unabhängige Veränderliche feststellen, sowie die einfache, in der *mécanique céleste* gegebene Differentialgleichung zweiter Ordnung, durch deren Integration die mittlere Anomalie gefunden wird, der ganzen Untersuchung zu Grunde legen.

Für die mittleren Anomalien des gestörten und des störenden Körpers wenden wir die in der *mécanique celeste* adoptirten Bezeichnungen an, nehmlich ζ und ζ'; indem wir überdies mit A, A_1, ... constante Coefficienten, von der Ordnung der störenden Masse bezeichnen, sowie mit B_1, B_2, ... constante Winkelgrössen, stellen wir die besagte Differentialgleichung wie folgt dar:

$$(1)\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -n^2 A\sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) - n^2 A_1 \sin(s_1\zeta - s'_1\zeta' + \sigma_1 nt + B_1) - \ldots + M$$

wobei wir in der Function M sämmtliche nicht-characteristische Glieder vereinigt denken.

Wir wollen nun noch eine Vereinfachung eintreten lassen, die zwar an und für sich den Resultaten eine grosse Beschränkung auferlegt, für die Untersuchung der Convergenzfrage jedoch, soweit diese sich auf die characteristischen Glieder bezieht, ohne Einfluss zu sein scheint. Diese Vereinfachung besteht in der Vernachlässigung aller von der Masse des gestörten Körpers abhängigen Glieder. — Abgesehen davon, dass es in der Natur vielfache Fälle giebt, wo die Masse des gestörten Körpers zweifellos eine verschwindend kleine Grösse ist, gelangt man in vielen Punkten zu wirklichen Annäherungen, indem man die Glieder, welche von den beiden Massen abhängen, gesondert betrachtet. Wo dies aber nicht der Fall ist, kann man mit wenigen Ausnahmen die Aufgabe auf die Integration von Differentialgleichungen zurückführen, welche dieselbe Form mit denen haben, die man nach Vernachlässigung der Masse des gestörten Körpers erlangt haben würde.

Das Resultat, welches durch die Integration der Gleichung (1) erhalten wird, hat nun voraussichtlich die Form:

$$\zeta = c + nt + \omega,$$

bei der wir durch c und n die beiden Integrationsconstanten bezeichnen, nehmlich durch c die Constante der mittleren Anomalie und durch n die mittlere Bewegung. Die Function ω bezeichnet eine Summe periodischer Glieder, welche Summe wir sogleich in zwei Theile zerlegen wollen, indem wir setzen:

$$\omega = Z + \delta\zeta$$

Wir setzen dabei voraus, dass die Function Z alle characteristischen Glieder umfasst, wenigstens alle solche, die sich bei der Integration als critisch erweisen; das Increment $\delta\zeta$ aber alle übrigen. Dieser Bestimmung zufolge können wir annehmen, dass die Glieder, welche die Function $\delta\zeta$ constituiren, leicht zu ermitteln sind, oder dass die Gleichung:

$$\frac{d^2\delta\zeta}{dt^2} = M$$

ohne jegliche Schwierigkeit integrirt werden kann, soweit man nicht bei den fortgesetzten Annäherungen Glieder erhalten würde, welche der Form nach den characteristischen Gliedern angehören und demnach der Function Z einverleibt werden sollten. Anderseits würde man bei fortgesetzter Annäherung durch Integration der Gleichung:

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -n^2 A \sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) - \ldots$$

Glieder finden, die mit denen der Function $\delta\zeta$ zu vereinigen wären. Wenn man daher die Gleichung (1) in zwei andere zerspaltet, von denen die eine Z und die andere δz geben soll, so muss der einen eine Function hinzugefügt werden, die wieder von der anderen abgezogen wird, und welche die Überführung gewisser Glieder von der einen Gleichung zur anderen vermittelt. Indem wir diese Function durch N bezeichnen haben wir also die Gleichungen:

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -n^2 A \sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) - n^2 A_1 \sin(s_1\zeta - s_1'\zeta' + \sigma' nt + B_1)$$
$$- \ldots + N$$
$$\frac{d^2\delta\zeta}{dt^2} = M - N$$

und die Summe beider vertritt offenbar die Gleichung (1). Von der zweiten dieser Gleichungen können wir nun sicher annehmen, dass ihre Integration keine Schwierigkeiten verursachen wird, und werden wir uns daher nicht weiter mit derselben befassen, sondern die Function $\delta\zeta$ sogleich als eine bekannte Grösse ansehen. — Hinsichtlich der ersten der obigen Gleichungen heben wir hervor, dass die aus N entstehenden Glieder mit den übrigen einfach vereinigt werden können, wodurch die Coefficienten um kleine Grössen geändert werden. Derartige Incremente sind für die folgenden Betrachtungen nicht wesentlich; sie können überdies aber als in den betreffenden Coefficienten bereits einverleibt gedacht werden, so dass wir bei unseren Untersuchungen von der Gleichung

$$(2) \qquad \frac{d^2Z}{dt^2} = -n^2 A \sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) - \ldots,$$

bei der die Function N einfach weggelassen worden ist, ausgehen können.

Diese Gleichung integriren wir nun in der gewöhnlichen Weise, indem wir Z, soweit diese Function in den Argumenten rechter Hand vorkommt, als constant ansehen und für ζ' den Werth $c' + n't$ annehmen. Wir erhalten dabei, da hier keine Integrationsconstante hinzugefügt zu werden braucht,

$$(3)\qquad \frac{dZ}{dt} = \frac{n^2 A}{sn - s'n' + \sigma n}\cos(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B)$$

$$+ \frac{n^2 A_1}{s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n}\cos(s_1\zeta - s_1'\zeta' + \sigma_1 nt + B_1) + \ldots + F;$$

und ist die Function F hier offenbar eingeführt worden, damit die rechte Seite das strenge Integrationsresultat ausdrücken soll. Um diese Function zu bestimmen, differentiiren wir die Gleichung (3) und erhalten hierauf unter Berücksichtigung der Gleichung (2):

$$(4)\qquad 0 = -\left\{\frac{sn^2 A}{sn - s'n' + \sigma n}\sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B)\right.$$

$$\left. + \frac{s_1 n^2 A_1}{s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n}\sin(s_1\zeta - s_1'\zeta' + \sigma_1 nt + B_1) + \ldots\right\}\frac{dZ}{dt} + \frac{dF}{dt}$$

Indem in dieses Resultat der Werth von $\frac{dZ}{dt}$ aus (3) eingesetzt wird, erhält man eine Gleichung, aus der die Function F durch fortgesetzte Annäherungen zu bestimmen ist. Diese Bestimmung wird nun zwar nicht immer gelingen, aber derartige Fälle erheischen überhaupt eine andere Integrationsmethode als die, welche wir bei der Gleichung (2) eingeleitet haben.

Die Gleichung (3) integriren wir nun in derselben Weise, wie wir jene aus der Gleichung (2) herleiteten, d. h. indem wir die Function Z in den Argumenten als constant ansehen. Auch hier braucht man keine Integrationsconstante hinzuzufügen, weil dieselbe als mit c zusammenfallend gedacht werden kann. Dem sich unmittelbar ergebenden Resultate fügen wir aber, ebenso wie bei der ersten Integration, eine Function, F_1 hinzu, welche wir nachher so bestimmen müssen, dass der Differentialgleichung (2) strenge genügt wird.

Es ergiebt sich in solcher Weise:

$$(5)\qquad Z = \frac{n^2 A}{(sn - s'n' + \sigma n)^2} \sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B)$$

$$+ \frac{n^2 A_1}{(s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n)^2} \sin(s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 nt + B_1) + \ldots + F_1 + \int F dt$$

Nachdem wir diese Gleichung differentiirt, und das Resultat mit dem, durch die Gleichung (3) gegebenen Werthe von $\frac{dZ}{dt}$ identificirt haben, erhalten wir:

$$(6)\qquad 0 = \left\{ \frac{sn^2 A}{(sn - s'n' + \sigma n)^2} \cos(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B) \right.$$

$$\left. + \frac{s_1 n^2 A_1}{(s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 B)^2} \cos(s_1 \zeta - s_1' \zeta' + \sigma_1 nt + B_1) + \ldots \right\} \frac{dZ}{dt} + \frac{dF_1}{dt}$$

Aus dieser Bedingung wäre die Function F_1 zu bestimmen; wir werden aber die hierauf bezügliche Untersuchung zunächst bei Seite lassen, ebenso wie wir die Bestimmung von F nicht näher berücksichtigten. Unsere nächsten Betrachtungen betreffen nehmlich die Frage von der Convergenz der Entwicklung von Z, wie diese durch die Gleichung (5) angegeben wird, indem die von F und F_1 abhängigen Glieder unberücksichtigt gelassen werden. Es genügt hierbei die Bemerkung, dass in der Mehrzahl der Fälle, wie sie überhaupt vorkommen können, die Functionen F und F_1 Grössen zweiter Ordnung hinsichtlich der störenden Kräfte sind, so dass die von diesen Functionen unabhängigen Glieder in den Gleichungen (3) und (5) genäherte Werthe von $\frac{dZ}{dt}$ und Z ergeben.

Betrachten wir nun die Convergenz der Reihe (3) als eine rein algebraische Frage, d. h. losgelöst von allen Bedingungen astronomischer Natur, so werden wir bald inne, dass wir auf dieselbe keine bestimmte Antwort finden können. Es zeigt sich nehmlich, dass es Werthsysteme von n und n' geben kann, bei welchen die betreffende Reihe convergent ist, dagegen aber auch andere Werthsysteme, welche sicher die Divergenz derselben Reihe bedingen. Um dies nachzuweisen müssen wir die Grössenordnungen der Coefficienten A, A_1, ... zur Evidenz bringen. Wir bezeichnen zu diesem Zwecke mit M_m einen Factor von der Ordnung der störenden Masse, mit α und e aber Grössen, von denen die erste das constante Verhältniss der mittleren Entfernungen bezeichnet, und zwar so, dass α immer kleiner als die Einheit angenommen wird, und e als von derselben Grössenordnung wie die Excentricitäten oder die gegenseitige Neigung angesehen wird. Die Coefficienten A_m sind nun hinsichtlich ihrer Grössenordnung durch die Formel:

$$A_m = M_m \alpha^{s_m} e^{s'_m - s_m},$$

gegeben indem wir voraussetzen, dass:

$$s'_m > s_m$$

Für den entsprechenden Integrationsdivisor kann man, dem jetzigen Zwecke entsprechend, den genäherten Werth:

$$s_m n - s'_m n' = \pm \frac{n}{s'_{m+1}}$$

anwenden, indem man nehmlich das Glied $\sigma_m n$ als verschwindend klein ansieht. Es ergiebt sich nun:

$$\frac{dZ}{dt} = - s'_1 n M \alpha^s e^{s'-s} \cos(s\zeta - s'\zeta' + \sigma nt + B)$$

$$+ s'_2 n M_1 \alpha^{s_1} e^{s'_1 - s_1} \cos(s_1\zeta - s'_1\zeta' + \sigma_1 nt + B_1) + \ldots;$$

und weil s'_1 beliebig gross im Verhältniss zu s und s' sein kann, s_2 im Verhältniss zu s_1 und s'_1, u. s. w., so können diese Zahlen Werthe haben, welche die Divergenz der obigen Reihe bedingen. Sie können aber anderseits Werthe haben, bei denen die Reihe sicher convergirt. In noch höherem Grade tritt die Bedingung der Divergenz oder Convergenz bei der Reihe für Z selbst hervor, indem die Glieder dieser die Quadrate der Zahlen $s'_1, s'_2, \ldots$ als Factoren enthalten.

Betrachtungen, wie die obigen gehören aber unserer Aufgabe gar nicht an, denn nicht sowohl die Integrationsconstanten n und c, als vielmehr die zu einem bestimmten Zeitpunkte stattfindenden Werthe von $\frac{d\zeta}{dt}$ und ζ, dürfen in derselben als gegebene Grössen angesehen werden, weil diese direct mittelst Beobachtungen gefunden werden können. Unsere

Aufgabe ist im Gegentheil die, aus den für einen bestimmten Zeitpunkt, z. B. für $t = 0$ gültigen Werthen von $\frac{d\zeta}{dt}$ und ζ, welche durch n_0 und c_0 bezeichnet sein mögen, die Werthe von n und c zu bestimmen. Es wird sich dabei erweisen, dass letztere Grössen keineswegs immer synectische Functionen der ersteren sind, denn es kann unendlich viele Werthsysteme von n_0 und c_0 geben, welche dieselben Werthe von n und c bedingen. In diesen Fällen würden letztere Grössen nicht mehr den Character von willkürlichen Constanten haben, sondern zwei andere Grössen als solche eintreten.

Weil nun:

$$\zeta = c + nt + Z + \delta\zeta$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = n + \frac{dZ}{dt} + \frac{d\delta\zeta}{dt}$$

und wir die Grössen $\delta\zeta$ und $\frac{d\delta\zeta}{dt}$ als bekannt ansehen und ihre Werthe für $t = 0$ demnach sogleich als in c_0 und n_0 berücksichtigt denken können, so haben wir:

$$(7) \qquad n_0 = n + \frac{n^2 A}{sn - s'n' + \sigma n} \cos(sc_0 - s'c' + B)$$
$$+ \frac{n^2 A_1}{s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n} \cos(s_1 c_0 - s_1' c' + B_1) + \ldots$$

$$(8) \qquad c_0 = c + \frac{n^2 A}{(sn - s'n' + \sigma n)^2} \sin(sc_0 - s'c' + B)$$
$$+ \frac{n^2 A_1}{(s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n)^2} \sin(s_1 c_0 - s_1' c' + B_1) + \ldots$$

Aus diesen Gleichungen sieht man sogleich, dass die Grösse c sich unmittelbar ergiebt, wenn einmal n gefunden worden ist: die Bestimmung dieser Grösse ist aber mit nicht geringen Schwierigkeiten verbunden.

Das Resultat, welches durch die Lösung der Gleichung (7) in Bezug auf n erhalten wird, fingiren wir zunächst, indem wir die nachstehende Gleichung aufstellen:

$$(9) \qquad n = n_0 - ng\sqrt{\frac{A}{s}} - ng_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}} - \ldots$$

oder:

$$n\left(1 + g\sqrt{\frac{A}{s}} + g_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}} + \ldots\right) = n_0;$$

unsere Aufgabe ist hiermit auf die Bestimmung der Grössen g_1, g_2, ... zurückgeführt.

Durch Vergleichung der Gleichungen (7) und (9) ergeben sich für die g_m sofort folgende Ausdrücke:

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} g &= \frac{n\sqrt{sA}}{sn - s'n' + \sigma n}\cos(sc_0 - s'c' + B) \\ g_1 &= \frac{n\sqrt{s_1 A_1}}{s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n}\cos(s_1 c_0 - s_1' c' + B_1) \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right.$$

Durch diese Gleichungen sind die g_m nun zwar bestimmt, aber noch nicht ermittelt, weil die Glieder rechter Hand die noch unbekannte Grösse n enthält. In den meisten Fällen, die in unserem Sonnensysteme vorkommen, würde man zwar die betreffenden Grössen durch Annäherungen ermitteln können, allein bei gewissen Werthen der bekannten Grössen würde ein solches Verfahren versagen und kann auch nicht die Natur der betreffenden Grössen aufdecken.

Statt der noch unbekannten Integrationsdivisoren führe ich jetzt andere Grössen ein, welche einen leichteren Überblick über die Natur der Resultate gestattet; ich setze:

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} sn - s'n' + \sigma n &= n(2f - g)\sqrt{sA} \\ s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n &= n(2f_1 - g_1)\sqrt{s_1 A_1} \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}\right.$$

Man bemerkt leicht, dass in gewöhnlich vorkommenden Fällen, wo die Integrationsdivisoren keine exceptionell kleinen Werthe annehmen, die Grössen f_m von der Ordnung $\frac{1}{s'_{m+1}\sqrt{s_m A_m}}$ und die Grössen g_m von der Ordnung $s'_{m+1}\sqrt{s_m A_m}$ sind; die letzteren haben daher in gewöhnlich vorkommenden Fällen Werthe, die wesentlich kleiner als 1 sind.

Mit Rücksicht auf die Ausdrücke (11) erhält man aus (10) die Gleichungen:

$$g = \frac{\cos(sc_0 - s'c' + B)}{2f - g}$$

$$g_1 = \frac{\cos(s_1 c_0 - s_1' c + B_1)}{2f_1 - g_1}$$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen lassen sich die g_m durch die f_m ausdrücken, und zwar erhält man:

$$(12)\qquad g_m = f_m \mp \sqrt{f_m^2 - \cos(s_m c_0 - s_m' c' + B_m)},$$

wobei das obere oder das untere Vorzeichen anzuwenden ist, jenachdem f_m positiv oder negativ ist. — Ferner ist:

$$2f_m - g_m = f_m \pm \sqrt{f_m^2 - \cos(s_m c_0 - s_m' c' + B_m)}$$

Mit Hülfe dieses Ausdruckes finden sich aus den Gleichungen (10) Werthe der Integrationsdivisoren, womit folgende Entwicklungen für n und c erhalten werden:

$$(13)\qquad n_0 = n\left\{1 + \frac{\sqrt{\frac{A}{s}}\cos(sc_0 - s'c' + B)}{f \pm \sqrt{f^2 - \cos(sc_0 - s'c' + B)}} + \frac{\sqrt{\frac{A_1}{s_1}}\cos(s_1 c_0 - s_1' c' + B_1)}{f_1 \pm \sqrt{f_1^2 - \cos(s_1 c_0 - s_1' c' + B_1)}} + \cdots\right\}$$

$$(14)\qquad c_0 = c + \frac{\sin(sc_0 - s'c' + B)}{s\left[f \pm \sqrt{f^2 - \cos(sc_0 - s'c' + B)}\right]^2} + \frac{\sin(s_1 c_0 - s_1' c' + B_1)}{s_1\left[f_1 \pm \sqrt{f_1^2 - \cos(s_1 c_0 - s_1' c' + B_1)}\right]} + \cdots$$

Man bemerkt leicht, wenn man sich der oben gemachten Voraussetzung hinsichtlich der doppelten Vorzeichen erinnert, dass diese beiden Reihen immer convergent sind, wenn von den f_m kein einziger kleiner als 1 wird. Sie können aber auch bei kleineren, oder gar verschwindenden Werthen von den f_m convergiren, wenn nur die Winkel $s_m c_0 - s'_m c' + B_m$ gewissen Bedingungen genügen. Statt diese aufzusuchen werden wir die betreffenden Reihen in einer Weise umformen, dass die Convergenz derselben sich leichter übersehen lässt.

Wir ersetzen die f_m durch andere Grössen k_m indem wir die Relation:

$$(15) \qquad f_m^2 + \left(\sin\frac{1}{2}(s_m c_0 - s'_m c' + B_m)\right)^2 = \frac{1}{k_m^2}$$

feststellen. Überdies setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{1}{2}(s_m c_0 - s'_m c' + B_m) = D_m$$

und erhalten nun:

$$f_m^2 - \cos(s_m c_0 - s'_m c' + B_m) = \frac{1 - k_m^2 \cos D_m^2}{k_m^2}$$

$$f_m^2 = \frac{1 - k_m^2 \sin D_m^2}{k_m^2}$$

Hiermit finden sich:

$$g_m = \frac{\sqrt{1 - k_m^2 \sin D_m^2} - \sqrt{1 - k_m^2 \cos D_m^2}}{k_m}$$

$$2f_m - g_m = \frac{\sqrt{1 - k_m^2 \sin D_m^2} + \sqrt{1 - k_m^2 \cos D_m^2}}{k_m};$$

und die Reihen (13) und (14) nehmen nun die folgende elegante Gestalt an:

$$(16) \qquad n_0 = n\left\{1 + \frac{k\sqrt{\frac{A}{s}}\cos 2D}{\sqrt{1 - k^2 \sin D^2} + \sqrt{1 - k^2 \cos D^2}} + \frac{k_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}}\cos 2D_1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin D_1^2} + \sqrt{1 - k_1^2 \cos D_1^2}} + \dots\right\}$$

$$(17) \qquad c_0 = c + \frac{k^2 \sin 2D}{s\left[\sqrt{1 - k^2 \sin D^2} + \sqrt{1 - k^2 \cos D^2}\right]^2} + \frac{k_1^2 \sin 2D_1}{s_1\left[\sqrt{1 - k_1^2 \sin D_1^2} + \sqrt{1 - k_1^2 \cos D_1^2}\right]^2} + \dots$$

Man sieht an diesen Entwicklungen sofort, dass sie convergent sind, so lange keine der Grössen k_m der Einheit übersteigt, und hieraus folgt auch die Convergenz der Reihen (3) und (5) abgesehen von den mit F und F_1 bezeichneten Gliedern. Bei diesem Resultate bleiben wir vorläufig stehen und wenden uns zunächst an die Bestimmung der Grössen g_m.

Von den wahren Integrationsdivisoren, welche durch die Gleichungen (11) bestimmt sind, unterscheiden wir die apparenten Integrationsdivisoren, deren Werthe man auf Grund von Beobachtungen unmittelbar kennt, oder doch als bekannt annehmen kann. Diese Divisoren werden mit dem Werthe n_0 in derselben Weise zu berechnen sein, wie die wahren mit dem Werthe n; sie sind daher durch den folgenden Algorithmus gegeben:

$$(18)\quad \begin{cases} sn_0 - s'n' + \sigma n_0 = n_0 e = n\sqrt{sA}\,(2f - g) - (s + \sigma)(n - n_0) \\ s_1 n_0 - s_1' n' + \sigma_1 n_0 = n_0 e_1 = n\sqrt{s_1 A_1}(2f_1 - g_1) - (s_1 + \sigma_1)(n - n_0) \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Indem wir uns der Relation (9) erinnern, können wir diese Gleichungen auf die nachstehende Form bringen:

$$e = \sqrt{sA}(2f - g) + (s + \sigma - e)\left(g\sqrt{\frac{A}{s}} + g_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}} + \ldots\right)$$

$$e_1 = \sqrt{s_1 A_1}(2f_1 - g_1) + (s_1 + \sigma_1 - e_1)\left(g\sqrt{\frac{A}{s}} + g_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}} + \ldots\right)$$

u. s. w.

In diesen Gleichungen ersetzen wir die Differenz $2f_m - g_m$ durch den Werth:

$$\frac{\cos 2D_m}{g_m}$$

und beachten die Relation:

$$s_m + \sigma_m - e_m = s'_m \frac{n'}{n_0};$$

es findet sich alsdann, indem wir die Bezeichnung:

$$\alpha_m = \sqrt{s_m A_m}\cos 2D_m$$

anwenden, das System:

$$(19)\qquad \left|\begin{array}{l} e \;= \dfrac{a}{g} + \dfrac{s'n'}{n_0}\left(g\sqrt{\dfrac{A}{s}} + g_1\sqrt{\dfrac{A_1}{s_1}} + \ldots\right) \\ e_1 = \dfrac{a_1}{g_1} + \dfrac{s_1'n'}{n_0}\left(g\sqrt{\dfrac{A}{s}} + g_1\sqrt{\dfrac{A_1}{s_1}} + \ldots\right) \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

Zwischen zwei und zwei dieser Gleichungen können wir die Reihe:

$$g\sqrt{\frac{A}{s}} + g_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}} + \ldots$$

eliminiren, und erhalten dann Relationen zwischen zwei g_m-Werthen. Dabei bezeichnen wir durch r und r' zwei beliebige Indices und setzen:

$$E_{r,r'} = e_r s_{r'}' - e_{r'} s_r'$$

Das Eliminationsresultat wird nun:

$$E_{r,r'} = \frac{a_r s_{r'}'}{g_r} - \frac{a_{r'} s_r'}{g_{r'}}$$

oder:

$$(20)\qquad g_{r'} = \frac{a_{r'} s_r' g_r}{a_r s_{r'}' - E_{r,r'} g_r}$$

Lassen wir in dieser Formel den Index r' die Werthe der ganzen positiven Zahlen, inclusive Null, annehmen, und substituiren wir die in solcher Weise erhaltenen Ausdrücke der Coefficienten $g, g_1, g_2, \ldots$ als Functionen von g_r in die Gleichung:

$$e_r = \frac{a_r}{g_r} + s_r' \frac{n'}{n_0}\left(g\sqrt{\frac{A}{s}} + g_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}} + \ldots\right),$$

so findet sich:

$$(21)\qquad e_r = \frac{a_r}{g_r} + s_r'^2 \frac{n'}{n_0}\left\{\frac{a g_r\sqrt{\dfrac{A}{s}}}{s' a_r - E_{r,0} g_r} + \frac{a_1 g_r\sqrt{\dfrac{A_1}{s_1}}}{s_1' a_r - E_{r,1} g_r} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{a_{r-1} g_r\sqrt{\dfrac{A_{r-1}}{s_{r-1}}}}{s_{r-1}' a_r - E_{r,r-1} g_r} + \frac{1}{s_r'} g_r\sqrt{\frac{A_r}{s_r}} + \frac{a_{r+1} g_r\sqrt{\dfrac{A_{r+1}}{s_{r+1}}}}{s_{r+1}' a_r - E_{r,r+1} g_r} + \ldots\right\}$$

Diejenige Wurzel dieser Gleichung, welche unserer Aufgabe entspricht, erhält man sehr häufig leicht genug durch Annäherungen, indem man von dem Werthe:

$$g_r = \frac{a_r}{e_r - s'_r \frac{n'}{n_0}\left(g\sqrt{\frac{A}{s}} + g_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}} + \ldots + g_{r-1}\sqrt{\frac{A_{r-1}}{s_{r-1}}}\right)}$$

ausgeht. Hat aber e_r einen solchen Werth, dass der Nenner dieses Ausdruckes sehr klein werden kann, so versagt die angedeutete Methode. Solche Fälle sind es eben, die wir jetzt etwas näher betrachten wollen. Vor Allem müssen wir den Werth von $E_{r,r'}$ etwas näher untersuchen. Zu diesem Zwecke setzen wir in dem oben gegebenen Ausdrucke für diese Grösse die Werthe:

$$e_r = s_r - s'_r \frac{n'}{n_0} + \sigma_r; \qquad e_{r'} = s_{r'} - s'_{r'} \frac{n'}{n_0} + \sigma_{r'}$$

und erhalten somit:

$$(22) \qquad E_{r,r'} = s_r s'_{r'} - s_{r'} s'_r + s'_{r'}\sigma_r - s'_r \sigma_{r'}$$

Hieraus schliessen wir unmittelbar, dass in der Regel $E_{r,r'}$ keine kleine Grösse bedeutet. Die Differenz $s_r s'_{r'} - s_{r'} s'_r$ ist nehmlich eine ganze Zahl während die folgenden Glieder eine irrationale Grösse bezeichnen, deren Werth nur in Ausnahmefällen einer ganzen Zahl sehr nahe kommen kann. Derartige Fälle können aber offenbar nur bei sehr grossen Werthen von r oder r' eintreten, d. h. nur wenn $\frac{1}{s_r}$ oder $\frac{1}{s_{r'}}$ als Grössen von der Ordnung der störenden Kraft anzusehen sind, woraus folgt, dass der entsprechende Coefficient A_r oder $A_{r'}$ eine äusserst kleine Grösse bedeutet.

Ein besonderes Interesse bietet der Fall dar, wo der Gleichung:

$$s_r - s'_r \mu + \sigma_r = 0$$

streng genügt wird. Mit Rücksicht hierauf erhält man aus der Gleichung (22) den Werth:

$$E_{r,r'} = - s'_r (s_{r'} - s'_{r'}\mu + \sigma_{r'});$$

die E-Coefficienten sind demnach den wahren Integrationsdivisoren proportional, wenn ein einziger dieser Divisoren verschwindet, und diese Regel gilt auch für $E_{r,r}$ weil

$$E_{r,r} = 0$$

So bald:

$$r' > r,$$

hat man auch nothwendig:

$$| s_{r'} - s'_{r'}\mu | < | \sigma_r |;$$

und bei wachsendem r' wird die Differenz $s_{r'} - s'_{r'}\mu$ immer kleinere Werthe annehmen, so dass die Grösse $E_{r,r'}$ nach und nach auf das Glied: $- s'_{r'}\sigma_{r'}$ reducirt wird.

Der Coefficient $\sigma_{r'}$ ist nun in der Regel eine Grösse von derselben Ordnung wie $\frac{s_{r'}}{s_r}\sigma_r$, also von der Ordnung eines Productes aus der störenden Masse mit der Zahl $s_{r'}$. Da aber unserer Voraussetzung nach:

$$\sigma_r = -(s_r - s'_r\mu) = \pm \frac{1}{s_{r+1}} \mp \ldots$$

so ist das Product $\sigma_r s_{r+1}$ und noch mehr die folgenden Producte: $\sigma_r s_{r+2}, \ldots$ als Grössen nullter Ordnung oder sogar als grosse Zahlen anzusehen. Fälle, wo unter den Coefficienten $\sigma_{r'}$ sehr kleine Werthe vorkommen, sind nun allerdings nicht undenkbar, müssen aber als Ausnahmefälle angesehen werden, weil sie, wie man sich leicht überzeugen kann, äusserst unwahrscheinlich sind.[1] Wenn aber die späteren Divisoren auch nur den Betrag von Grössen der Ordnung σ hätten, so wären doch die Coefficienten:

$$\frac{\alpha_{r'}}{\sigma^2}$$

[1] Man kann sich das betreffende Glied abgesehen von den constanten Coefficienten als durch Entwicklung von Producte der Form:

$$\cos p[(1 - \varsigma)nt + G] \cos q[(1 - \varsigma')n't + G'] \sin m[(n - n')t + H]$$

entstanden denken. Es bedeuten hier: p, q und m ganze, positive Zahlen, G, G' und H constante Winkelgrössen, und endlich ς und ς' kleine Grössen von der Ordnung der störenden Kraft.

Es findet sich hieraus das Argument:

$$[m - p(1 - \varsigma)]nt - [m + q(1 - \varsigma')]n't + mH - pG - qG'$$

als sehr kleine Grössen anzusehen, erstens, weil $\alpha_{r'}$ eine Grösse von der Ordnung σ als Factor enthält, und zweitens weil $\alpha_{r'}$ ausserdem mit einem sehr kleinen Factor von der Ordnung $e^{s'_{r'}-s_{r'}}$ multiplicirt ist, wobei e eine Grösse von der Ordnung der Excentricitäten bezeichnet.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo:

$$s_r - s'_r\mu + \sigma_r = \delta$$

und δ einen im Vergleich zu α_r zwar sehr kleinen aber doch endlichen Werth hat. Es findet sich nun:

$$E_{r,r'} = - s'_r(s_{r'} - s'_{r'}\mu + \sigma_{r'}) - s'_{r'}\delta$$

Da wir fortwährend $r' > r$ annehmen, ist $s'_{r'}$ als eine sehr grosse Zahl anzusehen. Obwohl nun δ eine sehr kleine Grösse bedeutet, kann das Product $s'_{r'}\delta$ demnach doch eine Grösse nullter Ordnung sein, und ist auch in der Regel als eine solche zu betrachten. Die beiden Glieder im Ausdruck für $E_{r,r'}$ sind ferner derartig von einander unabhängig, dass sie sich nur zufällig, d. h. hier, in einem sehr wenig wahrscheinlichen Falle, aufheben können. Wir schliessen daher, dass die Grössen $E_{r,r'}$ — abgesehen von Ausnahmefällen, deren Betrachtung wir als für unsere Untersuchung unwesentlich bei Seite lassen — nicht sehr klein sind, oder, mit anderen Worten, dass sie als Grössen nullter Ordnung anzusehen sind. Anderseits sind sie jedoch immer wesentlich kleiner als die entsprechenden ganzen Zahlen $s'_{r'}$.

Die Gleichung (21) erhalten wir etwas übersichtlicher, wenn wir für g_r eine neue Unbekannte x_r einführen, welche durch die Gleichung:

$$g_r = \frac{\alpha_r}{x_r}$$

---

woraus folgt, dass nachstehende Gleichstellungen gemacht werden können:

$$\begin{aligned} s_{r'} &= m - p \\ s'_{r'} &= m + q \\ B_{r'} &= mH - pG - qG' \\ \sigma_{r'} &= p\varsigma + q\varsigma' = \frac{1}{2}(p+q)(\varsigma+\varsigma') + \frac{1}{2}(p-q)(\varsigma-\varsigma') \end{aligned}$$

Weil nun die ganzen Zahlen p und q an die obigen Bedingungen gebunden sind und also nicht beliebige Werthe annehmen können, so ist ein sehr kleiner Werth von $\sigma_{r'}$ wenig wahrscheinlich.

gegeben ist. Es findet sich nehmlich:

$$(23)\qquad x_r - e_r = -s_r'^2 \frac{n'}{n_0} \left\{ \frac{a\sqrt{\frac{A}{s}}}{s'x_r - E_{r,0}} + \frac{a_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}}}{s_1' x_r - E_{r,1}} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{a_{r-1}\sqrt{\frac{A_{r-1}}{s_{r-1}}}}{s_{r-1}' x_r - E_{r,r-1}} + \frac{a_r\sqrt{\frac{A_r}{s_r}}}{s_r' x_r} + \frac{a_{r+1}\sqrt{\frac{A_{r+1}}{s_{r+1}}}}{s_{r+1}' x_r - E_{r,r+1}} + \cdots \right\}$$

Hieraus lässt sich der Werth von x_r durch Annäherungen ermitteln. In der Regel wird man den Zweck erreichen, wenn man in der ersten Annäherung alle Glieder von dem Gliede

$$-s_r'^2 \frac{n'}{n_0} \frac{a_{r+1}\sqrt{\frac{A_{r+1}}{s_{r+1}}}}{s_{r+1}' x_r - E_{r,r+1}}$$

an bei Seite lässt. Man erhält somit eine endliche Gleichung $(r+2)^{\text{ten}}$ Grades, deren hier brauchbare Wurzel in gewöhnlicher Weise aufgesucht werden muss. Als brauchbar kann aber nur die Wurzel bezeichnet werden, welche zu einem Werthe von g_r führt, der kleiner als 1 ist. Giebt es keine solche Wurzel, so ist die hier befolgte Integrationsmethode hinsichtlich des entsprechenden Gliedes nicht anwendbar.

Sehr häufig wird man die Gleichung (23) auch in der folgenden Weise auflösen können; man bezeichne:

$$2h_r = e_r - s_r'^2 \frac{n'}{n_0} \left\{ \frac{a\sqrt{\frac{A}{s}}}{s'x_r - E_{r,0}} + \frac{a_1\sqrt{\frac{A_1}{s_1}}}{s_1' x_r - E_{r,1}} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{a_{r-1}\sqrt{\frac{A_{r-1}}{s_{r-1}}}}{s_{r-1}' x_r - E_{r,r-1}} + \frac{a_{r+1}\sqrt{\frac{A_{r+1}}{s_{r+1}}}}{s_{r+1}' - E_{r,r+1}} + \cdots \right\}$$

$$\beta_r = s_r' a_r \frac{n'}{n_0} \sqrt{\frac{A_r}{s_r}};$$

die Gleichung (23) wird alsdann:

$$x_r^2 - 2h_r x_r = -\beta_r$$

und man findet:

$$x_r = h_r + \sqrt{h_r^2 - \beta_r}$$

also einen Werth, für deren Brauchbarkeit die Erfüllung der Bedingung:

$$h_r^2 \geqq \beta_r$$

erforderlich ist.

Die Grösse h_r wird bei dieser Rechnung allerdings als bekannt vorausgesetzt, während sie in Wirklichkeit jedoch die unbekannte Grösse x_r enthält. Die Berechnungsmethode bleibt aber anwendbar, wenn die Annäherungen convergiren, welche man dadurch einleitet, dass man für x_r irgend einen Näherungswerth, z. B. e_r in den Ausdruck für h_r einsetzt und hiermit einen verbesserten Werth von x_r berechnet.

Endlich mag noch hervorgehoben werden, dass die ganzen Zahlen s_m und s'_m aus dem Verhältnisse $\mu = \frac{n'}{n}$ und nicht aus dem Verhältnisse $\frac{n'}{n_0}$ gefunden werden. Im Anfang einer Rechnung, wo nur n_0 bekannt ist, können daher nur die ersten dieser ganzen Zahlen gefunden werden; die späteren ergeben sich nach und nach in dem Maasse, wie die mittlere Bewegung n genauer gefunden wird.

II.

Wenn bei einem characteristischen Gliede der entsprechende Werth von g_m oder k_m der Einheit sehr nahe kommt, oder wenn letztere Grösse die Einheit übersteigt, sage ich, dass das Glied kritisch wird, oder nenne dasselbe ein kritisches Glied: nach dem, was oben auseinandergesetzt wurde, ist also das auf ein kritisches Glied folgende characteristische Glied sehr hoher Ordnung hinsichtlich der Excentricitäten und Neigungen, und es muss überhaupt als eine Ausnahme angesehen werden, wenn von diesen folgenden Gliedern das eine oder andere wieder kritisch wird.[1] Wir sahen nehmlich wie im Gegentheil die Divisoren der späteren cha-

[1] In unserm Planetensysteme würde die Ordnung des auf ein kritisches Glied folgenden charakteristischen Gliedes sich wenigstens auf mehrere Hunderte belaufen.

racteristischen Gliedern derartig vergrössert erscheinen, dass eine durch die Integrationen hervorgerufene Vergrösserung der betreffenden Coefficienten nur ausnahmsweise zu erwarten ist.

Bei der Methode, durch welche wir im vorigen Abschnitte die Gleichung (2) integrirten, wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass die Divisoren nicht unter eine gewisse Grenze herabsinken, denn im andern Falle hätte man zwar für c_0 und n_0 in den Gleichungen (7) und (8) convergente Entwicklungen finden können, allein die Convergenz der, durch die Gleichung (8) gegebenen Entwicklung der Function F_1 wäre hiermit noch keineswegs sicher gestellt. Unsere Resultate bestehen daher bis jetzt wesentlich nur darin, dass wir von den Entwicklungen (7) und (8) sagen können, dass sie convergiren, wenn die durch die Gleichung (15) gegebenen Grössen k_m nicht die Einheit übersteigen. Wir werden aber nun unsere Untersuchungen dahin ausdehnen, dass wir von einem characteristischen Gliede annehmen, es könne kritisch werden; im Übrigen behalten wir die früheren Voraussetzungen bei, d. h. wir denken uns die folgenden Nenner: $s_1 n - s_1' n' - \sigma_1 n$, u. s. w. nicht so klein, wie sie bei dem grossen Betrage der ganzen Zahlen s_1 und s_1' und dem von derselben abhängenden Werthe von σ_1 nur ausnahmsweise sein können. Bei dieser Annahme muss die im vorigen Abschnitte befolgte Integrationsmethode durch eine andere ersetzt werden. Es wird uns hierbei vor Allem darauf ankommen, das kritische Glied von den übrigen zu trennen, wonach diese nach der soeben erwähnten Methode integrirt werden können.

Um den bezeichneten Zweck zu erreichen, zerlegen wir die Function Z in zwei Theile Z_0 und Z_1 und bestimmen diese Theile aus den Gleichungen:

$$(1) \qquad \frac{d^2 Z_0}{dt^2} = -n^2 A \sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma n t + B) + M - N$$

$$(2) \qquad \frac{d^2 Z_1}{dt^2} = -n^2 A_1 \sin(s_1\zeta - s_1'\zeta' + \sigma_1 n t + B_1) + \ldots - M + N$$

Mit den hier eingeführten Functionen M und N verfolgen wir, ebensowie mit den früher eingeführten analogen Functionen, den Zweck, Glieder gewisser Form von der einen der obigen Gleichungen zu der andern überzuführen.

Wie im vorhergehenden Abschnitte setzen wir auch jetzt:

$$\zeta' = c' + n't$$

$$\zeta = c + nt + Z + \delta\zeta$$

$$= c + nt + Z_0 + Z_1 + \delta\zeta$$

und erhalten durch Entwicklung nach den Potenzen von $Z_1 + \delta\zeta$:

$$\sin(s\zeta - s'\zeta' + \sigma t + B)$$

$$= \sin[sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B]$$

$$+ \frac{s(Z_1 + \delta\zeta)}{1}\cos[sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B]$$

$$- \frac{s^2(Z_1 + \delta\zeta)^2}{1 \cdot 2}\sin[sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B]$$

$$- \dots$$

Weil nun die Function $Z_1 + \delta\zeta$, wie man hier anzunehmen berechtigt ist, aus lauter Sinusgliedern besteht, so enthalten die ungraden Potenzen dieser Function ebenfalls lauter Sinusglieder, die graden Potenzen dagegen Cosinusglieder, nebst einer nothwendig positiven Constante. Diese constanten Glieder bezeichne ich durch h_2, h_4, ..., und bestimme die Function N aus der Formel:

$$N = - n^2 A \frac{s(Z_1 + \delta\zeta)}{1}\cos[sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B]$$

$$+ n^2 A \frac{s^3(Z_1 + \delta\zeta)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\cos[sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B]$$

$$- \dots$$

$$+ n^2 A s^2 \frac{(Z_1 + \delta\zeta)^2 - h_2}{1 \cdot 2}\sin[sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B]$$

$$- n^2 A s^4 \frac{(Z_1 + \delta\zeta)^4 - h_4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\sin[sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B]$$

$$+ \dots$$

Aus der Gleichung (1) findet sich hierauf die nachstehende:

$$(3) \qquad \frac{d^2Z_0}{dt^2}$$

$$= -n^2A\left(1-\frac{s^2h_2}{1.2}+\frac{s^4h_4}{1.2.3.4}-\dots\right)\sin[sc-s'c'+(sn-s'n'+\sigma n)t+sZ_0+B]$$
$$+ M;$$

und wir denken uns endlich die Function M so bestimmt, dass Glieder mit dem Argumente: $sc - s'c' + (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + B$, welche etwa in der Gleichung (2) entstehen können, mit dem Gliede rechter Hand in der Gleichung (3) ohne weiteres vereinigt werden. Wenn wir uns also den Coefficienten A in entsprechender Weise abgeändert denken, so können wir das Glied M ohne weiteres bei Seite lassen.

Es entsteht also nun eine Gleichung, die wir etwas vereinfacht schreiben werden, nachdem wir die Bezeichnungen:

$$2V = (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ_0 + sc - s'c' + B$$

$$\alpha^2 = sA\left(1-\frac{s^2h_2}{1.2}+\frac{s^4h_4}{1.2.3.4}-\dots\right)$$

festgestellt haben. Wir finden:

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -\alpha^2n^2\sin V\cos V$$

Durch Integration dieser Gleichung ergiebt sich unmittelbar, indem wir die Constante durch γ^2n^2 bezeichnen,

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = \gamma^2n^2 - \alpha^2n^2\sin V^2,$$

und durch die zweite Integration, bei der wir die hinzutretende Constante durch C bezeichnen, entsteht die Gleichung:

$$(4) \qquad V = \operatorname{am}(\gamma nt + C), \qquad \operatorname{mod} k = \frac{\alpha}{\gamma}$$

Es wird also auch:

$$(4') \qquad \frac{dV}{dt} = \gamma n \operatorname{dn}(\gamma nt + C)$$

In der Gleichung (4) haben wir ein Resultat gewonnen, welches leicht in bekannter Weise entwickelt werden kann. Hierauf erhält man unmittelbar den Werth von Z_0, dessen erstes Glied mit dem ersten Gliede des durch die Gleichung (5) im ersten Abschnitte gegebenen Werthes von Z übereinstimmen muss, nachdem man das Argument dieses Gliedes in derselben Weise entwickelt hat, wie in diesem Abschnitte zur Herstellung der Gleichung (3) nöthig war. Auf die Identität dieser Resultate, welche übrigens nur unter der Bedingung stattfindet, dass

$$k < 1$$

habe ich nur vorübergehend hingewiesen; wir werden im Folgenden von derselben keinen Gebrauch machen.

Die Werthe von $c + Z_0$ und $n + \frac{dZ_0}{dt}$, welche für den Zeitpunkt $t = 0$ gelten, bezeichne ich durch c_0 und n_0. Diese Grössen sind allerdings nicht identisch mit den früher unter denselben Bezeichnungen verstandenen Grössen, sie unterscheiden sich aber von diesen doch nur wenig, und können bei den jetzigen Untersuchungen die Stelle der letzteren vertreten, da man übersehen kann, dass die Unterschiede beider mit Leichtigkeit ermittelt und in der Rechnung berücksichtigt werden könnten. — Indem wir uns überdies der Bezeichnung:

$$D = \frac{1}{2}(sc_0 - s'c' + B)$$

bedienen, erhalten wir:

$$D = \operatorname{am} C;$$

und:

$$sn_0 - s'n' + \sigma n = 2\left(\frac{dV}{dt}\right)_0 = 2\gamma n \operatorname{dn} C$$

Setzen wir nun:

$$sn_0 - s'n' + \sigma n = 2\alpha\eta n_0$$

so wird:

$$\frac{n_0}{n} k = \frac{1}{\eta} \operatorname{dn} C$$

oder:

$$\eta^2 \frac{n_0^2}{n^2} k^2 = 1 - k^2 \operatorname{sn} C^2$$

Anderseits haben wir aber:

$$k^2 \sin D^2 = k^2 \operatorname{sn} C^2,$$

so dass die Gleichung:

$$\eta^2 \frac{n_0^2}{n^2} k^2 + k^2 \sin D^2 = 1$$

unmittelbar erhalten wird. — Bezeichnen wir noch:

$$\eta \frac{n_0}{n} = f$$

so entsteht die Gleichung:

$$f^2 + \sin D^2 = \frac{1}{k^2}, \tag{5}$$

welche mit der Gleichung (15) des vorigen Abschnittes bis auf Grössen, die hier nicht in Betracht kommen, identisch ist. Eine strenge Vergleichung mit den Resultaten des vorhergehenden Abschnittes ist überhaupt auch nicht nöthig, weil die Convergenz der daselbst gegebenen Reihen nicht nothwendig aufhört, wenn die Grössen k_m um sehr kleine Beträge die Einheit übersteigen; es genügt, dass die Grössen $k_m \sin D_m$ und $k_m \cos D_m$ kleiner als 1 bleiben. Bei der jetzigen Lösung kann aber der Modul k beliebig gross werden, ohne dass die durch die Gleichung (4) angegebene Form des Integrales aufhörte richtig zu sein. Dem ungeachtet ist es in mancherlei Hinsicht vortheilhaft, das Resultat durch elliptische Functionen auszudrücken, welche dem Modul

$$\frac{1}{k} = l$$

entsprechen, wenn der Modul k die Einheit übersteigt. Man findet nun leicht, auf Grund einiger bekannten Transformationsformeln,

$$\left\{\begin{aligned} \sin V &= l \operatorname{sn}(\alpha n t + C_1) \\ \cos V &= \operatorname{dn}(\alpha n t + C_1) \\ \frac{dV}{dt} &= \gamma n \operatorname{cn}(\alpha n t + C_1) \end{aligned}\right. \tag{6}$$

wo:

$$C_1 = \frac{1}{l} C = kC$$

gesetzt worden ist.

Weil nun die Entwicklung von $\mathrm{cn}(\alpha t + C_1)$ kein constantes Glied enthält, so kann. auch nicht die Function:

$$2 \frac{dV}{dt} = sn - s'n' + \sigma n + s \frac{dZ_0}{dt}$$

ein constantes Glied enthalten. In $\frac{dZ_0}{dt}$ können wir aber ein solches Glied nicht voraussetzen, wenn n die Bedeutung der mittleren Bewegung hat; wir schliessen daher, dass:

$$sn - s'n' + \sigma n = 0 \tag{7}$$

Setzen wir in den vorstehenden Gleichungen: $t = 0$, so gewinnen wir die Werthe:

$$\frac{1}{l} \sin D = \mathrm{sn}\, C_1$$

$$\frac{f}{l} = \mathrm{cn}\, C_1$$

Die Summe der Quadrate dieser Gleichungen giebt uns:

$$f^2 + \sin D^2 = l^2$$

also ein Resultat, welches bereits oben durch die Gleichung (5) nachgewiesen wurde.

Wenn $k < 1$, muss die Grösse $sn - s'n' + \sigma n$ offenbar gleich dem constanten Gliede in der Entwicklung von $2\gamma n \,\mathrm{dn}(\gamma n t + C)$ sein. Diese Bedingung giebt uns:

$$sn - s'n' + \sigma n = \gamma n \frac{\pi}{K} \tag{8}$$

wobei wir, wie üblich, durch K das vollständige elliptische Integral erster Gattung bezeichnen. Ziehen wir von dieser Gleichung den Werth:

$$sn_0 - s'n' + \sigma n = 2\gamma n \,\mathrm{dn}\, C$$

ab, so bleibt:

$$s(n - n_0) = 2\gamma n\left(\frac{\pi}{2K} - \operatorname{dn} C\right),$$

ein Werth, aus welchem wir auf Grund der Beziehung

$$n \operatorname{dn} C = \eta n_0 k = \frac{\eta n_0 \alpha}{\gamma}$$

den folgenden erhalten:

$$s(n - n_0) = 2\frac{\alpha\eta n_0}{\operatorname{dn} C}\left(\frac{\pi}{2K} - \operatorname{dn} C\right)$$

Für den Fall aber, dass $k > 1$, haben wir:

$$sn_0 - s'n' + \sigma n = 2\gamma n \operatorname{cn} C_1$$

und diesen Werth ziehen wir von der Gleichung (7) ab. Wir erhalten somit:

$$s(n - n_0) = -2\gamma n \operatorname{cn} C_1$$

Für die Beziehung zwischen n und n_0 haben wir also zwei verschiedene Ausdrücke gefunden, den einen gültig für den Fall: $k < 1$, den andern für den Fall: $k > 1$. Diese Ausdrücke sind aber nicht nur formell von einander verschieden, d. h. so, dass sie durch Transformation auf einander reducirt werden können. Wenn wir also n als Function von n_0 und k betrachten, so schliessen wir auf Grund des erwähnten Umstandes, dass n nicht eine synectische Function dieser beiden Variablen ist, sondern dass im Punkte $k = 1$ eine Unterbrechung der Stetigkeit stattfindet.

Die Formeln, welche zur Berechnung von k und C oder von l und C_1 dienen, werden wir jetzt unter einer von der früheren etwas abweichenden Form angeben, wobei wieder die Discontinuität der betreffenden Relationen hervortreten wird. Aus der Gleichung:

$$\alpha\eta n_0 = \gamma n \operatorname{dn} C$$

oder:

$$\frac{n}{n_0} = \frac{\alpha\eta}{\gamma \operatorname{dn} C} = \frac{\eta k}{\operatorname{dn} C}$$

erhalten wir auf Grund der Gleichungen (7) und (8):

$$\frac{s'n'}{(s+\sigma)n_0} = \frac{\eta}{l\,\mathrm{cn}\,C_1}$$

$$\frac{s'n'}{\left(s+\sigma+\gamma\frac{\pi}{K}\right)n_0} = \frac{\eta k}{\mathrm{dn}\,C}$$

Zu diesen Beziehungen kommen die bereits angegebenen. Wir haben also die beiden Systeme:

$$\text{(I)}\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{sn}\,C &= \sin D \\ \mathrm{cn}\,C &= \cos D \\ \frac{1}{k}\,\mathrm{dn}\,C &= \eta\frac{\left(s+\sigma+\gamma\frac{\pi}{K}\right)n_0}{s'n'} \\ k^2 &= \frac{1}{\eta^2\left(\frac{\left(s+\sigma+\gamma\frac{\pi}{K}\right)n_0}{s'n'}\right)^2 + \sin D^2} \end{aligned}\right.$$

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{aligned} l\,\mathrm{sn}\,C_1 &= \sin D \\ l\,\mathrm{cn}\,C_1 &= \eta\frac{(s+\sigma)n_0}{s'n'} \\ \mathrm{dn}\,C_1 &= \cos D \\ l^2 &= \eta^2\left(\frac{(s+\sigma)n_0}{s'n'}\right)^2 + \sin D^2 \end{aligned}\right.$$

In Fällen, wo k oder l der Einheit sehr nahe kommt, sind diejenigen Formelsysteme den vorhergehenden vorzuziehen, welche man durch Übergang auf die complementären Moduln k' und l' erhält. Es findet sich mit Hülfe bekannter Transformationsformeln:

$$
\text{(III)} \quad \left|\begin{array}{l}
\operatorname{sn}(iC, k') = i \operatorname{tang} D \\[2ex]
\operatorname{cn}(iC, k') = \dfrac{1}{\cos D} \\[2ex]
\dfrac{1}{k} \operatorname{dn}(iC, k') = \eta \dfrac{\left(s + \sigma + \gamma \dfrac{\pi}{K}\right) n_0}{s' n' \cos D} \\[2ex]
-\dfrac{k'^2}{k^2} = \cos D^2 - \eta^2 \left(\dfrac{\left(s + \sigma + \gamma \dfrac{\pi}{K}\right) n_0}{s' n'} \right)^2
\end{array}\right.
$$

$$
\text{(IV)} \quad \left|\begin{array}{l}
\operatorname{sn}(iC_1, l') = i \dfrac{s' n' \sin D}{\eta (s + \sigma) n_0} \\[2ex]
\dfrac{1}{l} \operatorname{cn}(iC_1, l') = \dfrac{s' n'}{\eta (s + \sigma) n_0} \\[2ex]
\dfrac{1}{l} \operatorname{dn}(iC_1, l') = \dfrac{s' n' \cos D}{\eta (s + \sigma) n_0} \\[2ex]
l'^2 = \cos D^2 - \eta^2 \left(\dfrac{(s + \sigma) n_0}{s' n'} \right)^2
\end{array}\right.
$$

Für:

$$k = l = 1$$

oder:

$$k' = l' = 0$$

fallen alle die angeführten Systeme zusammen, weil das Glied $\gamma \frac{\pi}{K}$ verschwindet; im Übrigen lassen sich die Systeme (I) und (II) oder (III) und (IV) nicht auf einander zurückführen.

Die Discontinuität, welche sich in den vorstehenden Beziehungen manifestirt, findet man nicht in den verschiedenen Formen wieder, durch welche die Function V durch die Zeit ausgedrückt werden kann. In den Gleichungen (4), (4') und (6) haben wir bereits zwei dieser Formen gegeben, diejenigen nehmlich, welche den Moduln k und l entsprechen; die beiden noch übrigen entsprechen den Moduln k' und l'; sie finden sich mittelst bekannter Transformationsformeln wie folgt:

$$
(9)\qquad \begin{cases}
\sin V = -\, i \operatorname{tang\,am}[i(\gamma nt + C), k'] \\[1ex]
\cos V = \dfrac{1}{\operatorname{cn}[i(\gamma nt + C), k']} \\[1ex]
\dfrac{dV}{dt} = \gamma n \dfrac{\operatorname{dn}[i(\gamma nt + C), k']}{\operatorname{cn}[i(\gamma nt + C), k']}
\end{cases}
$$

$$
(10)\qquad \begin{cases}
\sin V = -\, il \operatorname{tang\,am}[i(\alpha nt + C_1), l'] \\[1ex]
\cos V = \dfrac{\operatorname{dn}[i(\alpha nt + C_1), l']}{\operatorname{cn}[i(\alpha nt + C_1), l']} \\[1ex]
\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\gamma n}{\operatorname{cn}[i(\alpha nt + C_1), l']};
\end{cases}
$$

und diese beiden Systeme können aus einander abgeleitet werden, indem man sich der Transformationsformeln bedient, welche für den Übergang vom Modul k' auf den Modul $i\frac{k'}{k} = l'$ gültig sind.

Die Entwicklung der Functionen $\sin V$, $\cos V$ und $\frac{dV}{dt}$ in trigonometrischen Reihen mit reellem Argumente würde bei sehr kleinen Werthen von k' oder l' offenbar so wenig convergent sein, dass ihre Anwendung nicht als zweckmässig erachtet werden kann. Für solche Fälle, die allerdings zu den Ausnahmen gehören, müssen wir uns demnach nach anderen Entwicklungen umsehen, und dabei namentlich darauf Rücksicht nehmen, dass etwa später auftretende Quadraturen analytisch ausgeführt werden können. — Die nach den Potenzen von Exponentialfunctionen fortschreitenden Reihen, an die man hierbei zunächst denken könnte, erweisen sich bei näherer Überlegung auch nicht, wenigstens nicht direct, als anwendbar, weil sie nicht beständig convergiren. In der Darstellung der elliptischen Functionen durch Folgen von Partialbrüchen haben wir aber einen Ausgangspunkt, aus dem wir Entwicklungen herleiten können, welche unsern Forderungen genügen.

Wir bezeichnen, um eine kürzere Schreibweise zu gewinnen,

$$\gamma nt + C = u;$$

dann wird:

$$\alpha nt + C_1 = ku$$

Ferner wenden wir, neben der üblichen Bezeichnung:

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

auch die folgende an:

$$q' = e^{-\pi\frac{K}{K'}}$$

In der Theorie der elliptischen Functionen werden bekanntlich nachstehende Entwicklungen gegeben:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
-i\frac{\mathrm{sn}(iu, k')}{\mathrm{cn}(iu, k')} &= \frac{\pi}{kK'}\left\{\frac{1}{2} - \frac{e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + \sum\frac{(-1)^n q'^{2n} e^{\frac{\pi u}{K'}}}{1+q'^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right.\\
&\qquad\left. - \sum\frac{(-1)^n q'^{2n} e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+q'^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}\right\}\\
\frac{1}{\mathrm{cn}(iu, k')} &= \frac{\pi}{kK'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + \sum\frac{(-q')^n e^{\frac{\pi u}{2K'}}}{1+q'^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}} + \sum\frac{(-q')^n e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+q'^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}\right\}\\
\frac{\mathrm{dn}(iu, k')}{\mathrm{cn}(iu, k')} &= \frac{\pi}{K'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + \sum\frac{q'^n e^{\frac{\pi u}{2K'}}}{1+q'^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}} + \sum\frac{q'^n e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+q'^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}\right\}
\end{aligned}\right.$$

bei denen die Summationen von $n = 1$ bis $n = \infty$ auszudehnen sind.

Diese Formeln, welche unmittelbar die Entwicklungen des Systems (9) geben, sind in der Hinsicht bemerkenswerth, dass die darin vorkommenden Nenner unverändert bleiben, wenn man q' gegen $-q'$ vertauscht. — Weil nun das Formelsystem (10) aus dem Systeme (9) ohne weiteres erhalten wird, wenn man k' durch $\frac{ik'}{k}$, oder, was dasselbe ist, q' durch $-q'$ ersetzt, und weil die soeben angeführten Entwicklungen ebenfalls für negative Werthe von q' gültig und für die geeignete Darstellung der betreffenden Functionen anwendbar bleiben, so lassen sich diese Functionen — es sei, dass sie durch die Gleichungen des Systems (9) oder durch die des Systems (10) gegeben sind — durch Entwicklungen angeben, die noch gültig bleiben, wenn man sich q' als veränderlich denkt und dabei für dieselbe Werthe annimmt, die abwechselnd positiv und negativ sein können.

Um das Verhalten der in Frage stehenden Formeln beim Übergange völlig in's Licht setzen zu können, bedienen wir uns der Bezeichnungen L und L' zur Angabe der vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung, welche den Moduln l und l' entsprechen. Bekanntlich geht nun K' in lL' über, wenn q' negativ wird, oder wenn k' in $\frac{ik'}{k}$ übergeht.

Auf Grund der bekannten Entwicklungen:

$$\frac{2K'}{\pi} = 1 + \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} + \ldots$$

$$\frac{2kK'}{\pi} = 1 - \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} - \ldots$$

schliessen wir nun auf die Relation:

$$k\left(1 + \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} + \ldots\right) = 1 - \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} - \ldots$$

und hiermit eröffnet sich die Möglichkeit, das Argument $\frac{\pi u}{2K'}$ in zweifacher Weise auszudrücken. Wir haben nehmlich:

$$\frac{\pi u}{2K'} = \frac{\gamma nt + C}{1 + \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} + \ldots}$$

Wird nun q' negativ, so geht dieser Werth in den folgenden über:

$$\begin{aligned}\frac{\pi u}{2K'} &= \frac{\gamma nt + C}{1 - \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} - \ldots} \\ &= \frac{l(\gamma nt + C)}{1 + \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} + \ldots} \\ &= \frac{ant + C_1}{1 + \frac{4q'}{1+q'^2} + \frac{4q'^2}{1+q'^4} + \ldots} = \frac{\pi}{2L'}(ant + C_1)\end{aligned}$$

Der Algorithmus, durch welchen die Entwicklungen (11) dargestellt wurden, bietet nicht die nöthige Bequemlichkeit dar, weil ein jedes Glied der unendlichen Reihen für einen gewissen Werth der Veränderlichen u grösser wird als die Glieder vorher und nachher. Die betreffenden Reihen sind zwar convergent aber der Punkt, wo die Convergenz anfängt, verschiebt sich und ist als eine Function von u anzusehen. Um gleichförmig convergente Entwicklungen zu erhalten, müssen wir die Veränderliche innerhalb gewisser Grenzen einschliessen, wozu folgende Schritte nöthig sind, welche, wie wir später sehen werden, die Anwendbarkeit der Entwicklungen auch über die gezogenen Grenzen hinaus nicht verhindern.

Es sei nun m eine positive oder negative ganze Zahl, die wir so bestimmt denken, dass die Grösse ω in der Gleichung

$$u = 2mK + \omega$$

immer zwischen 0 und $+2K$ eingeschlossen bleibt. Auf Grund der Periodicität der elliptischen Functionen ergeben sich hiermit aus den Entwicklungen (11) die nachstehenden, deren Richtigkeit man übrigens leicht direct verificiren kann,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
-i\frac{\mathrm{sn}(iu,k')}{\mathrm{cn}(iu,k')} &= (-1)^m\frac{\pi}{kK'}\left\{\frac{1}{2} - \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}} - \frac{e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}}{1+e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}} + \frac{q'^2e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}}{1+q'^2e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{q'^2e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}}{1+q'^2e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}} - \dots\right\}\\
\frac{1}{\mathrm{cn}(iu,k')} &= (-1)^m\frac{\pi}{kK'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2K'}(2K-\omega)}}{1+e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}} - \frac{q'e^{-\frac{\pi\omega}{2K'}}}{1+q'^2e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{q'e^{-\frac{\pi}{2K'}(2K-\omega)}}{1+q'^2e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}} + \dots\right\}\\
\frac{\mathrm{dn}(iu,k')}{\mathrm{cn}(iu,k')} &= \frac{\pi}{K'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi\omega}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}} + \frac{e^{-\frac{\pi}{2K'}(2K-\omega)}}{1+e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}} + \frac{q'e^{-\frac{\pi\omega}{2K'}}}{1+q'^2e^{-\frac{\pi\omega}{K'}}}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{q'e^{-\frac{\pi}{2K'}(2K-\omega)}}{1+q'^2e^{-\frac{\pi}{K'}(2K-\omega)}} + \dots\right\}
\end{aligned}\right.$$

Die Entwicklung eines Gliedes der Form:

$$\frac{q'^{\nu} e^{-x}}{1 + q'^{2\nu} e^{-2x}}$$

kann unmittelbar nach den steigenden Potenzen von $q'^{2\nu}e^{-2x}$ ausgeführt werden, wenn die ganze Zahl ν grösser als o ist, und convergirt dieselbe immer sehr schnell, da der Factor q'^2 eine äusserst kleine Grösse bezeichnet; wenn aber der Fall eintritt, wo $\nu = 0$, ist die Convergenz derartiger Potenzenreihen nicht mehr gesichert, wesshalb wir uns nach anderen Formen für die betreffenden Entwicklungen umsehen müssen. Zu diesem Zwecke bedienen wir uns der identischen Gleichung:

$$\frac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{-x}\left(1 - \frac{1}{2} e^{-2x}\right)}{1 + \frac{1}{2} e^{-2x}(1 - e^{-2x})}$$

Das Glied:

$$\frac{1}{2} e^{-2x}(1 - e^{\;2x})$$

kann offenbar nie grösser als $\frac{1}{8}$ werden so lange x positiv bleibt; wir können daher nach den steigenden Potenzen desselben entwickeln und dabei eine, wenn auch nicht sehr rapide, so doch genügende Convergenz erwarten. Um die betreffenden Entwicklungen übersichtlicher zu erhalten, bedienen wir uns dabei der nachstehenden Bezeichnungen:

$$U^{(0)}(x) = e^{-x}\left(1 - \frac{1}{2} e^{-2x}\right)$$

$$U^{(1)}(x) = - \frac{1}{2} e^{-3x}\left(1 - \frac{1}{2} e^{-2x}\right)(1 - e^{-2x})$$

$$U^{(2)}(x) = \frac{1}{2^2} e^{-5x}\left(1 - \frac{1}{2} e^{-2x}\right)(1 - e^{-2x})^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und allgemein, indem r eine ganze Zahl bedeutet,

(13) $$U^{(r)}(x) = \frac{(-1)^r}{2^r} e^{-(2r+1)x}\left(1 - \frac{1}{2} e^{-2x}\right)(1 - e^{-2x})^r$$

Mit Hülfe dieses Algorithmus erhalten wir die Entwicklung:

$$(14) \qquad \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} = U^{(0)}(x) + U^{(1)}(x) + \ldots,$$

womit die betreffenden Glieder der Gleichungen (12) durch convergente, nach U-Functionen fortschreitende Reihen dargestellt werden können.

Wir sind jetzt in der Lage, das Integral:

$$(15) \qquad J = \int_0^u e^{i\lambda} \mathrm{dn}\, u du,$$

wo λ eine beliebige positive oder negative, rationale oder irrationale Zahl bedeutet, auch in den Fällen analytisch berechnen zu können, wo die Grösse q so nahe der Einheit kommt, dass die gewöhnliche trigonometrische Reihe für $\mathrm{dn}\, u$ nicht mehr als genügend convergent erachtet werden kann. — Zunächst zerlegen wir das Integrationsintervall in Theile, von denen die m ersten den Werth $2K$ haben, der letzte aber den Werth ω. Es wird also:

$$J = \int_0^{2K} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u du + \int_{2K}^{4K} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u du + \ldots + \int_{(2m-2)K}^{2mK} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u du + \int_{2mK}^{2mK+\omega} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u du$$

Die Grenzen dieser Integrale können sehr leicht auf 0 und $2K$ oder auf 0 und ω reducirt werden. Es ist nehmlich:

$$\int_{2K}^{4K} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u du = e^{2i\lambda K} \int_0^{2K} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u du$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\int_{(2m-2)K}^{2mK} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u du = e^{(2m-2)i\lambda K} \int_0^{2K} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u du$$

$$\int_{2mK}^{2mK+\omega} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u du = e^{2mi\lambda K} \int_0^{\omega} e^{i\lambda u} \mathrm{dn}\, u du$$

Man erhält hiermit, indem man sogleich die Glieder summirt, welche den Coefficienten des bestimmten Integrals mit den Grenzen 0 und K bilden,

$$(16)\qquad J = \frac{1 - e^{2mi\lambda K}}{1 - e^{2i\lambda K}} \int_0^{2K} e^{i\lambda u} \operatorname{dn} u du + e^{2mi\lambda K} \int_0^{\omega} e^{i\lambda u} \operatorname{dn} u du$$

Denken wir uns jetzt: $k > 1$, also $l < 1$, und bezeichnen wir:

$$ku = \frac{1}{l} u = w,$$

so wird die Function J durch die nachstehende Formel gegeben:

$$(17)\qquad J = l \int_0^{w} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w dw$$

Wir setzen nun:

$$w = 2mL + \tau$$

und denken uns die ganze Zahl m so gewählt, dass τ zwischen 0 und $2L$ schwankt.

Zufolge der Gleichungen:

$$\int_{2L}^{4L} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w dw = - e^{2il\lambda L} \int_0^{2L} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w dw$$

$$\int_{4L}^{6L} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w dw = + e^{4il\lambda L} \int_0^{2L} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w dw$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\int_{(2m-2)L}^{2mL} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w dw = (-1)^{m-1} e^{(2m-2)il\lambda L} \int_0^{2L} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w dw$$

$$\int_{2mL}^{2mL+\tau} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w dw = (-1)^{m} e^{2mil\lambda L} \int_0^{\tau} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w dw$$

ergiebt sich hierauf:

$$(18)\qquad J(l) = \frac{1 - e^{2mil\lambda L + im\pi}}{1 + e^{2il\lambda L}}\, l \int_0^{2L} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w dw + e^{2mil\lambda L + im\pi}\, l \int_0^{\tau} e^{il\lambda w} \operatorname{cn} w dw$$

Die Formeln (16) und (18) geben den Anschein, als ob zwischen ihnen ein Sprung stattfände; dies ist aber nicht der Fall. Wenn nehmlich:

$$k = l = 1,$$

so ist:

$$K = L = \infty$$

und nun muss offenbar der Werth Null für die ganze Zahl m angenommen werden. Man bemerkt leicht, dass die beiden Formeln (16) und (18) unter dieser Voraussetzung dasselbe Resultat ergeben, nehmlich:

$$J = \int_0^\omega \frac{2e^{i\lambda u}\,du}{e^u + e^{-u}} \tag{19}$$

Die Entwicklung der Function unter dem Integralzeichen giebt uns:

$$J = 2\int_0^\omega e^{i\lambda u}(U^{(0)}(u) + U^{(1)}(u) + \ldots)du$$

Die Convergenz dieser Entwicklung wollen wir hier noch untersuchen, weil diese nahezu dieselbe ist wie man sie bei den analogen Entwicklungen der Integrale in den Gleichungen (16) und (18) erwarten kann. Die Annahme in Bezug auf die Grösse des Coefficienten λ, welche für uns das grösste Interesse hat, ist die, dass dieselbe sehr klein ist. Wir werden aus diesem Grunde, und um die Schreibweise zu vereinfachen λ neben den ganzen Zahlen vernachlässigen. Das Integral setzt sich nun aus zwei Theilen zusammen, von denen der eine nach den Potenzen der Exponentialgrösse $e^{-\omega}$ entwickelt erscheint, und daher mit wachsendem ω rasch abnimmt und sehr schnell convergirt. Der andere Theil, welcher durch die Substitution der Grenze 0 entsteht, reducirt sich auf eine Constante. Für den Coefficienten des n^{ten} Gliedes, den wir mit K_n bezeichnen wollen, ergiebt sich bei Vernachlässigung von λ neben n der Ausdruck:

$$\begin{aligned} K_n = \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\frac{1}{2n+1} - \frac{n}{1}\frac{1}{2n+3} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{2n+5} - \ldots\right\} \\ - \frac{1}{2^n}\left\{\frac{1}{2n+3} - \frac{n}{1}\frac{1}{2n+5} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{2n+7} - \ldots\right\} \end{aligned}$$

Die beiden Reihen lassen sich in bekannter Weise durch bestimmte Integrale summiren, wodurch gefunden wird:

$$K_n = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^1 x^{2n}(1 - x^2)^n dx - \frac{1}{2^n} \int_0^1 x^{2n+2}(1 - x^2)^n dx$$

Nun hat man aber allgemein:

$$\int x^{2n+2}(1 - x^2)^n dx = -\frac{x^{2n+1}(1 - x^2)^{n+1}}{4n + 3} + \frac{2n + 1}{4n + 3} \int x^{2n}(1 - x^2)^n dx,$$

eine Formel von deren Richtigkeit man sich durch Differentiation sehr leicht überzeugen kann. Für die Grenzwerthe verschwindet das vom Integralzeichen befreite Glied und es findet sich:

$$\int_0^1 x^{2n+2}(1 - x^2)^n dx = \frac{2n + 1}{4n + 3} \int_0^1 x^{2n}(1 - x^2)^n dx$$

Hiermit ergiebt sich für K_n der Werth:

$$K_n = \frac{6n + 5}{8n + 6} \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^1 x^{2n}(1 - x^2)^n dx$$

$$= \frac{6n + 5}{8n + 6} \frac{1}{2^n} \int_0^1 x^{n-\frac{1}{2}}(1 - x)^n dx$$

Es ist aber:

$$\int_0^1 x^{n-\frac{1}{2}}(1 - x)^n dx = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma(n + 1)}{\Gamma\left(2n + \frac{3}{2}\right)}$$

$$= 2 \frac{2.4.6 \ldots 2n}{(2n + 1)(2n + 3) \ldots (2n + 2n + 1)}$$

Man bemerkt auf Grund dieser Formeln, dass die K_n-Coefficienten bei grossen n-Werthen nahezu in derselben Weise convergiren wie eine nach den Potenzen von $\frac{1}{8}$ fortschreitende Reihe.

Wir wenden uns nun zu der Entwicklung des Integrales:

$$(20)\qquad H(k) = \int_0^{2K} e^{i\lambda u} \operatorname{dn} u\, du$$

Für $\operatorname{dn} u$ setzen wir hier die Reihe ein, welche in den Gleichungen (12) gegeben ist. Nachdem wir die Glieder dieser Reihe nach U-Functionen entwickelt haben, erhalten wir das in Frage stehende Integral in Reihen zerlegt, deren Glieder die nachstehende allgemeine Form haben:

$$(21)\qquad H_\nu(k) = \frac{\pi}{K'} \int_0^{2K} e^{i\lambda u} \left(e^{-\nu\frac{\pi u}{2K'}} + e^{-\frac{\nu\pi}{2K'}(2K-u)}\right) du$$

Es bedeutet dabei ν eine ganze positive ungrade Zahl.

In gleicher Weise zerlegen wir das Integral:

$$(22)\qquad H(\omega, k) = \int_0^{\omega} e^{i\lambda u} \operatorname{dn} u\, du$$

in Theile der Form:

$$(23)\qquad H_\nu(\omega, k) = \frac{\pi}{K'} \int_0^{\omega} e^{i\lambda u} \left(e^{-\nu\frac{\pi u}{2K'}} + e^{-\frac{\nu\pi}{2K'}(2K-u)}\right) du$$

Die Integrale (21) und (23) finden sich nun unmittelbar; es ist nehmlich:

$$(\mathrm{A})\qquad \int e^{i\lambda u}\left(e^{-\nu\frac{\pi u}{2K'}} + e^{-\nu\frac{\pi}{2K'}(2K-u)}\right) du = -\frac{e^{i\lambda u - \nu\frac{\pi u}{2K'}}}{\frac{\nu\pi}{2K'} - i\lambda} + \frac{e^{i\lambda u - \frac{\nu\pi}{2K'}(2K-u)}}{\frac{\nu\pi}{2K'} + i\lambda};$$

und hieraus ergiebt sich, nachdem wir die Grenzen 0 und $2K$ für u substituirt haben,

$$(24)\qquad H_\nu(k) = \frac{\pi}{K'} \frac{\frac{\nu\pi}{2K'}(1 - q'^\nu)(1 + e^{2i\lambda K})}{\left(\frac{\nu\pi}{2K'}\right)^2 + \lambda^2} + i\frac{\pi}{K'} \frac{\lambda(1 + q'^\nu)(1 - e^{2i\lambda K})}{\left(\frac{\nu\pi}{2K'}\right)^2 + \lambda^2}$$

Durch Einsetzen der Grenzen o und ω findet sich in derselben Weise, und wenn wir uns dabei der Bezeichnung:

$$h = e^{-\frac{\pi\omega}{2K'}}$$

bedienen,

$$(25)\qquad H_\nu(\omega, k) = \frac{\pi}{K'}\,\frac{\frac{\nu\pi}{2K'}\left\{\left[\left(\frac{q'}{h}\right)^\nu - h^\nu\right]e^{i\lambda\omega} + 1 - q'^\nu\right\}}{\left(\frac{\nu\pi}{2K'}\right)^2 + \lambda^2}$$

$$- i\frac{\pi}{K'}\,\frac{\lambda\left\{\left[\left(\frac{q'}{h}\right)^\nu + h^\nu\right]e^{i\lambda\omega} - (1 + q'^\nu)\right\}}{\left(\frac{\nu\pi}{2K'}\right)^2 + \lambda^2}$$

Mit Rücksicht auf die in (24) und (25) gegebenen Werthe erhält man aus der Gleichung (16) den entsprechenden Theil von J, den ich mit $J_\nu(k)$ bezeichnen werde. Für die Summe $2mK + \omega$ setzen wir den Werth u ein, und beachten, dass

$$\frac{1 + e^{2i\lambda K}}{1 - e^{2i\lambda K}} = i \operatorname{cotang} \lambda K$$

Das Resultat wird nun:

$$(26)\qquad J_\nu(k) = \frac{\pi}{K'}\,\frac{\frac{\nu\pi}{2K'}(1 - q'^\nu)}{\left(\frac{\nu\pi}{2K'}\right)^2 + \lambda^2}\left\{i \operatorname{cotang} \lambda K(1 - e^{2mi\lambda K}) + e^{2mi\lambda K}\right\}$$

$$+ i\frac{\pi}{K'}\,\frac{\lambda(1 + q'^\nu)}{\left(\frac{\nu\pi}{2K'}\right)^2 + \lambda^2}$$

$$+ \frac{\pi}{K'}\,\frac{\frac{\nu\pi}{2K'}\left[\left(\frac{q'}{h}\right)^\nu - h^\nu\right] - i\lambda\left[\left(\frac{q'}{h}\right)^\nu + h^\nu\right]}{\left(\frac{\nu\pi}{2K'}\right)^2 + \lambda^2}\,e^{i\lambda u}$$

Zu dieser Formel fügen wir die Bemerkung, dass die Glieder, welche den Factor $\operatorname{cotang} \lambda K$ enthalten, und also bei sehr kleinen Werthen von λ sehr gross werden können, von den Exponentialgrössen h und $\frac{q'}{h}$ unabhängig sind. Die Glieder, welche diese Grössen enthalten, werden durch den Integrationsprocess nicht vergrössert, sondern im Gegentheil vermindert, weil sie den Factor $\frac{1}{\nu}$ erhalten.

Es erübrigt, die Formeln, welche den Gleichungen (20)—(26) entsprechen, für den Modul l aber gültig sind, abzuleiten. Wir führen zunächst die Bezeichnung

$$H(l) = l\int_0^{2L} e^{il\lambda w}\,\mathrm{cn}\,w dw \tag{27}$$

ein, und zerlegen, der zweiten der Gleichungen (12) gemäss, dieses Integral in Theile der Form:

$$H_\nu(l) = (-1)^m\frac{\pi}{L'}\int_0^{2L} e^{il\lambda w}\left(e^{-\nu\frac{\pi w}{2L'}} - e^{-\frac{\nu\pi}{2L'}(2L-w)}\right)dw \tag{28}$$

Ebenso zerlegen wir das Integral:

$$H(\tau, l) = l\int_0^{\tau} e^{il\lambda w}\,\mathrm{cn}\,w dw \tag{29}$$

und bezeichnen die Theile durch:

$$H_\nu(\tau, l) = (-1)^m\frac{\pi}{L'}\int_0^{\tau} e^{il\lambda w}\left(e^{-\nu\frac{\pi w}{2L'}} - e^{-\frac{\nu\pi}{2L'}(2L-w)}\right)dw \tag{30}$$

Es ist hierbei die Bemerkung am Platze, dass $H_\nu(\tau, l)$ aus $H_\nu(\omega, k)$ unmittelbar hervorgeht, wenn man K' in lL', K in $l(K + iL')$, u in lw und ω in $l\tau$ verwandelt, und dem Resultate überdies den Factor $(-1)^m$ hinzufügt.

Mit Hülfe der Formel (A) ergiebt sich aus (28) der Werth:

$$\begin{aligned} H_\nu(l) = (-1)^m\frac{\pi}{L'}\,&\frac{\frac{\nu\pi}{2L'}(1 + q'^\nu)(1 - e^{2il\lambda L})}{\left(\frac{\nu\pi}{2L'}\right)^2 + l^2\lambda^2} \\ &+ (-1)^m i\frac{\pi}{L'}\,\frac{l\lambda(1 - q'^\nu)(1 + e^{2il\lambda L})}{\left(\frac{\nu\pi}{2L'}\right)^2 + l^2\lambda^2} \end{aligned} \tag{31}$$

und aus der Formel (30) findet man die folgende:

$$
(32) \qquad H_\nu(\tau, l) = (-1)^m \frac{\pi}{L'} \left| - \frac{\frac{\nu\pi}{2L'}\left\{\left[\left(\frac{q'}{b}\right)^\nu + b^\nu\right] e^{il\lambda\tau} - (1 + q'^\nu)\right\}}{\left(\frac{\nu\pi}{2L'}\right)^2 + l^2\lambda^2} + i \frac{l\lambda\left\{\left[\left(\frac{q'}{b}\right)^\nu - b^\nu\right] e^{il\lambda\tau} + 1 - q'^\nu\right\}}{\left(\frac{\nu\pi}{2L'}\right)^2 + l^2\lambda^2} \right|
$$

indem wir die Bezeichnung

$$
b = e^{-\nu\frac{\pi\tau}{2L'}}
$$

feststellen.

Auf Grund der Gleichung (18) erhalten wir nun für den Theil $J_\nu(l)$ der Function $J(l)$ den Ausdruck:

$$
(33) \qquad J_\nu(l) = \frac{\pi}{L'} \frac{\frac{\nu\pi}{2L'}(1 + q'^\nu)}{\left(\frac{\nu\pi}{2L'}\right)^2 + l^2\lambda^2} \left\{ i \operatorname{tang} l\lambda L \left[(-1)^m - e^{2mil\lambda L}\right] + e^{2mil\lambda L} \right\}
$$

$$
+ i(-1)^m \frac{\pi}{L'} \frac{l\lambda(1 - q'^\nu)}{\left(\frac{\nu\pi}{2L'}\right)^2 + l^2\lambda^2}
$$

$$
- \frac{\pi}{L'} \frac{\frac{\nu\pi}{2L'}\left[\left(\frac{q'}{b}\right)^\nu + b^\nu\right] - il\lambda\left[\left(\frac{q'}{b}\right)^\nu - b^\nu\right]}{\left(\frac{\nu\pi}{2L'}\right)^2 + l^2\lambda^2} e^{il\lambda w}
$$

Diese Formel verhält sich hinsichtlich des Grosswerdens gewisser Glieder grade umgekehrt als die Formel (26). Während nehmlich in letzterer einige Glieder bei sehr kleinen Werthen von λ erheblich anwachsen können, ist dies in der Formel (33) nicht der Fall, sondern werden bei ihr grade dieselben Glieder wesentlich verkleinert erscheinen. Vergrössert werden aber in der Formel (33) solche Glieder, bei denen das Product $l\lambda L$ nahezu den Werth einer ungraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ hat.

In Bezug auf die Formeln (26) und (33) ist endlich noch zu bemerken, dass sie für $m = 0$ mit einander identisch werden; sie geben daher auch identische Werthe für $k = l = 1$.

Die Ungleichheit, welche einem Gliede entspricht, bei dem der Coefficient k_m [Abschn. I, Gleichung (15)] grösser als die Einheit ist, hat man Libration genannt. Solche Ungleichheiten wurden bisher als Ausnahmen angesehen und bei den Untersuchungen über das Problem der drei Körper oder über die Störungstheorie fast immer unberücksichtigt gelassen. In der That war es auch nur in sehr seltenen Fällen möglich, das Vorhandensein derartiger Bewegungsgleichungen zu constatiren, wesshalb eine allgemeine und tiefer dringende Untersuchung derselben für astronomische Zwecke nicht als nöthig erachtet wurde; eine directe Veranlassung, die hierauf bezüglichen Untersuchungen weiter auszudehnen, als zur Behandlung des gegebenen Falles nöthig war, gab es von diesem Gesichtspunkte aus eben nicht.

Ganz anders gestaltet sich aber die Nothwendigkeit derartiger Untersuchungen, wenn man sie von einem theoretischen Standpunkte aus betrachtet. Dann zeigt sich nehmlich das seltene Vorkommen von Librationsungleichheiten wohl als eine Thatsache, die unserm Sonnensysteme eigenthümlich ist, keineswegs aber als eine Erscheinung, die an sich überwiegend wahrscheinlich wäre. Bei einer absoluten Lösung des Problems der drei Körper, auch wenn man die üblichen, mit den Verhältnissen im Sonnensysteme übereinstimmenden Einschränkungen hinsichtlich der Werthe der Massen, der Excentricitäten, der Neigungen und der mittleren Entfernungen von der Sonne gelten lässt, muss daher die Möglichkeit des Vorkommens einer Librationsungleichheit offen gehalten werden. — Wollte man als Grundlage der Untersuchung sich die Annahme gestatten, dass keine Librationsungleichheit vorkomme, so wäre diese mit der Voraussetzung gleichbedeutend, dass keine der Grössen k_m, auch nicht nach Berücksichtigung der aus Gliedern höherer Ordnung veranlassten Correctionen, grösser als 1 sein könne. Eine solche Voraussetzung wäre auch, wie wir aus unseren Untersuchungen bereits gesehen haben, mit derjenigen identisch, dass die bekannten Entwicklungen — in dem Abschnitte I durch die Gleichungen (3) und (5) angegeben — gleichförmig convergent wären. Man hätte also grade dasjenige von vorn herein angenommen, was erst als Resultat aus der Untersuchung hervorgehen kann. Indem wir aber, bei unsern Untersuchungen, eine Annahme in diesem

Sinne gar nicht in Frage gestellt haben, sind wir bei dem Resultate angelangt, dass, wenn die Reihen (3) und (5) des vorhergehenden Abschnittes — immer von den mit F und F_1 bezeichneten Gliedern abgesehen — nicht convergiren, so muss wenigstens eine der Grössen k_m die Einheit übersteigen, womit diese Entwicklungen ihre Bedeutung überhaupt verlieren. In diesem Falle existirt eine Librationsungleichheit, und wir werden im nächsten Abschnitte sehen, dass wenn der Coefficient dieses Gliedes, welcher eine Integrationsconstante ist, einen hinreichend kleinen Werth hat, die Reihe der characteristischen Glieder welche dem Librationsgliede folgen, auch nach der doppelten Integration eine gleichförmig convergente Reihe sein wird.

III.

Unsern jetzt vorzunehmenden Untersuchungen legen wir die Gleichung (2) des ersten Abschnittes zu Grunde, nachdem wir in derselben

$$\zeta = c + nt + Z; \qquad \zeta' = c' + n't$$

gesetzt haben.

Indem wir von dem ersten Gliede voraussetzen, dass es kritisch werde, bezeichnen wir:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 2V &= (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ + sc - s'c' + B \\ 2(X) &= - sA_1 \sin[(s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n)t + s_1 Z + s_1 c - s_1' c' + B_1] \\ &\quad - sA_2 \sin[(s_2 n - s_2' n' + \sigma_2 n)t + s_2 Z + s_2 c - s_2' c' + B_2] \\ &\quad - \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

wonach die betreffende Gleichung nachstehende Gestalt annimmt:

$$(2)\qquad \frac{d^2 V}{dt^2} + n^2 sA \sin V \cos V = n^2 (X)$$

Hierbei ist zu bemerken, dass die Coefficienten der Glieder in X sehr kleine Grössen in Verhältniss zu A sind, dass aber die ganzen Zahlen s_1, s_1' und noch mehr s_2, s_2' sehr erhebliche Werthe haben.

Wir setzen hierauf:

$$V = V_0 + V_1$$

und entwickeln die Function:

$$\sin V \cos V = \frac{1}{2} \sin 2(V_0 + V_1)$$

nach den Potenzen von $2V_1$. Diese Entwicklung, welche bekanntlich immer convergirt, ist die nachstehende:

$$\sin V \cos V = \sin V_0 \cos V_0 \left(1 - \frac{4V_1^2}{1.2} + \frac{16V_1^4}{1.2.3.4} - \dots\right)$$

$$- (2 \sin V_0^2 - 1)\left(V_1 - \frac{4V_1^3}{1.2.3} + \dots\right)$$

Es seien nun: $h_2, h_4, \dots$ die constanten Glieder in $V_1^2, V_1^4, \dots$; ferner sei:

(3) $$\alpha^2 = sA\left(1 - \frac{4h_2}{1.2} + \frac{16h_4}{1.2.3.4} - \dots\right)$$

und:

(4) $$X = (X) - sA\left(-\frac{4(V_1^2 - h_2)}{1.2} + \frac{16(V_1^4 - h_4)}{1.2.3.4} - \dots\right) \sin V_0 \cos V_0$$

$$+ sA\left(-\frac{4V_1^3}{1.2.3} + \frac{16V_1^5}{1.2.3.4.5} - \dots\right)(2 \sin V_0^2 - 1);$$

die Gleichung (2) können wir nun in zwei andere zerlegen, nehmlich in:

(5) $$\frac{d^2V_0}{dt^2} + n^2\alpha^2 \sin V_0 \cos V_0 = 0$$

und:

(6) $$\frac{d^2V_1}{dt^2} - n^2\alpha^2(2 \sin V_0^2 - 1) V_1 = n^2 X$$

Die Gleichung (5) giebt uns sofort:

$$V_0 = \operatorname{am} \xi \ (\mathrm{mod} = k),$$

wenn wir setzen:

$$\xi = \gamma n t + C; \qquad k = \frac{\alpha}{\gamma},$$

und mit γ und C die beiden Integrationsconstanten bezeichnen. Nachdem wir diesen Werth von V_0 in die Gleichung (6) eingeführt, und nt durch $\frac{1}{\gamma} d\xi$ ersetzt haben, nimmt diese Gleichung die folgende Gestalt an:

$$\frac{d^2 V_1}{d\xi^2} - k^2(2\,\mathrm{sn}\,\xi^2 - 1)V_1 = \frac{1}{\gamma^2} X \tag{7}$$

Das Integral dieser sogenannten LAMÉ'schen Gleichung ist bekannt; wir schreiben es am kürzesten, wie folgt, wobei wir die beiden Integrationsconstanten mit c_1 und c_2 bezeichnen, und E die Bedeutung des vollständigen elliptischen Integrals zweiter Gattung hat,

$$\begin{aligned} V_1 = c_1 \,\mathrm{dn}\,\xi + c_2 \,\mathrm{dn}\,\xi\left[\frac{d \log \Theta_3(\xi)}{d\xi} + \frac{E}{K}\xi\right] \\ + \frac{\mathrm{dn}\,\xi}{\gamma^2 k'^2} \int \frac{k'^2 d\xi}{\mathrm{dn}\,\xi^2} \int X \,\mathrm{dn}\,\xi d\xi \end{aligned} \tag{8}$$

Vermöge der Relation:

$$\frac{k'^2}{\mathrm{dn}\,\xi^2} = \frac{E}{K} + \frac{d^2 \log \Theta_3(\xi)}{d\xi^2}$$

lässt sich die vorstehende Formel indessen auf eine andere Form bringen, wodurch sie unserm Zwecke besser entspricht. Wir finden nach einer leichten Rechnung:

$$\begin{aligned} V_1 &= c_1 \,\mathrm{dn}\,\xi + c_2 \,\mathrm{dn}\,\xi\left[\frac{d \log \Theta_3(\xi)}{d\xi} + \frac{E}{K}\xi\right] \\ &+ \frac{1}{\gamma^2 k'^2}\left\{\mathrm{dn}\,\xi \frac{d \log \Theta_3(\xi)}{d\xi} \int X \,\mathrm{dn}\,\xi d\xi - \mathrm{dn}\,\xi \int X \,\mathrm{dn}\,\xi \frac{d \log \Theta_3(\xi)}{d\xi} d\xi\right\} \\ &+ \frac{E}{\gamma^2 k'^2 K} \,\mathrm{dn}\,\xi \int d\xi \int X \,\mathrm{dn}\,\xi d\xi \end{aligned} \tag{9}$$

Bei diesen Formeln wollen wir zunächst etwas stehen bleiben und an dieselbe einige Bemerkungen knüpfen, welche indessen die mit den Integrationsconstanten multiplicirten Gliedern nicht berühren. Wir lassen daher diese Glieder bei Seite, indem wir die Integrationsconstanten, die in der That überzählig sind, entweder als gleich Null gesetzt denken, oder auch als in solcher Weise bestimmt, dass Glieder, welche die Veränderliche ξ als Factor erhalten, verschwinden.

Wir ziehen jetzt die Fälle nicht in Betracht, wo der Modul k den Grenzwerth 1 erreicht, wiewohl wir anderseits solche nicht ausschliessen, wo diese Grösse sich der erwähnten Grenze ziemlich nähert. Die, dem Modul k entsprechende Grösse q nehmen wir aber auf alle Fälle so klein an, dass ein Glied, welches mit derselben multiplicirt wird, wesentlich verkleinert erscheint. Wir bemerken übrigens, dass wenn ein mit dem Factor q multiplicirtes Glied einigermassen erheblich wird, so bewirkt es, wie man aus der Gleichung (3) ersehen kann, eine Verkleinerung in α^2, mithin auch in k und in q. Die zweite Annäherung müsste das betreffende Glied also verkleinert ergeben, und man würde, wenn nur solche Glieder vorhanden wären, das Resultat durch successive Annäherungen verhältnissmässig leicht finden können.

Um nun die Darstellung der Formeln etwas zu vereinfachen, schreiben wir:

$$\begin{array}{ll} sn - s'n' + \sigma n = 2n\lambda; & sc - s'c' + B = 2\Delta \\ s_1 n - s_1' n' + \sigma_1 n = 2n\lambda_1; & s_1 c - s_1' c' + B_1 = 2\Delta_1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

und betrachten bloss Fälle, wo:

$$\lambda > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$$

Aus dem Vorhergehenden wissen wir bereits, dass bei der Bestimmung der entsprechenden Glieder in V_1 nur dann Schwierigkeiten eintreten können, wenn λ_1 eine im Verhältniss zu λ sehr kleine Grösse bezeichnet. Wäre hingegen λ_1 eine Grösse von nahezu demselben numerischen Betrage wie λ, oder grösser, dann könnte das entsprechende Glied in V_1 sehr leicht berechnet werden, weil A_1 jedenfalls sehr klein im Verhältniss zu A ist, so oft k überhaupt der Einheit nahe kommen kann; in diesen Fällen würde das betreffende Glied offenbar als eine sehr kleine Grösse anzusehen sein. Wäre λ_1 sehr nahe gleich λ, so könnte allerdings ein Glied in V_1 einen sehr grossen Factor erhalten; dieses Glied ist aber anderseits mit q multiplicirt und würde aus diesem Grunde eine entsprechende Verkleinerung erleiden. Derartige Glieder, bei deren Bestimmung keine wesentlichen Schwierigkeiten zu erwarten stehen und überdies mit später zu berücksichtigenden Gliedern vereinigt werden können, lassen wir jetzt ganz bei Seite.

Wenn wir aber auch die Glieder in der Formel (9), die mit q multiplicirt erscheinen, im Allgemeinen vernachlässigen, so dürfen wir dies jedoch nicht ohne jede Einschränkung thun, da dies gleichbedeutend damit wäre, dass wir in der Gleichung (7) ohne weiteres das Glied:

$$-k^2(2\operatorname{sn}\xi^2 - 1)V_1$$

bei Seite liessen. Dieses Glied ist aber bei der Bestimmung der Function V_1 ganz wesentlich, denn die Entwicklung des Coefficienten von V_1 enthält eine Constante von der Ordnung k^4, welcher Umstand einen sehr erheblichen Einfluss auf die Integrationsdivisoren ausüben kann. Wenn wir daher auch bei einer solchen Vernachlässigung annehmen dürften, dass das Resultat der ersten Annäherung als eine wirkliche Annäherung anzusehen wäre — die Gründe zu dieser Annahme finden sich leicht durch ein genaueres Betrachten der Gleichung (8) — so müssten wir doch befürchten, in solcher Weise nur sehr langsam convergirende Annäherungen zu erhalten.

Um nun leicht übersehen zu können, welche Glieder bei der ersten Annäherung bei Seite gelassen werden dürfen, ersetzen wir in der Gleichung (8) die Function V_1 durch eine andere Z_1 und stellen zwischen beiden die Beziehung:

$$2V_1 = sZ_1\operatorname{dn}\xi \tag{10}$$

fest. Aus der Gleichung (8) ergiebt sich hierauf, durch doppelte Differentiation und nachdem die elliptische Function $\frac{k'^2}{\operatorname{dn}\xi^2}$ durch das zweite Differential von $\log\theta_3(\xi)$ ersetzt worden ist, die nachstehende:

$$\frac{s}{2}\frac{d^2Z_1}{d\xi^2} = \frac{1}{\gamma^2k'^2}\left\{\frac{E}{K}X + \frac{d^3\log\theta_3(\xi)}{d\xi^3}\int X\operatorname{dn}\xi d\xi + \frac{d^2\log\theta_3(\xi)}{d\xi^2}X\operatorname{dn}\xi\right\}$$

oder

$$\frac{s}{2}\frac{d^2Z_1}{n^2dt^2} = \frac{1}{k'^2}\frac{E}{K}X + \frac{1}{k'^2}\frac{d\left\{\frac{d^2\log\Theta_3(\xi)}{d\xi^2}\int X\,\mathrm{dn}\,\xi d\xi\right\}}{d\xi} \tag{11}$$

Wenn wir nun von den Gliedern in X absehen, die von den Argumenten $2\lambda_2 nt$, $2\lambda_3 nt$, ... abhängen, so haben wir die nachstehenden Argumente zu berücksichtigen:

$$2\lambda_1 nt, \qquad 2(\lambda + \lambda_1)nt, \qquad 2(\lambda - \lambda_1)nt, \quad \text{u. s. w.}$$

Man übersieht leicht, dass bloss das von $\lambda_1 nt$ abhängige Glied in Z_1 wesentlich vergrössert werden kann, weil λ_1 im Allgemeinen eine kleine Grösse im Verhältniss zu $\lambda + \lambda_1$, $\lambda - \lambda_1$, u. s. w. ist; die übrigen Glieder erhalten bei dem Integrationsprocesse wesentlich grössere Divisoren. Wir betrachten also bloss das, von dem erwähnten Argumente abhängige Glied und bemerken dabei, dass der Beitrag zu dem Coefficienten dieses Gliedes, welcher aus dem zweiten Gliede rechter Hand in der Gleichung (11) hervorgeht, erheblich geringer ist, als der aus $\frac{1}{k'^2}\frac{E}{K}X$ kommende Theil. In der ersten Annäherung setzen wir daher:

$$\frac{s}{2}\frac{d^2Z_1}{dt^2} = \frac{n^2}{k'^2}\frac{E}{K}X \tag{12}$$

In Berücksichtigung von (10) erhalten wir aus der ersten der Gleichungen (1):

$$Z = \frac{2}{s}(V_0 - \lambda nt - \Delta) + Z_1\,\mathrm{dn}\,\xi \tag{13}$$

Nun sind die Integrationsconstanten γ und C jedenfalls so zu bestimmen, dass die Function $V_0 - \lambda - \Delta$ nur periodische Glieder des Arguments $\frac{\pi}{K}\xi$ enthält; d. h. gemäss den Gleichungen:

$$\frac{\pi}{2K}\gamma = \lambda; \qquad \frac{\pi}{2K}C = \Delta;$$

in dem Argumente:

$$2\lambda_1 nt + s_1 Z + 2\Delta_1 = 2\lambda_1 nt + s_1 Z_1\,\mathrm{dn}\,\xi + 2\Delta_1 + 2\frac{s_1}{s}[V_0 - \lambda nt - \Delta]$$

kommt also die Zeit als Factor des Coefficienten bloss bei dem Gliede $2\lambda_1 nt$ vor. Wir bezeichnen hier:

$$(14)\qquad s_1 Z_1\left(\mathrm{dn}\,\xi - \frac{\pi}{2K}\right) + 2\frac{s_1}{s}(V_0 - \lambda nt - \Delta) = H$$

und erhalten:

$$(15)\qquad 2\lambda_1 nt + s_1 Z + 2\Delta_1 = 2\lambda_1 nt + s_1 \frac{\pi}{2K} Z_1 + 2\Delta_1 + H$$

Hier angelangt, werden wir von einem Satze Gebrauch machen, welcher bei Entwicklung der Function:

$$P = e^{2i(\varkappa_1 \sin L_1 + \varkappa_2 \sin L_2 + \ldots)},$$

sich ergiebt, wo die $\varkappa$ constante Coefficienten bezeichnen, die eine gleichförmig convergente Reihe bilden, und die L beliebige reelle Argumente sind.

Wie man leicht bemerkt, nimmt das Resultat der Entwicklung die nachstehende Form an:

$$\begin{aligned} P = P_0 &+ 2P_2^{(1)} \cos 2L_1 + 2P_2^{(2)} \cos 2L_2 + \ldots \\ &+ 2P_{1,1}^{1,2} \cos(L_1 + L_2) + 2P_{1,-1}^{1,2} \cos(L_1 - L_2) \\ &+ 2P_{1,1}^{1,3} \cos(L_1 + L_3) + 2P_{1,-1}^{1,3} \cos(L_1 - L_3) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ 2P_4^{(1)} \cos 4L_1 + 2P_4^{(2)} \cos 4L_2 + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + 2i\Big\{ &Q_1^{(1)} \sin L_1 + Q_1^{(2)} \sin L_2 + \ldots \\ &+ Q_{1,2}^{1,2} \sin(L_1 + 2L_2) + Q_{1,-2}^{1,2} \sin(L_1 - 2L_2) \\ &+ \ldots\ldots \Big\} \end{aligned}$$

Indem man überall $-L_1, -L_2, \ldots$ anstatt $+L_1, +L_2, \ldots$ einführt, erhält man unmittelbar die nachstehende Entwicklung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} = P_0 &+ 2P_2^{(1)} \cos 2L_1 + 2P_2^{(2)} \cos 2L_2 + \ldots \\ &+ 2P_{1,1}^{1,2} \cos(L_1 + L_2) + 2P_{1,-1}^{1,2} \cos(L_1 - L_2) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - 2i\Big\{ &Q_1^{(1)} \sin L_1 + Q_1^{(2)} \sin L_2 + \ldots \\ &+ Q_{1,2}^{1,2} \sin(L_1 + 2L_2) + Q_{1,-2}^{1,2} \sin(L_1 - 2L_2) \\ &+ \ldots\ldots \Big\} \end{aligned}$$

Wenn wir hierauf diese Entwicklungen von P und von $\frac{1}{P}$ mit einander multipliciren, erhalten wir eine Anzahl Bedingungsgleichungen, von denen wir indessen nur die erste anzuführen brauchen. Diese ist:

$$1 = (P_0)^2 + 2(P_2^{(1)})^2 + \dots$$
$$+ 2(Q_1^{(1)})^2 + \dots;$$

d. h.: die doppelte Summe der Quadrate aller Coefficienten weniger des Quadrates des ersten Coefficienten ist gleich der Einheit. Hieraus folgt, dass kein Coefficient grösser als $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sein kann, mit Ausnahme des ersten, welcher den Werth 1 erhält, wenn alle anderen verschwinden.

Berücksichtigen wir nun in X bloss das Glied:

$$-\frac{s}{2} A_1 \sin(2\lambda_1 nt + s_1 Z + 2\Delta_1),$$

indem wir dasselbe in der Gleichung (12) hervorheben, so erlangen wir leicht ein Resultat der Form:

$$\frac{d^2 Z_1}{dt^2} = -\frac{n^2 A_1}{k'^2} \frac{E}{K} P_0 \sin\left(2\lambda_1 nt + s_1 \frac{\pi}{2K} Z_1 + 2\Delta_1\right) + \Pi_1,$$

wo P_0 einen Coefficienten bezeichnet, der jedenfalls kleiner als 1 ist, und Π_1 eine Reihe Glieder, welche theils von den Argumenten $2(\lambda + \lambda_1)nt$, $2(\lambda - \lambda_1)nt$, $2(\lambda + 2\lambda_1)nt$, u. s. w. abhängen, theils aber auch von den Argumenten $2\lambda_2 nt$, $2\lambda_3 nt$, u. s. w. — Wenn für Z_1 einmal ein genäherter Werth gefunden worden ist, lässt sich die Function X in einer solchen Form angeben, dass die im zweiten Gliede rechter Hand der Gleichung (11) geforderte Integration ausgeführt werden kann, wonach die Glieder in Π_1 zu vervollständigen sind.

Die zuletzt gefundene Gleichung multipliciren wir mit $s_1 \frac{\pi}{2K}$, setzen hierauf:

$$(16) \qquad \left|\begin{aligned} 2U &= 2\lambda_1 nt + s_1 \frac{\pi}{2K} Z_1 + 2\Delta_1 \\ 2(X)_1 &= s_1 \frac{\pi}{2K} \Pi_1 \end{aligned}\right.$$

und finden endlich:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{n^2 s_1 A_1 P_0}{k'^2} \frac{2\pi E}{(2K)^2} \sin U \cos U = n^2 (X)_1, \tag{17}$$

welche Gleichung genau wie die Gleichung (2) zu behandeln ist.

Man wird also wieder setzen:

$$U = U_0 + U_1$$

und für U_0 ein Resultat der Form:

$$U_0 = \operatorname{am} \xi_1 \pmod{k_1}$$

erhalten. Auch jetzt nehmen wir also an, dass der Modul kleiner als 1 ist.

Es folgt nun aus der ersten der Gleichungen (16):

$$Z_1 = \frac{2}{s_1} \frac{2K}{\pi} (U_0 - \lambda_1 nt - \Delta_1) + Z_2 \operatorname{dn} \xi_1, \tag{18}$$

indem wir nehmlich setzen: $2U_1 = s_1 \frac{\pi}{2K} Z_2 \operatorname{dn} \xi_1$, und für die Function Z_2 Bestimmungen als gültig ansehen, welche denen analog sind, die zur Bestimmung von Z_1 führten. Der soeben gefundene Werth von Z_1, in die Gleichung (13) eingesetzt, giebt uns endlich:

$$Z = \frac{2}{s}\left(\operatorname{am} \xi - \frac{\pi}{2K} \xi\right) + \frac{2}{s_1} \frac{2K}{\pi}\left(\operatorname{am} \xi_1 - \frac{\pi}{2K_1} \xi_1\right) \operatorname{dn} \xi + Z_2 \operatorname{dn} \xi \operatorname{dn} \xi_1 \tag{19}$$

Diese Operationen lassen sich wiederholen und so lange fortsetzen, als die Moduln k_2, k_3, u. s. w. kleiner als 1 bleiben. Erreicht keiner dieser Moduln die Grenze 1, so erhält man die Function Z durch eine unendliche Reihe dargestellt. Bei dem Fortgange dieser Operationen muss man sich indessen erinnern, dass bei der Bildung der verschiedenen Functionen $(X)_1$, $(X)_2$, u. s. w. Glieder entstehen können, von denen ein Theil mit vorhergehenden characteristischen Gliedern zu vereinigen sind und also die Werthe der vorhergehenden Moduln etwas verändern, während ein anderer Theil der entstehenden Glieder mit späteren characteristischen Glieder vereinigt werden kann, oder als selbständige characteristische Glieder zu behandeln ist. Ein dritter Theil der bei den successiven Operationen entstehenden Gliedern ist aber an kürzere Perioden gebunden und werden dieselben daher nicht in dem Maasse durch den Integrationsprocess vergrössert, dass sie die Convergenz der aus (19) hervorgehenden unendlichen Reihe aufheben könnten. Von diesen Gliedern sehen wir hier ab, und erhalten alsdann die Reihe

$$(20)\qquad Z = \frac{2}{s}\left(\operatorname{am}\xi - \frac{\pi}{2K}\xi\right) + \frac{2}{s_1}\frac{2K}{\pi}\left(\operatorname{am}\xi_1 - \frac{\pi}{2K_1}\xi_1\right)\operatorname{dn}\xi + \frac{2}{s_2}\frac{2K_1}{\pi}\left(\operatorname{am}\xi_2 - \frac{\pi}{2K_2}\xi_2\right)\operatorname{dn}\xi\operatorname{dn}\xi_1 + \ldots;$$

dass diese Reihe gleichförmig convergent ist, sieht man sogleich, da die Coefficienten $\frac{2}{s}, \frac{2}{s_1}, \frac{2}{s_2}, \ldots$ eine gleichförmig convergente Reihe bilden, und die Verhältnisse $\frac{K}{K_1}, \frac{K_1}{K_2}, \ldots$, unsern Annahmen nach, als Grössen derselben Ordnung anzusehen sind, oder jedenfalls eine gegebene Grösse nicht übersteigen.

Wir sind also jetzt bei einem Resultate angelangt, welches mit dem, im ersten Abschnitte gefundenen im Wesentlichen übereinstimmt, nur ist das jetzt erhaltene vollständiger und genauer als das frühere, da hier auch die Glieder höherer Ordnung Berücksichtigung gefunden haben, während sie in dem ersten Abschnitte in den Functionen F und F_1 aufgenommen und mit denselben vernachlässigt wurden. Vollständige Übereinstimmung finden wir aber in dem Punkte, dass die betreffenden Entwicklungen nahezu in derselben Weise convergiren wie die Reihe der Brüche $\frac{1}{s}, \frac{1}{s_1}, \frac{1}{s_2}, \ldots$, vorausgesetzt, dass keiner der Moduln $k, k_1, k_2, \ldots$ der Einheit gar zu nahe kommt aber auch nicht für sich eine convergente Reihe bilden.

Nachdem wir somit den Fall erledigt haben, wo die Moduln $k, k_1, \ldots$ sämmtlich kleiner als 1 waren, stellen wir die Annahme fest, dass einer derselben diese Grenze überschreitet. Hiermit wird nothwendig die Bedingung verknüpft, dass der entsprechende Factor λ streng verschwindet. Im Ganzen ist es bei unseren jetzigen Betrachtungen gleichgültig, von welchem Gliede wir annehmen, dass dieser Factor gleich Null wird, und wir dürfen daher die Bestimmung treffen, dass es bei dem ersten Gliede in der Reihe (2) des ersten Abschnittes stattfindet. Es wird nun:

$$2V = sZ + 2\Delta$$

und für V_0 erhalten wir, wie im zweiten Abschnitte gezeigt wurde, den Ausdruck

$$V_0 = \arcsin[l \operatorname{sn}(\alpha n t + C_1)] \quad \left(\operatorname{mod} l = \frac{r}{a}\right)$$

Hiermit findet sich aus der Gleichung (6), nachdem wir:

$$\eta = \alpha n t + C_1 = k\xi = \frac{1}{l}\xi$$

gesetzt haben, die folgende:

$$\frac{d^2 V_1}{d\eta^2} - (2l^2 \operatorname{sn}\eta^2 - 1) V_1 = \frac{1}{a^2} X \tag{21}$$

welche Gleichung sich übrigens aus der Gleichung (7) ergiebt, wenn man sich erinnert, dass

$$\operatorname{sn}\xi = l \operatorname{sn}\eta$$

Weil man aber überdies die Beziehungen:

$$\operatorname{dn}\xi = \operatorname{cn}\eta$$
$$\frac{k'^2}{\operatorname{cn}\eta^2} = \frac{L - I}{L} - l^2 - \frac{d^2 \log \Theta_2(\eta)}{d\eta^2}$$

hat, wobei I den Werth von E bedeutet, welcher dem Modul l entspricht, so findet sich aus der Gleichung (8):

$$V_1 = c_1 \operatorname{cn}\eta - c_2 \operatorname{cn}\eta \left[\frac{d \log \Theta_2(\eta)}{d\eta} - \frac{L - I - l^2 L}{L}\eta\right] + \frac{\operatorname{cn}\eta}{a^2} \int \frac{d\eta}{\operatorname{cn}\eta^2} \int X \operatorname{cn}\eta \, d\eta \tag{22}$$

und hieraus folgert man leicht die nachstehende, welche der Gleichung (9) entspricht,

$$\begin{aligned} V_1 = {} & c_1 \operatorname{cn}\eta - c_2 \operatorname{cn}\eta \left[\frac{d \log \Theta_2(\eta)}{d\eta} - \frac{L - I - l^2 L}{L}\eta\right] \\ & + \frac{1}{a^2 l'^2} \operatorname{cn}\eta \int X \operatorname{cn}\eta \frac{d \log \Theta_2(\eta)}{d\eta} d\eta - \operatorname{cn}\eta \frac{d \log \Theta_2(\eta)}{d\eta} \int X \operatorname{cn}\eta \, d\eta \\ & + \frac{L - I - l^2 L}{a^2 l'^2 L} \operatorname{cn}\eta \int d\eta \int X \operatorname{cn}\eta \, d\eta \end{aligned} \tag{23}$$

In dieser Gestalt ist der gefundene Ausdruck für V_1 indessen nicht ganz zweckmässig, weil die Function $d\log\Theta_2(\eta)$ den Factor $\cos\frac{\pi}{2L}\eta$ im Nenner enthält. Es ist aber:

$$\frac{d\log\Theta_2(\eta)}{d\eta}=\frac{d\log\Theta(\eta)}{d\eta}-\frac{\operatorname{sn}\eta\operatorname{dn}\eta}{\operatorname{cn}\eta}$$

Mit Rücksicht auf diese Beziehung erhalten wir aus (23):

$$(24)\quad \begin{aligned} V_1 &= c_1\operatorname{cn}\eta - c_2\left\{\operatorname{cn}\eta\left[\frac{d\log\Theta(\eta)}{d\eta}-\frac{L-1-l'^2L}{L}\eta\right]-\operatorname{sn}\eta\operatorname{dn}\eta\right\} \\ &+\frac{1}{a^2l'^2}\left[\operatorname{cn}\eta\int X\operatorname{cn}\eta\frac{d\log\Theta(\eta)}{d\eta}d\eta-\operatorname{cn}\eta\frac{d\log\Theta(\eta)}{d\eta}\int X\operatorname{cn}\eta d\eta\right] \\ &-\frac{1}{a^2l'^2}\left[\operatorname{cn}\eta\int X\operatorname{cn}\eta\operatorname{dn}\eta d\eta-\operatorname{sn}\eta\operatorname{dn}\eta\int X\operatorname{cn}\eta d\eta\right] \\ &+\frac{L-1-l'^2L}{a^2l'^2L}\operatorname{cn}\eta\int d\eta\int X\operatorname{cn}\eta d\eta \end{aligned}$$

Unsere Betrachtungen, die wir an diese Formel knüpfen, sollen von der Voraussetzung ausgehen, dass der Modul l einen kleinen Werth hat. Die Entwicklungen der Functionen $\operatorname{cn}\eta$, $\operatorname{sn}\eta$, $\operatorname{dn}\eta$ und des Productes der ersteren und $d\log\Theta(\eta)$ sind dann sehr convergent, und wir können, da es sich hier nur um den allgemeinen Character des Resultats handelt, bei den ersten Gliedern dieser Entwicklungen stehen bleiben und sogar alle die Glieder bei Seite lassen, welche l^2 als Factor enthalten. Wir erhalten alsdann, wenn wir dabei die überzähligen Integrationsconstanten c_1 und c_2 gleich Null setzen, den genäherten Werth:

$$V_1=\frac{1}{a^2}\sin\frac{\pi}{2L}\eta\int X\cos\frac{\pi}{2L}\eta d\eta-\frac{1}{a^2}\cos\frac{\pi}{2L}\eta\int X\sin\frac{\pi}{2L}\eta d\eta,$$

welcher aber eine wirkliche Annäherung zur Bestimmung des Integrales der Gleichung (21) darstellt.

Von den Gliedern in X heben wir zunächst die nachstehenden heraus:

$$X=-\beta_1\sin\left(\frac{2\lambda_1}{a}\eta+H_1\right)-\beta_2\sin\left(\frac{2\lambda_2}{a}\eta+H_2\right)-\dots$$

und diese ergeben, wenn sie in obigem Ausdrucke eingesetzt werden,

$$(25) \qquad V_1 = -\frac{\frac{2L}{\pi}}{\alpha^2}\left\{\frac{\beta_1}{1-\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\frac{2L}{\pi}\right)^2}\sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\eta + H_1\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\beta_2}{1-\left(\frac{2\lambda_2}{\alpha}\frac{2L}{\pi}\right)^2}\sin\left(\frac{2\lambda_2}{\alpha}\eta + H_2\right) + \dots\right\}$$

Die Coefficienten β_1, β_2, ... bilden nun jedenfalls, weil sie den Coefficienten A_1, A_2, ... proportional sind, eine gleichförmig convergente Reihe; die soeben gefundene Entwicklung von V_1 convergirt daher auch gleichförmig, so lange die λ_1, λ_2, ... kleine Grössen im Verhältniss zu $\frac{\alpha}{2}\frac{\pi}{2L}$ sind. Wir gewinnen auf Grund dieses Resultates den Satz, den wir schon am Schlusse des zweiten Abschnittes erwähnt haben, dass nehmlich die Glieder, welche auf ein Librationsglied folgen und ohne das Vorhandensein dieses Gliedes kritisch werden könnten, eine gleichförmig convergente Reihe bilden. Die Anwendung des vollständigen Ausdruckes (24) statt des abgekürzten würde keine Abänderung dieser Schlussfolgerung veranlassen.

Die Reihe (25) convergirt aber gleichförmig auch bei anderen Werthen der Coefficienten λ_1, λ_2, ... als den oben bezeichneten; die Convergenz kann dagegen aufhören, wenn die Verhältnisse:

$$\frac{2\lambda_1}{\alpha}\frac{2L}{\pi},\ \frac{2\lambda_2}{\alpha}\frac{2L}{\pi},\ \dots$$

sich der Einheit mehr und mehr nähern. Bei Anwendung der vollständigen Formel (24) würde man finden, dass Divergenz eintreten kann, auch wenn diese Verhältnisse sich anderen ganzen Zahlen nähern. Dass diese Erscheinung jedoch nicht gleichbedeutend mit einer wirklichen Divergenz der Entwicklung von V_1 ist, lässt sich leicht nachweisen, wenn man sich die Ausdrücke der Grössen α^2 und X, wie sie durch die Gleichungen (3) und (4) gegeben sind, vergegenwärtigt. Zunächst sehen wir aus der Gleichung (3), dass wenn ein Glied in V_1 anwächst, so erleidet α^2 eine merkliche Verkleinerung, welche man sich so erheblich denken kann, dass sich das Librationsglied in ein gewöhnliches verwandelt, wonach die Entwicklungen nach den vorher mitgetheilten Methoden auszuführen wären. Es kann sich also erreignen, dass eine erste Annäherung die Existenz der Libration wahrscheinlich macht, die sich jedoch bei späteren Annäherungen als illusorisch erweist. Die oben gefundenen Entwicklungen kommen alsdann wieder zur Geltung und ihrer Convergenz ist kein Abbruch geschehen.

Wir wollen aber nun den Nachweis führen, dass wenn der Coefficient des Librationsgliedes, also die Constante l, einen genügend kleinen Werth hat, so bleibt auch die Function V_1 immer eine kleine Grösse. Aus der Gleichung (4) nehmen wir die merklichsten Glieder heraus. Diese sind:

$$X = (X) + \frac{2}{3} sAV_1^3;$$

für (X) nehmen wir ferner denselben Ausdruck an, den wir vorhin für X gelten liessen, nehmlich:

$$(X) = -\beta_1 \sin\left(\frac{2\lambda_1}{a}\eta + H_1\right) - \ldots$$

In der Gleichung (21) vernachlässigen wir nun auch das mit l^2 multiplicirte Glied und erhalten, nachdem wir:

$$g = \frac{2}{3}\frac{sA}{a^2}$$

gesetzt haben, die Gleichung:

$$(26) \qquad \frac{d^2V_1}{d\eta^2} + V_1 - gV_1^3 = -\frac{\beta_1}{a^2}\sin\left(\frac{2\lambda_1}{a}\eta + H_1\right) - \ldots$$

Die Integration von Gleichungen dieser Form ist von hervorragender Wichtigkeit, wenn es sich um die Bestimmung der elementären Glieder handelt. Hier tritt dieselbe jedoch weniger in den Vordergrund, wesshalb ich, unter Hinweisung auf eine der Schwedischen Academie der Wissenschaften vorgelegte Abhandlung über die Integration der betreffenden Gleichung,[1] mich auf die Mittheilung des folgenden Verfahrens beschränke.

---

[1] Bihang till K. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. 1886.

Der grösseren Einfachheit wegen betrachten wir bloss ein einziges Glied rechter Hand in der Gleichung (26) und setzen:

$$(\alpha) \qquad V_1 = (\varkappa_0 + \Delta\varkappa_0)\sin\left(\frac{2\lambda_1}{a} + H_1\right) + R_1$$

Wenn wir nun die Constante $\varkappa_0$ aus der Gleichung:

$$(\beta) \qquad \frac{3}{4}g\varkappa_0^3 - \left[1 - \left(\frac{2\lambda_1}{a}\right)^2\right]\varkappa_0 = \frac{\beta_1}{a^2}$$

bestimmen, so bleibt aus der Gleichung (26), wenn wir der Kürze wegen

$$\varkappa = \varkappa_0 + \Delta\varkappa_0$$

schreiben, die Gleichung:

$$(\gamma) \qquad \frac{d^2R_1}{d\eta^2} + \left[1 - 3\varkappa^2 g\sin\left(\frac{2\lambda_1}{a}\eta + H_1\right)^2\right]R_1$$

$$= -\frac{1}{4}\varkappa^3 g\sin 3\left(\frac{2\lambda_1}{a}\eta + H_1\right) + 3\varkappa g\sin\left(\frac{2\lambda_1}{a} + H_1\right)R_1^2 + gR_1^3$$

$$+ \Delta\varkappa_0\left[1 - \left(\frac{2\lambda_1}{a}\right)^2 - \frac{9}{4}g\varkappa_0^2 - \frac{9}{4}g\varkappa_0\Delta\varkappa_0 - \frac{3}{4}g\Delta\varkappa_0^2\right]\sin\left(\frac{2\lambda_1}{a} + H_1\right)$$

Über die Grösse $\Delta\varkappa_0$ haben wir noch zu verfügen, und wir denken sie als in der Weise bestimmt, dass die Function R_1 kein Glied mit dem Argumente $\frac{2\lambda_1}{a}\eta + H_1$ enthält. Nachdem wir diese Annahme festgestellt haben, setzen wir:

$$(\delta) \qquad R_1 = \varkappa_1 \sin 3\left(\frac{2\lambda_1}{a} + H_1\right) + R_2;$$

es ergiebt sich alsdann ein Näherungswerth des Coefficienten $\varkappa_1$ aus der Gleichung:

$$(\varepsilon) \qquad \frac{3}{4}g\varkappa_1^3 - \left[1 - 9\left(\frac{2\lambda_1}{a}\right)^2 - \frac{3}{2}g\varkappa^2\right]\varkappa_1 = \frac{1}{4}g\varkappa^3$$

Unsern früheren Annahmen gemäss ist nun das Verhältniss $\frac{\beta_1}{a^2}$ als eine sehr kleine Grösse anzusehen, während der Coefficient g als eine

Grösse nullter Ordnung betrachtet werden muss, welche nicht viel von dem Bruche $\frac{2}{3}$ verschieden ist. Unter solchen Umständen erweist sich der Coefficient $\varkappa_0$ auch als eine kleine Grösse, wie aus der Gleichung (β) zu ersehen ist; in dem Falle, den wir hier besonders im Auge haben, wo das Verhältniss $\frac{2\lambda_1}{\alpha}$ nahezu den Werth 1 hat, erhält man näherungsweise:

$$\varkappa_0 = \sqrt[3]{\frac{2\beta_1}{\alpha^2}}$$

Der aus dieser Formel sich ergebende Werth von $\varkappa_0$ ist nun zwar sehr viel grösser als $\frac{\beta_1}{\alpha^2}$, muss jedoch immer als eine kleine Grösse, ja sogar als eine sehr kleine Grösse angesehen werden.

Aus der Gleichung (ε) ergiebt sich sogleich, dass bei der Annahme, $\frac{2\lambda_1}{\alpha}$ habe nahezu den Werth 1, der Coefficient $\varkappa_1$ eine Grösse von der Ordnung $\varkappa_0^3$ ist, und hiernach folgt endlich, aus der Bedingung, wodurch $\Delta\varkappa_0$ zu bestimmen ist, dass dieser Coefficient ebenfalls eine Grösse der Ordnung $\varkappa_0^3$ sein muss.

In dieser Weise kann man weiter gehen, und findet somit für V_1 die gleichförmig convergente Reihe:

$$(27)\quad V_1 = \varkappa \sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha} + H_1\right) + \varkappa_1 \sin 3\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha} + H_1\right) + \varkappa_2 \sin 5\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha} + H_1\right) + \ldots$$

welche ein particuläres Integral der Gleichung (26) ist, und woraus man, unter Berücksichtigung des oben, hinsichtlich der Coefficienten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ... Gesagten, sogleich bemerkt, dass V_1 eine Grösse bezeichnet, die jedenfalls kleiner als 1 ist.

Die obigen Schlussfolgerungen verlieren aber ihre Bedeutung in dem Maasse, wie der Modul l sich der Einheit nähert. Wenn nehmlich diese Grösse nicht ganz klein ist, so muss man für g den Werth:

$$g = \frac{2}{3}\frac{sA}{\alpha^2}(1 - l^2)$$

setzen, welcher kleiner wird, je näher l der Einheit rückt. — Da nun, bei Verschwinden der Differenz: $1-\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\right)^2$, die Gleichung (β) den Werth:

$$\varkappa_0 = \sqrt[3]{\frac{4}{3}\frac{\beta_1}{g\alpha^2}}$$

ergiebt, so schliesst man, dass der Coefficient $\varkappa_0$ und mithin auch die Function V_1 beträchtliche Werthe annehmen können.

Es ist noch zu bemerken, dass Glieder, wo $\frac{2\lambda_1}{\alpha}$ sehr nahe den Werth 1 haben, nothwendig vorkommen müssen; denn hat man in der ersten Annäherung z. B. das Glied:

$$V_1 = -\frac{\frac{2L}{\pi}}{\alpha^2}\frac{\beta_1}{1-\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\frac{2L}{\pi}\right)^2}\sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\eta + H_1\right)$$

gefunden, wo nun λ_1 eine sehr kleine Grösse bezeichnet, so findet man in der zweiten, wie man aus der Gleichung (4) leicht ersehen kann, Glieder mit Argumenten der Form:

$$\left(\frac{\pi}{2L}\pm\frac{4\lambda_1}{\alpha}\right)\eta,$$

also grade solche Glieder, die in der Formel (25) sehr erheblich anwachsen können. Man wird also immer Veranlassung finden, einige Glieder nach den Regeln, welche zur Ermittelung des Integrales der Gleichung (26) führen, zu behandeln, sofern nicht der Modul l verschwindend klein ist, wobei die Glieder der soeben erwähnten Art ebenfalls verschwindend klein bleiben, oder wenigstens so klein, dass sie der Formel (25) einverleibt werden können.

Aus diesen Betrachtungen geht also hervor, dass l der Einheit nicht beliebig nahe kommen darf, ohne dass die Convergenz der aus (24) zu erhaltenden Entwicklung zweifelhaft wird, dass aber, wenn l einen gewissen Werth nicht übersteigt, diese Entwicklung ganz sicher convergirt. Nähert sich aber l dieser Grenze, so ist hiermit eine Vergrösserung von V_1 nothwendig verbunden, woraus wieder, wie bereits hervorgehoben wurde, eine Verkleinerung von α folgt. Man würde somit entweder auf den ersten Fall zurückkommen, d. h. auf den, wo $k < 1$, oder auch auf einen dritten, wo die Gleichung:

$$k = l = 1$$

entweder streng, oder doch sehr nahe erfüllt ist.

Fälle, wo der Modul der Einheit so nahe kommt, dass die bekannten Entwicklungen der elliptischen Functionen in trigonometrischen Reihen nicht mehr hinreichend convergiren, dürfen nun allerdings, nach unseren jetzigen Kenntnissen zu schliessen, als sehr unwahrscheinlich bezeichnet werden — dies war wenigstens die Ansicht von LAPLACE;[1] von astronomischem Gesichtspunkte aus scheint die Betrachtung derartiger Fälle also wenig Interesse darzubieten. In rein theoretischer Hinsicht ist die Untersuchung derselben hingegen mehr beachtenswerth, schon um zu entscheiden, ob die entsprechenden Formeln Bestand haben können. Denn es liesse sich sehr wohl denken, dass *solche* Werthe des Moduls nur in der ersten Annäherung gefunden werden können, bei den späteren aber, in Folge erheblicherer Werthe der Coefficienten in V_1, wesentlich verkleinert erscheinen müssen.

Die Formeln zur Berechnung von V_0 und V_1, in denen die elliptischen Functionen den complementären Moduln k' und l' entsprechen, finden sich leicht aus den vorhergehenden mit Hülfe bekannter Transformationsformeln. Um bei dem Übergang sowie bei der Darstellung der neuen Formeln möglichst an Kürze zu gewinnen, stellen wir ein für alle Mal fest, dass wenn das Argument einer elliptischen oder einer Theta-Function als imaginär angegeben wird, diese Function einem complementären Modul angehört, und zwar, wenn das Argument $i\xi$ ist, dem Modul k', während die Functionen des Arguments $i\eta$ von dem Modul l' abhängen. Nach dieser Übereinkunft gelten die Formeln:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}\xi &= -i\frac{\operatorname{sn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} = -il\frac{\operatorname{sn} i\eta}{\operatorname{cn} i\eta} = l\operatorname{sn}\eta \\
\operatorname{cn}\xi &= \frac{1}{\operatorname{cn} i\xi} = \frac{\operatorname{dn} i\eta}{\operatorname{cn} i\eta} = \operatorname{dn}\eta \\
\operatorname{dn}\xi &= \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} = \frac{1}{\operatorname{cn} i\eta} = \operatorname{cn}\eta
\end{aligned}$$

[1] *Mécanique céleste.* T. IV, p. 66, éd. 1880.

Wir erwähnen noch zum Überfluss, dass I' die Bedeutung des vollständigen elliptischen Integrales zweiter Gattung hat, welches dem Modul l' entspricht und erinnern an die Beziehungen:

$$\frac{k'^2}{\operatorname{dn}\xi^2} = \frac{K' - E'}{K'} + \frac{d^2 \log \Theta_3(i\xi)}{d\xi^2}$$

$$\frac{k'^2}{\operatorname{dn}\xi^2} = -\frac{l'^2}{l^2 \operatorname{cn}\eta^2} = \frac{l^2 L' - I'}{l^2 L'} + \frac{1}{l^2} \frac{d^2 \log \Theta(i\eta)}{d\eta^2}$$

$$\frac{d^2 \log \Theta_3(\xi)}{d\xi^2} = -\frac{\pi}{2KK'} + \frac{d^2 \log \Theta_3(i\xi)}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^2 \log \Theta_2(\eta)}{d\eta^2} = -\frac{\pi}{2LL'} + \frac{d^2 \log \Theta(i\eta)}{d\eta^2}$$

$$\frac{\pi}{2KK'} = \frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1; \qquad \frac{\pi}{2LL'} = \frac{I}{L} + \frac{I'}{L'} - 1$$

Hiernach findet sich aus einer der Gleichung (8) oder (22):

$$V_1 = c_1 \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} + c_2 \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} \left\{ \frac{d \log \Theta_3(i\xi)}{d\xi} + \frac{K' - E'}{K'} \xi \right\}$$
$$+ \frac{1}{\gamma^2 k'^2} \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} \int \frac{d^2 \log \Theta_3(i\xi)}{d\xi^2} d\xi \int X \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} d\xi$$
$$+ \frac{1}{\gamma^2 k'^2} \frac{K' - E'}{K'} \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} \int d\xi \int X \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} d\xi \tag{28}$$

$$V_2 = \frac{c_1}{\operatorname{cn} i\eta} + \frac{c_2}{\operatorname{cn} i\eta} \left\{ \frac{d \log \Theta(i\eta)}{d\eta} + \frac{l^2 L' - I'}{L'} \eta \right\}$$
$$- \frac{1}{a^2 l'^2} \frac{1}{\operatorname{cn} i\eta} \int \frac{d^2 \log \Theta(i\eta)}{d\eta^2} d\eta \int \frac{X d\eta}{\operatorname{cn} i\eta}$$
$$- \frac{1}{a^2 l'^2} \frac{l^2 L' - I'}{L'} \frac{1}{\operatorname{cn} i\eta} \int d\eta \int \frac{X d\eta}{\operatorname{cn} i\eta} \tag{29}$$

In diesen Formeln bemerken wir vor Allem, dass die Entwicklung des einen aus der des anderen erhalten wird, indem man q' in $-q'$ verändert und die Argumente vertauscht; ferner, dass kein Coefficient unendlich gross wird, wenn k' oder l' verschwindet.

Das erste Doppelintegral in diesen Formeln lässt sich, wie man leicht bemerkt, durch zwei einfache ersetzen; man erhält, wenn die mit den willkürlichen Constanten multiplicirten Glieder, die natürlich ungeändert werden, weggelassen werden,

$$(30)\quad V_1 = \frac{1}{\gamma^2 k'^2} \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} \frac{d\log\Theta_3(i\xi)}{d\xi} \int X \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} d\xi - \frac{1}{\gamma^2 k'^2} \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} \int X \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} \frac{d\log\Theta_3(i\xi)}{d\xi} d\xi$$

$$+ \frac{1}{\gamma^2 k'^2} \frac{K'-E'}{K'} \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} \int d\xi \int X \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} d\xi$$

$$(31)\quad V_1 = -\frac{1}{\alpha^2 l'^2} \frac{1}{\operatorname{cn} i\eta} \frac{d\log\Theta(i\eta)}{d\eta} \int \frac{X d\eta}{\operatorname{cn} i\eta} + \frac{1}{\alpha^2 l'^2} \frac{1}{\operatorname{cn} i\eta} \int \frac{X}{\operatorname{cn} i\eta} \frac{d\log\Theta(i\eta)}{d\eta} d\eta$$

$$-\frac{1}{\alpha^2 l'^2} \frac{l^2 L' - I'}{L'} \frac{1}{\operatorname{cn} i\eta} \int d\eta \int \frac{X d\eta}{\operatorname{cn} i\eta}$$

Es verdient, bevor wir weiter gehen, hier einer Eigenthümlichkeit der angeführten Formeln zu erwähnen, von deren Richtigkeit man sich leicht ohne besondere Darlegung überzeugen kann. Eine jede der Formeln (9), (23), (30) und (31) enthält zwei einfache Integrale und ein Doppelintegral. Diese Glieder sind aber an Grösse in den verschiedenen Formeln sehr verschieden. In der Formel (9) spielt das Doppelintegral die Hauptrolle, indem die beiden einfachen Integrale im Verhältniss zu diesem immer klein bleiben und sogar verschwinden, wenn der Modul den Werth Null annimmt. Bei der Formel (23) verhält es sich grade umgekehrt, indem hier das Doppelintegral verschwindet, wenn der Modul gleich Null wird, und also bei kleinen Werthen dieser Grösse weniger zu den Gliedern in der Function V_1 beiträgt als die beiden einfachen Integrale. In den Formeln (30) und (31) endlich können alle Glieder als Grössen derselben Ordnung angesehen werden, wiewohl man im Allgemeinen, wenn nicht der Modul genau den Werth 1 hat, bei den Doppelintegralen die grössten Coefficienten erwarten muss.

Wir haben noch einige Bemerkungen vorauszuschicken, bevor wir zur Werthermittelung der Glieder in (30) und (31) schreiten. Die erste bezieht sich auf die Grenze, gegen welche das Product λK convergirt, indem der Modul k sich der Einheit nähert. Mit λ haben wir hier, wie vorher in diesem Abschnitte, die Grösse:

$$\frac{sn - s'n' + \sigma n}{2n}$$

bezeichnet. Damit k gleich der Einheit werde, muss λ verschwinden. Weil aber K zugleich unendlich wird, erscheint das Product λK zunächst unbestimmt.

Das der Zeit proportionale Glied in V findet sich nun einestheils aus der ersten der Gleichungen (1), anderntheils aber aus der Gleichung

$$V_0 = \operatorname{am} \xi,$$

da wir nehmlich die Integrationsconstanten überall so bestimmt denken, dass die Function V_1 kein derartiges Glied enthält. Durch Vergleichen dieser beiden Glieder entsteht die Gleichung:

$$\lambda = \frac{\pi}{2K} \gamma$$

Weil nun:

$$\gamma = \frac{\alpha}{k}$$

so erhält man:

$$\lambda K = \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{k}$$

Wenn also k nahezu den Werth 1 hat, so ist das Product λK eine Grösse derselben Ordnung wie α.

Es ergeben sich aus den obigen Gleichungen einige bemerkenswerthe Relationen, nehmlich:

$$\pi \frac{K'}{K} = 2kK' \frac{\lambda}{\alpha}; \qquad \pi \frac{K}{K'} = \frac{\pi \alpha}{\lambda k} \frac{\pi}{2K'}$$

woraus ferner folgen:

$$q = e^{-2kK' \frac{\lambda}{\alpha}}; \qquad q' = e^{-\frac{\pi \alpha}{\lambda k} \frac{\pi}{2K'}},$$

welche Formeln zur Berechnung von q und q' Verwendung finden können wenn k nahe der Einheit ist, und man also in der ersten Annäherung setzen kann:

$$q = e^{-\pi\frac{\lambda}{\alpha}}; \qquad q' = e^{-\pi\frac{\alpha}{\lambda}}$$

Die zweite Bemerkung, die ich hier einschalte, betrifft die Entwicklung der Producte $\frac{\mathrm{dn}\, i\xi}{\mathrm{cn}\, i\xi}\frac{d\log\Theta_3(i\xi)}{d\xi}$ und $\frac{1}{\mathrm{cn}\, i\eta}\frac{d\log\Theta(i\eta)}{d\eta}$. Schon im zweiten Abschnitte wurden die Entwicklungen von $\frac{\mathrm{dn}\, i\xi}{\mathrm{cn}\, i\xi}$ und $\frac{1}{\mathrm{cn}\, i\eta}$ gegeben, und zwar in der Form von Partialbrüchen. Aus den angeführten Entwicklungen ersieht man, dass sämmtliche Nenner die Form $1 + q'^{2n}e^{-W}$ haben, wo W gewisse Winkel bezeichnen, die von 0 bis $\frac{2K\pi}{K'}$ wachsen. Der Umstand, dass bloss grade Potenzen von q' in diesen Nennern vorkommen, ermöglicht die späteren Entwicklungen nach den U-Functionen, und zwar so, dass diese Entwicklungen gültig bleiben, auch wenn q' das Zeichen wechselt. Dass analoge Entwicklungen bei oben genannten Producten ausführbar sind, geht aus den nachstehenden Relationen hervor:

$$\frac{d\left\{\frac{\mathrm{dn}\, x}{\mathrm{cn}\, x}\frac{d\log\Theta_3(x)}{dx}\right\}}{dx} = -\,2q\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\frac{d\left\{\dfrac{\mathrm{dn}\,\frac{2K}{\pi}u}{\mathrm{cn}\,\frac{2K}{\pi}u}\right\}}{dq} - \left(\frac{E}{K} - k'^2\right)\frac{\mathrm{dn}\, x}{\mathrm{cn}\, x}$$

$$\frac{d\left\{\frac{1}{\mathrm{cn}\, x}\frac{d\log\Theta(x)}{dx}\right\}}{dx} = -\,2q\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\frac{d\left\{\dfrac{1}{\mathrm{cn}\,\frac{2K}{\pi}u}\right\}}{dq} + \frac{K-E}{K}\frac{1}{\mathrm{cn}\, x}$$

wobei, nach ausgeführter Differentiation hinsichtlich q, das Argument $\frac{2K}{\pi}u$ durch x zu ersetzen ist.[1] Man bemerkt nun sehr leicht, dass durch die bezeichnete Differentiation und nachherige Integration keine Ausdrücke veranlasst werden, welche bei eintretendem Zeichenwechsel von q' unendlich grosse Werthe erhalten könnten.

[1] Ausdrücke der im Texte angeführten Gattung finden sich, so viel ich weiss, zum ersten Male in einer Abhandlung von Herrn C. O. MEYER, CRELLE's Journal, B. 56.

Nach diesen Bemerkungen wollen wir den Fall etwas näher betrachten, wo der Modul k' den Werth Null hat, und wir werden besonders festzustellen suchen, ob ein solcher Fall bleibend bestehen kann, oder ob diese Annahme hinsichtlich des Moduls nothwendig auf Ausdrücke führt, welche mit der Zeit unbegrenzt wachsen. Wäre dies letztere der Fall, dann müsste den absolut gültigen Formeln die Annahme eines Moduls zu Grunde gelegt werden, deren numerischer Werth weniger als die Einheit betrüge, weil ein Anwachsen der Function V_1 die Verkleinerung des Moduls nach sich zieht.

Vor Allem bemerken wir nun die Gleichungen:

$$\sin V_0 = \frac{e^{\xi} - a^{-\xi}}{e^{\xi} + e^{-\xi}}$$

$$\cos V_0 = \frac{2}{e^{\xi} + e^{-\xi}},$$

welche unmittelbar aus den Gleichungen (9) oder (10) des zweiten Abschnittes folgen, wenn man die Bezeichnung:

$$\xi = \gamma n t + C$$

in Kraft lässt; und wir können hier sogleich α statt γ, oder η statt ξ schreiben, weil die Gleichheit dieser Grössen eine nothwendige Folge unserer Annahme in Bezug auf den Werth von k ist.

Aus der dritten der erwähnten Gleichungen folgt:

$$\frac{dV_0}{d\xi} = \frac{2}{e^{\xi} + e^{-\xi}}$$

woraus man durch Integration den Werth:

$$V_0 = -2 \operatorname{arctang}(e^{-\xi}) + \text{Const.},$$

erhält und es ist leicht zu erkennen, dass die Constante gleich $+\frac{\pi}{2}$ zu setzen ist, damit V_0 mit ξ verschwinde.

Für unsern jetzigen Zweck genügt es, von den Gliedern in der Function (X) ein einziges herauszuheben und das entsprechende in V_1 zu bilden. Die hierzu erforderlichen Operationen sind typisch und finden ohne Abänderung bei der Behandlung der übrigen Glieder Anwendung. Das betreffende Glied sei:

$$(X) = -\frac{s}{2}A_1 \sin(2\lambda_1 nt + s_1 Z + 2\Delta_1)$$

Zunächst müssen wir hier die Grösse Z durch die bekannte Function V_0 und durch V_1 ersetzen. Die letztere ist allerdings nicht bekannt, aber wir setzen von derselben voraus, dass sie genügend klein ist, um in einer ersten Annäherung vernachlässigt werden zu dürfen. Der Erfolg wird erweisen, in wiefern eine solche Annahme berechtigt ist oder nicht. — Weil nun der Coefficient λ verschwindet, so gilt die Gleichung:

$$Z = \frac{2}{s}(V - \Delta),$$

und wir können hier leicht bemerken, dass die Grössen Z und c mit einander durch Addition verbunden vorkommen. Daher können wir c beliebig wählen, indem dies nur zur Folge hat, dass das in Z etwa vorkommende constante Glied in entsprechender Weise bestimmt wird. Soll nun Z von einem solchen Gliede befreit sein, so muss entweder das constante Glied in V gleich Δ gesetzt werden, oder, wenn V nur veränderliche Glieder enthält, hat man Δ gleich Null anzunehmen. Es wird mithin im letzteren Falle:

$$sc = s'c' - B$$

Für die Function Z nehmen wir also den Werth:

$$Z = -\frac{4}{s}\operatorname{arc\,tang}(e^{-\xi})$$

an. Hieraus könnten wir nun Z in einer, nach den Potenzen von $e^{-\xi}$ fortschreitenden Reihe entwickeln, die bei positiven Werthen von ξ, den Werth Null inclusive, immer convergirt; wir erhalten jedoch in der folgenden Weise eine wesentlich mehr convergente Darstellung der betreffenden Function.

Der soeben angeführte Ausdruck giebt uns:

$$Z = -\frac{4}{s}\arcsin\left(\frac{e^{-\xi}}{\sqrt{1 + e^{-2\xi}}}\right);$$

und setzen wir:

$$\frac{e^{-\xi}}{\sqrt{1 + e^{-2\xi}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi,$$

so ist φ eine stets reelle Grösse, welche von $\frac{\pi}{2}$ bis 0 variirt, indem ξ die Werthe von 0 bis ∞ annimmt. Es finden sich umgekehrt die Ausdrücke:

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}\, e^{-\xi}}{\sqrt{1 + e^{-2\xi}}}$$

$$\sin 3\varphi = \frac{3\sqrt{2}\, e^{-\xi}}{\sqrt{1 + e^{-2\xi}}} - \frac{8\sqrt{2}\, e^{-3\xi}}{\{1 + e^{-2\xi}\}^{\frac{3}{2}}}$$

u. s. w.

$$\cos 2\varphi = \frac{2e^{-2\xi}}{1 + e^{-2\xi}}$$

u. s. w.

Man findet nun die Function Z durch eine gleichförmig convergente, nach den ungraden Vielfachen von φ fortschreitende Sinusreihe, wonach die folgenden, ebenfalls gleichförmig convergenten Reihen hergestellt werden können:

$$\sin s_1 Z = 2P_1 \sin\varphi + 2P_3 \sin 3\varphi + \ldots$$

$$\cos s_1 Z = P_0 + 2P_2 \cos 2\varphi + \ldots$$

Die Summe der Quadrate dieser Gleichungen giebt uns mehrere Bedingungen; unter andern diese:

$$1 = P_0^2 + 2P_1^2 + 2P_2^2 + \ldots,$$

aus welcher man eine bereits oben gemachte Bemerkung bestätigt findet, nehmlich, dass P_0 nie den Werth 1 überschreitet, während von den übrigen Coefficienten keiner grösser als $\frac{1}{\sqrt{2}}$ werden kann.

Das erwähnte Glied in (X) wird nun:

$$(X) = -\frac{s}{2} A_1 [P_0 + 2P_2 \cos 2\varphi + \ldots] \sin(2\lambda_1 nt + 2\Delta_1)$$

$$-\frac{s}{2} A_1 [2P_1 \sin\varphi + 2P_3 \sin 3\varphi + \ldots] \cos(2\lambda_1 nt + 2\Delta_1),$$

welchen Werth wir jetzt in die Formel (30) für X einzusetzen haben. Wir begnügen uns jedoch bloss den Theil:

$$X = -\frac{s}{2} A_1 P_0 \sin(2\lambda_1 nt + 2\Delta_1)$$

zu berücksichtigen, weil die Behandlung der folgenden Glieder des obigen Ausdruckes von der des soeben hervorgehobenen nicht wesentlich verschieden wird.

Zur Erlangung des Resultates sind noch folgende Schritte erforderlich. Wir bemerken die, für verschwindende Werthe von k' gültigen Ausdrücke:

$$\frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} = \frac{2}{e^{\xi} + e^{-\xi}}; \qquad \frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{dn} i\xi}{\operatorname{cn} i\xi} \frac{d \log \theta_3(i\xi)}{d\xi} = \frac{1}{4}(e^{\xi} - e^{-\xi})$$

$$\frac{K' - E'}{K'} = \frac{1}{2}$$

und erinnern uns, dass jetzt:

$$\gamma = \alpha,$$

so dass nt durch den Werth:

$$nt = \frac{\xi - C}{\alpha}$$

ersetzt werden kann. Bezeichnen wir überdies:

$$\beta_1 = \frac{s}{2} A_1 P_0; \qquad H_1 = 2\Delta_1 - \frac{2\lambda_1}{\alpha} C,$$

so erhalten wir aus der Formel (30):

$$
(32) \qquad V_1 = -\frac{\beta_1}{2\alpha^2}\left\{(e^\xi - e^{-\xi})\int \frac{\sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\xi + H_1\right)}{e^\xi + e^{-\xi}}d\xi - \frac{1}{e^\xi + e^{-\xi}}\int \sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\xi + H_1\right)(e^\xi - e^{-\xi})\,d\xi\right\}
$$

$$
-\frac{2\beta_1}{\alpha^2}\frac{1}{e^\xi + e^{-\xi}}\int d\xi\int \frac{\sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\xi + H_1\right)}{e^\xi + e^{-\xi}}d\xi
$$

Die fernere Ausführung der hier angezeigten Operationen können wir bei Seite lassen, da eine vollständige Entwicklung der betreffenden Formeln bei den vorliegenden Untersuchungen nicht beabsichtigt oder erforderlich ist. Wir bemerken aber ohne Mühe, dass der soeben angeführte Ausdruck für die Function V_1 theils Glieder umfasst, welche gar keine Exponentialfunctionen enthalten, theils aber Glieder, die mit $e^{-\xi}$ oder mit Potenzen dieser Grösse multiplicirt sind. Diese letzteren werden nun mit wachsendem ξ sehr bald unmerklich, so dass die Function V_1 im Wesentlichen aus dem Gliede

$$
V_1 = \frac{\beta_1}{\alpha^2 + (2\lambda_1)^2}\sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\xi + H_1\right)
$$

bestehen wird. Da nun die Grösse β_1, in Folge unserer früheren Annahmen, als eine sehr kleine Grösse im Vergleich zu α^2 anzusehen ist, so müssen auch die Werthe der Function V_1 als kleine Grössen betrachtet werden. Die Untersuchung der Glieder, welche mit $\sin\varphi_1 \sin 3\varphi_1, \ldots,$ $\cos 2\varphi, \ldots,$ multiplicirt sind, führt man in derselben Weise aus, wie oben gezeigt wurde. Nachdem man die Ausdrücke für $\sin\varphi, \ldots$ als Functionen von $e^{-\xi}$ substituirt hat, bemerkt man sofort, dass die entsprechenden Glieder in V_1 mit dem Factor $e^{-\xi}$ oder mit ganzen positiven Potenzen dieser Grösse multiplicirt erscheinen und also mit wachsendem ξ sehr rasch abnehmen.

Theils auf Grund dieses Resultates, theils mit Rücksicht auf die im zweiten Abschnitte durchgeführten Untersuchungen in Betreff der nach den U-Functionen vorgenommenen Entwicklungen, schliessen wir, dass die Darstellung der Function V_1, die wir in der angedeuteten Weise aus der Formel (30) gewinnen können, immer convergent ist, wenn ξ auf positive Werthe beschränkt bleibt. Bei negativen Werthen von ξ würde man zu demselben Resultate gekommen sein, und wir dürfen demnach als bewiesen annehmen, dass V_1 sich für jeden Werth von ξ, in der angezeigten Weise darstellen lässt, sowie dass diese Function immer einen kleinen Werth beibehält. Die Berücksichtigung der Glieder in X, welche aus V_1^2, $V_1^3, \ldots$ herrühren, würde, wie man durch Betrachtung der Gleichung (4) leicht bemerken kann, in diesem Resultate keine Änderung hervorrufen. Auf Grund dieser Ergebnisse müssen wir nun schliessen, dass die Bewegung unter der soeben betrachteten Bedingung, fortbestehen kann.

Wir wollen noch die Bestimmung der Constante C etwas näher beleuchten, wobei es sich erweisen wird, dass dieselbe nicht mehr beliebig sein kann, sondern einer gewissen Bedingung genügen muss, eine nothwendige Folge davon, dass die Constante γ der Bedingung:

$$\gamma = \alpha$$

unterworfen ist.

Die Werthe von Z, V_0 und $\frac{dZ}{dt}$, welche für den Zeitpunkt $t = 0$ gelten, bezeichnen wir mit $(Z)_0$, $(V_0)_0$ und $\left(\frac{dZ}{dt}\right)_0$, und setzen, in Analogie mit früher gebrauchten Bezeichnungen,

$$c_0 = c + (Z)_0; \qquad n_0 = n + \left(\frac{dZ}{dt}\right)_0$$

Man findet nun, indem man von den Gliedern in V_1 absieht,

$$2(V_0)_0 = sc_0 - s'c' + B = 2D = \pi - 4\operatorname{arctang}(e^{-C})$$

$$2\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_0 = sn_0 - s'n' + \sigma n = \frac{4n\alpha}{e^C + e^{-C}}$$

Die Constante C unterliegt hier der Bedingung, dass aus den beiden Gleichungen genau derselbe Werth für diese Grösse erfolgen muss. — Man bemerkt schliesslich leicht, weil:

$$\cos D = \frac{2}{e^C + e^{-C}},$$

dass der Bedingung:

$$0 = \cos D^2 - \left(\frac{sn_0 - s'n' + \sigma n}{2an_0}\right)^2 \left(\frac{(s+\sigma)n_0}{s'n'}\right)^2$$

durch die obigen Ausdrücke genügt wird.

Dass aber die Werthe von c_0 und n_0, welche unmittelbar durch Beobachtungen gegeben werden, dieser Gleichung genügen, ist nun allerdings sehr unwahrscheinlich; nichts desto weniger ist die Betrachtung des entsprechenden Specialfalles von wesentlichem Interesse; nachdem wir denselben erledigt haben, und dabei gesehen, dass die Entwicklungen convergiren, sind wir zu der Schlussfolgerung berechtigt, dass unsere Darstellung des Integrals der vorgelegten Differentialgleichung zur Bestimmung von ζ gleichförmig convergent ist, und zwar nicht nur wenn sämmtliche k_m kleiner als 1 sind, sondern auch, wenn eine dieser Grössen den Werth 1 hat. Mehrere dieser Grössen können, wie man sehr leicht einsieht, nicht diesen Werth haben; es kann nehmlich kein Integrationsdivisor kleiner als α^2 werden.

Als characteristisch für die Bewegung in dem Falle, wo $k = 1$, heben wir noch Folgendes hervor. Die mittlere Bewegung ergiebt sich aus der Formel:

$$n = \frac{s'n'}{s+\sigma};$$

den Unterschied zwischen dieser und der apparenten mittleren Bewegung erhält man aber aus:

$$s(n - n_0) = -\frac{s'n'}{s+\sigma} \frac{4a}{e^{\xi} + e^{-\xi}};$$

dieser Unterschied wird also unmerklich bei einigermassen grossen positiven oder negativen Werthen von ξ. Bei kleineren Werthen von ξ wird aber die apparente mittlere Bewegung erheblich von der wahren abweichen und also Werthe von λ veranlassen können, die merklich von Null verschieden sind.

Auf die nähere Ermittelung der Ausdrücke, welche Entwicklungen nach Functionen von Exponentialgrössen enthalten, muss hier verzichtet werden, einestheils weil eine solche die Grenzen dieser Abhandlung sehr bedeutend erweitern müsste, andertheils aber weil die vollständige Darstellung der betreffenden Formeln erst dann von Interesse wird, wenn sich ein entsprechender concreter Fall darbietet. Dass einer solchen Darstellung, die allerdings nicht besonders einfach werden würde, jedoch keine ernsten Schwierigkeiten im Wege stehen, geht aus den Untersuchungen am Ende des zweiten Abschnittes hervor. Auf diese Untersuchungen gestützt, bemerken wir noch Folgendes.

Hat die Grösse k' einen zwar sehr kleinen, aber doch reellen Werth, so werden die Glieder in der Function (X) bei der Integration durch Factoren der Form:

$$\operatorname{cotang} \frac{2\lambda_1}{a} K$$

vergrössert. In diesen Fällen hat man aber, wie oben nachgewiesen wurde, genähert:

$$K = \frac{a}{\lambda} \frac{\pi}{2},$$

so dass der betreffende Integrationsfactor den Werth:

$$\operatorname{cotang} \frac{\lambda_1}{\lambda} \pi$$

annimmt. Nachdem dieses Resultat erlangt worden ist, schliesst man unmittelbar, dass Glieder in V_1 zwar wesentlich vergrössert werden können, ohne jedoch noch folgern zu dürfen, dass diese Function aufhörte, eine kleine Grösse zu sein. Wir wissen im Gegentheil, dass so lange k' einen reellen, wenn auch noch so kleinen, Werth hat, so kann V_1 keinen grössern Werth erhalten, als denjenigen, welcher sich aus der Gleichung (10) ergiebt. Die in dieser Gleichung vorkommende Function Z_1 ist aber, wie man aus der ersten der Gleichungen (16) ersehen kann, im Allgemeinen eine kleine Grösse, wenigstens von der Ordnung $\frac{1}{s_1} \frac{2K}{\pi}$, d. h. bei kleinen Werthen von k', von der Ordnung $\frac{a}{s_1 \lambda}$.

Nun ist aber, wie wir einer in der Einleitung gegebenen Formel entnehmen können, näherungsweise:

$$\lambda = -\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2s_2'};$$

wir haben also:

$$\frac{\alpha}{s_1\lambda} = -\frac{2\alpha}{\frac{s_1}{s_1'} + s_1\sigma}$$

Der Nenner ist hier im Allgemeinen eine Grösse nullter Ordnung, welche nur in selten vorkommenden Ausnahmefällen so kleine Werthe annimmt, dass das Verhältniss $\frac{\alpha}{s_1\lambda}$ als eine Grösse nullter Ordnung anzusehen wäre.

Es ist aber noch ein Umstand zu berücksichtigen. In dem Maasse, wie V_1 grösser wird, vermindert sich, wie wir aus der Gleichung (3) entnehmen können, der Werth von α, vorausgesetzt, dass V_1 nicht Werthe erhält, die hier nicht in Frage kommen können. In Folge dessen wird die Wahrscheinlichkeit vermindert, dass der Modul k der Einheit sehr nahe kommen kann, so dass das betreffende, von dem Argumente λnt abhängige Glied als ein gewöhnliches zu behandeln wäre. Aus dem Gesagten dürfen wir nun schliessen, dass Fälle, wo V_1 als eine Grösse nullter Ordnung anzusehen ist, während k' einen sehr kleinen Werth hat, zwar nicht ganz ausgeschlossen sind, dieselben aber als sehr unwahrscheinlich betrachtet werden dürfen. Auf keinen Fall wird aber die Convergenz der Reihe (20) dadurch aufgehoben, dass die Function V_1 grössere Werthe erhält; die Convergenz dieser Reihe bleibt, wie aus den vorhergehenden Untersuchungen hervorging, bestehen, so lange keine der Grössen k_m den Grenzwerth 1 überschreitet.

Ähnliche Betrachtungen, diejenigen Fälle betreffend, wo l' sehr klein aber doch reell ist, würden zu der Erkenntniss führen, dass solche Fälle wohl stattfinden können, wiewohl sie als unwahrscheinlich anzusehen sind. Bei Werthen von l, welche der Einheit sehr nahe kommen, kann die Function V_1 leicht erhebliche Werthe erhalten, wodurch wiederum eine Verkleinerung von α herbeigeführt wird. In dem Maasse aber, wie für α kleinere Werthe anzunehmen sind, wird die Wahrscheinlichkeit geringer, dass aus der vierten Gleichung des Systems (IV) im zweiten Abschnitte ein positiver Werth für l'^2 hervorgeht. Gegenwärtig haben wir keine Veranlassung, die Existenz eines solchen Falles zu vermuthen und dürfen daher die, in anderer Hinsicht wenig interessanten Detailuntersuchungen derselben vor der Hand bei Seite lassen.

IV.

Die im Vorhergehenden mitgetheilten Untersuchungen beziehen sich auf einen idealen Fall, welcher in den Bewegungstheorien von materiellen Punkten, die sich gegenseitig anziehen, nicht in andrer Weise realisirt sein kann, als indem wir die entsprechenden Formeln als eine erste Annäherung betrachten. Nichts desto weniger, und sogar ganz abgesehen von der Möglichkeit, die bereits erlangten Resultate als Formeln einer ersten Annäherung entsprechend verwerthen zu können, haben diese Resultate doch einen nicht geringen Werth für die Beantwortung der Frage, welcher die vorliegenden Untersuchungen gewidmet sind; sie ergeben nehmlich gewissermassen ein Schema, nach welchem die Untersuchungen über die Convergenz der in wirklich vorkommenden Fällen anzuwendenden Entwicklungen vorzunehmen sind.

Bereits in der Einleitung wurde des Umstandes gedacht, dass characteristische Glieder derselben Ordnung nicht vereinzelt vorkommen, sondern in der Regel in einer endlichen Anzahl vorhanden sind. Wir müssen nun unsere Untersuchungen dahin ausdehnen, dass auf diesen Umstand Rücksicht genommen wird, damit sie denjenigen Character der Allgemeingültigkeit erhalten, welche für die Erkenntniss der Natur der Bewegungen, also für die Lösung der Aufgabe im astronomischen Sinne, erforderlich ist, wobei die Entscheidung hinsichtlich der Convergenz gewisser bei derselben auftretenden Reihen offenbar nicht genügt.

Unsern Untersuchungen legen wir also nun die nachstehende Differentialgleichung zu Grunde, von welcher die Gleichung (2) des ersten Abschnittes als eine Specialisirung anzusehen ist,

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2Z}{dt^2} = &-n^2A_{0,1}\sin[(sn - s'n' + \sigma_{0,1}n)t + sZ + sc - s'c' + B_{0,1}] \\ &- n^2A_{0,2}\sin[(sn - s'n' + \sigma_{0,2}n)t + sZ + sc - s'c' + B_{0,2}] \\ &- \ldots\ldots \\ &+ \frac{2}{s}n^2(X) \end{aligned}$$

wobei bezeichnet wurde:

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad \frac{2}{s}(X) = &- A_{1,1} \sin\left[(s_1 n - s_1' n' + \sigma_{1,1} n)t + s_1 Z + s_1 c - s_1' c' + B_{1,1}\right] \\
&- A_{1,2} \sin\left[(s_1 n - s_1' n' + \sigma_{1,2} n)t + s_1 Z + s_1 c - s_1' c' + B_{1,2}\right] \\
&- \ldots\ldots \\
&- A_{2,1} \sin\left[(s_2 n - s_2' n' + \sigma_{2,1} n)t + s_2 Z + s_2 c - s_2' c' + B_{2,1}\right] \\
&- A_{2,2} \sin\left[(s_2 n - s_2' n' + \sigma_{2,2} n)t + s_2 Z + s_2 c - s_2' c' + B_{2,2}\right] \\
&- \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Wenn wir hier feststellen, dass die Coefficienten $A_{0,1}, A_{0,2}, \ldots$ unter einander Grössen derselben Ordnung sind, und ebenso die Coefficienten $A_{1,1}$, $A_{1,2}, \ldots$ unter einander, u. s. w., so ist die Anzahl dieser Coefficienten innerhalb jeder Gruppe immer endlich, wiewohl diese Anzahl mit der Ordnung der Gruppe, also mit dem ersten Index der A-Coefficienten wächst. Nun kommen aber Glieder vor, deren Argumente mit den Argumenten der bereits gedachten Glieder zusammenfallen, deren Coefficienten aber einer höheren Ordnung als der betreffenden Gruppe angehört. Zählt man nun diese Glieder zu der Gruppe, so wird dieselbe zwar eine unendliche Anzahl Glieder enthalten, welche aber selbst in Gruppen zerfallen, die eine gleichförmig convergente Reihe bilden. Auf unsere ferneren Betrachtungen bleibt daher der Umstand ganz ohne Einfluss, ob die Anzahl der Glieder innerhalb der, in den Formeln (1) und (2) vorkommenden Gruppen eine endliche oder unendliche ist.

Indem wir unter σ und B zwei noch zu bestimmende Constanten, σ von derselben Grössenordnung wie $\sigma_{0,1}, \sigma_{0,2}, \ldots$ und B beliebig, verstehen, führen wir zwei Functionen ε und θ durch die Gleichungen:

$$
(3) \qquad \left|
\begin{aligned}
\varepsilon \cos 2\theta = &\quad\; sA_{0,1} \cos\left[(\sigma_{0,1} - \sigma)nt + B_{0,1} - B\right] \\
&+ sA_{0,2} \cos\left[(\sigma_{0,2} - \sigma)nt + B_{0,2} - B\right] \\
&+ \ldots\ldots \\
\varepsilon \sin 2\theta = &\quad\; sA_{0,1} \sin\left[(\sigma_{0,1} - \sigma)nt + B_{0,1} - B\right] \\
&+ sA_{0,2} \sin\left[(\sigma_{0,2} - \sigma)nt + B_{0,2} - B\right] \\
&+ \ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

ein. Setzen wir überdies:

$$(4)\qquad 2W = (sn - s'n' + \sigma n)t + sZ + sc - s'c' + B,$$

so erhalten wir aus (1) die Differentialgleichung:

$$(5)\qquad \frac{d^2W}{dt^2} = -n^2\varepsilon \sin(W + \theta)\cos(W + \theta) + n^2(X)$$

Untersuchen wir vor Allem das Verhalten der Functionen ε und θ. Zu diesem Zwecke differentiiren wir die Gleichungen (3) und setzen zur Abkürzung:

$$L_\nu = (\sigma_{0,\nu} - \sigma)nt + B_{0,\nu} - B$$

Es findet sich hierauf:

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta \frac{d\varepsilon}{dt} - 2\varepsilon \sin 2\theta \frac{d\theta}{dt} = &- s(\sigma_{0,1} - \sigma)nA_{0,1}\sin L_1 \\
&- s(\sigma_{0,2} - \sigma)nA_{0,2}\sin L_2 \\
&- \ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 2\theta \frac{d\varepsilon}{dt} + 2\varepsilon \cos 2\theta \frac{d\theta}{dt} = &\; s(\sigma_{0,1} - \sigma)nA_{0,1}\cos L_1 \\
&+ s(\sigma_{0,2} - \sigma)nA_{0,2}\cos L_2 \\
&+ \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der in den Gleichungen (3) gegebenen Ausdrücke für $\varepsilon\cos 2\theta$ und $\varepsilon \sin 2\theta$ findet man nun durch eine leichte Rechnung:

$$\begin{aligned}
\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt} = &- s^2n(\sigma_{0,2} - \sigma_{0,1})A_{0,1}A_{0,2}\sin(L_2 - L_1) \\
&- s^2n(\sigma_{0,3} - \sigma_{0,2})A_{0,2}A_{0,3}\sin(L_3 - L_2) \\
&- s^2n(\sigma_{0,3} - \sigma_{0,1})A_{0,1}A_{0,3}\sin(L_3 - L_1) \\
&- \ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon^2\frac{d\theta}{dt} = &\; s^2n(\sigma_{0,1} - \sigma)A_{0,1}^2 + s^2n(\sigma_{0,2} - \sigma)A_{0,2}^2 + \ldots \\
&+ s^2n(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2} - 2\sigma)A_{0,1}A_{0,2}\cos(L_2 - L_1) \\
&+ s^2n(\sigma_{0,2} + \sigma_{0,3} - 2\sigma)A_{0,2}A_{0,3}\cos(L_3 - L_2) \\
&+ s^2n(\sigma_{0,1} + \sigma_{0,3} - 2\sigma)A_{0,1}A_{0,3}\cos(L_3 - L_1) \\
&+ \ldots\ldots;
\end{aligned}$$

und aus den Gleichungen (3) ergiebt sich die nachstehende direct, indem man die Summe der Quadrate dieser Gleichungen bildet,

$$\varepsilon^2 = s^2\{A_{0,1}^2 + A_{0,2}^2 + \dots\}$$
$$+ 2s^2 A_{0,1}A_{0,2}\cos(L_2 - L_1) + 2s^2 A_{0,2}A_{0,3}\cos(L_3 - L_2)$$
$$+ 2s^2 A_{0,1}A_{0,3}\cos(L_3 - L_1) + \dots$$

Durch Differentiation dieser Formel ergiebt sich der bereits angeführte Werth von $\varepsilon\frac{d\varepsilon}{dt}$ unmittelbar.

Durch die Definition der Function ε ist es an sich klar, dass dieselbe immer einen reellen Werth haben muss. Wenn wir also von dem sehr unwahrscheinlichen Falle absehen, in welchem ε den Werth Null erhalten kann, so dürfen wir ε^2 als eine stets positive Grösse ansehen. — Setzen wir nun:

$$h^2 = s^2\{A_{0,1}^2 + A_{0,2}^2 + \dots\}$$
$$H = 2s^2 A_{0,1}A_{0,2}\cos(L_2 - L_1) + \dots$$

und bezeichnen den grössten positiven Werth von H mit H_1 und den grössten negativen mit $-H_2$, so ist nothwendig:

$$h^2 > H_2$$

Wir bezeichnen ferner:

$$g_1 = \frac{H_1 + H_2}{2}; \qquad g_2 = \frac{H_1 - H_2}{2}$$

und schreiben:

$$\varepsilon^2 = h^2 + g_2 + H - g_2;$$

es ist hierbei klar, dass die Function $H - g_2$ zwischen den Grenzen $-g_1$ und $+g_1$ hin und her schwankt, sowie dass

$$h^2 + g_2 > g_1$$

Setzen wir also:

$$H - g_2 = g_1 U$$

$$\frac{g_1}{h^2 + g_2} = \frac{2\beta}{1 + \beta^2},$$

so ist U eine Function, welche immer zwischen den Grenzen -1 und $+1$ eingeschlossen bleibt, und β eine Constante, deren Werth kleiner als die Einheit ist. Es ergiebt sich hiernach:

$$\varepsilon^2 = \frac{h^2 + g_2}{1 + \beta^2}\{1 + 2\beta U + \beta^2\},$$

aus welcher Gleichung die Function ε ebenso wie $\sqrt{\varepsilon}$ in gleichförmig convergenten Reihen entwickelt werden können, wobei die Glieder trigonometrische Functionen der Argumente L_1, L_2, ... enthalten. Mit Hülfe des gefundenen Ausdruckes lässt sich die Function $\frac{1}{\varepsilon^2}$ ebenfalls in derselben Weise entwickeln, wonach eine ähnliche Entwicklung des Differentials $\frac{d\theta}{dt}$ hergestellt werden kann. Man bemerkt nun sehr leicht, dass die Coefficienten dieser Entwicklung lineare Functionen der Grössen σ, $\sigma_{0,1}$, $\sigma_{0,2}$, ... sind, woraus folgt, dass das constante Glied, durch eine passende Bestimmung von σ, die noch zu unserer Verfügung steht, zum Verschwinden gebracht werden kann. Man erhält somit die Function θ durch eine Reihe dargestellt, in der nur trigonometrische Functionen der Zeit vorkommen. Wir nehmen hier an, dass die Reihe gleichförmig convergent ist; der Beweis für die Richtigkeit dieser Annahme ergiebt sich bei der Entwicklung der elementären Glieder, die wir aber jetzt nicht mit in den Kreis unserer Untersuchungen hineinziehen.

Wir gehen nun zur Aufsuchung des Integrals der Gleichung (5) über; ich bemerke dabei, dass die Form, unter welcher ich hier das Integral darstellen werde, in gewissen Fällen, namentlich wenn ε sehr klein werden oder gar verschwinden kann, durch eine andere mit Vortheil zu ersetzen ist. Diese andere Form findet sich in einer Abhandlung von Herrn Harzer: *Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper* dargestellt, welche Abhandlung vor kurzem in den Mémoires de l'académie des sciences de S:t Pétersbourg veröffentlicht worden ist.

Die betreffende Gleichung erhält sogleich eine etwas einfachere Form als die oben gegebene, wenn wir setzen:

$$W + \theta = V; \qquad n^2(X) + \frac{d^2\theta}{dt^2} = n^2 X;$$

es wird nehmlich nun:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + n^2\alpha^2 \sin V \cos V = n^2X, \tag{6}$$

wenn wir α^2 statt ε schreiben.

Wenn nun α^2 eine Constante wäre und X den Werth Null hätte, so erhielte man das Integral der vorgelegten Gleichung durch elliptische Functionen, wie im zweiten Abschnitte gezeigt worden ist. Wenngleich aber diese Voraussetzungen hier nicht zutreffen, so geben wir dem Integrale doch dieselbe Form, die es bei constantem α^2 und verschwindendem X erhalten würde, indem wir sowohl den Modul als veränderlich ansehen, als auch dem Argumente eine Function der Zeit hinzugefügt denken; diese Grössen müssen selbstverständlich in der Weise bestimmt werden, dass der obigen Gleichung genügt wird.

Dem Gesagten gemäss setzen wir:

$$\left(\frac{dV}{ndt}\right)^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \sin V^2, \tag{7}$$

wobei wir unter der Bezeichnung γ^2 eine Function der Zeit verstehen, welche einen constanten Werth annimmt wenn α^2 unveränderlich ist und X den Werth Null hat.

Zur Bestimmung der Function γ differentiiren wir die soeben aufgestellte Gleichung, wodurch wir finden:

$$\frac{d\gamma^2}{ndt} = 2\frac{dV}{ndt}\left\{\frac{d^2V}{n^2dt^2} + \alpha^2 \sin V \cos V\right\} + \sin V^2 \frac{d\alpha^2}{ndt},$$

eine Gleichung, aus welcher man mit Rücksicht auf (6) die nachstehende augenblicklich erlangt:

$$\frac{d\gamma^2}{ndt} = 2X\frac{dV}{ndt} + \sin V^2 \frac{d\alpha^2}{ndt} \tag{8}$$

Dem zweiten Integrale der Gleichung (6) geben wir die Form:

$$V = \operatorname{am} \xi \quad \left(\operatorname{mod} k = \frac{\alpha}{\gamma}\right) \tag{9}$$

wobei wir uns das Argument ξ als durch die Formel:

$$\xi = \frac{2K}{\pi}\left[\int \Gamma n dt + \Gamma_0\right] \tag{10}$$

gegeben denken.

In dieser Formel bezeichnet K das, mit dem veränderlichen Modul k berechnete vollständige Integral erster Gattung, welches jetzt ebenfalls als eine Function der Zeit anzusehen ist; Γ eine sogleich zu bestimmende Function und Γ_0 eine Integrationsconstante.

Für die Function $\frac{dV}{ndt}$ erhalten wir nun einerseits unter Berücksichtigung der Gleichung (9) aus der Gleichung (7) den Werth:

$$\frac{dV}{ndt} = \gamma \operatorname{dn}\xi;$$

anderseits ergiebt sich aber durch Differentiation der Gleichung (9) unter Berücksichtigung von (10):

$$\frac{dV}{ndt} = \operatorname{dn}\xi\left\{\frac{2K}{\pi}\Gamma + \frac{d\left(\frac{2K}{\pi}\right)}{dk}\left(\int \Gamma n dt + \Gamma_0\right)\frac{dk}{ndt}\right\} + \frac{d \operatorname{am}\xi}{dk}\frac{dk}{ndt}$$

Nun findet man aber, mit Hülfe einer von Herrn Hermite gegebenen Formel für die Differentiation der elliptischen Functionen hinsichtlich des Moduls:

$$\frac{d \operatorname{am}\xi}{dk} = -\operatorname{dn}\xi\frac{d\left(\frac{2K}{\pi}\right)}{dk}\left(\int \Gamma n dt + \Gamma_0\right) - \frac{\operatorname{dn}\xi}{kk'^2}\frac{d\log\Theta_3(\xi)}{d\xi},$$

womit das folgende Resultat erlangt wird:

$$\frac{dV}{ndt} = \operatorname{dn}\xi\left\{\frac{2K}{\pi}\Gamma - \frac{1}{kk'^2}\frac{d\log\Theta_3(\xi)}{d\xi}\frac{dk}{ndt}\right\}$$

Die Gleichsetzung der beiden Werthe von dV führt nun augenblicklich zu der Formel:

$$\Gamma = \frac{\pi}{2K}\gamma + \frac{\frac{\pi}{2K}}{kk'^2}\frac{d\log\Theta_3(\xi)}{d\xi}\frac{dk}{ndt} \tag{11}$$

Durch die Gleichungen (9), (10) und (11) ist V als eine Function von γ dargestellt worden; das erlangte Resultat wäre nun in die Gleichung (8) einzusetzen, wodurch man eine Differentialgleichung erhielte, aus welcher die Unbekannte γ bestimmt werden könnte, da alle übrigen in den betreffenden Grössen als bekannt anzunehmen sind. Die Integration dieser Gleichung liesse sich jedoch nicht direct ausführen, sondern müsste man das Resultat auf dem Wege der Annäherungen suchen. — Wir wollen aber diese Differentialgleichung unseren Untersuchungen nicht zu Grunde legen, sondern zunächst eine andere ableiten, durch welche k gefunden wird; hierauf werden wir eine zweite Differentialgleichung aufsuchen, durch deren Integration man zwar nicht γ selbst, wohl aber einen Theil des Integrales

$$\int \gamma n dt$$

bestimmen kann.

Die Relation zwischen den drei Grössen k, α und γ giebt uns sofort:

$$dk^2 = \frac{\gamma^2 d\alpha^2 - \alpha^2 d\gamma^2}{\gamma^4}$$

Hieraus ergiebt sich, indem der Werth von $d\gamma^2$ aus der Gleichung (8) eingeführt wird,

$$dk^2 = \frac{1}{\gamma^4}[(\gamma^2 - \alpha^2 \sin V^2)d\alpha^2 - 2\alpha^2 X dV],$$

oder:

$$\frac{dk^2}{ndt} = \frac{k^2}{\alpha^2}\mathrm{dn}\,\xi^2 \frac{d\alpha^2}{ndt} - 2\frac{k^3}{\alpha} X \mathrm{dn}\,\xi, \tag{12}$$

oder endlich:

$$\frac{dk}{ndt} = \frac{k}{\alpha}\mathrm{dn}\,\xi^2 \frac{d\alpha}{ndt} - \frac{k^2}{\alpha} X \mathrm{dn}\,\xi \tag{13}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich ein bemerkenswerthes Resultat ableiten, wenn man sich die Annahme gestattet, dass die dritte Potenz von k neben der ersten vernachlässigt werden darf. Um dieses Resultat zu erhalten schreiben wir wie früher $\frac{1}{l}$ für k. Es ergiebt sich alsdann:

$$\frac{dl}{ndt} + \frac{l}{\alpha}\mathrm{dn}\,\xi^2 \frac{d\alpha}{ndt} = \frac{X}{\alpha}\mathrm{dn}\,\xi \tag{14}$$

wonach man die Formel:

$$(15) \qquad l = e^{-\int \frac{da}{a} \mathrm{dn}\xi^2} \left| \gamma_0 + \int \frac{X}{a} e^{\int \frac{da}{a} \mathrm{dn}\xi^2} \mathrm{dn}\xi n dt \right|$$

aufstellen kann, wobei γ_0 eine Integrationsconstante bedeutet.

In Übereinstimmung mit der soeben erwähnten Hypothese setzen wir nun $\mathrm{dn}\xi$ gleich der Einheit und folgern alsdann den Werth:

$$(16) \qquad k = \frac{1}{l} = \frac{a}{\gamma_0 + \int X n dt}$$

Dieser Ausdruck repräsentirt eine wirkliche Annäherung, so oft k immer kleiner als 1 bleibt; durch Substitution dieses Werthes in der Formel (15) ergiebt sich ein genaueres Resultat, und man findet die gesuchte Grösse mit jeder beliebigen Genauigkeit, indem man die Näherungen fortsetzt. Diesem Resultate entspricht auch der Werth:

$$(17) \qquad \gamma = \gamma_0 + \int X n dt$$

womit wir mit Hülfe der Gleichung (11) den nachstehenden erhalten, indem wir fortwährend Grössen von der Ordnung k^2 vernachlässigen,

$$\int \Gamma n dt = \gamma_0 n t + \int n dt \int X n dt$$

Nun ist aber, wenn wir uns der Bezeichnungen:

$$sn - s'n' + \sigma n = 2n\lambda; \qquad sc - s'c' + B = 2\Delta$$

bedienen,

$$2(V - \theta) = 2\lambda n t + sZ + 2\Delta;$$

und setzt man hier den Werth von V ein, so wie sich dieser durch Entwicklung der Gleichung (9) ergiebt, nehmlich:

$$V = \int \Gamma n dt + \Gamma_0 + \text{periodische Glieder,}$$

so findet sich mit Rücksicht auf den soeben gefundenen Ausdruck für $\int \Gamma n dt$:

$$\begin{aligned} 2\gamma_0 n t + 2\Gamma_0 + 2\Psi_0 + 2\int n dt \int X n dt - 2\theta \\ = 2\lambda n t + sZ + 2\Delta \end{aligned}$$

Wir haben hier die im Ausdrucke von V vorkommende Summe von periodischen Gliedern durch Ψ_0 bezeichnet; wenn wir jetzt noch γ_0 mit λ, Γ_0 mit Δ identificiren, so wird unser Resultat:

$$Z = \frac{2}{s}\left\{\Psi_0 - \theta + \int ndt \int Xndt\right\} \tag{18}$$

Diese Ergebnisse sind selbstverständlich nur genäherte, und namentlich wäre die Relation zwischen γ_0 und λ noch sehr ungenügend, wenn es sich um die Ausführung einer numerischen Rechnung handelte. Die strengeren Ausdrücke haben für die jetzigen Untersuchungen kein besonderes Interesse; ich kann sie also hier bei Seite lassen, und dies um so mehr, als man sie aus der Gleichung (15) in ähnlicher Weise ableiten kann, wie die Gleichungen (17) und (18) erhalten wurden.

Erinnern wir uns der Beziehung:

$$n^2(X) + \frac{d^2\theta}{dt^2} = n^2X,$$

so finden wir aus der Gleichung (18) diese:

$$Z = \frac{2}{s}\left\{\Psi_0 + \int ndt \int (X)ndt\right\} \tag{19}$$

Aus der Gleichung (2) nehmen wir nun die nächste Glieder-Gruppe, die wir uns als in einem einzigen Gliede zusammengezogen denken, besonders heraus, und schreiben:

$$\frac{2}{s}(X) = -\frac{2}{s_1}\varepsilon_1 \sin(W_1 + \theta_1)\cos(W_1 + \theta_1) + \frac{2}{s_1}(X_1),$$

wobei ε_1, θ_1 und W_1 genau in derselben Weise aus den Gliedern der jetzt in Frage stehenden Gruppe gebildet werden, wie die entsprechenden Grössen ohne Index aus den Gliedern der ersten Gruppe; wir haben namentlich:

$$2W_1 = 2\lambda_1 nt + s_1 Z + 2\Delta_1$$

Die Function $\frac{2}{s_1}(X_1)$ umfasst die Summe aller übrigen Glieder, welche nicht der zusammengezogenen Gruppe angehören.

Wir zerlegen nun Z in zwei Theile, Z_0 und Z', und denken uns dabei den Theil Z_0 als bekannt, d. h. aus den bekannten Gliedern in dem Ausdrucke (19) zusammengesetzt. Hierauf entwickeln wir $\sin Z_0$ nach den Vielfachen der Argumente, welche in Z_0 vorkommen, bezeichnen das constante Glied dieser Entwicklung mit P_0 und setzen endlich:

$$\varepsilon_1 = \alpha_1^2$$

$$2V_1 = 2\lambda_1 nt + s_1 Z' + 2\Delta_1 + 2\theta_1$$

$$n^2 X_1 = n^2(X_1) + \frac{d^2\theta_1}{dt^2}$$

Durch zweimalige Differentiation der Gleichung (19) ergiebt sich jetzt:

$$(20) \qquad \frac{d^2 V_1}{dt^2} + n^2\alpha_1^2 \sin V_1 \cos V_1 = n^2 X_1,$$

welche Gleichung genau wie (6) zu behandeln ist.

Bei der Herstellung der Gleichung (20) haben wir gewisse Glieder, die nicht unmittelbar bekannt sind, allerdings vernachlässigt, nehmlich die, welche von den Argumenten $2(\lambda + \lambda_1)nt$, $2(\lambda - \lambda_1)nt$, u. s. w. abhängen. Diese Glieder können aber, sobald Z' mit Hülfe der Gleichung (20) einmal bestimmt worden ist, leicht berechnet werden und sind immer als sehr kleine Grössen anzusehen; wir können sie daher nach und nach der Function Ψ_0 hinzufügen. Nachdem dies festgestellt worden ist, haben wir:

$$Z_0 = \frac{2}{s}\Psi_0$$

und erhalten, nach Integration der Gleichung (20), ein ähnliches Resultat hinsichtlich des Haupttheiles von Z', den wir durch Z_1 bezeichnen wollen, vorausgesetzt, dass der Modul k_1 immer kleiner als 1 bleibt. In ähnlicher Weise ist nun fortzusetzen, und man findet, wenn die Moduln sich immer kleiner als 1 ergeben, ein Resultat der Form:

$$(21) \qquad Z = \frac{2}{s}\Psi_0 + \frac{2}{s_1}\Psi_1 + \frac{2}{s_2}\Psi_2 + \ldots,$$

also eine gleichförmig convergente Reihe, da die Functionen Ψ_0, Ψ_1, ... im Allgemeinen kleine Grössen sind, aber nicht über eine gewisse Grenze, die als eine Grösse nullter Ordnung anzusehen ist, anwachsen können, Ergiebt sich aber einer der Moduln als eine Function, deren Werthe immer über 1 liegen, so bricht die Reihe (21) bei diesem Gliede ab, und die entsprechende Gleichung der Form (6) oder (20) muss, damit das Integral derselben sogleich unter der anschaulichsten Form erhalten werde, in einer, von der vorher befolgten, etwas abweichenden Weise behandelt werden.

Wir nehmen hier wieder an, dass sich das erste Integral der Gleichung (6) — oder auch der Gleichung (20), denn die Rechnung bleibt immer dieselbe — durch die Form:

$$\left(\frac{dV}{ndt}\right)^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \sin V^2$$

darstellen lässt. Hinsichtlich des zweiten Integrales setzen wir aber voraus, dass dasselbe mit Hülfe der Gleichungen:

$$(22) \qquad \left\{\begin{aligned} \sin V &= l \operatorname{sn} \eta \\ \cos V &= \operatorname{dn} \eta \end{aligned}\right\} \quad \left(\operatorname{mod} l = \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

zu finden ist, indem wir bezeichnen:

$$(23) \qquad \eta = \frac{2L}{\pi}\left[\int A ndt + A_0\right]$$

und denken uns dabei A als eine noch zu bestimmende Function von t, und A_0 als eine Integrationsconstante.

Aus den obigen Relationen findet sich sogleich:

$$(24) \qquad \frac{dV}{ndt} = \gamma \operatorname{cn} \eta;$$

man erhält aber einen zweiten Ausdruck für dieses Differential, indem man eine der Gleichungen (22) differentiirt, und nachher $\cos V$ oder $\sin V$ mit Hülfe der anderen eliminirt. Man findet somit:

$$\frac{dV}{ndt} = \frac{l \operatorname{cn} \eta}{\operatorname{dn} \eta} \frac{d \operatorname{am} \eta}{ndt} + \frac{\operatorname{sn} \eta}{\operatorname{dn} \eta} \frac{dl}{ndt}$$

und hieraus ergiebt sich in Berücksichtigung der Gleichung:

$$\frac{d \operatorname{am} \eta}{ndt} = \operatorname{dn} \eta \left\{\frac{2L}{\pi} A - \frac{1}{ll'^2} \frac{d \log \Theta_3(\eta)}{d\eta} \frac{dl}{ndt}\right\}$$

der Ausdruck:

$$\frac{dV}{ndt} = l\,\mathrm{cn}\,\eta\left\{\frac{2L}{\pi}A - \frac{1}{ll'^2}\frac{d\log\Theta_3(\eta)}{d\eta}\frac{dl}{ndt}\right\} + \frac{\mathrm{sn}\,\eta}{\mathrm{dn}\,\eta}\frac{dl}{ndt}$$

Mit Hülfe der bekannten Relation:

$$\frac{d\log\Theta_3(\eta)}{d\eta} = \frac{d\log\Theta_2(\eta)}{d\eta} + \frac{l'^2\,\mathrm{sn}\,\eta}{\mathrm{cn}\,\eta\,\mathrm{dn}\,\eta}$$

lässt sich die vorstehende Gleichung indessen wesentlich vereinfachen; es wird:

$$\frac{dV}{ndt} = l\,\mathrm{cn}\,\eta\left\{\frac{2L}{\pi}A - \frac{1}{ll'^2}\frac{d\log\Theta_2(\eta)}{d\eta}\frac{dl}{ndt}\right\}$$

Dieser Werth von $\frac{dV}{ndt}$ muss nun dem früheren, durch die Gleichung (24) gleich sein, aus welcher Bedingung die nachstehende Relation sogleich gefolgert wird:

$$A = \frac{\pi}{2L}\alpha + \frac{\frac{\pi}{2L}}{ll'^2}\frac{d\log\Theta_2(\eta)}{d\eta}\frac{dl}{ndt} \tag{25}$$

Im Gegensatz zu dem, durch die Gleichung (11) gegebenen Werthe von Γ, welcher offenbar für jeden Werth von ξ endlich bleibt, ist ein ähnliches Verhalten in dem soeben gefundenen Ausdrucke nicht unmittelbar wahrzunehmen. Die betreffende Eigenschaft von A, für jeden Werth von η endlich zu bleiben, leuchtet aber unmittelbar ein, nachdem man den Werth von $\frac{dl}{ndt}$ substituirt hat.

Weil:

$$\mathrm{dn}\,\xi = \mathrm{cn}\,\eta,$$

kann die Gleichung (14) auch wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{dl}{ndt} = \frac{X}{a}\mathrm{cn}\,\eta - \frac{l}{a}\frac{da}{ndt}\mathrm{cn}\,\eta^2$$

Dieser Werth soll also in die Formel (25) eingeführt werden; ersetzen wir dabei die Function θ_2 durch θ_3, indem wir von der bereits angeführten Relation Gebrauch machen, so erlangen wir:

$$(26)\qquad A = \frac{\pi}{2L}\alpha - \frac{\pi}{2L}\left\{\frac{X}{al}\frac{\operatorname{sn}\eta}{\operatorname{dn}\eta} - \frac{1}{a}\frac{da}{ndt}\frac{\operatorname{sn}\eta\operatorname{cn}\eta}{\operatorname{dn}\eta}\right\} + \frac{1}{l'^2}\frac{\pi}{2L}\left\{\frac{X}{al}\operatorname{cn}\eta - \frac{1}{a}\frac{da}{ndt}\operatorname{cn}\eta^2\right\}\frac{d\log\theta_3(\eta)}{d\eta}$$

Dieser Formel fügen wir die Gleichung (15) hinzu, nachdem wir in derselben das Argument ξ gegen η vertauscht haben; es wird alsdann:

$$(27)\qquad l = e^{-\int\frac{da}{a}\operatorname{cn}\eta^2}\left\{\gamma_0 + \int\frac{X}{a}e^{\int\frac{da}{a}\operatorname{cn}\eta^2}\operatorname{cn}\eta\, ndt\right\}$$

Dass die Entwicklung dieses Ausdruckes für l im Allgemeinen convergent sein kann, erkennt man leicht. Wenn aber die Glieder in X, die wir uns zunächst als völlig bekannt denken, so beschaffen wären, dass die Entwicklung des Integrales:

$$(\alpha)\qquad \int\frac{X}{a}ndt$$

nicht convergirte, so müsste die Entwicklung des Integrales:

$$(\beta)\qquad \int\frac{X}{a}\operatorname{cn}\eta\, ndt$$

im Gegentheil convergent sein; dies jedoch nur unter der Voraussetzung dass $\frac{X}{a}$ nicht gewissermassen aus zwei Reihen zusammengesetzt wäre, von denen die eine im Integrale (α) und die zweite im Integrale (β) das Aufhören der Convergenz veranlasste. Bei der ersten Annäherung sind Reihen der zweiten Art höchst unwahrscheinlich, und wir brauchen einen derartigen Fall gar nicht in Betracht zu ziehen, weil alsdann der Modul l nicht so klein sein könnte wie hier vorausgesetzt wird; man würde also auf die vorher aufgestellten Ausdrücke zurückkommen, wo k kleiner als 1 vorausgesetzt wurde. — Bei der zweiten Annäherung kommen aber Reihen zum Vorschein, von denen man zunächst vermuthen könnte, dass sie, in das Integral (β) eingesetzt, das Aufhören der Convergenz veranlassen würden. Dass aber auch dies nicht der Fall ist, lässt sich durch folgende Betrachtungen nachweisen.

Aus der ersten der Gleichungen (22) findet man:

$$V = \arcsin(l \operatorname{sn} \eta)$$

und weil l kleiner als 1 angenommen wird, so convergirt die Reihe:

$$V = l \operatorname{sn} \eta + \frac{1}{2}\frac{l^3 \operatorname{sn} \eta^3}{3} + \ldots$$

gleichförmig und die betreffende Function ist eine rein periodische Function von η. Berücksichtigt man diesen Werth von V bei der Gleichung:

$$2V = 2\lambda nt + sZ + 2\Delta + 2\theta,$$

so schliesst man sogleich, dass λ gleich Null, sowie dass die Constante in θ gleich Δ sein muss. Die Sinusse der Argumente:

$$2\lambda_\nu nt + s_\nu Z + 2\Delta_\nu + 2\theta_\nu$$

zerlegen wir nun in die Theile:

$$G_\nu \sin(2\lambda_\nu nt + 2\Delta_\nu + 2\theta_\nu) + H_\nu \cos(2\lambda_\nu nt + 2\Delta_\nu + 2\theta_\nu),$$

und erkennen leicht, dass die Functionen G_ν und H_ν in Potenzenreihen der Formen:

$$G_\nu = G_{\nu,0} + G_{\nu,1} \operatorname{sn} \eta^2 + G_{\nu,2} \operatorname{sn} \eta^4 + \ldots$$
$$H_\nu = H_{\nu,0} \operatorname{sn} \eta + H_{\nu,1} \operatorname{sn} \eta^3 + \ldots$$

zerfallen, welche Reihen für alle reellen Werthe der Veränderlichen η gleichförmig convergent sind. Bilden wir nun die Glieder der Function (X) und setzen sie in das Integral (β) ein, so erhalten wir Ausdrücke der Form:

$$\int Y_0 \operatorname{cn} \eta\, ndt, \qquad \int Y_1 \operatorname{sn} \eta \operatorname{cn} \eta\, ndt, \qquad \int Y_2 \operatorname{sn} \eta^2 \operatorname{cn} \eta\, ndt, \ \ldots$$

Man bemerkt nun leicht, dass die Entwicklungen dieser Ausdrücke nicht nur convergiren, wenn die Coefficienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ in der Weise abnehmen, dass die Entwicklungen von:

$$\int Y_0 ndt, \qquad \int Y_1 ndt, \qquad \int Y_2 ndt, \ \ldots$$

diese Eigenschaft nicht hätten, sondern auch dass die betreffenden Ausdrücke immer relativ kleine Werthe haben müssen.

Die vorhergehenden Betrachtungen entscheiden aber nicht über das im Ausdrucke von η [Gleichung (23) und (26)] vorkommende Integral:

$$\int \frac{X}{al} \operatorname{sn} \eta ndt$$

Allerdings wird man in der ersten Annäherung — ganz unwahrscheinliche Ausnahmefälle ausgenommen — ein convergentes Resultat erwarten müssen, allein in der zweiten Annäherung würde man ein Glied der Form:

$$\int Y_1 \operatorname{sn} \eta^2 ndt$$

finden, und über die Convergenz der Entwicklung derselben besagen die Untersuchungen über das entsprechende Integral im Ausdrucke für l Nichts. Immerhin ist es sehr unwahrscheinlich, dass die betreffende Entwicklung wirklich divergent ist, und namentlich viel unwahrscheinlicher, als dass man bei dem Doppelintegrale:

$$\int ndt \int Y_1 ndt$$

eine divergente Entwicklung findet, sondern hat man in der Regel bloss sehr grosse Glieder von sehr langer Periode zu erwarten. Nichts desto weniger erscheint der Fall nicht gänzlich ausgeschlossen zu sein, dass die Form des Integrals der Gleichung (6), die wir in den Gleichungen (22) voraussetzen, nicht genügt. Ein solcher Fall kann aber auch aus einer anderen Ursache, die an sich viel wahrscheinlicher ist, als die Nichtconvergenz der oben bezeichneten Reihe, eintreten, nehmlich durch das Verschwinden der Function l. Wir werden sogleich eine, diesem Falle entsprechende Form des betreffenden Integrales aufsuchen, zuvor aber noch einige Bemerkungen in Betreff der Formel (27) den vorhergehenden hinzufügen.

Das Vorhandensein der Factoren $e^{-\int \frac{d\alpha}{\alpha} \operatorname{cn} \eta^2}$ und $e^{\int \frac{d\alpha}{\alpha} \operatorname{cn} \eta^2}$ übt keinen entscheidenden Einfluss auf das Verhalten der Function l aus, jedenfalls können sie die Convergenz der Entwicklung nicht beeinträchtigen. Ein anderer Umstand ist von grösserer Bedeutung. Die Function X enthält nehmlich das Glied:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

und zwar ist dieses eine Grösse zweiter Ordnung hinsichtlich der störenden Kräfte, aber nur ausnahmsweise, durch das Vorhandensein anderer Factoren, einer höheren Grössenordnung beizuzählen. Ganz in derselben Weise verhalten sich die, den späteren Gliedern in (X) angehörigen Functionen θ_1, θ_2, ...; ihre zweiten Differentiale sind wohl Grössen zweiter Ordnung, aber nur in kaum denkbaren Ausnahmefällen noch wesentlich kleiner. Durch die in der Gleichung (27) vorausgesetzte Integration werden nun diese Differentiale durch Grössen von der Ordnung α_ν^2 dividirt. Diese Divisoren sind zwar erster Ordnung hinsichtlich der störenden Kräfte, gehören aber einer desto höheren Ordnung der Excentricitäten an, je grösser die ganze Zahl ν ist und können also eine wesentliche Vergrösserung des Integrationsresultats veranlassen. Dass die Function l beständig kleiner als 1 bleibt ist also desto unwahrscheinlicher, je grösser die Zahl ν ist.

In der Theorie der von Jupiter bewirkten Störungen des kleinen Planeten Pallas findet sich ein kritisches Glied, oder richtiger eine Gruppe von kritischen Gliedern welche von den Zahlen $s_3 = 7$; $s_3' = 18$ abhängt. In Folge dieses Umstandes hat Gauss die Vermuthung ausgesprochen, dass die mittleren Bewegungen beider Planeten genau im Verhältnisse von $\frac{7}{18}$ zu einander stehen. Abgesehen nun auch ganz davon, dass hier auf die Coexistenz mehrerer Glieder oder auf die vollständige Form der Argumente nicht Rücksicht genommen worden ist, erscheint uns diese Vermuthung nach den vorhergehenden Untersuchungen als sehr wenig begründet. Hier ist nehmlich α_3^2 eine Grösse 11^{ter} Ordnung hinsichtlich der Excentricitäten, so dass die Function l jedenfalls nicht immer als eine kleine Grösse anzusehen ist. Anderseits bleibt aber doch die Möglichkeit offen, dass Libration stattfindet. Die Darstellung des Integrals der Gleichung (6) durch die Gleichungen (22) wird nehmlich, wie wir schon hervorgehoben haben, in gewissen Fällen unmöglich, und solche Fälle treten namentlich dann ein, wenn die Schwankungen von l erheblich sind und diese Function dabei sehr klein werden kann. In solchen Fällen kann man die im vorhergehenden Abschnitte auseinandergesetzte Methode in Anwendung bringen, indem man sämmtliche coordinirte Glieder einer Gruppe, mit Ausnahme desjenigen, bei dem $s_r n - s'_r n' + \sigma_{r,\nu} n$ verschwindet, der Function (X) hinzufügt. Man erhält alsdann in der Gleichung (25) des vorigen Abschnittes eine Anzahl Glieder, bei denen die β derselben Ordnung wie α^2 sind. Es ist aber doch möglich, dass die Reihe:

$$V_1 = \frac{2L}{\pi}\left\{\frac{\beta_1}{\left(2\lambda_1 \frac{2L}{\pi}\right)^2 - \alpha^2} \sin\left(\frac{2\lambda_1}{\alpha}\eta + H_1\right) + \dots\right\}$$

convergirt, und dies ist immer der Fall, wenn die Coefficienten λ sämmtlich wesentlich grösser als $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ sind. Dieser Bedingung kann aber nur genügt werden, wenn α^2 sehr klein ist, jedenfalls kleiner als eine Grösse zweiter Ordnung hinsichtlich der störenden Kräfte. Bei den Jupiterstörungen des Pallas würde dies nun zwar zutreffen, so dass wir die angeführte Entwicklung von V_1 als convergent denken können. Wir müssen hierbei jedoch berücksichtigen, dass es genügt, wenn ein einziger der Coefficienten λ von derselben Ordnung wie α ist, damit die Function V_1 als eine Grösse nullter Ordnung erscheine, und in diesem Falle wird auch l als eine Grösse nullter Ordnung zu betrachten sein. Aber auch wenn die Glieder in V_1, an die wir jetzt gedacht haben, sich als sehr klein erwiesen, müsste man doch, bis eine genaue Berechnung das Gegentheil ergiebt, die Existenz der Libration als höchst unwahrscheinlich ansehen. Damit ein Librationsglied überhaupt vorkommen kann, muss nehmlich, wie wir aus der vierten Gleichung des Systems II im zweiten Abschnitte erkennen, das Verhältniss:

$$\frac{sn_0 - s'n' + \sigma n}{2\alpha n_0}$$

eine kleine Grösse sein, und wenn dieser Bedingung genügt wäre, müsste überdies die Grösse $\sin D^2$ einen kleinen Werth haben. Wir können nun zwar annehmen, dass die Grösse:

$$s_r n - s'_r n' + \sigma_r n$$

einen verschwindend kleinen Werth habe; weil aber die Differenz $n - n_0$ nicht nur von den Störungsgliedern der r^{ten} Gruppe, sondern auch von denen der vorhergehenden Gruppen beeinflusst ist, so müssen wir es als unwahrscheinlich bezeichnen, dass diese Differenz und also auch die Grösse $s_r n_0 - s'_r n' + \sigma_r n$ einen im Verhältnisse zu α_r kleinen Werth habe. Auf Grund dieser Betrachtungen dürfen wir es als eine allgemein gültige Regel ansehen, dass characteristische Glieder niedrigster Ordnungen über die Natur der Bewegung hinsichtlich des Vorkommens von Librationsgliedern entscheiden; wenn also bei diesen Gliedern eine solche Ungleichheit nicht existirt, so werden die folgenden characteristischen Glieder, wenn sie auch, für sich betrachtet, kritisch werden könnten, nach dem Schema, welches durch die Gleichung (21) angedeutet ist, zu berechnen sein. — Die Ansicht, dass Libration nur bei den ersten Gliedern in der Entwicklung der Störungsfunction anzutreffen ist, hat übrigens schon HANSEN ausgesprochen, ohne dieselbe jedoch, so viel ich weiss, irgendwie begründet zu haben.[1]

Die oben in Aussicht gestellte zweite Form des Integrales der Gleichung (6), welche für den Fall, dass l eine kleine Grösse, anwendbar ist, findet sich, nachdem man die Grösse $\sin V \cos V$ nach den Potenzen

---

[1] HANSEN, *Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten,* I, p. 187. Möglicherweise sieht er die Begründung in einer ähnlichen Bemerkung, wie derjenigen, welche man hierauf bezüglich in dem Werke des Herrn A. GAUTIER, *Essai historique sur le problème des trois corps,* findet. Es handelt sich hier um die Integration einer Gleichung der Form:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\beta u + \frac{d^2 \psi}{dt^2}$$

Durch Näherungen findet sich:

$$u = k \sin(t\sqrt{\beta} + h) + \frac{1}{\beta}\frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{1}{\beta^2}\frac{d^4\psi}{dt^4} + \ldots$$

wobei k und h die Integrationsconstanten bezeichnen. Die angeführte Reihe convergirt offenbar, wenn die Perioden der Glieder in ψ sehr lang im Vergleich zu der des ersten Gliedes sind. Hierbei darf aber β nicht beliebig klein sein, wenn die Glieder in ψ gegeben sind, und weil die Libration das erste Glied der obigen Reihe ist, so folgert man, dass sie nur bei nicht zu kleinem Werthe von β stattfinden kann.

Die erwähnte Schlussfolgerung ist indessen sehr mangelhaft, weil sie weder auf die Glieder kurzer Periode, noch auf die Glieder, welche mit u^3, u^5, u. s. w. multiplicirt sind, Rücksicht nimmt. Eine eingehendere Untersuchung dieser Art wird oben im Texte gegeben.

von V entwickelt hat. Nach dieser Entwicklung ergiebt sich aus der Gleichung (6) die nachstehende:

$$\frac{d^2V}{n^2dt^2}+\alpha^2\left(V-\frac{4V^3}{1.2.3}+\ldots\right)=X \tag{28}$$

An Stelle von t führen wir eine neue Veränderliche u ein, indem wir die Relation:

$$du=\alpha ndt \tag{29}$$

feststellen; die obige Gleichung geht nun in folgende über:

$$\frac{d^2V}{du^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{du}\frac{dV}{du}+V-\frac{4V^3}{1.2.3}+\ldots=\frac{1}{\alpha^2}X \tag{30}$$

Aus dieser Gleichung können wir leicht eine andere ableiten, bei welcher das vom ersten Differentiale der gesuchten Grösse abhängige Glied nicht vorhanden ist. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$V=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\vartheta \tag{31}$$

und erhalten:

$$\frac{d^2\vartheta}{du^2}+\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{du}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\alpha}{du^2}\right]\vartheta-\frac{2}{3}\frac{1}{\alpha}\vartheta^3+\ldots=\frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}}X \tag{32}$$

Diese Gleichung lässt sich leicht mittelst Annäherungen integriren; um hierbei jedoch keine Glieder zu erhalten, welche die unabhängige Veränderliche u ausserhalb des Sinus- oder Cosinuszeichens erhalten, addiren wir, rechts und links, zu der obigen Gleichung die Grösse $-\beta\vartheta$, wobei wir mit β einen constanten, vorläufig noch unbestimmten Coefficienten bezeichnen. In erster Annäherung integriren wir die Gleichung:

$$\frac{d^2\vartheta}{du^2}+(1-\beta)\vartheta=\frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}}X,$$

wobei wir in den Argumenten der Glieder, welche in X vorkommen, ϑ

gleich Null setzen. Das Integral dieser Gleichung wird alsdann, indem p und P zwei Integrationsconstanten bezeichnen,

$$(33)\qquad \vartheta = p\sin(\sqrt{1-\beta}u + P)$$

$$-\frac{\cos\sqrt{1-\beta}u}{\sqrt{1-\beta}}\int\frac{X}{a^{\frac{3}{2}}}\sin\sqrt{1-\beta}udu + \frac{\sin\sqrt{1-\beta}u}{\sqrt{1-\beta}}\int\frac{X}{a^{\frac{3}{2}}}\cos\sqrt{1-\beta}udu$$

Diesen Werth setzen wir hierauf in die bis jetzt unberücksichtigten Glieder der Gleichung (32) ein und bestimmen dabei die Constante β in der Weise, dass die Summe der von $\sin(\sqrt{1-\beta}u + P)$ abhängigen Glieder verschwindet. Die Gleichung, welche somit entsteht, kann wieder integrirt werden, wodurch man ein genaueres Resultat erhält. Mit diesem lässt sich eine genauere Bestimmung des Coefficienten β, sowie eine dritte Annäherung des gesuchten Resultates durchführen. In dieser Weise wird man eine Entwicklung von ϑ erhalten, die immer convergent ist, wenn die Constante p, ebensowie die Coefficienten der Glieder in X und $d\alpha$ kleine Grössen im Verhältnisse zum numerischen Betrag der Function α^2 sind.

Die Anwendung der soeben in ihren Grundlinien dargelegten Methode ist meistens derjenigen vorzuziehen, welche auf die Annahme gegründet ist, dass die Form des Integrals durch die Gleichungen (22), (23) und (24) gegeben ist. In rein theoretischer Hinsicht ist aber letztere Methode von grösserem Interesse, weil die durch sie bedingte Form mit derjenigen unmittelbar verglichen werden kann, welche für die Fälle gilt, wo der Modul k kleiner als die Einheit ist. Der Übergang von den Ausdrücken, welche von dem einen Modul abhängen, auf die, welche Functionen des reciproken Moduls sind, ist jedoch nicht überall leicht auszuführen. Nachdem aber die betreffenden Formelsysteme von den complementären Moduln abhängig gemacht worden sind, ist der Nachweis ihrer Identität sehr einfach.

Um die Reduction auf die complementären Moduln durchzuführen schlagen wir den folgenden Weg ein.

Zwischen dem jetzt anzuwendenden Argumente ξ' und der Zeit stellen wir die nachstehende Relation fest:

$$(34)\qquad \xi' = \frac{2K'}{\pi}\left[\int \Gamma'' ndt + \Gamma'_0\right]$$

und nehmen zugleich an, dass das Integral der Gleichung (7) durch die Form:

$$V = \operatorname{am} \xi' \left(\operatorname{mod} k = \frac{\alpha}{\gamma}\right) \tag{35}$$

dargestellt werde.

Die bekannte HERMITE'sche Formel für das Differential von $\operatorname{am} \xi'$ in Bezug auf k' lässt sich leicht so umstellen, dass die in derselben vorkommenden elliptischen Functionen von dem Modul k' abhängen. Hierzu ist nur nöthig, die Werthe:

$$\frac{d \log \Theta_3(\xi')}{d\xi} = -\frac{\pi}{2KK'}\xi' + \frac{d \log \Theta_3(i\xi')}{d\xi'}$$

$$\frac{K-E}{K} - k^2 = -\left(\frac{K'-E'}{K'} - k'^2\right) - \frac{\pi}{2KK'}$$

in die betreffende Formel einzusetzen. Es entsteht somit der Ausdruck:

$$\frac{d \operatorname{am} \xi'}{dk} = -\frac{\operatorname{dn} \xi'}{kk'^2}\left[\left(\frac{K'-E'}{K'} - k'^2\right)\xi' + \frac{d \log \Theta_3(i\xi')}{d\xi'}\right]$$

Weil aber:

$$\frac{d\frac{2K'}{\pi}}{dk'} = -\frac{\frac{K'-E'}{K'} - k'^2}{k^2 k'}\,\frac{2K'}{\pi},$$

so lässt sich das gefundene Resultat auch folgendermassen schreiben, wobei wir den, durch die Gleichung (34) gegebenen Werth von ξ' einsetzen,

$$\frac{d \operatorname{am} \xi'}{dk} = \frac{k}{k'} \operatorname{dn} \xi' \left[\frac{d\frac{2K'}{\pi}}{dk'}\left(\int \Gamma' n dt + \Gamma'_0\right) - \frac{1}{k' k^2}\,\frac{d \log \Theta_3(i\xi')}{d\xi'}\right]$$

Mit Rücksicht hierauf, sowie auf die Relation:

$$\frac{d \operatorname{am} \xi'}{dk} = -\frac{k}{k'}\,\frac{d \operatorname{am} \xi'}{dk'},$$

ergiebt sich aus der, durch Differentiation von (35) unmittelbar hervorgehenden Gleichung:

$$\frac{dV}{ndt} = \operatorname{dn} \xi' \left\{\frac{2K'}{\pi}\Gamma' + \frac{d\frac{2K'}{\pi}}{dk'}\left(\int \Gamma' n dt + \Gamma'_0\right)\frac{dk'}{ndt}\right\} + \frac{d \operatorname{am} \xi}{dk'}\,\frac{dk'}{ndt}$$

die nachstehende:

$$\frac{dV}{ndt} = \mathrm{dn}\,\xi' \left\{ \frac{2K'}{\pi} \Gamma' + \frac{1}{k'k^2} \frac{d \log \theta_3 (i\xi')}{d\xi'} \frac{dk'}{ndt} \right\}$$

An Seite dieser Gleichung stellen wir die Relation:

$$\frac{dV}{ndt} = \gamma \mathrm{dn}\,\xi',$$

wodurch die Bedeutung der Function γ festgestellt wird, und erhalten, durch Gleichsetzung beider Werthe von $\frac{dV}{ndt}$ die Formel:

$$\Gamma' = \frac{\pi}{2K'}\gamma - \frac{\frac{\pi}{2K'}}{k'k^2} \frac{d \log \theta_3 (i\xi')}{d\xi'} \frac{dk'}{ndt} \tag{36}$$

Das Resultat, welches aus diesem Ausdrucke gewonnen wird, wenn man q' gegen $-q'$ vertauscht, werden wir durch A' bezeichnen; wenn wir dabei die Relation

$$\xi' = l\eta'$$

bestehen lassen, ist zunächst:

$$\frac{d \log \theta_3 (i\xi')}{d\xi'} = \frac{d \log \theta (i\eta')}{ld\eta'};$$

und da überdies die Relationen:

$$K' = lL'; \qquad \frac{dk'}{k'} = \frac{dl'}{l'l^2}; \qquad \frac{1}{l}\gamma = \alpha$$

stattfinden, so ergiebt sich:

$$A' = \frac{\pi}{2L'}\alpha - \frac{\frac{\pi}{2L'}}{l'l^2} \frac{d \log \theta (i\eta')}{d\eta'} \frac{dl'}{ndt} \tag{37}$$

Diese Formel wollen wir nun aber auch direct begründen.

Es sei nun angenommen, dass das Integral der Gleichung (6) durch die Relationen (22) und (24) gegeben ist; statt des Ausdruckes (23) nehmen wir aber den folgenden an:

$$\eta' = \frac{2L'}{\pi} \left[\int A' ndt + A'_0 \right] \tag{38}$$

so, dass wir jetzt haben:

$$(39)\qquad \left| \begin{array}{l} \sin V = l \operatorname{sn} \eta' \\ \cos V = \operatorname{dn} \eta' \end{array} \right. \quad (\mathrm{mod} = l)$$

$$(40)\qquad \frac{dV}{ndt} = \gamma \operatorname{cn} \eta$$

Es soll jetzt nachgewiesen werden, dass die Function A' in dem Argumente η' durch die Formel (37) gegeben ist.

Durch Differentiation einer der Gleichungen (39) findet man:

$$\frac{dV}{ndt} = \frac{l \operatorname{cn} \eta'}{\operatorname{dn} \eta'} \frac{d \operatorname{am} \eta'}{ndt} + \frac{\operatorname{sn} \eta'}{\operatorname{dn} \eta'} \frac{dl}{ndt}$$

$$= \frac{l \operatorname{cn} \eta'}{\operatorname{dn} \eta'} \frac{d \operatorname{am} \eta'}{ndt} - \frac{l'}{l} \frac{\operatorname{sn} \eta}{\operatorname{dn} \eta} \frac{dl'}{ndt},$$

welcher Ausdruck mit Rücksicht auf den Werth:

$$\frac{d \operatorname{am} \eta'}{ndt} = \operatorname{dn} \eta' \left\{ \frac{2L'}{\pi} A' + \frac{1}{l' l^2} \frac{d \log \Theta_3(i\eta')}{d\eta'} \frac{dl'}{ndt} \right\}$$

und auf die Gleichung (40) die nachstehende Form annimmt:

$$\gamma \operatorname{cn} \eta' = l \operatorname{sn} \eta' \left\{ \frac{2L'}{\pi} A' + \frac{1}{l' l^2} \frac{d \log \Theta_3(i\eta')}{d\eta'} \frac{dl'}{ndt} \right\} - \frac{l'}{l} \frac{\operatorname{sn} \eta'}{\operatorname{dn} \eta'} \frac{dl'}{ndt}$$

Vermöge der Beziehungen:

$$\frac{d \log \Theta_3(i\eta')}{d\eta'} = \frac{d \log \Theta(i\eta)}{d\eta'} - il'^2 \frac{\operatorname{sn} i\eta' \operatorname{cn} i\eta'}{\operatorname{dn} i\eta'}$$

$$\frac{\operatorname{sn} \eta'}{\operatorname{dn} \eta'} = -i \frac{\operatorname{sn} i\eta'}{\operatorname{cn} i\eta'}; \qquad \operatorname{cn} \eta' = \frac{1}{\operatorname{cn} i\eta'}$$

erhält man nun unmittelbar den Ausdruck (37) wieder. Wir haben also, durch die soeben auseinandergesetzte Analyse, zur Evidenz gebracht, dass die Formeln (36) und (37) sich gegenseitig ersetzen und aus einander folgen, wenn q' in $-q'$ übergeht. In beide Formeln müssen wir aber noch den Werth von dk', resp. dl' einsetzen, bevor die Natur der durch sie dargestellten Functionen als genügend aufgedeckt anzusehen ist.

Durch ähnliche Betrachtungen wie diejenigen, welche zu der Gleichung (12) führten, findet man jetzt:

$$\frac{dk'^2}{ndt} = \frac{2}{a} k^3 X \frac{\operatorname{dn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'} - \frac{k^2}{a^2} \frac{da^2}{ndt} \left(\frac{\operatorname{dn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'}\right)^2 \tag{41}$$

und wenn man k'^2 als eine kleine Grösse ansieht, deren Potenzen man in der ersten Annäherung vernachlässigen darf, so erhält man diese Function durch Integration der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{dk'^2}{ndt} = {} & k'^2 \left[\frac{1}{a^2} \frac{da^2}{ndt} \left(\frac{\operatorname{dn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'}\right)^2 - \frac{3}{a} X \frac{\operatorname{dn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'}\right] \\ & - \frac{1}{a^2} \frac{da^2}{ndt} \left(\frac{\operatorname{dn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'}\right)^2 + \frac{2}{a} X \frac{\operatorname{dn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'} \end{aligned} \tag{42}$$

Dieser Werth, in die Formel (36) eingesetzt, giebt uns:

$$\begin{aligned} \Gamma' = {} & \frac{\pi}{2K'} r + \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{2K'}}{k'^2 k^2} \frac{d \log \theta_3 (i\xi')}{d\xi'} \left\{\frac{1}{a^2} \frac{da^2}{ndt} \left(\frac{\operatorname{dn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'}\right)^2 - \frac{2}{a} X \frac{\operatorname{dn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'}\right\} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\frac{\pi}{2K'}}{k^2} \frac{d \log \theta_3 (i\xi')}{d\xi} \left\{\frac{1}{a^2} \frac{da^2}{ndt} \left(\frac{\operatorname{dn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'}\right)^2 - \frac{3}{a} X \frac{\operatorname{dn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'}\right\} \end{aligned}$$

oder, wenn wir nur Glieder der hier in Aussicht genommenen Grössenordnung berücksichtigen,

$$\begin{aligned} \Gamma' = {} & \frac{\pi}{2K'} r + \frac{\pi}{2k'^2} \frac{\pi}{2K'} \frac{d \log \theta_3 (i\xi')}{d\xi'} \left\{\frac{1}{a^2} \frac{da^2}{ndt} \left(\frac{\operatorname{dn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'}\right)^2 - \frac{2}{a} X \frac{\operatorname{dn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'}\right\} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2K'} \frac{d \log \theta_3 (i\xi')}{d\xi} \frac{1}{a} X \frac{\operatorname{dn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'} \end{aligned} \tag{43}$$

Durch ganz ähnliche Betrachtungen ergeben sich nun auch:

$$(44)\qquad \frac{dl'^2}{ndt} = -l'^2\left[\frac{1}{a^2}\frac{da^2}{ndt}\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta'^2} - \frac{1}{a}X\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta'}\right] + \frac{1}{a^2}\frac{da^2}{ndt}\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta'^2} - \frac{2}{a}X\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta'}$$

$$(45)\qquad A' = \frac{\pi}{2L'}\alpha - \frac{1}{2l'^2}\frac{\pi}{2L'}\frac{d\log\Theta(i\eta')}{d\eta'}\left\{\frac{1}{a^2}\frac{da^2}{ndt}\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta'^2} - \frac{2}{a}X\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta'}\right\} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2L'}\frac{d\log\Theta(i\eta')}{d\eta'}\frac{1}{a}X\frac{1}{\operatorname{cn} i\eta'},$$

welche Ausdrücke übrigens aus den Gleichungen (42) und (43) hervorgehen, wenn man q' in $-q'$ übergehen lässt.

Die nähere Entwicklung dieser Ausdrücke müssen wir hier übergehen; dieselbe würde gegenwärtig auch kaum ein Interesse darbieten, das im richtigen Verhältnisse zu der damit verbundenen Arbeit stände. Man bemerkt aber leicht, dass die betreffenden Entwicklungen zunächst nach Partialbrüchen, welche Exponentialfunctionen enthalten, vorgenommen werden muss. Man überzeugt sich ferner, dass die Glieder in X und in α^2 so beschaffen sein können, dass nicht nur die Entwicklungen convergiren, sondern dass auch die Function k'^2 oder l'^2 immer einen sehr kleinen positiven oder negativen Werth beibehält, und endlich, dass die betreffenden Entwicklungen auch dann nicht zu gelten aufhören, wenn der Zeichenwechsel bei dem Werthe dieser Functionen eintritt, oder wenn q' in $-q'$ übergeht.

Es erübrigt noch, der Formel:

$$\frac{d\gamma}{ndt} = \frac{\operatorname{dn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'}X - \frac{a}{\gamma}\left(\frac{\operatorname{sn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'}\right)^2\frac{da}{ndt}$$

zu erwähnen, eine nothwendige Folge der Form, welche für die Darstellung des Integrals der Gleichung (6) vorausgesetzt wurde. Diese Formel enthält übrigens dasselbe, was durch die Gleichung (41) ausgesagt wird, und lässt sich auch aus dieser herleiten. Wir bemerken noch, dass man die obige Gleichung durch die nachstehende ersetzen kann:

$$\frac{d\gamma}{ndt} = \frac{X}{\operatorname{cn} i\eta'} - \frac{a}{\gamma}\frac{\frac{da}{ndt}}{\operatorname{cn} i\eta'^2};$$

und endlich, dass nach Entwicklung von $\frac{a}{\gamma} = k$, nach den Potenzen von k'^2 oder l'^2, die Ausdrücke:

$$\frac{d\gamma}{ndt} = X\frac{\operatorname{dn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'} - \frac{da}{ndt}\left(\frac{\operatorname{sn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'}\right)^2 + \frac{1}{2}k'^2\frac{da}{ndt}\left(\frac{\operatorname{sn} i\xi'}{\operatorname{cn} i\xi'}\right)^2 + \ldots$$

und:

$$\frac{d\gamma}{ndt} = \frac{X}{\operatorname{cn} i\eta'} - \frac{\frac{da}{ndt}}{\operatorname{cn} i\eta'^2} - \frac{1}{2}l'^2\frac{\frac{da}{ndt}}{\operatorname{cn} i\eta'^2} - \ldots$$

gewonnen werden. Man übersieht auch hier leicht, dass die Glieder in X und α^2 derartig sein können, dass der veränderliche Theil von γ durch eine convergente Entwicklung dargestellt wird und dabei stets sehr klein bleibt. Wenn aber Glieder in X oder α^2 vorhanden sind, welche in γ oder auch in k'^2 oder in l'^2 so erheblich vergrössert werden, dass die beiden letzteren Functionen nicht als stets sehr kleine Grössen anzusehen sind, so ist die zuletzt untersuchte Form des Integrals der Gleichung (6) nicht mehr zur Darstellung desselben geeignet. Man würde aber auch in solchen Fällen keine Veranlassung haben, sich dieser Form zu bedienen. Denn wenn auch die erste Annäherung zu Werthen der Integrationsconstanten führte, welche die Existenz eines Librationsgliedes mit einem, der Einheit nahe kommenden Coefficienten als wahrscheinlich erscheinen liessen, die späteren Annäherungen müssten doch, falls erhebliche Glieder durch dieselben entstehen, eine solche Libration als nicht vorhanden hinstellen. Man würde in solchen Fällen das Integral wahrscheinlich nach Maassgabe der Gleichung (21) darstellen können, oder, wenn dieses sich als nicht ausführbar erwiese, durch eine der Formen, welche wir im dritten Abschnitte dieser Untersuchungen betrachtet haben. Es wären alsdann diejenigen Glieder, welche besondere Schwierigkeiten verursachen, für sich zu behandeln, und der Integrationsprocess hinsichtlich des entsprechenden Theiles der Function Z nach den daselbst gegebenen Vorschriften vorzunehmen.

Nachdem wir nun das für unsere Untersuchungen abgesteckte Feld, in verschiedenen Richtungen durchforscht haben, möge es uns noch gestattet sein, einen Überblick auf die Bedeutung der gewonnenen Resultate zu werfen.

Vor Allem sei bemerkt, dass wenn die Entwicklungen der mit Z und $\frac{dZ}{dt}$ bezeichneten Functionen gleichförmig convergent sind, so convergiren auch in derselben Weise die analogen Entwicklungen der übrigen Bahnelemente des gestörten Körpers, und zwar werden diese Entwicklungen in ähnlicher Weise convergiren wie diejenigen, welche für die Function $\frac{dZ}{dt}$ zur Geltung kommen. Wir übergehen den Beweis dieser Behauptung, deren Richtigkeit überdies sehr leicht erkannt wird. Hätten nun unsere Untersuchungen auch die elementären Glieder umfasst, so wären wir bei dem Beweise für die Stabilität des Sonnensystems angelangt oder könnten diesen Beweis auf Grund der gewonnenen Resultate sehr leicht aufstellen. Denn die gefundenen Ausdrücke enthalten nur Glieder, deren Werthe innerhalb gewisser Grenzen hin und her schwanken, dieselben aber jedenfalls nicht überschreiten. Die Coordinaten lassen sich offenbar durch ähnliche Ausdrücke darstellen, und weil zur Herstellung derselben aus den bekannten Ausdrücken für die Elemente keine Integration auszuführen ist, so kann man bei den Werthen, welche im Sonnensysteme den Modularelementen (Modul der Entfernung, der Excentricität und der Neigung) zukommen, ohne weiteres auf die gleichförmige Convergenz der für die Coordinaten geltenden Entwicklungen schliessen, sobald die Convergenz der Ausdrücke für Z und $\frac{dZ}{dt}$ nachgewiesen worden ist.

In den vorhergehenden Auseinandersetzungen ist aber gezeigt worden, wie die Functionen Z und $\frac{dZ}{dt}$ in der einen oder andern Weise in Reihen entwickelt werden können, welche für einen Zeitraum von unbegrenzter Dauer gleichförmig convergiren; wir schliessen daher, indem wir an den in dieser Abhandlung gemachten Voraussetzungen festhalten, — hinsichtlich der Entwicklungen, welche die Differentiale der Elemente darstellen — dass das Vorhandensein von characteristischen Gliedern die gleichförmige Convergenz der Entwicklungen zur Darstellung der Coordinaten nicht aufheben kann. In zweiter Linie schliessen wir hieraus, dass kleine Änderungen in den Werthen der mittleren Bewegungen wohl analytische Schwierigkeiten nach sich ziehen können, auf die Stabilität des betreffenden Systems jedoch ohne Einfluss sind.

Verbesserungen.

Seite	189	Z.	7 v. u.	steht:	elementären,	lies:	characteristischen.
»	197	»	13 v. o.	»	σ'	»	σ_1.
»	199	»	3 v. o.	»	$s_1 n - s_1' n'$	»	$s_1 \zeta - s' \zeta'$.