SUR LES SOMMES COMPOSÉES DES COEFFICIENTS DES SÉRIES À TERMES POSITIFS

Lettre adressée à Mad. Sophie Kowalevski

PAR

P. TCHEBYCHEFF
à S:t PÉTERSBOURG.

Je ne peux trop me féliciter de l'honneur que vous m'avez fait, en ayant bien voulu traduire ma note sur les valeurs limites des intégrales.[1] L'intérêt que vous avez porté à mes recherches sur ce sujet m'engage de vous présenter un résultat que je viens d'en tirer par rapport à la détermination des limites entre lesquelles reste comprise la somme d'un nombre quelconque de premiers coefficients de la série

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

ou

$$\frac{B_1}{1^x} + \frac{B_2}{2^x} + \frac{B_3}{3^x} + \ldots,$$

dans le cas, où tous les termes sont positifs. Pour la détermination de ces limites d'après les valeurs réelles des séries infinies

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

$$\frac{B_1}{1^x} + \frac{B_2}{2^x} + \frac{B_3}{3^x} + \ldots,$$

j'ai cherché les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^u F(z)\,dz,$$

[1] Voir ci-dessus, p. 35—56.

Acta mathematica. 9. Imprimé le 2 Décembre 1886.

en supposant que $F(z)$ est une fonction qui ne devient pas negative pour $z > 0$ et que l'on connaît la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-tz} F(z)\,dz$$

pour t réel et positif. Parmi les différentes valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^u F(z)\,dz$$

que j'ai obtenues, les plus remarquables par leur simplicité peuvent être présentées par les formules suivantes:

$$\int_0^{-\frac{\Phi'(\rho)}{\Phi''(\rho)}} F(z)\,dz \geqq \Phi(\rho) - \frac{[\Phi'(\rho)]^2}{\Phi''(\rho)}; \qquad \int_0^{\frac{1}{\sigma}\log\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi(2\sigma)}} F(z)\,dz \leqq \frac{\Phi^2(\sigma)}{\Phi(2\sigma)};$$

où ρ, σ sont des quantités positives quelconques, et $\Phi(t)$ est une fonction, déterminée, pour $t > 0$, par l'équation

$$\Phi(t) = \int_0^\infty e^{-tz} F(z)\,dz$$

et qui se réduit à ∞ pour $t = 0$. D'après ces formules on trouve aisément les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^u F(z)\,dz$$

pour u quelconque, en donnant à ρ et σ des valeurs qui remplissent ces conditions:

$$-\frac{\Phi'(\rho)}{\Phi''(\rho)} \leqq u; \qquad \frac{1}{\sigma}\log\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi(2\sigma)} \geqq u.$$

Pour appliquer ces formules à la détermination des limites, entre lesquelles reste comprise la somme de n premiers coefficients de la série

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

on prendra

$$\Phi(t) = A_0 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + A_3 e^{-3t} + \ldots,$$

et

$$u = n - 1.$$

En prenant

$$\Phi(t) = \frac{B_1}{1^t} + \frac{B_2}{2^t} + \frac{B_3}{3^t} + \frac{B_4}{4^t} + \ldots$$

et

$$u = \log n,$$

on trouvera les limites de la somme de n premiers coefficients de la série

$$\frac{B_1}{1^x} + \frac{B_2}{2^x} + \frac{B_3}{3^x} + \frac{B_4}{4^x} + \ldots.$$

Ainsi, par exemple, en prenant pour $\Phi(t)$ une série infinie

$$\frac{1}{1^{1+t}} + \frac{1}{2^{1+t}} + \frac{1}{3^{1+t}} + \frac{1}{5^{1+t}} + \frac{1}{7^{1+t}} + \ldots$$

composée seulement des nombres premiers, on obtiendra des formules pour évaluer les limites de la somme finie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{n}$$

d'après les séries infinies de la forme

$$\frac{1}{1^{1+t}} + \frac{1}{2^{1+t}} + \frac{1}{3^{1+t}} + \frac{1}{5^{1+t}} + \ldots.$$

$$\frac{\log 2}{2^{1+t}} + \frac{\log 3}{3^{1+t}} + \frac{\log 5}{5^{1+t}} + \frac{\log 7}{7^{1+t}} + \ldots.$$

$$\frac{\log^2 2}{2^{1+t}} + \frac{\log^2 3}{3^{1+t}} + \frac{\log^2 5}{5^{1+t}} + \frac{\log^2 7}{7^{1+t}} + .$$

S:t Pétersbourg, $\frac{20 \text{ Sept.}}{2 \text{ Oct.}}$ 1886.