SUR UNE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

PAR

GINO LORIA
À MANTOUE.

La démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques, que M. HOLST vient d'exposer dans les Acta mathematica (T. 8, p. 155 et suiv.) n'est pas nouvelle quant au fond. En effet, dans un ouvrage — peut-être peu répandu — qui a paru pour la première fois en 1828 et dont la seconde édition a été publiée il y vingt-cinq ans sous le titre *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires. Dédié aux amis de l'évidence par C. V. MOUREY* (Paris, Mallet-Bachelier, 1861), on en trouve une qui est tout-à-fait semblable à celle du savant norvégien.[1]

Les seules différences qu'on remarque entre le raisonnement de M. HOLST et celui de MOUREY consistent dans l'ordre et dans le cachet géométrique qu'y a donné ce dernier. Il débute en effet (p. 76) en se posant le problème: Etant donnés de position dans un plan plusieurs points en nombre quelconque, trouver un point de ce plan tel que, si l'on tire les chemins[2] qui le joignent aux points donnés, leur produit soit égal à un chemin donné; et il remarque ensuite que, si l'un des points donnés représente le nombre o (hypothèse toujours réalisable), la solution du pro-

---

[1] Comp. LIOUVILLE, *Sur le principe fondamental de la théorie des équations algébriques*, (Journal de mathématiques, T. IV, 1839).

[2] »Chemin» a ici la même signification que le mot allemand »Strecke».

blème dépend de la résolution d'une équation de degré égal au nombre des points donnés et de la forme suivante:

$$x(b + x)(c + x) \ldots = g. \tag{A}$$

Il ajoute: »Si tout problème de cette nature peut être résolu au moins d'une manière et si toute équation à une seule inconnue est la traduction d'un problème de cette nature (c'est-à-dire si elle peut se mettre sous la forme (A)), il s'ensuivra que toute équation a au moins une racine.»

Or, pour prouver la première de ces propositions, il décompose l'équation (A) en deux autres qui ne sont autre chose que la *Modulgleichung* et l'*Argumentgleichung* de M. Holst, et il montre (par des raisonnements qui offrent une analogie saisissante avec ceux de M. Holst) qu'elles ont au moins une solution; pour démontrer la seconde des propositions précédentes, il fait voir qu'elle revient à admettre qu'une équation de degré $n - 1$ a $n - 1$ racines. C'est le point de départ de M. Holst, tandis qu'on peut dire que la base du raisonnement de Mourey est l'équation (1) du mémoire de ce géomètre.

Je crois que ces indications seront suffisantes pour justifier la remarque faite par moi au début de cette petite note.

Mantoue, 15 Juillet 1886.