SUR UNE EXTENSION À L'INFINI DE LA FORMULE D'INTERPOLATION DE GAUSS

PAR

I. BENDIXSON

À STOCKHOLM.

Etant donnée une fonction rationnelle entière $f(x)$ de la variable x de degré $n - 1$ laquelle remplit l'égalité

$$f(a_\nu) = A_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

la formule d'interpolation de Gauss,[1] nous donne la fonction $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = A_1 + A_2'(x - a_1) + A_3''(x - a_1)(x - a_2) + \ldots + A_n^{(n-1)}(x - a_1)\ldots(x - a_{n-1})$$

où les quantités $A_{\nu+1}^{(\nu)}$ sont formées d'après des lois très simples des quantités A_ν.

Je me suis demandé si on ne pouvait pas établir une formule analogue pour une fonction analytique quelconque, en supposant pourtant dans ce cas que la fonction $f(x)$ remplisse une infinité d'égalités

$$f(a_\nu) = A_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m, \ldots)$$

les quantités a_ν étant en outre assujeties à la condition $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$. Il est évident que si l'on pouvait établir une égalité de la forme

$$f(x) = A_1 + A_2'(x - a_1) + A_3''(x - a_1)(x - a_2) + \ldots + A_{\nu+1}^{(\nu)}(x - a_1)\ldots(x - a_\nu) + \ldots$$

[1] Gauss, *Theoria interpolationis methodo nova tractata;* Werke, Bd. 3, page 274.

les valeurs $A^{(\nu)}_{\nu+1}$ se calculeraient aisément des valeurs A_ν et on pourrait alors par cette égalité même déterminer la fonction quand on en connait les valeurs pour un nombre infini de valeurs de la variable x assujeties à la seule condition $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$.

C'est en effet l'existence de cette égalité que nous allons prouver, mais avant d'aborder cette question nous étudierons les propriétés des séries $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$.

En étudiant les séries de la forme $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$ où a est une quantité complexe finie, on trouve aisément qu'elles offrent beaucoup d'analogie avec les séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de $x-a$. On peut en effet regarder ces dernières séries comme un cas particulier des séries $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$. Les quantités $B_1, \ldots, B_\nu, \ldots$ sont supposées indépendantes de x.

Je veux d'abord développer ici quelques théorèmes qui montrent leur caractère très simple pour enfin en faire usage en traitant la question ci-dessus mentionnée.

Théorème I. *Si une série de forme* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$, $\lim a_\nu = a$ *est convergente pour* $x = x_1$ *elle est absolument convergente pour chaque valeur de* x *telle que* $|x-a| < |x_1 - a|$.

Soit en effet

$$\left|\frac{x-a}{x_1-a}\right| < \varepsilon < 1$$

on peut déterminer un nombre entier positif m tel que

$$\left|\frac{x-a_{m+\nu}}{x_1-a_{m+\nu}}\right| < \varepsilon < 1. \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

En écrivant

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)|$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |B_\nu(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_\nu)| \cdot \left|\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_\nu)}\right|$$

on voit que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} | B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu) | < \mathfrak{G} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)}{(x_1 - a_1) \ldots (x_1 - a_\nu)} \right|$$

$\mathfrak{G}$ étant un nombre positif plus grand que le module de chaque terme de la série convergente $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x_1 - a_1) \ldots (x_1 - a_\nu)$.

Mais la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)}{(x_1 - a_1) \ldots (x_1 - a_\nu)} \right|$$

est évidemment convergente, ce que l'on voit en écrivant

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_\nu)} \right|$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} \left| \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_\nu)} \right| + \left| \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m-1})}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_{m-1})} \right| \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{(x-a_m)\ldots(x-a_{m+\nu})}{(x_1-a_m)\ldots(x_1-a_{m+\nu})} \right|$$

$$< \sum_{\nu=0}^{m-1} \left| \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_\nu)} \right| + \left| \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m-1})}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_{m-1})} \right| \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu.$$

D'où l'on conclut enfin que la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} | B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu) |$ est convergente tant que $| x - a | < | x_1 - a |$.

Le théorème nous montre qu'à chaque série de forme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu), \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$$

correspond un nombre réel et positif r tel que la série est absolument convergente si $| x - a | < r$, mais divergente si l'on a $| x - a | > r$.

Le domaine de convergence de la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)$ est par conséquent un cercle auquel nous donnerons le nom de *cercle de convergence.* Ce n'est alors que sur la circonférence du cercle de convergence qu'il y a incertitude quant à la convergence de notre série.

Par la démonstration du théorème précédent nous avons établi aussi un théorème qui correspond tout à fait à un théorème connu d'Abel sur les séries ordonnées suivant les puissances entières positives et croissantes de la variable, savoir:

Théorème II. *Etant donnée la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\dots(x-a_\nu)$, $\lim a_\nu = a$, *si pour une valeur de la variable telle que* $|x-a| = r'$ *les modules des termes de la série sont moindres qu'un nombre déterminé, la série sera convergente pour toutes les valeurs de la variable assujeties à la condition* $|x-a| < r'$.

Théorème III. *Si* r_1 *est un nombre positif moindre que le rayon de convergence de la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\dots(x-a_\nu)$, $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$, *la série est uniformément convergente pour toutes les valeurs de* x *assujeties à la condition* $|x-a| \leqq r_1$.

Soit en effet r_2 une quantité positive telle que l'on ait

$$r_1 < r_2 < r$$

r étant le rayon de convergence de la série et x_2 une quantité complexe telle que $|x_2 - a| = r_2$. En posant

$$r_2 - r_1 = 4\delta$$

$$\frac{r_2 - 3\delta}{r_2 - \delta} = \varepsilon$$

je puis déterminer un nombre entier positif m tel que

$$\left|\frac{x - a_{m+\nu}}{x_2 - a_{m+\nu}}\right| < \varepsilon \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

pour toute valeur de x assujetie à la condition $|x-a| \leqq r_1$.

En effet nous déterminons m de sorte que

$$|a_{m+\nu} - a| < \delta \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$|x - a_{m+\nu}| < |x-a| + |a - a_{m+\nu}|$$
$$< r_2 - 3\delta$$

tant que l'on ait $|x-a| \leqq r_1$, ainsi que

$$|x_2 - a_{m+\nu}| > r_2 - \delta.$$

Ces deux inégalités nous montrent que

$$\left|\frac{x - a_{m+\nu}}{x_2 - a_{m+\nu}}\right| < \varepsilon < 1 \quad \text{pour} \begin{cases} \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ |x - a| \leqq r_1. \end{cases}$$

En écrivant

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)|$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} |B_\nu(x_2 - a_1) \ldots (x_2 - a_\nu)| \left|\frac{(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)}{(x_2 - a_1) \ldots (x_2 - a_\nu)}\right|$$

et procédant comme pour la démonstration du théorème I on prouve que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)|$$

est uniformément convergente pour toutes les valeurs de la variable situées dans le domaine en question. Cela a par conséquent aussi lieu pour ce qui concerne la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)$.

C. q. f. d.

Le théorème III nous permet d'en tirer la conclusion qui suit.[1]

La série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu), \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$$

peut être égalée à une série $\mathfrak{P}(x - a)$, procédant suivant les puissances entières positives et croissantes de la variable, l'égalité ayant lieu pour toutes les valeurs de x comprises à l'intérieur du cercle de convergence de la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)$.

On doit observer que le cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x - a)$ peut s'étendre au dehors du cercle de convergence de $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - a_1) \ldots (x - a_\nu)$.

---

[1] K. WEIERSTRASS, *Zur Functionenlehre*, Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1880, pag. 7.

Nous pouvons encore à l'égard de nos séries établir un théorème correspondant au théorème remarquable dû à ABEL et DIRICHLET.[1]

Théorème IV. *Si la série*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - a_1)\dots(x - a_\nu), \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$$

est convergente pour une valeur α *de* x $(\alpha \gtrless a_\nu)$ *on a l'égalité*

$$\lim_{\varepsilon=0} f[\alpha - \varepsilon(\alpha - a)] = f(\alpha)$$

ε *étant réel et positif.*

Pour plus de simplicité, nous en donnerons la démonstration plus tard, mais nous avons voulu citer le théorème ici pour mettre en évidence l'analogie complète qui existe entre les séries $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - a_1)\dots(x - a_\nu)$ et les séries procédant suivant les puissances entières positives et croissantes de la variable.

Etant donnée une fonction analytique $f(x)$ qui au voisinage du point a peut être développée en série $\mathfrak{P}(x - a)$ ordonnée suivant les puissances entières positives et croissantes de la variable, si cette fonction peut être développée en série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - a_1)\dots(x - a_\nu)$, $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$, les coefficients B_ν peuvent se calculer aisément des valeurs $A_1, \dots, A_\nu, \dots$ de la fonction aux points $a_1, \dots, a_\nu, \dots$. Mettons pour un instant

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - a_1)\dots(x - a_\nu)$$

on voit en effet que

$$B_0 = A_1, \qquad B_1 = A'_2 = \frac{A_2 - A_1}{a_2 - a_1}, \ \dots, \ B_\nu = A_{\nu+1}^{(\nu)} = \frac{A_{\nu+1}^{(\nu-1)} - A_\nu^{(\nu-1)}}{a_{\nu+1} - a_\nu}, \ \dots$$

où les constantes $A_\mu^{(\nu)}$ sont calculées d'après la loi suivante:

$$A'_\mu = \frac{A_\mu - A_1}{a_\mu - a_1}, \ \dots, \ A_\mu^{(\nu)} = \frac{A_\mu^{(\nu-1)} - A_\nu^{(\nu-1)}}{a_\mu - a_\nu}, \ \dots$$

---

[1] ABEL, *Recherches sur la série* $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots$. Oeuvres complètes, Tome I, pag. 223.

D'un autre côté il est évident par la conclusion tirée du théor. III que si

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu+1}^{(\nu)}(x - a_1) \dots (x - a_\nu)$$

est convergente dans un cercle quelconque elle est dans ce cercle égale à $f(x)$, car l'égalité subsiste pour une infinité de valeurs de la variable.

En appliquant ces résultats à la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ $(a \lesseqgtr 0)$ on obtient

$$A_{\nu+1}^{(\nu)} = (-1)^\nu \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{\nu+1}}$$

et en écrivant

$$\varphi(x) = \frac{1}{a_1} - \frac{x - a_1}{a_1 a_2} + \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{a_1 a_2 a_3} - \dots + (-1)^\nu \frac{(x - a_1) \dots (x - a_\nu)}{a_1 a_2 \dots a_\nu a_{\nu+1}} + \dots$$

l'étude de la valeur limite

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu+1} \dfrac{(x - a_1) \dots (x - a_{\nu+1})}{a_1 a_2 \dots a_{\nu+1} a_{\nu+2}}}{(-1)^\nu \dfrac{(x - a_1) \dots (x - a_\nu)}{a_1 \dots a_{\nu+1}}} = \frac{x - a}{a}$$

met en évidence que la série du second membre est convergente tant que $|x - a| < |a|$ ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a_1} - \frac{x - a_1}{a_1 a_2} + \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{a_1 a_2 a_3} - \dots$$
$$\text{pour } |x - a| < |a|$$

Soit α une quantité quelconque qui n'est assujetie qu'à la condition de ne pas être égale à a, $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$ le développement de $\frac{1}{x}$ nous donne

$$\frac{1}{x - \alpha} = \frac{1}{a_1 - \alpha} - \frac{(x - a_1)}{(a_1 - \alpha)(a_2 - \alpha)} + \dots$$
$$\dots + (-1)^\nu \frac{(x - a_1) \dots (x - a_\nu)}{(a_1 - \alpha) \dots (a_\nu - \alpha)(a_{\nu+1} - \alpha)} + \dots$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{1}{\alpha - x} = \frac{1}{\alpha - a_1} + \frac{x - a_1}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)} + \dots + \frac{(x - a_1) \dots (x - a_\nu)}{(\alpha - a_1) \dots (\alpha - a_\nu)(\alpha - a_{\nu+1})} + \dots$$
$$\text{pour } |x - a| < |\alpha - a|.$$

Ce développement nous donne les deux identités qui suivent

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a-a_1} + \frac{x-a_1}{(a-a_1)(a-a_2)} + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{\nu-1})}{(a-a_1)\dots(a-a_{\nu-1})(a-a_\nu)} + \frac{(x-a_1)\dots(x-a_\nu)}{(a-a_1)\dots(a-a_\nu)}\cdot\frac{1}{a-x}$$

et

$$0 = F_n(x) = \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)\dots(a_n-a_{n-1})} + \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)}{(a_n-a_1)\dots(a_n-a_{n-1})(a-a_{n+1})} + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})(x-a_n)\dots(x-a_\nu)}{(a_n-a_1)\dots(a_n-a_{n-1})(a_n-a_{n+1})\dots(a_n-a_\nu)} + \dots$$

$$\text{pour } |x-a| < |a_n - a|.$$

Nous observons de plus à l'égard de $F_n(x)$ que cette série est égale à zéro quand $x = a_\nu$ $(\nu \gtrless n)$ mais égale à 1 pour $x = a_n$.

Soit maintenant $F(x)$ une fonction analytique quelconque qui dans le voisinage du point a peut être développée en série $\mathfrak{P}(x-a)$, et soient $a_1, \dots, a_\nu, \dots$ tous compris à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$, soit de plus S l'aire d'un cercle $|x-a| \leqq r$ comprenant toutes les quantités $x, a_1, \dots, a_\nu, \dots$ et située à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$ on a l'égalité

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - x}d\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - a_1}d\alpha + \frac{(x-a_1)}{2\pi i}\int_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)}d\alpha + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{\nu-1})}{2\pi i}\int_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha-a_1)\dots(\alpha-a_\nu)}d\alpha + \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(\alpha)}{\alpha-x}\frac{(x-a_1)\dots(x-a_\nu)}{(\alpha-a_1)\dots(\alpha-a_\nu)}d\alpha$$

les intégrales du second membre se rapportant au contour de S.

Quant à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(\alpha)}{\alpha-x}\frac{(x-a_1)\dots(x-a_\nu)}{(\alpha-a_1)\dots(\alpha-a_\nu)}d\alpha$$

on voit alors qu'elle diminue sans limite quand le nombre ν va en augmentant ce qui nous amène à l'égalité

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - a_1}d\alpha + \frac{x-a_1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)}d\alpha + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_{\nu+1})}d\alpha + \ldots$$

Soient comme ci-dessus $A_1, \ldots, A_\nu, \ldots$ les valeurs que prend $\mathfrak{P}(x-a)$ si on y pose $x = a_1, \ldots, a_\nu, \ldots$, l'égalité suivante a lieu

$$A_{\nu+1}^{(\nu)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_{\nu+1})}d\alpha$$

(pour la définition de $A_{\nu+1}^{(\nu)}$ voir page 6) ce qui nous permet d'écrire

$$F(x) = A_1 + A_2'(x-a_1) + \ldots + A_{\nu+1}^{(\nu)}(x-a_1)\ldots(x-a_\nu) + \ldots$$

l'égalité ayant lieu pour toutes les valeurs de la variable comprises à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$.

D'ailleurs si nous supposons que tous les a_ν ne soient pas compris à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$ l'égalité

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - a_1}d\alpha + \frac{x-a_1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)}d\alpha + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_{\nu+1})}d\alpha + \ldots$$

a pourtant lieu pour tout le cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$, S représentant l'aire d'un cercle $|x-a| \leqq r$ comprenant à son intérieur tous les a_ν qui sont situés à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$.

Soient $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_n}$ ceux parmi les a_ν qui ne sont pas compris à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$ et soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les valeurs que prend le second membre de l'égalité, quand on y fait $x = a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \ldots, a_{\nu_n}$, on voit que

$$\chi(x) = (A_{\nu_1} - C_1)F_1(x) + \ldots + (A_{\nu_n} - C_n)F_n(x)$$

est une série de la forme $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$ convergente et égale à zéro dans tout le cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$ et qui pour $x = a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_n}$ prend les valeurs $A_{\nu_1} - C_1, \ldots, A_{\nu_n} - C_n$, ce qui nous permet d'écrire

$$F(x) = \chi(x) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - a_1}d\alpha + \frac{x-a_1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha-a_1)(\alpha-a_2)}d\alpha + \ldots$$

pour toutes les valeurs de x comprises à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$.

Mais le second membre peut alors être transformé à une série de la forme $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$ laquelle pour $x = a_1, \ldots, a_\nu, \ldots$ prend les valeurs $A_1, \ldots, A_\nu, \ldots$.

On en conclut enfin que

$$B_\nu = A_{\nu+1}^{(\nu)},$$

ce qui met en évidence l'égalité

$$F(x) = A_1 + A_2'(x-a_1) + \ldots + A_{\nu+1}^{(\nu)}(x-a_1)\ldots(x-a_\nu) + \ldots$$

tant que x soit compris à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$. Je suis donc parvenu au resultat qui suit:

Soit $F(x)$ une fonction qui dans le voisinage de $x = a$ peut être développée en série $\mathfrak{P}(x-a)$, procédant suivant les puissances entières, positives et croissantes de $x-a$, soient $A_1, \ldots, A_\nu, \ldots$ les valeurs que reçoit $F(x)$ en y mettant $x = a_1, \ldots, a_\nu, \ldots, \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$, $F(x)$ peut être développée en série

$$F(x) = A_1 + A_2'(x-a_1) + \ldots + A_{\nu+1}^{(\nu)}(x-a_1)\ldots(x-a_\nu) + \ldots$$

l'égalité ayant lieu pour toutes les valeurs de x comprises à l'intérieur du cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$.

Soient maintenant $A_m, \ldots, A_{m+\nu}, \ldots$ les valeurs que prend $\mathfrak{P}(x-a)$ en y mettant $x = a_m, \ldots, a_{m+\nu}, \ldots$ et soient $A_0, \ldots, A_{m-1}$ des quantités complexes quelconques, on voit par des considérations analogues aux précédentes que dans le voisinage de $x = a$ on a l'égalité

$$F(x) = A_1 + A_2'(x-a_1) + \ldots + A_{\nu+1}^{(\nu)}(x-a_1)\ldots(x-a_\nu) + \ldots$$

de sorte que l'on parvient au résultat suivant:

Etant données les valeurs $A_1, \ldots, A_\nu, \ldots; a_1, \ldots, a_\nu, \ldots, \lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$, *la convergence de la série*

$$A_1 + A_2'(x-a_1) + \ldots + A_{\nu+1}^{(\nu)}(x-a_1)\ldots(x-a_\nu) + \ldots$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction $F(x)$ *qui dans le voisinage de* $x = a$ *puisse être développée en série de* Taylor *et satisfaisant à l'égalité*

$$F(a_{m+\nu}) = A_{m+\nu} \qquad (\nu=0, 1, 2, \ldots)$$

m *étant un nombre positif entier suffisamment grand.*

Après avoir établi ces théorèmes de la théorie des fonctions je reviens au théorème IV, page 6. Il s'agissait de démontrer que si la série

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu), \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$$

est convergente pour $x = \alpha$, $(\alpha \gtrless a_\nu)$, on a l'égalité

$$f(\alpha) = \lim_{\varepsilon=0} f[\alpha - \varepsilon(\alpha - a)]$$

ε étant réel et positif.

Evidemment cela revient à démontrer que la série est uniformément convergente pour les valeurs de x telles que l'on ait

$$x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a), \qquad 0 \leqq \varepsilon \leqq \gamma < 1.$$

En posant

$$\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_\nu) = S_\mu^{(m)}$$

on peut écrire

$$\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$$

$$= S_0^{(m)}\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_m)}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_m)} + (S_1^{(m)} - S_0^{(m)})\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m+1})}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_{m+1})} + \ldots$$

$$\ldots + (S_\mu^{(m)} - S_{\mu-1}^{(m)})\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m+\mu})}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_{m+\mu})}$$

$$= S_0^{(m)}(\alpha-x)\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_m)}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_m)(\alpha-a_{m+1})} + S_1^{(m)}(\alpha-x)\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m+1})}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_{m+1})(\alpha-a_{m+2})} + \ldots$$

$$\ldots + S_{\mu-1}^{(m)}(\alpha-x)\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m+\mu-1})}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_{m+\mu-1})(\alpha-a_{m+\mu})} + S_\mu^{(m)}\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m+\mu})}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_{m+\mu})}.$$

Soit δ un nombre positif quelconque, nous pouvons toujours déterminer un nombre positif entier m tel que l'on ait

$$|S_\mu^{(m)}| < \delta. \qquad (\mu=0, 1, 2, \ldots)$$

On parvient alors à l'inégalité

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)\right| < \delta|\alpha - x|\sum_{\nu=m}^{m+\mu-1}\left|\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_\nu)(\alpha-a_{\nu+1})}\right|$$
$$+\delta\left|\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m+\mu})}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_{m+\mu})}\right|.$$

Mais, x étant une valeur quelconque telle que l'on ait

$$x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a), \qquad 0 < \varepsilon \leqq \gamma$$

on peut faire correspondre à chaque nombre a_ν une et une seule quantité $a_\nu(x)$ telle que l'on ait

$$\frac{x-a_\nu(x)}{\alpha - a_\nu(x)} = \left|\frac{x-a_\nu}{\alpha-a_\nu}\right|.$$

Les quantités $a_\nu(x)$ ainsi définies satisfont alors à l'égalité $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu(x) = a$.

Soit p un nombre positif entier suffisamment grand pour que l'on ait

$$|a_{p+\nu} - a| < |\alpha - a - \gamma(\alpha - a)|. \qquad (\nu=0, 1, 2, \ldots)$$

Toutes les quantités $a_{p+\nu}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ sont alors comprises à l'intérieur d'un cercle ayant pour centre le point a et ne comprenant à son intérieur aucune des valeurs $x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a)$, $0 \leqq \varepsilon \leqq \gamma$. Une considération géométrique très simple met alors en évidence que les quantités $\alpha - a_{p+\nu}(x)$ ont une limite supérieure finie pour tous les x en question et pour $\nu = 0, 1, 2, \ldots$; on en conclut enfin que l'on peut trouver un nombre positif g tel que l'on ait

$$g > \left|\frac{\alpha - a_{p+\nu}(x)}{\alpha - a_{p+\nu}}\right| \quad \text{pour} \begin{cases} x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a), & 0 \leqq \varepsilon \leqq \gamma \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Soit enfin G une quantité positive telle que

$$G > \left|\frac{(x-a_1)\dots(x-a_p)}{(\alpha-a_1)\dots(\alpha-a_p)}\right|$$

$$\text{pour } x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a), \qquad 0 < \varepsilon \leqq \gamma$$

on peut affirmer que

$$G > \left|\frac{(x-a_1)\dots(x-a_{p+\nu})}{(\alpha-a_1)\dots(\alpha-a_{p+\nu})}\right| \quad \text{pour} \begin{cases} x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a), & 0 < \varepsilon \leqq \gamma \\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ \dots \end{cases}$$

et l'on peut écrire si $m > p$

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu (x-a_1)\dots(x-a_\nu)\right|$$

$$< \delta.\left|\alpha - x\right|.\, G \sum_{\nu=0}^{\mu-1}\left|\frac{(x-a_m)\dots(x-a_{m+\nu})}{(\alpha-a_m)\dots(\alpha-a_{m+\nu})(\alpha-a_{m+\nu+1})}\right| + \delta G$$

$$< \delta\left|\alpha - x\right| G.\sum_{\nu=0}^{\mu-1}\left|\frac{[x-a_m(x)]\dots[x-a_{m+\nu}(x)]}{[\alpha-a_m(x)]\dots[\alpha-a_{m+\nu}(x)]}\right|\left|\frac{\alpha-a_{m+\nu+1}(x)}{\alpha-a_{m+\nu+1}}\right|.\left|\frac{1}{[\alpha-a_{m+\nu+1}(x)]}\right| + \delta G$$

$$< \delta\left|\alpha - x\right| G.g.\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{[x-a_m(x)]\dots[x-a_{m+\nu}(x)]}{[\alpha-a_m(x)]\dots[\alpha-a_{m+\nu}(x)][\alpha-a_{m+\nu+1}(x)]}\right| + \delta G$$

$$< \delta\left|\alpha - x\right| G.g.\frac{1}{\left|\alpha - x\right|} + \delta.G.$$

De là résulte enfin que

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu (x-a_1)\dots(x-a_\nu)\right| < \delta[G.g + G] \quad \text{pour} \begin{cases} x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a), & 0 < \varepsilon \leqq \gamma. \\ \mu = 0,\ 1,\ 2,\ \dots \end{cases}$$

Mais δ étant un nombre positif aussi petit que l'on voudra cela nous fait voir que la série est uniformément convergente pour toutes les valeurs de x telles que

$$x = \alpha - \varepsilon(\alpha - a). \qquad 0 \leqq \varepsilon \leqq \gamma < 1.$$

C. q. f. d.

Nous ne nous sommes jusqu'ici occupés que des séries $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x-a_1)\dots(x-a_\nu)$

où $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a =$ quantité finie. Si nous voulons maintenant étudier le caractère de ces séries en supposant que $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$ nous y rencontrons comme cas speciaux la série binome

$$1 + \frac{x}{1}\cdot b + \frac{x(x-1)}{\underline{|2}} b^2 + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{\underline{|\nu}} b^\nu + \ldots$$

ainsi que la série hypergéométrique de Gauss. Je veux prouver ici que nos séries sont en général d'un caractère très simple dans le cas où $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$. Pour aborder l'étude de ces séries nous commencerons par l'étude de la série

$$\frac{1}{a-a_1} + \frac{x-a_1}{(a-a_1)(a-a_2)} + \ldots + \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(a-a_1)\ldots(a-a_\nu)(a-a_{\nu+1})} + \ldots$$

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty.$$

Nous traiterons d'abord le cas où $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|}$ *est convergente.* L'égalité

$$\frac{1}{a-x} - \left[\frac{1}{a-a_1} + \frac{x-a_1}{(a-a_1)(a-a_2)} + \ldots + \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(a-a_1)\ldots(a-a_{n-1})(a-a_n)}\right]$$

$$= \frac{1}{a-x}\cdot\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{(a-a_1)\ldots(a-a_n)}$$

$$= \frac{1}{a-x}\cdot\frac{\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{a_n}\right)}{\left(1-\frac{a}{a_1}\right)\ldots\left(1-\frac{a}{a_n}\right)}$$

nous montre en effet que

$$\frac{1}{a-a_1} + \frac{x-a_1}{(a-a_1)(a-a_2)} + \ldots + \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(a-a_1)\ldots(a-a_\nu)(a-a_{\nu+1})} + \ldots$$

$$= \frac{1}{a-x}\left[1 - \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{a}{a_\nu}\right)}\right].$$

La série du premier membre de cette égalité est évidemment uniformément convergente ce que l'on conclut de ce que le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)$ est uniformément convergent. Elle est aussi absolument convergent ce que l'on prouve en remplaçant a_ν par $-|a_\nu|$, a par $-|a|$ et x par $|x|$, en observant en outre que les termes de la nouvelle série finissent par être tous du même signe.

Si d'un autre côté $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|}$ est divergente nous ne pouvons pas traiter ce cas dans toute sa généralité mais nous nous occuperons ici des cas qui sont du plus grand intérêt.

Supposons donc que *tous les a_ν sont réels et positifs et que $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}$ n'est pas convergente.* Dans l'égalité

$$\frac{1}{a-x}-\left[\frac{1}{a-a_1}+\frac{x-a_1}{(a-a_1)(a-a_2)}+\ldots+\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{(a-a_1)\ldots(a-a_n)(a-a_{n+1})}\right]$$
$$=\frac{1}{a-x}\cdot\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{a}{a_\nu}\right)}$$

nous pouvons mettre le second membre sous la forme suivante

$$\frac{1}{a-x}\cdot\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{a}{a_\nu}\right)}=\frac{1}{a-x}\,\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\sum_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{a}{a_\nu}\right)e^{\sum_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left(\frac{a}{a_\nu}\right)^\mu}}\cdot e^{\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{a}{a_\nu}\right)^\mu-\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]}$$

où les quantités m_ν sont choisies de sorte que

$$G(x)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\sum_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}$$

soit une fonction entière transcendante.[1]

[1] Voir Weierstrass, *Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*, Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1876.

Soit α et x deux quantités telles que la partie réelle de $\alpha - x$ soit négative et désignons par $R[f(x)]$ la partie réelle de $f(x)$ on peut toujours trouver une quantité positive δ telle que

$$R(\alpha - x) < -\delta.$$

Soit g une quantité positive $> |\alpha| + |x|$ on peut écrire

$$R\left(\sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu - \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]\right) = R\left(\frac{\alpha - x}{a_\nu}(1 + \varepsilon_\nu)\right)$$

où

$$\varepsilon_\nu = \frac{\alpha + x}{2a_\nu} + \frac{\alpha^2 + \alpha x + x^2}{3a_\nu^2} + \ldots + \frac{\alpha^{m_\nu - 1} + \alpha x^{m_\nu - 2} + \ldots + x^{m_\nu - 1}}{m_\nu a_\nu^{m_\nu - 1}}$$

ce qui nous donne

$$|\varepsilon_\nu| < \frac{g}{a_\nu} + \frac{g^2}{a_\nu^2} + \ldots + \frac{g^{m_\nu - 1}}{a_\nu^{m_\nu - 1}}.$$

En désignant par p un nombre positif suffisamment grand on a

$$|\varepsilon_\nu| < \frac{g}{a_\nu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{g}{a_\nu}}. \qquad (\nu > p)$$

Mais l'inégalité

$$|R[(\alpha - x)\varepsilon_\nu]| < g \cdot \frac{g}{a_\nu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{g}{a_\nu}} \qquad (\nu > p)$$

nous montre que l'on peut prendre r assez grand pour que

$$|R[(\alpha - x)\varepsilon_\nu]| < \frac{\delta}{2}, \qquad \text{pour } \nu > r$$

L'égalité

$$R\left(\sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu - \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]\right) = \frac{1}{a_\nu}\left[R(\alpha - x) + R[(\alpha - x)\varepsilon_\nu]\right] \qquad (\nu > r)$$

nous permet alors d'écrire

$$R\left(\sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu - \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]\right) < -\frac{\delta}{2a_\nu}. \qquad (\nu > r)$$

On voit alors que

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{\mathrm{I}}{\alpha - x}\,\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(\mathrm{I}-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(\mathrm{I}-\frac{\alpha}{a_\nu}\right)}\right|$$

$$< \lim_{n=\infty}\left|\frac{\mathrm{I}}{\alpha - x}\,\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(\mathrm{I}-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(\mathrm{I}-\frac{\alpha}{a_\nu}\right)e^{\sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu\right]}}\cdot e^{\sum\limits_{\nu=1}^{r}\sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu}\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu-\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]}\right|\cdot e^{\lim\limits_{n=\infty}\sum\limits_{\nu=r+1}^{n}\frac{-\delta}{2a_\nu}}$$

ce qui nous montre enfin que

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{\mathrm{I}}{\alpha - x}\,\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(\mathrm{I}-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(\mathrm{I}-\frac{\alpha}{a_\nu}\right)}\right| = \mathrm{o}.$$

Si au contraire $R(\alpha - x) > \mathrm{o}$ on prouve tout de même que

$$\lim_{n=\infty}\left|\frac{\mathrm{I}}{\alpha - x}\cdot\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(\mathrm{I}-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(\mathrm{I}-\frac{\alpha}{a_\nu}\right)}\right| = \infty.$$

Dans le cas ou $R(\alpha - x) = \mathrm{o}$ il y a incertitude. L'égalité

$$\frac{\mathrm{I}}{\alpha - x} = \frac{\mathrm{I}}{\alpha - a_1} + \frac{x - a_1}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)} + \ldots + \frac{(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_\nu)(\alpha - a_{\nu+1})} + \ldots$$

a par conséquent lieu tant que $R(\alpha - x) < \mathrm{o}$ et la série du second membre est convergente quand $R(\alpha - x) < \mathrm{o}$; quand $R(\alpha - x) > \mathrm{o}$ elle est divergente. Quant au cas où $R(\alpha - x) < \mathrm{o}$ des considérations très simples nous montrent que la série est uniformément convergente pour toutes les valeurs des variables x, α dans un domaine fini assujeti à la condition qu'on y a partout $R(\alpha - x) < \delta$, δ étant une quantité positive aussi petite que l'on voudra.

Mais la série est aussi absolument convergente pour une valeur de x telle que l'on a

$$R(\alpha - x) < 0.$$

Soit en effet α et x deux quantités complexes quelconques telles que l'on a

$$R(\alpha - x) < 0$$

on peut déterminer deux autres quantités α_1, x_1 réelles et assujeties à la condition

$$R(\alpha) < \alpha_1 < x_1 < R(x).$$

La série

$$\frac{1}{\alpha_1 - a_1} + \frac{x_1 - a_1}{(\alpha_1 - a_1)(\alpha_1 - a_2)} + \ldots + \frac{(x_1 - a_1)\ldots(x_1 - a_\nu)}{(\alpha_1 - a_1)\ldots(\alpha_1 - a_\nu)(\alpha_1 - a_{\nu+1})} + \ldots$$

est alors convergente et en fixant m assez grand pour que

$$x_1 - a_{m+\nu} < 0, \qquad \alpha_1 - a_{m+\nu} < 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

on en conclut que la série

$$\frac{1}{\alpha_1 - a_m} + \frac{x_1 - a_m}{(\alpha_1 - a_m)(\alpha_1 - a_{m-1})} + \ldots + \frac{(x_1 - a_m)\ldots(x_1 - a_{m+\nu})}{(\alpha_1 - a_m)\ldots(\alpha_1 - a_{m+\nu})(\alpha_1 - a_{m+\nu+1})} + \ldots$$

est convergente. Mais tous ses termes étant négatifs cela ne peut avoir lieu sans que la série soit absolument convergente, ce qui nous permet d'affirmer que la série

$$\frac{1}{\alpha - a_1} + \frac{x_1 - a_1}{(\alpha_1 - a_1)(\alpha_1 - a_2)} + \ldots + \frac{(x_1 - a_1)\ldots(x_1 - a_\nu)}{(\alpha_1 - a_1)\ldots(\alpha_1 - a_\nu)(\alpha_1 - a_{\nu+1})} + \ldots$$

est absolument convergente.

En posant

$$\left|\frac{(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_\nu)(\alpha - a_{\nu+1})}\right|$$

$$= \left|\frac{(x_1 - a_1)\ldots(x_1 - a_\nu)}{(\alpha_1 - a_1)\ldots(\alpha_1 - a_\nu)(\alpha_1 - a_{\nu+1})}\right| \cdot \left|\frac{(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)}{(x_1 - a_1)\ldots(x_1 - a_\nu)}\right| \cdot \left|\frac{(\alpha_1 - a_1)\ldots(\alpha_1 - a_{\nu+1})}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_{\nu+1})}\right|$$

on peut écrire

$$\left|\frac{(x - a_1)\ldots(x - a_\nu)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_\nu)(\alpha - a_{\nu+1})}\right| < G\left|\frac{(x_1 - a_1)\ldots(x_1 - a_\nu)}{(\alpha_1 - a_1)\ldots(\alpha_1 - a_\nu)(\alpha_1 - a_{\nu+1})}\right|$$

G étant un nombre positif assujeti à la condition

$$G > \left|\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_\nu)}\right| \cdot \left|\frac{(a_1-a_1)\ldots(a_1-a_{\nu+1})}{(a-a_1)\ldots(a-a_{\nu+1})}\right| \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

quantité qui peut toujours se déterminer si l'on observe que $R(x_1-x)<0$ et $R(\alpha-\alpha_1)<0$.

Enfin cette dernière inégalité nous permet d'écrire

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(a-a_1)\ldots(a-a_\nu)(a-a_{\nu+1})}\right| < G\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x_1-a_1)\ldots(x_1-a_\nu)}{(a_1-a_1)\ldots(a_1-a_\nu)(a_1-a_{\nu+1})}\right|$$

ce qui nous montre que la série du premier membre est convergente.

En supposant que les a_ν ont tous le même argument, c'est à dire que

$$a_\nu = r_\nu e^{\theta i}$$

θ ne changeant pas avec ν, la substitution $x=\xi e^{\theta i}$, $\alpha=\beta e^{\theta i}$ nous fait voir que la série

$$\frac{1}{a-a_1}+\frac{x-a_1}{(a-a_1)(a-a_2)}+\ldots+\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(a-a_1)\ldots(a-a_\nu)(a-a_{\nu+1})}$$

est uniformément convergente ainsi qu'absolument tant que $R(\beta-\xi)<0$ c'est à dire tant que l'on ait

$$R(\alpha e^{-\theta i}-xe^{-\theta i})<0.$$

Revenons maintenant à l'étude des séries $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$, $\lim\limits_{\nu=\infty}a_\nu=\infty$ en général.

En supposant que $r_1, \ldots, r_\nu, \ldots$ *soient des quantités positives ou nulles telles que* $\lim\limits_{\nu=\infty}r_\nu=\infty$ *et* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{r_\nu}$ *divergent* je puis démontrer les théorèmes qui suivent:

Théorème I. *Si la série* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}B_\nu(x-r_1)\ldots(x-r_\nu)$ *est convergente pour* $x=\alpha$, $(\alpha \gtrless a_\nu)$, *elle est aussi convergente pour chaque valeur de* x *telle que* $R(\alpha-x)<0$.

En posant

$$\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(\alpha - r_1)\ldots(\alpha - r_\nu) = S_\mu^{(m)}$$

on parvient par les mêmes transformations qu'à la page 11 à l'égalité

$$\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(x - r_1)\ldots(x - r_\nu)$$

$$-S_0^{(m)}(\alpha-x)\cdot\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_m)}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_m)(\alpha-r_{m+1})}+S_1^{(m)}(\alpha-x)\cdot\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_{m+1})}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_{m+1})(\alpha-r_{m+2})}+\ldots$$

$$\ldots+S_{\mu-1}^{(m)}(\alpha-x)\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_{m+\mu-1})}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_{m+\mu-1})(\alpha-r_{m+\mu})}+S_\mu^{(m)}\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_{m+\mu})}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_{m+\mu})}.$$

Mais $R(\alpha - x)$ étant négatif nous avons prouvé page 17 que

$$\lim_{\nu=\infty}\left|\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_\nu)}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_\nu)}\right| = 0$$

d'où l'on conclut que l'on peut déterminer un nombre positif G tel que

$$G > \left|\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_\nu)}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_\nu)}\right|. \qquad (\nu=0, 1, 2, \ldots)$$

D'un autre côté G peut être fixé de sorte qu'il satisfasse à la condition

$$G > |\alpha - x|\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_\nu)}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_\nu)(\alpha-r_{\nu+1})}\right|.$$

Etant donné un nombre positif δ aussi petit que l'on voudra on peut prendre m assez grand pour que l'on ait

$$|S_\mu^{(m)}| < \frac{\delta}{2G} \qquad (\mu=0, 1, 2, \ldots)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(x-r_1)\ldots(x-r_\nu)\right| < \frac{\delta}{2G}\cdot|\alpha-x|\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x-r_1)\ldots(x-r_\nu)}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_\nu)(\alpha-r_{\nu+1})}\right| + \frac{\delta}{2}$$

$$< \delta \qquad (\mu=0, 1, 2, \ldots)$$

ce qui prouve le théorème.

Par des considérations très faciles à effectuer on parvient alors au résultat qui suit:

Si la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - r_1 e^{\theta i}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta i})$ *est convergente pour* $x = \alpha$, $(\alpha \lessgtr a_\nu)$ *elle est aussi convergente pour chaque valeur de* x *telle que*

$$R(\alpha e^{-\theta i} - x e^{-\theta i}) < 0.$$

Posons en effet

$$x = \xi e^{\theta i}, \qquad \alpha = \beta e^{\theta i}$$

la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu e^{\nu\theta i}(\xi - r_1) \ldots (\xi - r_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - r_1 e^{\theta i}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta i})$$

est convergente pour $\xi = \beta$. Elle est par conséquent convergente tant que l'on a

$$R(\xi - \beta) = R(\alpha e^{-\theta i} - \beta e^{-\theta i}) < 0.$$

C. q. f. d.

Si la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - r_1 e^{\theta i}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta i})$ est divergente pour $x = \alpha$ elle est par conséquent divergente pour chaque valeur de x telle que $R(\alpha e^{-\theta i} - x e^{\theta i}) > 0$. On peut encore affirmer:

A chaque série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - r_1 e^{\theta i}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta i})$ *correspond un nombre réel* ρ *tel que la série soit convergente tant que* $R(x e^{-\theta i}) > \rho$ *mais divergente tant que* $R(x e^{-\theta i}) < \rho$.

L'équation

$$R(x e^{-\theta i}) = \rho$$

représentant dans le plan de la variable x, une ligne droite, je puis affirmer que le domaine de convergence de la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - r_1 e^{\theta i}) \ldots (x - r_\nu e^{\theta i})$ se compose de la partie du plan de la variable x qui est située à la même côté de la ligne droite

$$R(x e^{-\theta i}) = \rho$$

que les quantités $r_\nu e^{\theta i}$ pour une valeur suffisamment grande de ν. En regardant la ligne droite comme un cercle dont le centre est situé à l'infini on peut parler d'un cercle de convergence aussi pour ces séries.

Théorème II. *La série* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x - r_1) \ldots (x - r_\nu)$ *est uniformément convergente dans une aire finie quelconque comprise tout entière à l'intérieur du domaine de convergence de la série.*

Ayant déterminé une aire finie quelconque B je puis en effet fixer deux nombres réels α et β situés à l'intérieur du domaine de convergence de la série et tels que l'on ait

$$\alpha < \beta < R(x)$$

pour toutes les valeurs de l'aire B.

Tant que x sera compris dans le domaine les quantités

$$\left|\frac{(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)}{(\alpha - r_1) \ldots (\alpha - r_\nu)}\right|, \qquad \left|\frac{(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)}{(\beta - r_1) \ldots (\beta - r_\nu)}\right|$$

tendront uniformément vers zéro quand ν ira en augmentant (voir page 17) ce qui fait voir quil existe un nombre positif G assujeti aux conditions

$$G > \left|\frac{(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)}{(\alpha - r_1) \ldots (\alpha - r_\nu)}\right|$$

$$G > \left|\frac{(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)}{(\beta - r_1) \ldots (\beta - r_\nu)}\right|$$

pour toute valeur de l'aire B et pour $\nu = 1, 2, \ldots$

En posant

$$|\alpha - x| \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\frac{(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)}{(\alpha - r_1) \ldots (\alpha - r_\nu)(\alpha - r_{\nu+1})}\right|$$

$$= |\alpha - x| \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\frac{(\beta - r_1) \ldots (\beta - r_\nu)}{(\alpha - r_1) \ldots (\alpha - r_\nu)(\alpha - r_{\nu+1})}\right| \cdot \left|\frac{(x - r_1) \ldots (x - r_\nu)}{(\beta - r_1) \ldots (\beta - r_\nu)}\right|$$

$$< G|\alpha - x| \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\frac{(\beta - r_1) \ldots (\beta - r_\nu)}{(\alpha - r_1) \ldots (\alpha - r_\nu)(\alpha - r_{\nu+1})}\right|$$

on voit que l'on peut fixer un nombre positif fini G_1 qui est plus grand que le second membre de cette égalité pour toutes les valeurs de la variable x situées dans l'aire B.

Soit maintenant m assez grand pour que l'on ait

$$|S_{\mu}^{(m)}| < \frac{\delta}{G + G_1} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

on voit par les mêmes considérations qu'au théorème I que

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(x - r_1)\ldots(x - r_\nu)\right| < \delta$$

pour toutes les valeurs de la variable situées dans l'aire B et pour $\mu = 0, 1, 2, \ldots.$ C. q. f. d.

Par la substitution $x = \xi e^{\theta i}$ on parvient enfin au théorème suivant:

La série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - r_1 e^{\theta i})\ldots(x - r_\nu e^{\theta i})$ *est uniformément convergente dans une aire finie quelconque comprise tout entière à l'intérieur du domaine de convergence de la série.*

Cela nous montre enfin que la fonction

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x - r_1 e^{\theta i})\ldots(x - r_\nu e^{\theta i})$$

est une fonction holomorphe à l'intérieur du domaine de convergence de la série.

Jusqu'ici l'analogie avec les caractères connus des séries ordonnées suivant les puissances entières positives et croissantes de la variable est complète. Mais en nous demandant si la série est aussi absolument convergente pour chaque valeur de la variable comprise à l'intérieur du domaine de convergence de la série, des considerations très élémentaires mettent en évidence que cela n'a pas toujours lieu. Nous savons en effet par les recherches d'ABEL qu'en mettant $|y| = 1$, $y \lessgtr -1$ dans la série

$$1 + \frac{x}{1}y + \frac{x(x-1)}{1.2}y^2 + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{\underline{|\nu}}y^\nu + \ldots,$$

cette série est convergente sans être pourça absolument convergente tant que

$$-1 < R(x) < 0.$$

Par nos propres recherches ci-dessus nous savons que la série binôme est dans ce cas uniformément convergente dans un domaine fini quelconque tel que l'on y ait partout $-1 < R(x) < 0$.

Pour les séries $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x - r_1 e^{\theta i}) \dots (x - r_\nu e^{\theta i})$ il y a par conséquent lieu de distinguer d'un côté leur domaine de convergence de l'autre leur domaine de convergence absolue, si nous entendons par ce nom l'ensemble de toutes les valeurs de la variable pour lesquelles la série est absolument convergente.

A l'égard de la convergence absolue on a le théorème suivant:

Théorème III. *Si la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x - r_1) \dots (x - r_\nu)$ *est absolument convergente pour* $x = \alpha$, $\alpha \lessgtr r_\nu$ *elle est aussi absolument convergente pour chaque valeur de* x *telle que* $R(\alpha - x) < 0$.

Soit en effet x une valeur de la variable satisfaisant à l'inégalité

$$R(\alpha - x) < 0$$

on peut alors fixer un nombre positif fini G tel que l'on ait

$$G > \left| \frac{(x - r_1) \dots (x - r_\nu)}{(\alpha - r_1) \dots (\alpha - r_\nu)} \right| \qquad (\nu = 1, 2, \dots)$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} | B_\nu (x - r_1) \dots (x - r_\nu) | = \sum_{\nu=0}^{\infty} | B_\nu (\alpha - r_1) \dots (\alpha - r_\nu) | \left| \frac{(x - r_1) \dots (x - r_\nu)}{(\alpha - r_1) \dots (\alpha - r_\nu)} \right|$$

$$< G \sum_{\nu=0}^{\infty} | B_\nu (\alpha - r_1) \dots (\alpha - r_\nu) |.$$

C. q. f. d.

La substitution $x = \xi e^{\theta i}$ nous donne pour résultat:

Si la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x - r_1 e^{\theta i}) \dots (x - r_\nu e^{\theta i})$ *est absolument convergente pour* $x = \alpha$, $\alpha \lessgtr r_\nu e^{\theta i}$, *elle est aussi absolument convergente pour chaque valeur de* x *telle que* $R(\alpha e^{-\theta i} - x e^{-\theta i}) < 0$.

On en conclut enfin:

A chaque série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x - r_1 e^{\theta i}) \dots (x - r_\nu e^{\theta i})$ *correspond un nombre réel* σ *tel que la série est absolument convergente tant que* $R(x e^{-\theta i}) > \sigma$, *mais n'est pas absolument convergente tant que* $R(x e^{-\theta i}) < \sigma$.

Dans le cas où $\rho < \sigma$ il existe par conséquent une partie du plan de la variable x, savoir

$$\rho < R(xe^{-\theta i}) < \sigma$$

telle que la série est convergente pour toutes les valeurs de cette partie du plan et même uniformément convergente dans chaque aire finie comprise à l'intérieur de cette partie du plan, sans que la convergence absolue ait lieu pour un seul point qui y soit situé.

Nous nous occuperons maintenant des séries $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$ en admettant pour les a_ν que $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$ et que $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|}$ est convergent. Nous pouvons à l'égard de ces séries établir quelques théorèmes analogues à ceux démontrés pour le cas déjà traité.

Théorème I. *Soient* $a_1, \ldots, a_\nu, \ldots, \lim a_\nu = \infty$ *des quantités telles que* $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|}$ *est convergent, si la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$ *est convergente pour* $x = \alpha$, $(\alpha \lesseqgtr a_\nu)$ *elle est convergente pour chaque valeur finie de la variable.*

Soit en effet

$$S_\mu^{(m)} = \sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_\nu).$$

Nous pouvons écrire

$$\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$$

$$= S_0^{(m)}(\alpha-x)\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_m)}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_m)(\alpha-a_{m+1})} + S_1^{(m)}(\alpha-x)\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m+1})}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_{m+1})(\alpha-a_{m+2})} + \ldots$$

$$\ldots + S_{\mu-1}^{(m)}(\alpha-x)\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m+\mu-1})}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_{m+\mu-1})(\alpha-a_{m+\mu})} + S_\mu^{(m)}\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{m+\mu})}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_{m+\mu})}.$$

Soit δ une quantité positive aussi petite que l'on voudra, je puis donner à m une valeur assez grande pour que l'on ait

$$|S_\mu^{(m)}| < \delta$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\left|\sum_{\nu=m}^{m+\mu} B_\nu(x-a_1)\dots(x-a_\nu)\right|$$

$$< \delta\left[\,|\alpha - x|\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x-a_1)\dots(x-a_\nu)}{(\alpha-a_1)\dots(\alpha-a_\nu)(\alpha-a_{\nu+1})}\right| + \left|\frac{(x-a_1)\dots(x-a_{m+\mu})}{(\alpha-a_1)\dots(\alpha-a_{m+\mu})}\right|\,\right].$$

Mais les recherches de la page 14 nous montrent que le second membre tend vers zéro en même temps que δ, ce qui prouve le théorème. En étudiant le second membre de l'égalité on parvient aisément au théorème qui suit.

Théorème II. *Soient* $a_1, \dots, a_\nu, \dots, \lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$ *des quantités telles que* $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|}$ *est convergent, si la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\dots(x-a_\nu)$ *est convergente pour* $x=\alpha$, $\alpha \lesseqgtr a_\nu$, *elle est uniformément convergente dans une aire finie quelconque du plan de la variable* x.

De ce théorème on conclut que chaque série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\dots(x-a_\nu)$ qui est convergente pour d'autres valeurs de la variable que $x = a_1, \dots, a_\nu, \dots$ représente une fonction entière de x.

Théorème III. *Soient* $a_1, \dots, a_\nu, \dots, \lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$ *des quantités telles que* $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|}$ *est convergent, si la série* $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)\dots(x-a_\nu)$ *est absolument convergente pour* $x=\alpha$, $\alpha \lesseqgtr a_\nu$, *elle est absolument convergente pour chaque valeur finie de la variable.*

Soit x une valeur quelconque de la variable, l'égalité

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}|B_\nu(x-a_1)\dots(x-a_\nu)| = \sum_{\nu=0}^{\infty}|B_\nu(\alpha-a_1)\dots(\alpha-a_\nu)|\left|\frac{(x-a_1)\dots(x-a_\nu)}{(\alpha-a_1)\dots(\alpha-a_\nu)}\right|$$

nous fait voir que le théorème est vrai.

Pour faire voir enfin comment le domaine de convergence change avec la choix des a_ν nous traiterons encore quelques exemples.

Nous supposerons d'abord que *tous les* a_ν *sont réels, que* $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}$ *est convergent mais* $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|}$ *est divergent.*

Il y a alors lieu de distinguer deux cas.

A) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^2}$ *est convergent.*

Dans ce cas on a les égalités

$$\frac{1}{a-x}-\left[\frac{1}{a-a_1}+\frac{x-a_1}{(a-a_1)(a-a_2)}+\cdots+\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(a-a_1)\ldots(a-a_{n-1})(a-a_n)}\right]$$
$$=\frac{\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a_n}\right)}{\left(1-\frac{a}{a_n}\right)\cdots\left(1-\frac{a}{a_n}\right)}\cdot\frac{1}{a-x}$$

ainsi que

$$\lim_{n=\infty}\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{a}{a_\nu}\right)}=\frac{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\frac{x}{a_\nu}}}{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{a}{a_\nu}\right)e^{\frac{a}{a_\nu}}}\cdot e^{(a-x)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}}.$$

Mais $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|^2}$ étant convergent on en conclut que les produits du second membre de l'égalité sont convergents ce qui nous permet enfin d'affirmer que la série

$$\frac{1}{a-a_1}+\frac{x-a_1}{(a-a_1)(a-a_2)}+\cdots+\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(a-a_1)\ldots(a-a_\nu)(a-a_{\nu+1})}+\cdots$$

est convergente pour chaque valeur finie de la variable x. Elle est aussi uniformément convergente dans chaque aire finie du plan.

Quant à la convergence absolue elle n'a lieu pour aucune valeur de la variable.

Soient en effet α et x deux valeurs des variables telles que $R(\alpha)=0$ et $R(x)=0$. Dans ce cas on peut écrire

$$|x-a_\nu|=|x-|a_\nu||,\qquad |\alpha-a_\nu|=|\alpha-|a_\nu||$$

c'est à dire

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(a-a_1)\ldots(a-a_\nu)(a-a_{\nu+1})}\right|=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x-|a_1|)\ldots(x-|a_\nu|)}{(a-|a_1|)\ldots(a-|a_\nu|)(a-|a_{\nu+1}|)}\right|.$$

Mais l'égalité

$$\frac{1}{a-x}-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(x-|a_1|)\ldots(x-|a_\nu|)}{(a-|a_1|)\ldots(a-|a_\nu|)(a-|a_{\nu+1}|)}=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{|a_\nu|}\right)e^{\frac{x}{|a_\nu|}}}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{a}{|a_\nu|}\right)e^{\frac{x}{|a_\nu|}}}\cdot e^{(a-x)\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{|a_\nu|}}$$

met en évidence que la série du premier membre n'est pas convergente, ce qui prouve la divergence de la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x-|a_1|)\ldots(x-|a_\nu|)}{(a-|a_1|)\ldots(a-|a_\nu|)(a-|a_{\nu+1}|)}\right|$$

ainsi que celle de

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(a-a_1)\ldots(a-a_\nu)(a-a_{\nu+1})}\right|.$$

Cela nous montre enfin que la série en question n'est absolument convergente pour aucune valeur de la variable, des considérations tout analogues à celles du théorème III page 26 mettant en évidence que si la série est absolument convergente pour un système de valeurs x, α des variables ($x \gtrless a_\nu$, $\alpha \gtrless a_\nu$), elle l'est aussi pour chaque système de valeurs des variables.

B) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^2}$ *est divergent.*

Pour plus de simplicité nous supposerons que l'on puisse trouver un nombre entier positif m suffisamment grand pour que l'on ait

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^{2m}}\quad\text{convergent.}$$

Soient de plus les a_ν ordonnés de sorte que l'on ait

$$|a_{\nu+1}|\geqq|a_\nu|.$$

La série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}$ étant convergente, une considération due à Abel nous fait alors voir que la série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}\cdot\frac{1}{a_\nu^{2\mu}}$ est convergente pour $\mu = 1, 2, \ldots$

L'égalité

$$\lim_{n=\infty}\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{a}{a_\nu}\right)}=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\sum\limits_{\mu=1}^{2m-1}\frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{a}{a_\nu}\right)e^{\sum\limits_{\mu=1}^{2m-1}\frac{1}{\mu}\left(\frac{a}{a_\nu}\right)^\mu}}\,e^{\lim\limits_{n=\infty}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sum\limits_{\mu=1}^{2m-1}\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{a}{a_\nu}\right)^\mu-\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]}$$

ainsi que

$$\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{2m-1}\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{a}{a_\nu}\right)^\mu-\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]$$

$$=(a-x)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}+\frac{a^3-x^3}{3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^3}+\ldots+\frac{a^{2m-1}-x^{2m-1}}{2m-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^{2m-1}}$$

$$+\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m-1}\frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{a^2}{a_\nu^2}\right)^\mu-\left(\frac{x^2}{a_\nu^2}\right)^\mu\right]$$

nous font voir de même qu'aux pages 16, 17 que la série

$$\frac{1}{a-a_1}+\frac{x-a_1}{(a-a_1)(a-a_2)}+\ldots+\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_\nu)}{(a-a_1)\ldots(a-a_\nu)(a-a_{\nu+1})}+\ldots$$

est convergente tant que $R(a^2-x^2)<0$ mais divergente tant que $R(a^2-x^2)>0$. La série est uniformément convergente dans une aire finie quelconque comprise à l'intérieur du domaine de convergence de la série, mais elle n'est absolument convergente pour aucune valeur de x.

Quant au domaine de convergence de la série, l'égalité

$$R(a^2-x^2)<0$$

se transforme en

$$\xi^2-\eta^2>R(a^2)$$

si nous posons $x=\xi+\eta i$, ξ et η étant réels. Cela met en évidence que le domaine de convergence de la série se compose de la partie du plan de la variable x qui est renfermée entre les deux branches de l'hyperbole

$$\frac{\xi^2}{R(a^2)}-\frac{\eta^2}{R(a^2)}=1.$$

Dans le cas où $R(a^2)=0$ l'hyperbole se transforme en deux lignes droites

$$\xi-\eta=0,\qquad \xi+\eta=0.$$

Nous traiterons encore un exemple.

Soit

$$a_{2\nu-1}=(-1)^\nu\sqrt[4]{\nu},\qquad a_{2\nu}=i(-1)^\nu\sqrt[4]{\nu}.\qquad {\scriptstyle(\nu=1,2,\ldots)}$$

Dans cette hypothèse on voit que les séries $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^2}$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^3}$ sont toutes convergentes, mais la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a_\nu^4}$ est divergente. D'un autre coté la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|^5}$ étant convergente l'égalité

$$\lim_{n=\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{\alpha}{a_\nu}\right)}$$

$$= \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) e^{\sum_{\mu=1}^{4}\frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}}{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha}{a_\nu}\right) e^{\sum_{\mu=1}^{4}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\alpha}{a_\nu}\right)^\mu}} \cdot e^{\frac{\alpha - x}{1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu} + \frac{\alpha^2 - x^2}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^2} + \frac{\alpha^3 - x^3}{3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^3}} \cdot e^{\lim_{n=\infty}\left(\frac{\alpha^4 - x^4}{4}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{a_\nu^4}\right)}$$

met en évidence que la série est convergente tant que

$$R(\alpha^4 - x^4) < 0$$

mais divergente tant que $R(\alpha^4 - x^4) > 0$.

En posant $x = re^{\theta i}$ l'égalité

$$r^4 \cos 4\theta = R(\alpha^4)$$

nous fait voir que le domaine de convergence de la série est limité par une courbe à quatre branches à laquelle les quatre lignes

$$\cos 4\theta = 0$$

sont des asymptotes.

Si nous voulons maintenant chercher à développer une fonction analytique quelconque $F(x)$ en série de forme $\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu (x - a_1)\ldots(x - a_\nu)$, $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$ nous pouvons étudier le reste R_n dans le développement

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - a_1} d\alpha + \frac{x - a_1}{2\pi i}\int_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1)(\alpha - a_2)} d\alpha + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - a_1)\ldots(x - a_{n-1})}{2\pi i}\int_S \frac{F(\alpha)}{(\alpha - a_1)\ldots(\alpha - a_n)} d\alpha + R_n$$

savoir

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{F(\alpha)}{\alpha - x}\,\frac{(x-a_1)\ldots(x-a_n)}{(\alpha-a_1)\ldots(\alpha-a_n)}\,d\alpha$$

mais l'étude de ce reste semble offrir beaucoup de difficulté. C'est pourquoi nous préférons donner ici quelques développements en série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x-a_1)\ldots(x-a_\nu)$$

auxquels on parvient à l'aide du développement de $\frac{1}{\alpha - x}$ donné ci-dessus.

Pour plus de simplicité nous admettons que tous les a_ν sont positifs ou nuls et que la série $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu}$ est divergente. En posant $a_\nu = r_\nu$ on sait alors que

$$\frac{1}{\alpha - x} = \frac{1}{\alpha - r_1} + \frac{x - r_1}{(\alpha - r_1)(\alpha - r_2)} + \cdots + \frac{(x-r_1)\ldots(x-r_\nu)}{(\alpha-r_1)\ldots(\alpha-r_\nu)(\alpha-r_{\nu+1})} + \cdots$$

Mais la série du second membre étant uniformément convergente on peut la dériver par rapport à α ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\alpha - x)^2} &= \frac{1}{(\alpha - r_1)^2} + \frac{(x-r_1)}{(\alpha-r_1)(\alpha-r_2)}\left[\frac{1}{\alpha-r_1}+\frac{1}{\alpha-r_2}\right] \\ &+ \frac{(x-r_1)(x-r_2)}{(\alpha-r_1)(\alpha-r_2)(\alpha-r_3)}\left[\frac{1}{\alpha-r_1}+\frac{1}{\alpha-r_2}+\frac{1}{\alpha-r_3}\right]+\cdots\end{aligned}$$

$$\text{pour } R(\alpha - x) < 0.$$

Mais la dérivée d'une série uniformément convergente étant aussi uniformément convergente on peut la dériver encore une fois etc., ce qui nous permet d'affirmer que chaque fonction rationnelle algébrique peut être développée en série $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x - r_1)\ldots(x - r_\nu)$ tant que la partie réelle de x est plus grande que la partie réelle de tous les pôles de la fonction.

Au lieu de dériver notre série nous pouvons la soumettre à l'intégration ce qui met en évidence que le logarithme peut être développé en une telle série. Quant à la série du binôme et la série hypergéométrique de Gauss elles ont été trop étudiées pour que je m'en occupe.

Je veux donner ici un développement en série de la fonction $D_x \log\Gamma(x+1)$ qui me semble offrir de l'intérêt.

Soit $a_\nu = \nu - 1$, le développement de $\frac{1}{a-x}$ en serie nous donne le résultat qui suit si l'on y change le signe de α, savoir

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a(a+1)} + \frac{x(x-1)}{a(a+1)(a+2)} + \dots$$

$$\dots + (-1)^\nu \frac{x(x-1)\dots(x-\nu+1)}{a(a+1)\dots(a+\nu)} + (-1)^{\nu+1} \frac{x(x-1)\dots(x-\nu)}{a(a+1)\dots(a+\nu)} \cdot \frac{1}{a+x}$$

d'ou l'on conclut

$$\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+x} = \frac{x}{\mu(\mu+1)} - \frac{x(x-1)}{\mu(\mu+1)(\mu+2)} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{\nu-1} \frac{x(x-1)\dots(x-\nu+1)}{\mu(\mu+1)\dots(\mu+\nu)} + (-1)^\nu \frac{x(x-1)\dots(x-\nu)}{\mu(\mu+1)\dots(\mu+\nu)} \cdot \frac{1}{\mu+x}.$$

En étudiant le développement connu de la fonction $D_x \log \Gamma(x+1)$, savoir

$$D_x \log \Gamma(x+1) = -C + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\mu} - \frac{1}{x+\mu}\right]$$

où C est la constante d'Euler on trouve maintenant que

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+x}\right] - \left[x \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(\mu+1)} - x(x-1) \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(\mu+1)(\mu+2)} + \dots\right.$$

$$\left.\dots + (-1)^{m-1} x(x-1)\dots(x-m+1) \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu\dots(\mu+m)}\right]$$

$$= (-1)^m \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{x(x-1)\dots(x-m)}{\mu(\mu+1)\dots(\mu+m)} \cdot \frac{1}{\mu+x}.$$

Par les considérations suivantes on peut enfin voir que le second membre tend vers zéro quand m va en augmentant.

Soit p un nombre entier plus grand que $|x|$ on trouve que

$$\sum_{\mu=p}^{\infty} \left| \frac{x(x-1)\dots(x-m)}{\mu(\mu+1)\dots(\mu+m)} \cdot \frac{1}{\mu+x} \right| < \sum_{\mu=p}^{\infty} \frac{|x|}{\mu(\mu-|x|)}$$

ce qui fait voir que l'on peut prendre p assez grand pour que

$$\sum_{\mu=p}^{\infty}\left|\frac{x(x-1)\ldots(x-m)}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m)}\cdot\frac{1}{\mu+x}\right|<\frac{\delta}{2}$$

δ étant un nombre positif aussi petit que l'on voudra.

D'un autre côté on a

$$\lim_{m=\infty}\left|\frac{x(x-1)\ldots(x-m)}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m)}\cdot\frac{1}{\mu+x}\right|=0$$

pour une valeur de x tel que $R(x+\mu)>0$, ce qui met en évidence que l'on peut déterminer m assez grand pour que

$$\sum_{\mu=1}^{p-1}\left|\frac{x(x-1)\ldots(x-m)}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+m)}\cdot\frac{1}{\mu+x}\right|<\frac{\delta}{2}$$

pour une valeur de x tel que $R(x+1)>0$.

Il est par conséquent démontré que le second membre de l'égalité ci-dessus tend vers zéro quand m va en augmentant ce qui nous permet d'écrire

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu+x}\right)=x\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu(\mu+1)}-x(x-1)\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu(\mu+1)(\mu+2)}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{\nu}x(x-1)\ldots(x-\nu)\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\nu+1)}+\ldots$$

Mais

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\nu+1)}=\frac{1}{\nu+1}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\nu)}-\frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\nu+1)}\right]$$
$$=\frac{1}{\nu+1}\left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\nu)}-\sum_{\mu=2}^{\infty}\frac{1}{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+\nu)}\right]$$
$$=\frac{1}{(\nu+1)\underline{|\nu+1}},$$

ce qui nous donne le développement cherché, savoir:

$$D_x\log\Gamma(x+1)+C=x-\frac{x(x-1)}{2\,.\underline{|2}}+\frac{x(x-1)(x-2)}{3\cdot\underline{|3}}-\ldots$$
$$\ldots(-1)\frac{x(x-1)\ldots(x-\nu)}{(\nu+1)\underline{|\nu+1}}+\ldots$$

tant que $R(x+1)>0$.

De cette égalité on passe aisément à l'expression connue de $D_x \log \Gamma(x+1)$ par une intégrale définie. Car le second membre n'étant autre chose que

$$\int_0^1 \frac{1-(1-y)^x}{y}\,dy$$

nous pouvons écrire

$$D_x \log \Gamma(x+1) = -C + \int_0^1 \frac{1-(1-y)^x}{y}\,dy.$$

Par la substitution

$$1-y=z$$

on parvient enfin à la formule de GAUSS[1]

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\log\frac{1}{z}} - \frac{z^x}{1-z}\right) dz = D_x \log \Gamma(x+1).$$

Les séries de la forme $\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu (x-a_1)\dots(x-a_\nu)$ ont été étudiées sous tout un autre point de vue par M. FROBENIUS dans son mémoire *Ueber die Entwickelung analytischer Functionen in Reihen die nach gegebenen Functionen fortschreiten*, CRELLE's Journal, Bd. 73, où il parvient dans des cas plus spéciaux à quelques-uns des développements en série des pages 8, 14, 17.

Dans son mémoire *Sur la formule d'interpolation de Lagrange*, CRELLE's Journal, Bd. 84, M. HERMITE a aussi établi une relation à l'aide de laquelle on parvient immédiatement au développement en série de la page 9, comme je l'ai montré dans une note insérée dans les Comptes rendus du 23 Novembre et du 7 Décembre 1885.

---

[1] Voir GAUSS, Werke, Bd. 3, page 159.