# ÜBER DIE INTEGRATION EINES TENSORFELDES

VON

F. NEVANLINNA und R. NEVANLINNA

*in Helsinki*

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem klassischen Problem der Integration eines wirbelfreien Tensorfeldes. Sachlich bringt sie nicht viel neues. Mit Hinblick auf die Bedeutung der vorgelegten Fragen für verschiedene Probleme der Analysis schien es uns aber angebracht, sie erneut zur Behandlung aufzunehmen, in einer Darstellung welche prinzipielle und methodische Einheitlichkeit, Einfachheit und Allgemeinheit anstrebt, unter Vermeidung überflüssiger Voraussetzungen. Wesentlich für die Behandlung in technisch-rechnerischer Hinsicht ist der konsequent durchgeführte koordinatenfreie (vektorielle) Standpunkt, der die geometrisch-anschaulichen und invarianten Momente der untersuchten Verhältnisse wohl deutlicher hervortreten lässt als der übliche Tensorkalkül, der auch typographisch durch die vielen Koordinatenindizes überlastet ist(1).

## § 1. Das affine Integral

**1.1. Simplexe.** Sei $R_x^m$ ein euklidischer Raum der Dimension $m$ $(<\infty)$; der Buchstabe $x$ gibt die Punkte des Raumes an. Ein System von $p+1 \leqslant m+1$ Punkten $x_0, \ldots, x_p$, so dass die Vektoren $h_i = x_i - x_0$ $(i=1, \ldots, p)$ linear unabhängig sind, heisst ein $p$-Simplex und wird mit $s^p(x_0, \ldots, x_p)$ bezeichnet.

(1) Wegen der hier benutzten Grundbegriffe und Bezeichnungen der vektoriellen Differentialrechnung sei verwiesen an R. NEVANLINNA: a) *Bemerkung zur absoluten Analysis*, Ann. Acad. Scient. Fennicæ A I, 169, 1954, 7 S., und b) *Über den Satz von Stokes*, ibidem 219, 1956, 24 S. Im Vergleich mit der letzteren Arbeit enthält die vorliegende Untersuchung mehrere wesentliche Verbesserungen. Es sei hier insbesondere darauf hingewiesen, dass der in der zitierten Arbeit gegebene Ausdruck für das Integral der Gleichung rot $X = A$ einen Rechenfehler enthält; es fehlt dort (vgl. (22)) der Faktor $n\tau^{n-1}$ unter dem Integralzeichen, wobei $\tau = |t - x_0| / |x - x_0|$.

10 – 573805. *Acta mathematica*. 98. Imprimé le 7 décembre 1957.

Die Punkte $x$ der $p$-dimensionalen Hyperebene, welche durch die Eckpunkte $x_0, \ldots, x_p$ geht und in der Form $x_0 + R^p$ geschrieben werden kann, wo $R^p$ der von den Kantenvektoren $h_1, \ldots, h_p$ aufgespannte lineare Raum ist, lassen sich durch baryzentrische Koordinaten darstellen:

$$x = \sum_{i=0}^{p} \mu_i x_i, \qquad \sum_{i=0}^{p} \mu_i = 1.$$

Den Werten $\mu_i > 0$ entsprechen die inneren Punkte von $s^p$. Setzt man eine Koordinate $\mu_i = 0$ und die anderen $> 0$, so erhält man die inneren Punkte des $(p-1)$-Simplexes $s_i^{p-1}(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p)$, wo das Zeichen ^ das Weglassen des so bezeichneten Punktes angibt. Die Simplexe $s_i^{p-1}$ $(i = 0, \ldots, p)$ bilden den Rand von $s^p$. Allgemein findet man durch Streichen gewisser $q\,(1 \leqslant q \leqslant p)$ Eckpunkte $x_i$ die $(p-q)$-dimensionalen Randsimplexe $s_i^{p-q}$, in der Anzahl $\binom{p+1}{q}$, und ihre inneren Punkte durch Nullsetzen der entsprechenden $q$ baryzentrischen Koordinaten $\mu_i$ $(\geqslant 0)$. Für $q = p-1$ ergeben sich die $p(p+1)/2$ Kanten $s^1(x_i, x_j)$ $(i \neq j)$ und für $q = p$ schliesslich die $p+1$ Nullsimplexe, die Eckpunkte $x_i = s^0(x_i)$.

Im folgenden bezeichnen wir mit $s^p$ i. A. die abgeschlossene Vereinigungsmenge der inneren und der Randpunkte des Simplexes $s^p$.

**1.2. Orientierung.** Sei $D k_1 \ldots k_p$ eine reelle Linearform der $p\,(\geqslant 1)$ Argumente $k_i \in R^p$, welche für jedes System linear abhängiger Vektoren $k_1, \ldots, k_p$ verschwindet. Eine solche Form heisst *alternierend*: für $p \geqq 2$ ergibt sich nämlich aus der Definition sofort, dass $D$ bei einer Transposition der Argumente $k_i$ ihr Vorzeichen ändert. Eine alternierende Form $D$ ist bis auf einen reellen, von den Argumenten $k_i$ unabhängigen Faktor eindeutig bestimmt: die Gesamtheit aller $D$ ergibt sich aus dem Ausdruck $D = \lambda D_0$, wo $D_0$ eine beliebige, nicht identisch verschwindende alternierende Form ist[1]. Der Einheitlichkeit halber definieren wir eine alternierende Form nullter Stufe einfach als eine konstante reelle Zahl.

Die Orientierung eines Simplexes $s^p(x_0, \ldots, x_p)$ wird durch eine „orientierende Grundform", d. h. durch eine beliebig festgesetzte alternierende Form $D k_1 \ldots k_p \not\equiv 0$ folgendermassen definiert. Der Simplex $s^p$ heisst relativ zu der Grundform $D k_1 \ldots k_p$

[1] Für $D_0$ kann man z. B. die Determinante der $p^2$ Koordinaten der Vektoren $k_1, \ldots, k_p$ in einem beliebigen Koordinatensystem $e_1, \ldots, e_p$ nehmen. Es ist dann $\lambda = D e_1 \ldots e_p$ und $D$ verschwindet somit entweder für *alle* Vektoren $k_i$ oder *nur* wenn diese linear abhängig sind. Falls $e_1, \ldots, e_p$ in bezug auf ein Skalarprodukt $(a, b)$ orthonormal sind, so ist $(1/p!)\ |D h_1 \ldots h_p| / |D e_1 \ldots e_p|$ gleich dem Volumen von $s^p$ in bezug auf diese euklidische Metrik.

positiv oder negativ orientiert, je nachdem der Ausdruck

$$\Delta(x_0, \dots, x_p) = D h_1 \dots h_p \quad (h_i = x_i - x_0,\ i = 1, \dots, p)$$

positiv oder negativ ausfällt. Der Simplex $s^p(x_{i_0}, \dots, x_{i_p})$ ist mit $s^p(x_0, \dots, x_p)$ gleichorientiert, falls die Permutation $(i_0, \dots, i_p)$ der Indizes $(0, \dots, p)$ gerade ist, sonst haben die Simplexe entgegengesetzte Orientierungen.

Die Orientierung des Randsimplexes $s_i^{p-1}(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p)$ wird durch das Vorzeichen der Form $(-1)^i \Delta(x_0, \dots, x_p)$ definiert (induzierte Orientierung des Randsimplexes).

**1.3. Das affine Integral.** Sei jetzt $y = A(x) k_1 \dots k_p$ eine gegebene, vom Ort $x \in s^p(x_0, \dots, x_p)$ abhängige, in den Argumenten $k_i \in R^p$ lineare alternierende Funktion, deren Werte $y$ in einem euklidischen Raum $R_y^n$ der Dimension $n$ $(< \infty)$ variieren. Eine solche allgemeine alternierende Form ist durch eine reelle Grundform $D$ bis auf einen Faktor $a(x) \in R_y^n$ eindeutig bestimmt:

$$A(x) k_1 \dots k_p \equiv a(x) D k_1 \dots k_p.$$

Der Vektor $a(x)$ heisst „Dichte" des alternierenden Operators oder „Tensors" $A(x)$.

Sei $s_j^p(x_0^j, \dots, x_p^j)$ $(j = 1, \dots, N)$ die Menge der (gleichorientierten) Simplexe einer simplizialen Unterteilung $U$ des Simplexes $s^p(x_0, \dots, x_p)$. Auf jedem Teilsimplex $s_j^p$ nehme man einen beliebigen Punkt $\bar{x}_j$ und bilde die Summe

$$\sum_U A(\bar{x}_j) h_1^j \dots h_p^j = \sum_U a(\bar{x}_j) D h_1^j \dots h_p^j \quad (h_i^j = x_i^j - x_0^j).$$

Falls der Tensor $A(x)$ auf $s^p$ stetig ist (d. h.: die Dichte $a(x)$ ist stetig), so ergibt sich, bei unbeschränkter Verfeinerung der Unterteilung $U$ (d. h.: die Anzahl $N$ der Teilsimplexe wächst unbeschränkt, so dass jede Kante $h^j$ gegen Null strebt), dass die Summe $\sum_U$ gegen einen wohlbestimmten Grenzwert konvergiert(1). Dieser Grenzwert, das Integral von $A(x)$ über $s^p$, wird bezeichnet:

(1) Der Beweis verläuft in üblicher Weise mittels des Cauchyschen Konvergenzkriteriums, unter Beachtung der *Additivität* der Grundform $D$:

$$\sum_U D h_1^j \dots h_p^j = D h_1 \dots h_p.$$

Man bemerke, dass die Grundform $D$ nur als technisches Hilfsmittel des Beweises dient: das Integral ist unabhängig von der Wahl von sowohl $D$ als den Metriken von $R^p$ und $R_y^n$ und hat also eine „affine" Bedeutung.

$$\int_{s^p} A(x)\, d_1 x \ldots d_p x\,;$$

er stimmt, bis auf die Bezeichnung, mit dem alternierenden Integral von É. Cartan überein.

**1.4. Berechnung affiner Integrale.** Wir brauchen gewisse Eigenschaften des affinen Integrals, die hier zusammengestellt werden sollen.

1) Falls der alternierende Operator $A(x)$ vom Ort $x$ unabhängig ist, $A(x) \equiv A =$ Const, so ergibt sich

$$\int_{s^p} A\, d_1 x \ldots d_p x = A\, h_1 \ldots h_p. \tag{1.1}$$

Denn jede Näherungssumme $\sum\limits_U$ ist, wegen der Additivität einer alternierenden Form, gleich $A\, h_1 \ldots h_p$.

2) Sei zweitens $A(x)$ eine lineare Funktion des Ortes $x$, $A(x) \equiv A\, x$; in diesem Fall ist auch die Dichte von $A$ linear in $x$, $a(x) \equiv a\, x$. Wir betrachten die sukzessiven baryzentrischen Unterteilungen[1] $U_1, U_2, \ldots$ von $s^p$. Sei $U$ eine beliebige solche Zerlegung; man approximiere $s^p$ durch die Näherungssumme $\sum\limits_U$, wobei der Punkt $\bar{x}_j$ jeweils in den Schwerpunkt des Teilsimplexes $s_j^p$ $(j = 1, \ldots, N)$ verlegt wird. Es wird dann (vgl. Fussnote[1]))

$$\begin{aligned} \sum_U = \sum_U A\, \bar{x}_j h_1^j \ldots h_p^j = \sum_U a\, \bar{x}_j D\, h_1^j \ldots h_p^j = D\, h_1 \ldots h_p \frac{1}{N} \sum_U a\, \bar{x}_j \\ = D\, h_1 \ldots h_p\, a \left( \frac{1}{N} \sum_U \bar{x}_j \right) = D\, h_1 \ldots h_p\, a\, \bar{x} = A\, \bar{x}\, h_1 \ldots h_p, \end{aligned}$$

wo $\bar{x} = \dfrac{1}{p+1} \sum\limits_{i=0}^{p} x_i$ der Schwerpunkt von $s^p$ ist. Man findet also

$$\int_{s^p} A\, x\, d_1 x \ldots d_p x = A\, \bar{x}\, h_1 \ldots h_p. \tag{1.2}$$

3) Ein $p$-faches affines Integral lässt sich auf eine einfache und eine darauf folgende $(p-1)$-fache Integration zurückführen.

---

[1] Die baryzentrische Unterteilung von $s^p$ lässt sich durch Induktion konstruieren: Man unterteilt zunächst die Kanten $s^1$ von $s^p$ durch ihre Schwerpunkte, dann die Seitensimplexe $s^2$, indem man zu den zwei Eckpunkten eines Teilsimplexes von $s^1$ den Schwerpunkt von dem betreffenden $s^2$ hinzunimmt, u.s.w. Die Anzahl der Teilsimplexe der baryzentrischen Unterteilung $U_1$ von $s^p$ ist gleich $(p+1)!$. Teilt man die Simplexe von $U_1$ weiter baryzentrisch ein, so erhält man eine feinere Unterteilung $U_2$ von $s^p$, und so fort. Die Folge $U_1, U_2, \ldots, U_q, \ldots$ verfeinert sich für $q \to \infty$ unbeschränkt. Für die Simplexe $s_j^p$ $(j = 1, \ldots, N = ((p+1)!)^q)$ der Teilung $U_q$ gilt, dass sie alle dasselbe „Volumen" $D\, h_1^j \ldots h_p^j = (1/N)\, D\, h_1 \ldots h_p$ haben.

Zur Berechnung des Integrals

$$\int\limits_{s^p} A(x)\, d_1 x \ldots d_p x$$

über den Simplex $s^p(x_0, \ldots, x_p)$, wo wir der Einfachheit halber $x_0 = 0$ setzen, schneiden wir den Simplex mit zwei zu der Seite $s_0^{p-1}(x_1, \ldots, x_p)$ parallelen Hyperebenen durch die Punkte $\tau x_1$ und $(\tau + d\tau) x_1$ $(0 < \tau < 1)$ und projizieren eine infinitesimale Zerlegung des Simplexes $s_0^{p-1}$ (mit den aufspannenden Kanten $d_1 x, \ldots, d_{p-1} x$) durch Zentralprojektion auf die erstere Hyperebene, mit $x_0 = 0$ als Zentrum. Der zwischen diesen Hyperebenen fallende Teil von $s^p$ zerfällt so in infinitesimale Prismen. Zerlegt man jedes Teilprisma nach dem klassischen Vorbild von Euklid weiter in $p$ volumengleiche Simplexe, so ist der Beitrag eines solchen infinitesimalen Teilprismas zu dem Integral gleich

$$p\, d\tau\, A(\tau x)\, x\, (\tau d_1 x) \ldots (\tau d_{p-1} x) = d(\tau^p)\, A(\tau x)\, x\, d_1 x \ldots d_{p-1} x,$$

und man findet:

$$\int\limits_{s^p} A(x)\, d_1 x \ldots d_p x = \int\limits_{s_0^{p-1}} (\varphi A(x))\, d_1 x \ldots d_{p-1} x. \tag{1.3}$$

Hier ist $\varphi$ das durch]

$$\varphi A(x) = \int\limits_0^1 d(\tau^p)\, A(\tau x)\, x \tag{1.3'}$$

bestimmte lineare Funktional, welches den alternierenden Operator $A$ der Stufe $p$ in einen alternierenden Operator $\varphi A$ der Stufe $p-1$ überführt.

## § 2. Der Satz von Stokes

**2.1. Fragestellung.** Es sei $s^{p+1}(x_0, \ldots, x_{p+1})$ ein $(p+1)$-Simplex im Raume $R_x^m$ $(p \leqslant m-1)$, mit den aufspannenden Kanten $h_i = x_i - x_0$ $(i = 1, \ldots, p+1)$. Die Orientierung von $s^{p+1}$ geschieht mittels einer vorgegebenen alternierenden reellen Grundform $D k_1 \ldots k_{p+1}$; diese Orientierung möge positiv sein, d. h. es ist $D h_1 \ldots h_{p+1} > 0$.

Auf $s^{p+1}$ sei eine alternierende Form $A(x)\, k_1 \ldots k_p \in R_y^n$ gegeben $(x \in s^{p+1},\ k_i \in R^{p+1})$. Wenn der Operator $A(x)$ auf $s^{p+1}$ stetig ist, so können wir das Integral der Differentialform $A(x)\, d_1 x \ldots d_p x$ über den Rand $\partial s^{p+1}$ von $s^{p+1}$ bilden, als Summe der Integrale über die $p+2$ Randsimplexe $s_i^p$ $(i = 0, \ldots, p+1)$. Die Orientierungen dieser Simplexe sollen die induzierten sein (vgl. 1.2): nimmt man die Eckpunkte von

$$s_i^p(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{p+1})$$

in der hier angeschriebenen Reihenfolge, so ist das Vorzeichen der Orientierung also gleich $(-1)^i$. Damit wird $(s_i^p = s_i^p(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{p+1}))$

$$\int_{\partial s^{p+1}} A(x)\, d_1 x \ldots d_p x = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \int_{s_i^p} A(x)\, d_1 x \ldots d_p x. \tag{2.1}$$

Die Formel von Stokes transformiert dieses Randintegral in ein über $s^{p+1}$ erstrecktes $(p+1)$-faches Integral. Zur Herleitung soll das obige Randintegral näher analysiert werden; dies wird im folgenden in mehreren Schritten durchgeführt.

**2.2. Einfachste Spezialfälle.** Wie am Ende von § 1, betrachten wir zunächst die zwei einfachsten Arten von Operatoren $A(x)$.

1) Es sei erstens $A(x) \equiv A$ von $x$ unabhängig. Nach der Formel (1.1) wird dann für $i = 1, \ldots, p+1$

$$(-1)^i \int_{s_i^p} A\, d_1 x \ldots d_p x = (-1)^i A\, h_1 \ldots \hat{h}_i \ldots h_{p+1}$$

und für $i = 0$

$$\begin{aligned} \int_{s_0^p} A\, d_1 x \ldots d_p x &= A\,(x_2 - x_1) \ldots (x_{p+1} - x_1) \\ &= A\,(h_2 - h_1) \ldots (h_{p+1} - h_1) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} A\, h_1 \ldots \hat{h}_i \ldots h_{p+1}. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ergibt sich aus dem vorletzten, indem man diesen distributiv entwickelt und den alternierenden Charakter von $A$ berücksichtigt. Durch Summation der obigen Ausdrücke findet man gemäss (2.1)

$$\int_{\partial s^{p+1}} A\, d_1 x \ldots d_p x = 0. \tag{2.2}$$

2) Sei zweitens $A(x) \equiv A x$ linear in $x$. Nach der Formel (1.2) hat man für $i = 1, \ldots, p+1$

$$(-1)^i \int_{s_i^p} A\, x\, d_1 x \ldots d_p x = (-1)^i A\, \bar{x}_i\, h_1 \ldots \hat{h}_i \ldots h_{p+1}$$

und für $i = 0$

$$\begin{aligned} \int_{s_0^p} A\, x\, d_1 x \ldots d_p x &= A\, \bar{x}_0\, (h_2 - h_1) \ldots (h_{p+1} - h_1) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} A\, \bar{x}_0\, h_1 \ldots \hat{h}_i \ldots h_{p+1}, \end{aligned}$$

wobei $\bar{x}_i = (1/(p+1))(x_0 + \cdots + \hat{x}_i + \cdots + x_{p+1}) \quad (i=0, \ldots, p+1).$

Durch Addition erhält man hieraus

$$\int_{\partial s^{p+1}} A\,x\,d_1 x \ldots d_p x = \frac{1}{p+1} \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} A\,h_i h_1 \ldots \hat{h}_i \ldots h_{p+1}. \tag{2.3}$$

Der rechts stehende Ausdruck ist, wie man leicht bestätigt, eine alternierende Form der $p+1$ Vektoren $h_1, \ldots, h_{p+1}$.

**2.3. Approximationssatz.** Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, wo $A(x)$ beliebig, jedoch *stetig auf* $s^{p+1}$ und *differenzierbar im Punkte* $\bar{x} \in s^{p+1}$ ist. Man hat dann die Entwicklung[1] $(x \in s^{p+1})$

$$A(x)\,k_1 \ldots k_p = A(\bar{x})\,k_1 \ldots k_p + A'(\bar{x})(x-\bar{x})\,k_1 \ldots k_p + |x-\bar{x}|\,((x-\bar{x}))\,k_1 \ldots k_p, \tag{2.4}$$

wo die Norm $|((x-\bar{x}))|$ des alternierenden Operators $((x-\bar{x}))$ für $x-\bar{x} \to 0$ gegen Null konvergiert.

Zur Berechnung des Randintegrals (2.1) setze man den Ausdruck (2.4) ein. Es ergibt sich so für $i=0, \ldots, p+1$

$$\int_{s_i^p} A(x)\,d_1 x \ldots d_p x = \int_{s_i^p} A(\bar{x})\,d_1 x \ldots d_p x + \int_{s_i^p} A'(\bar{x})(x-\bar{x})\,d_1 x \ldots d_p x + r_i,$$

wo

$$r_i = \int_{s_i^p} |x-\bar{x}|\,((x-\bar{x}))\,d_1 x \ldots d_p x.$$

Wir bezeichnen die Länge des grössten Diameters von $s^{p+1}$ mit $\delta$. Dann gilt $|x-\bar{x}| \leqslant \delta$ für jedes $x \in s^{p+1}$. Ferner sei

$$\varepsilon(s^{p+1}) = \max |((x-\bar{x}))| \quad \text{für } x \in s^{p+1}. \tag{2.5}$$

Zur Abschätzung von $r_i$ für $i=1, \ldots, p+1$ setzt man auf $s_i^p$ unter Benutzung der orientierenden Grundform $D\,k_1 \ldots k_{p+1}$ des Raumes $R^{p+1}$

---

(1) Der $p$-lineare Operator $A(x)$ heisst differenzierbar im Punkte $\bar{x}$, falls ein $(p+1)$-linearer Operator $B(\bar{x})$ existiert, so dass

$$A(x)\,k_1 \ldots k_p = A(\bar{x})\,k_1 \ldots k_p + B(\bar{x})(x-\bar{x})\,k_1 \ldots k_p + |x-\bar{x}|\,((x-\bar{x})),$$

wo $((x-\bar{x}))$ ein Vektor im Raume $R_y^n$ ist, der gleichzeitig mit $x-\bar{x}$ verschwindet. Der Operator $B(\bar{x})$ wird Ableitungsoperator $A'(\bar{x})$ von $A(x)$ im Punkte $\bar{x}$ genannt. Aus dieser Definition folgt die Gültigkeit von (2.4) mit dem darin enthaltenen genaueren Ausdruck des Restgliedes.

$$((x-\bar{x}))\,d_1 x \ldots d_p x = \varepsilon_i(x)\,D\,d_1 x \ldots d_{i-1} x\, h_i\, d_i x \ldots d_p x \quad (h_i = x_i - x_0),$$

womit $\varepsilon_i(x) \in R_y^n$ auf diesem Seitensimplex eindeutig bestimmt ist. Insbesondere ergibt sich für die Vektoren $d_j x = h_j$ $(1 \leqslant j < i)$, $d_j x = h_{j+1}$ $(i \leqslant j \leqslant p)$

$$((x-\bar{x}))\,h_1 \ldots \hat{h}_i \ldots h_{p+1} = \varepsilon_i(x)\,D\,h_1 \ldots h_{p+1}.$$

Folglich ergibt sich nach den Definitionen von $\delta$ und $\varepsilon(s^{p+1})$, dass

$$|\varepsilon_i(x)|\,D\,h_1 \ldots h_{p+1} \leqslant |((x-\bar{x}))|\;|h_1| \ldots |\hat{h}_i| \ldots |h_{p+1}| \leqslant \delta^p\,\varepsilon(s^{p+1}).$$

Wegen der Additivität des Betrags des $p$-fach linearen alternierenden Differentials $D_i\,d_1 x \ldots d_p x \equiv D\,d_1 x \ldots d_{i-1} x\, h_i\, d_i x \ldots d_p x$ folgt hieraus

$$\begin{aligned}|r_i| &\leqslant \int_{s_i^p} |x-\bar{x}|\;|\varepsilon_i(x)|\;|D\,d_1 x \ldots d_{i-1} x\, h_i\, d_i x \ldots d_p x| \\ &\leqslant \frac{\delta^{p+1}\,\varepsilon(s^{p+1})}{D\,h_1 \ldots h_{p+1}} \int_{s_i^p} |D\,d_1 x \ldots d_{i-1} x\, h_i\, d_i x \ldots d_p x| \\ &= \delta^{p+1}\,\varepsilon(s^{p+1}).\end{aligned}$$

Um eine entsprechende Abschätzung von $r_0$ zu finden, schreibt man auf $s_0^p$

$$((x-\bar{x}))\,d_1 x \ldots d_p x = \varepsilon_0(x)\,D\,h_1\,d_1 x \ldots d_p x.$$

Dann ist $\varepsilon_0(x) \in R_y^n$ auf diesem Seitensimplex eindeutig bestimmt und es gilt für $d_i x = h_{i+1} - h_1$

$$((x-\bar{x}))\,(h_2-h_1) \ldots (h_{p+1}-h_1) = \varepsilon_0(x)\,D\,h_1\,(h_2-h_1) \ldots (h_{p+1}-h_1) = \varepsilon_0(x)\,D\,h_1 \ldots h_{p+1}.$$

Hieraus erhält man wegen der Additivität des Betrages des $p$-fach linearen alternierenden Differentials $D_0\,d_1 x \ldots d_p x \equiv D\,h_1\,d_1 x \ldots d_p x$ für $r_0$ genau dieselbe Abschätzung wie oben für $r_i$ $(i = 1, \ldots, p+1)$:

$$|r_i| \leqslant \delta^{p+1}\,\varepsilon(s^{p+1}) \quad (i = 0, \ldots, p+1).$$

Durch Summation nach $i$ ergibt sich jetzt aus (2.1)

$$\int_{\partial s^{p+1}} A(x)\,d_1 x \ldots d_p x = \int_{\partial s^{p+1}} A(\bar{x})\,d_1 x \ldots d_p x + \int_{\partial s^{p+1}} A'(\bar{x})\,(x-\bar{x})\,d_1 x \ldots d_p x + r, \tag{2.6}$$

mit

$$|r| \leqq (p+2)\,\delta^{p+1}\,\varepsilon(s^{p+1}), \tag{2.6'}$$

wo $\varepsilon(s^{p+1})$ eine Grösse ist, die beliebig klein wird, wenn man den Simplex $s^{p+1}$ (in einer festen Hyperebene $\bar{x} + R^{p+1}$) gegen den Punkt $\bar{x}$ konvergieren lässt.

Nach 2.2, Fall 1), verschwindet hier das erste Integral rechts, und dasselbe gilt für das Integral des konstanten Operators $A'(\bar{x})\,\bar{x}$. Der Beitrag des zweiten Integrals rechts wird somit gemäss 2.2, Fall 2),

$$\int_{\partial s^{p+1}} A'(\bar{x})\,x\,d_1x \ldots d_px = \frac{1}{p+1}\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}A'(\bar{x})\,h_i h_1 \ldots \hat{h}_i \ldots h_{p+1},$$

und man findet schliesslich

$$\int_{\partial s^{p+1}} A(x)\,d_1x \ldots d_px = \frac{1}{p+1}\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}A'(\bar{x})\,h_i h_1 \ldots \hat{h}_i \ldots h_{p+1} + r, \tag{2.7}$$

wo das Restglied $r$ der Ungleichung (2.6') genügt.

Das erste Hauptglied der obigen Formel definiert den *Rotor*, rot $A(x)$ von $A(x)$:

$$\operatorname{rot} A(x)\,h_1 \ldots h_{p+1} = \frac{1}{p+1}\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}A'(x)\,h_i h_1 \ldots \hat{h}_i \ldots h_{p+1} \tag{2.8}$$

als einen alternierenden Operator der Stufe $p+1$(¹). Damit haben wir die *Differentialformel von Stokes* gefunden:

$$\int_{\partial s^{p+1}} A(x)\,d_1x \ldots d_px = \operatorname{rot} A(\bar{x})\,h_1 \ldots h_{p+1} + r, \tag{2.9}$$

wo $\bar{x} \in s^{p+1}$ und $r$ der Ungleichung (2.6') genügt.

**2.4. Der Satz von Stokes.** Wir nehmen speziell an, der alternierende Operator $A(x)\,k_1 \ldots k_p$ sei *auf dem Simplex $s^{p+1}$ stetig differenzierbar*. Man zerlege $s^{p+1}$ in eine endliche Anzahl von positiv orientierten Teilsimplexen $s_j^{p+1}(x_0^j, \ldots, x_{p+1}^j)$, wähle auf jedem Simplex dieser Unterteilung $U$ einen beliebigen Punkt $\bar{x}_j$ und setze die Stokessche Differentialformel an. Die Summation nach $j$ ergibt $(h_i^j = x_i^j - x_0^j)$

$$\sum_U \int_{\partial s_j^{p+1}} A(x)\,d_1x \ldots d_px = \sum_U \operatorname{rot} A(\bar{x}_j)\,h_1^j \ldots h_{p+1}^j + r_U, \tag{2.10}$$

wo

$$|r_U| \leq (p+2)\sum_U \delta_j^{p+1}\,\varepsilon(s_j^{p+1}); \tag{2.10'}$$

hier bedeutet $\delta_j$ die Länge des grössten Diameters von $s_j^{p+1}$, während $\varepsilon(s_j^{p+1})$ gemäss (2.5) auf $s_j^{p+1}$ definiert ist.

---

(¹) rot $A(x)\,h_1 \ldots h_{p+1}$ ist offenbar der „alternierende Teil" der Form $A'(x)\,h_1 \ldots h_{p+1}$, die in den $p$ letzten Argumenten $h_2, \ldots, h_{p+1}$ bereits alternierend ist.

In der linksstehenden Summe in (2.10) werden sich die den innerhalb $s^{p+1}$ liegenden Randsimplexen entsprechenden Randintegrale paarweise vernichten, während die übrigen auf $\partial s^{p+1}$ liegenden Randsimplexe sich gemäss der Additivität der Form $A(x)\,d_1x \ldots d_px$ verstärken, so dass

$$\sum_U \int_{\partial s_j^{p+1}} A(x)\,d_1x \ldots d_px = \int_{\partial s^{p+1}} A(x)\,d_1x \ldots d_px.$$

Bei unbeschränkter Verfeinerung der Zerlegung $U$ konvergiert das erste Glied rechts in (2.10):

$$\sum_U \operatorname{rot} A(\bar{x}_j)\,h_1^j \ldots h_{p+1}^j \to \int_{s^{p+1}} \operatorname{rot} A(x)\,d_1x \ldots d_{p+1}x.$$

Nehmen wir an, dass das Restglied hierbei verschwindet:

$$r_U \to 0, \tag{2.11}$$

so erhält man schliesslich

$$\int_{\partial s^{p+1}} A(x)\,d_1x \ldots d_px = \int_{s^{p+1}} \operatorname{rot} A(x)\,d_1x \ldots d_{p+1}x. \tag{2.12}$$

Das ist die *Transformationsformel von Stokes.*

**2.5.** Es erübrigt noch zu untersuchen, ob die hier vorausgesetzte Beziehung (2.11) bei unbeschränkter Verfeinerung der Zerlegung $U$ gültig ist. Hierzu bemerkt man zunächst, dass die nach (2.5) definierte Grösse $\varepsilon(s_j^{p+1})$, wegen der Stetigkeit von $A'(x)$ auf $s^{p+1}$, bei unbeschränkter Verfeinerung von $U$ gleichmässig verschwindet(¹):

$$\varepsilon_U = \max_U \varepsilon(s_j^{p+1}) \to 0.$$

Wir schreiben nun (2.10′) in der Form

$$|r_U| \leqslant (p+2)\,\varepsilon_U \sum_U \alpha_j D\,h_1^j \ldots h_{p+1}^j, \tag{2.10''}$$

wo

$$\alpha_j = \frac{\delta_j^{p+1}}{D\,h_1^j \ldots h_{p+1}^j}$$

das Verhältnis des Volumens des um $s_j^{p+1}$ umgeschriebenen Kubus zu dem Volumen von $s_j^{p+1}$ angibt. Wir benennen $\alpha_j$ den Regularitätsindex des Simplexes $s_j^{p+1}$. Die

(¹) Dies ergibt sich in bekannter Weise z. B. mit Hilfe des Mittelwertsatzes unter Beachtung der Stetigkeit der Ableitung $A'(x)$.

obigen Unterteilungen $U$ heissen *regulär*, wenn sämtliche vorkommenden Regularitätsindizes $\alpha_j$ gleichmässig beschränkt sind:

$$\alpha_j \leqslant \alpha < \infty.$$

Für eine solche reguläre Verfeinerung von $U$ hat man nach (2.10″)

$$|r_U| \leqslant (p+2)\,\varepsilon_U\,\alpha \sum_U D\,h_1^j \dots h_{p+1}^j = (p+2)\,\varepsilon_U\,\alpha\,D\,h_1 \dots h_{p+1},$$

und es ergibt sich also tatsächlich die erwünschte Grenzbeziehung (2.11). Da solche reguläre Unterteilungen $U$ existieren[1], so ist hiermit der Stokessche Satz vollständig bewiesen.

**2.6. Erweiterung der Definition des Operators** rot $A$. Bei der obigen Herleitung der Formel von Stokes haben wir den Operator rot $A$ durch den Ausdruck (2.8) definiert. Aus der Formel (2.9) ergibt sich für rot $A$ ein zweiter Ausdruck. Dividiert man diese Formel mit $D\,h_1 \dots h_{p+1}$, so ergibt sich

$$\frac{1}{D\,h_1 \dots h_{p+1}} \int_{\partial s^{p+1}} A(x)\,d_1 x \dots d_p x = \varrho(\bar{x}) + c,$$

wo $\varrho(\bar{x})$ die Dichte von rot $A(\bar{x})$ ist,

$$\text{rot}\,A(\bar{x})\,h_1 \dots h_{p+1} = \varrho(\bar{x})\,D\,h_1 \dots h_{p+1}, \tag{2.13}$$

und

$$|c| = \frac{|r|}{D\,h_1 \dots h_{p+1}} \leqslant (p+2)\,\alpha(s^{p+1})\,\varepsilon(s^{p+1});$$

$\alpha(s^{p+1})$ bezeichnet hierbei den Regularitätsindex

$$\alpha = \frac{\delta^{p+1}}{D\,h_1 \dots h_{p+1}}$$

von $s^{p+1}$.

Lässt man nun $s^{p+1}$, *in der festen Hyperebene* $\bar{x} + R^{p+1}$, gegen den Punkt $\bar{x}$ *regulär* konvergieren (der Index $\alpha$ bleibt beschränkt), so folgt, dass die Dichte $\varrho(\bar{x})$ von rot $A(\bar{x})$ gleich

$$\varrho(\bar{x}) = \lim_{s^{p+1} \to \bar{x}} \left( \frac{1}{D\,h_1 \dots h_{p+1}} \int_{\partial s^{p+1}} A(x)\,d_1 x \dots d_p x \right) \tag{2.13'}$$

ist.

[1] Für diese Frage verweisen wir auf die Arbeit von Toivo Nieminen: *On decompositions of simplexes and convex polyhedra*, Soc. Scient. Fennica, Comment. Phys.-Math. XX 5, 1957, 24 S.

Dieser Satz besteht also, sobald der Operator $A(x)$ *in einer Umgebung* $K \subset \bar{x} + R^{p+1}$ *des Punktes* $\bar{x}$ *stetig* und *im Punkte* $x = \bar{x}$ *differenzierbar* ist.

Wendet man (2.13') und (2.13) auf einen Simplex $s_\lambda^{p+1} = s_\lambda^{p+1}(x_0, x_1, \ldots, x_{p+1})$ mit $x_i = x_0 + \lambda h_i$ $(i = 1, \ldots, p+1)$ und $\bar{x} = x_0$ an, so ergibt sich für $\lambda \to 0$ speziell

$$\operatorname{rot} A(x_0) h_1 \ldots h_{p+1} = \lim_{\lambda \to 0} \left( \frac{1}{\lambda^{p+1}} \int\limits_{\partial s_\lambda^{p+1}} A(x) d_1 x \ldots d_p x \right). \tag{2.13''}$$

Umgekehrt kann man den Operator $\operatorname{rot} A(x)$ für $x = \bar{x}$ durch die Beziehung (2.13) *definieren, vorausgesetzt, dass der Grenzwert* (2.13') *existiert.* Dies kann tatsächlich zutreffen, auch in solchen Fällen, wo der Operator für $x = \bar{x}$ nicht differenzierbar (sogar unstetig) ist, und die Definition (2.13') bzw. (2.13) ist also sinnvoll in allgemeineren Fällen als die Erklärung (2.8).

Hierzu sei noch folgendes hinzugefügt:

1) Falls $\operatorname{rot} A(x)$ gemäss der ursprünglichen Definition (2.8) erklärt ist und *auf* $s^{p+1}$ *stetig* ist, so folgt aus dem Stokesschen Satz:

$$\frac{1}{D h_1 \ldots h_{p+1}} \int\limits_{\partial s^{p+1}} A(x) d_1 x \ldots d_p x = \frac{1}{D h_1 \ldots h_{p+1}} \int\limits_{s^{p+1}} \operatorname{rot} A(x) d_1 x \ldots d_{p+1} x. \tag{2.14}$$

Schreibt man hier

$$\operatorname{rot} A(x) d_1 x \ldots d_{p+1} x = \varrho(x) D d_1 x \ldots d_{p+1} x,$$

so ist die Dichte $\varrho(x)$ stetig, also für ein gegebenes $\bar{x} \in s^{p+1}$:

$$\operatorname{rot} A(x) d_1 x \ldots d_{p+1} x = (\varrho(\bar{x}) + \varepsilon(x - \bar{x})) D d_1 x \ldots d_{p+1} x,$$

wo $\varepsilon(x - \bar{x}) \to 0$ für $x - \bar{x} \to 0$, und die rechte Seite von (2.14) wird gleich $\varrho(\bar{x}) + (\delta)$, $(\delta) \to 0$ für $\delta \to 0$. Es existiert also der Grenzwert (2.13') für $s^{p+1} \to \bar{x}$ $(s^{p+1} \subset \bar{x} + R^{p+1})$, in diesem Fall auch ohne die Bedingung der gleichmässigen Regularität von $s^{p+1}$ während des Grenzüberganges.

2) Für gewisse Fragen ist folgende allgemeine Fassung der Definition (2.13) des Rotors nützlich. Es sei der Operator $A(x)$ *in einer Umgebung* $K \subset \bar{x} + R^{p+1}$ *des Punktes* $\bar{x}$ *stetig differenzierbar.* Wir betrachten ein sternartiges Polyeder $\pi^{p+1}$ um den Punkt $\bar{x}$ (1). Zerlegt man nun $\pi^{p+1}$ sternartig, mit $\bar{x}$ als Zentrum, in endlich viele Simplexe, so kann man den Stokesschen Satz für diese Teilsimplexe ansetzen, und die Addition ergibt:

---

(1) D. h. für $x \in \pi^{p+1}$ liegt die ganze Strecke $\bar{x}\,x$ in $\pi^{p+1}$.

$$\int_{\partial \pi^{p+1}} A(x)\, d_1 x \ldots d_p x = \int_{\pi^{p+1}} \operatorname{rot} A(x)\, d_1 x \ldots d_{p+1} x.$$

Ist das „Volumen" von $\pi^{p+1}$ (relativ zu der gegebenen Grundform $D\, k_1 \ldots k_{p+1}$ $(k_i \in R^{p+1})$) gleich $v$, so ergibt sich als Erweiterung der Formel (2.13′)

$$\varrho(\bar{x}) = \lim \left( \frac{1}{v} \int_{\partial \pi^{p+1}} A(x)\, d_1 x \ldots d_p x \right), \tag{2.15}$$

wo $\pi^{p+1}$ (in der festen Hyperebene $\bar{x} + R^{p+1}$) gegen den Punkt $\bar{x}$ konvergiert.

Falls aber der Operator $A(x)$ *in der Umgebung $K$ von $\bar{x}$ stetig* ist, seine *Differenzierbarkeit aber nur im Punkte* $x = \bar{x}$ vorausgesetzt wird, so ist die Grenzrelation (2.15) nur bei einem regulären Prozess $\pi^{p+1} \to \bar{x}$ garantiert: das Verhältnis $\delta^{p+1}/v$, wo $\delta$ die Länge des grössten Diameters von $\pi^{p+1}$ ist, und die Anzahl der Seitenflächen von $\pi^{p+1}$ sollen gleichmässig beschränkt verbleiben.

## § 3. Integration der Gleichung rot $Y = A$

**3.1. Problemstellung.** Es sei $G_x^m$ ein (offenes) sternförmiges Gebiet um den Punkt $O$ des euklidischen Raumes $R_x^m$: mit $x$ liegt also die ganze Strecke $Ox$ in $G_x^m$; wir wählen der Einfachheit halber $O$ als den Nullpunkt $x = 0$. Für $x \in G_x^m$ sei ein alternierendes Differential $(p \leqslant m)$

$$y = A(x)\, d_1 x \ldots d_p x \in R_y^n$$

gegeben. Wir nehmen im folgenden an:

1°. *Der Operator $A(x)$ ist in $G_x^m$ differenzierbar.*

Damit ist der Operator rot $A$ gemäss

$$\operatorname{rot} A(x)\, d_1 x \ldots d_{p+1} x = \frac{1}{p+1} \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} A'(x)\, d_i x\, d_1 x \ldots \hat{d}_i x \ldots d_{p+1} x$$

definiert. Es handelt sich um die Bestimmung sämtlicher (stetig) differenzierbaren alternierenden Operatoren $Y(x)$ der Stufe $p-1$, so dass

$$\operatorname{rot} Y(x) = A(x) \tag{3.1}$$

für $x \in G_x^m$ gilt.

Aus der Definition des Rotors folgt sofort, dass allgemein rot rot $=0$ ist. Notwendig für die Lösbarkeit der Gleichung (3.1) ist also, dass

$$\operatorname{rot} A(x)=0. \tag{3.2}$$

**3.2. Ausdruck des Integrals** $Y(x)$. Angenommen, es sei $Y(x)$ eine Lösung des Problems, kann man weiter folgendes schliessen. Wir fixieren in $G_x^m$ einen beliebigen Punkt $x_0 \neq 0$ und nehmen im Raume $R_x^m$ $p-1$ beliebige Vektoren $h_1, \ldots, h_{p-1}$, die zusammen mit $x_0$ ein linear unabhängiges System bilden. Die Punkte

$$0,\ x_0,\ x_1=x_0+\lambda h_1,\ \ldots,\ x_{p-1}=x_0+\lambda h_{p-1}$$

sind dann Eckpunkte eines Simplexes $s^p(0, x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$, der für genügend kleines $\lambda>0$ im Gebiete $G_x^m$ liegt.

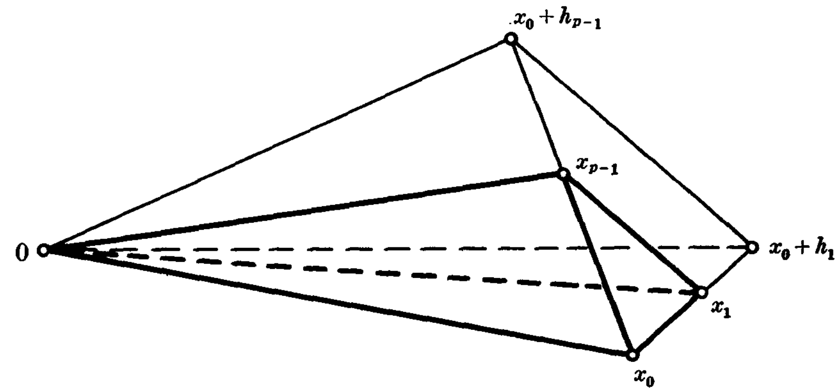


Fig. 1.

Für ein solches $\lambda$ setzen wir die Stokessche Formel an:

$$\int_{\partial s^p} Y(x)\, d_1 x \ldots d_{p-1} x=\int_{s^p} \operatorname{rot} Y(x)\, d_1 x \ldots d_p x=\int_{s^p} A(x)\, d_1 x \ldots d_p x. \tag{3.3}$$

Es gilt hier den Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0$ vorzunehmen.

Im Integral rechts schreibt man gemäss (1.3)

$$\int_{s^p} A(x)\, d_1 x \ldots d_p x=\int_{s^{p-1}} A_0(x)\, d_1 x \ldots d_{p-1} x, \tag{3.4}$$

wo $A_0(x)$ der alternierende Operator

$$A_0(x)=\int_0^1 d(\tau^p)\, A(\tau x)\, x=\varphi A(x) \tag{3.4'}$$

der Stufe $p-1$ ist, und $s^{p-1}=s^{p-1}(x_0, \ldots, x_{p-1})$. Wegen der Stetigkeit von $A_0(x)$ im Punkte $x=x_0$, wird aber

$$\begin{aligned}\int_{s^{p-1}} A_0(x)\, d_1 x \ldots d_{p-1} x &= \int_{s^{p-1}} A_0(x_0)\, d_1 x \ldots d_{p-1} x + \int_{s^{p-1}} (A_0(x)-A_0(x_0))\, d_1 x \ldots d_{p-1} x \\ &= \lambda^{p-1} A_0(x_0)\, h_1 \ldots h_{p-1} + \lambda^{p-1}(\lambda),\end{aligned} \tag{3.5}$$

wo $(\lambda)\to 0$ für $\lambda\to 0$.

Das Randintegral in (3.3) ist nach Definition gleich

$$\int_{\partial s^p} Y = \int_{s^{p-1}} Y - \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i-1} \int_{s_i^{p-1}} Y,$$

wo $s_i^{p-1}=s_i^{p-1}(0, x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{p-1})$. Für das erste Integral rechts hat man sofort

$$\int_{s^{p-1}} Y(x)\, d_1 x \ldots d_{p-1} x = \lambda^{p-1} Y(x_0)\, h_1 \ldots h_{p-1} + \lambda^{p-1}(\lambda).$$

Die übrigen Randintegrale transformiert man wieder gemäss (1.3):

$$\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i-1} \int_{s_i^{p-1}} Y = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i-1} \int_{s_i^{p-2}} Y_0(x)\, d_1 x \ldots d_{p-2} x,$$

wo $Y_0(x)$ den alternierenden Operator

$$Y_0(x) = \int_0^1 d(\tau^{p-1})\, Y(\tau x)\, x = \varphi\, Y(x) \tag{3.6}$$

der Stufe $p-2$ bezeichnet. Die Summe rechts ist aber gleich(¹)

$$\int_{\partial s^{p-1}} Y_0 = \int_{s^{p-1}} \operatorname{rot} Y_0(x)\, d_1 x \ldots d_{p-1} x,$$

woraus schliesslich die Entwicklung

$$\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i-1} \int_{s_i^{p-1}} Y = \int_{s^{p-1}} \operatorname{rot} Y_0(x)\, d_1 x \ldots d_{p-1} x = \lambda^{p-1} \operatorname{rot} Y_0(x_0)\, h_1 \ldots h_{p-1} + \lambda^{p-1}(\lambda) \tag{3.7}$$

folgt.

---

(¹) Da $Y(x)$ stetig differenzierbar ist, so gilt dasselbe für $Y_0(x)$, so dass die Anwendung der Stokesschen Formel legitim ist.

Aus den Formeln (3.3) bis (3.7) ergibt sich nach Division mit $\lambda^{p-1}$, dass die Gleichheit

$$Y(x)\,h_1 \ldots h_{p-1} = \operatorname{rot}\, Y_0(x)\,h_1 \ldots h_{p-1} + A_0(x)\,h_1 \ldots h_{p-1} \tag{3.8}$$

für $x = x_0$ gilt, bis auf ein additives Glied $(\lambda)$. Da aber die oben stehenden Ausdrücke von $\lambda$ unabhängig sind, so folgt durch den Grenzübergang $\lambda \to 0$, dass die obige Gleichung (3.8) exakt gilt, und zwar für jedes $x \in G_x^m$. Hier sind alle drei Glieder alternierende Differentiale; $A_0(x) = \varphi A(x)$ ist durch $A(x)$ gemäss (3.4′) als ein alternierender Operator der Stufe $p-1$ bestimmt, und analog ist $Y_0(x) = \varphi Y(x)$ gemäss (3.6) als ein alternierender Operator der Stufe $p-2$ durch die hypothetische Lösung $Y(x)$ definiert.

Zusammenfassend haben wir gefunden:

Falls das Problem lösbar ist, so entspricht jeder Lösung $Y(x)$ ein wohlbestimmter alternierender Operator $Y_0(x)$ der Stufe $p-2$, so dass die Gleichung (3.8) gilt. Da rot $A_0$ existiert, so folgt weiter aus (3.8), dass auch der Operator rot rot $Y_0$ existiert und folglich gleich Null ist. Es ist also wegen rot $Y = A$ notwendig

$$\operatorname{rot} A_0 = A, \tag{3.9}$$

und $A_0$ ist eine partikuläre Lösung der Gleichung (3.1).

Diese Analyse führt zu der vollständigen Lösung des Problems. Der Operator $A_0(x)$ ist ja durch $A(x)$ gemäss (3.4′) als ein alternierender Operator der Stufe $p-1$ gegeben. Die Gültigkeit von (3.9) kann daher direkt bestätigt werden, und es lässt sich auch, was in der folgenden Nummer geschehen wird, zeigen, dass $A_0$ unter der Annahme der Integrabilitätsbedingung (3.2) tatsächlich die Gleichung (3.9) befriedigt.

Dies vorausgeschickt enthält die Formel (3.8) die *allgemeine Lösung* von rot $Y = A$. Denn wenn $Y$ diese Gleichung löst, so existiert ein Operator $Y_0$, so dass (3.8) gilt; und umgekehrt: wenn $Y_0(x)$ ein beliebiger für $x \in G_x^m$ definierter alternierender Operator der Stufe $p-2$ ist, wofür rot rot $Y_0$ sinnvoll (und damit $=0$) ist, so ist der Ausdruck (3.8) eine Lösung.

Betreffs der Bedeutung des arbiträren Operators $Y_0$ für das Problem sei noch folgendes bemerkt:

Aus der Definition (3.4′)* folgt sofort, dass das Differential $A_0(x)\,d_1x \ldots d_{p-1}x$ verschwindet, sobald die $p$ Vektoren $x, d_1x, \ldots, d_{p-1}x$ *linear abhängig* sind. Es spielt also $Y_0$ die Rolle eines „Anfangsoperators": wählt man die Differentiale $d_1x, \ldots, d_{p-1}x$ mit dem Ortsvektor $x$ linear abhängig, so ist $Y(x)\,d_1x \ldots d_{p-1}x = \operatorname{rot}\, Y_0(x)\,d_1x \ldots d_{p-1}x$.

Im Falle $p = 1$ spricht dieses Resultat aus, dass die Gleichung $dY(x) = A(x)\,dx$ bis auf eine additive Konstante $C = Y(0)$ gleich dem bestimmten Integral

$$A_0(x) = \int_0^x A(x)\,dx = \int_0^1 d\tau\, A(\tau x)\, x$$

ist, sofern

$$\operatorname{rot} A(x)\, h_1 h_2 = \tfrac{1}{2}\,(A'(x)\, h_1 h_2 - A'(x)\, h_2 h_1) = 0.$$

Das obige Resultat enthält das sog. *Lemma von Poincaré.*

**3.3. Berechnung von** rot $A_0$. Um (3.9) mit Hilfe des Stokesschen Satzes zu beweisen, setzen wir jetzt voraus:

2°. *Der Operator $A'(x)$ ist in $G_x^m$ stetig.*

Wir konstruieren für $0 \neq x_0 \in G_x^m$ einen $(p+1)$-Simplex $(0, x_0, x_0+h_1, \ldots, x_0+h_p)$, wo $h_1, \ldots, h_p$ beliebige, mit $x_0$ linear unabhängige Vektoren des Raumes $R_x^m$ sind: Der Simplex $s^{p+1}(0, x_0, x_1, \ldots, x_p)$, wo $x_i = x_0 + \lambda h_i$ $(i = 1, \ldots, p)$, liegt dann für genügend kleines $\lambda > 0$ in $G_x^m$. Wir setzen nun die Stokessche Formel für $A(x)$ an und finden, da nach Voraussetzung rot $A = 0$,

$$\int_{\partial s^{p+1}} A(x)\, d_1 x \ldots d_p x = 0. \tag{3.10}$$

Dieses Ergebnis besteht auch, falls $h_1, \ldots, h_p$ mit $x_0$ linear abhängig sind (und der Simplex $s^{p+1}$ also ausartet), als Folgerung der Additivität des alternierenden Differentials $A(x)\, d_1 x \ldots d_p x$ (¹).

Die Randsimplexe von $s^{p+1}$ sind $s^p(x_0, \ldots, x_p)$ und $s_i^p(0, x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p)$ $(i = 0, \ldots, p)$, und die Gleichung (3.10) ergibt

$$\int_{s^p} A = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i-1} \int_{s_i^p} A.$$

Hier ist aber, gemäss (1.3),

$$\int_{s_i^p} A = \int_{s_i^{p-1}} A_0(x)\, d_1 x \ldots d_{p-1} x \quad (i = 0, \ldots, p),$$

wo $s_i^{p-1} = s_i^{p-1}(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_p)$, und die Summation nach $i$ gibt

$$\int_{s^p} A = \int_{\partial s^p} A_0.$$

(¹) Daraus ergibt sich die Gültigkeit unserer Überlegungen auch im Fall $p = m$.

Das Integral links hat die Entwicklung

$$\int_{s^p} A = \lambda^p A(x_0) h_1 \ldots h_p + \lambda^p(\lambda),$$

und es ergibt sich also, dass der Grenzwert

$$\lim_{\lambda \to 0} \left( \frac{1}{\lambda^p} \int_{\partial s^p} A_0(x) d_1 x \ldots d_{p-1} x \right)$$

existiert und gleich $A(x_0) h_1 \ldots h_p$ ist. Das bedeutet aber nach (2.13″), dass rot $A_0(x_0) = A(x_0)$, und da $x_0$ ein beliebiger Punkt in $G_x^m$ war(¹), so ist die Behauptung (3.9) bewiesen.

**3.4. Zusatz.** Für gewisse Fragen der Theorie der Tensorfelder auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist nicht nur das obige Resultat (die Integration der Gleichung rot $Y = A$) wichtig, sondern auch eine allgemeine Formel, welche den Rotor von $A_0 = \varphi A$ mit Hilfe von $\varphi$ und $A$ ausdrückt, auch wenn rot $A$ nicht verschwindet. In diesem Fall ist der Wert des Randintegrals (3.10) nicht mehr Null, sondern, falls wir den Operator rot $A(x)$ als stetig voraussetzen, nach dem Stokesschen Satz gleich

$$\int_{s^{p+1}} \text{rot } A(x) d_1 x \ldots d_{p+1} x.$$

Führt man hier die Transformation (1.3) aus, so ergibt sich als Grenzwert dieses Integrals für $\lambda \to 0$

$$(\varphi \text{ rot } A(x)) h_1 \ldots h_p.$$

Verbindet man dies mit der Berechnung 3.3, so erhält man zwischen den alternierenden Tensoren $A$, rot $(\varphi A)$ und $\varphi$ rot $A$ der Stufe $p$ die Relation

$$\text{rot } (\varphi A) = A + \varphi \text{ rot } A.$$

Speziell ergibt sich hieraus, wenn rot $A = 0$, wieder die frühere Gleichung rot $(\varphi A) = A$.

**3.5. Verschärfung des Poincaréschen Lemmas.** Die Integration eines wirbelfreien Tensorfeldes $A(x)$ (rot $A(x) = 0$) lässt sich auch ohne die Voraussetzung 2° (Annahme der Stetigkeit von $A'(x)$ und damit auch von rot $A(x)$) durchführen: es genügt lediglich die *Existenz* von rot $A(x)$ anzunehmen.

Zu diesem Zweck brauchen wir den folgenden

(¹) Wir haben freilich $x_0 \neq 0$ angenommen. Für $x_0 = 0$ ist aber rot $A_0 = A$ eine *unmittelbare* Folge aus der Definition (3.4′) von $A_0$.

Mittelwertsatz. Es sei das alternierende Differential $y = A(x)\, d_1 x \dots d_p x$ für $x \in s^{p+1}(0, x_0, \dots, x_p)$ stetig, wobei die Differentiale $d_i x$ in dem von den Kantenvektoren $x_0, \dots, x_p$ aufgespannten linearen Raum $R^{p+1}$ zu nehmen sind. Falls der Operator rot $A(x)$ gemäss der Definition (2.13′) bzw. (2.13) für $x \in s^{p+1}$ existiert, so gibt es einen Punkt $\bar{x} \in s^{p+1}$, wofür

$$\Big| \int_{\partial s^{p+1}} A(x)\, d_1 x \dots d_p x \Big| \leqslant |\operatorname{rot} A(\bar{x})\, x_0 \dots x_p|. \tag{3.11}$$

Mittels dieses Satzes ergibt sich die in Aussicht gestellte Verschärfung des Poincaréschen Satzes sofort. Nimmt man nämlich an, dass der gemäss (2.13′) definierte Operator (1) rot $A(x)$ für $x \in s^{p+1}$ verschwinde, so zeigt die obige Ungleichung, dass auch das Randintegral

$$\int_{\partial s^{p+1}} A(x)\, d_1 x \dots d_p x = 0. \tag{3.12}$$

Diese Beziehung war für den Beweis von (3.9) entscheidend; sie wurde in 3.3 mittels des Stokesschen Satzes bewiesen, und hierzu hatten wir die Stetigkeit von $A'$ nötig. Ist man aber einmal im Besitz der Gleichung (3.12), so kann man den Rest des früheren Beweisganges ohne weiteres wiederholen, und man gelangt so zum Ziel unter den Voraussetzungen:

1) *$A(x)$ ist im Gebiet $G_x^m$ stetig;*
2) *Der Grenzwert* (2.13′) *(die „Rotordichte“ $\varrho(x)$) existiert und ist gleich Null.*

**3.6. Beweis des Mittelwertsatzes.** Falls $A(x)$ stetig differenzierbar ist, so ist rot $A(x)$ stetig, und der Satz eine triviale Folgerung des Stokesschen Satzes. Unter den obigen schwächeren Bedingungen erfolgt der Beweis durch eine Verallgemeinerung einer bekannten Idee, welche von Goursat angewandt wurde um den Cauchyschen Integralsatz zu begründen, ohne die Stetigkeit des Integranden vorauszusetzen. Wir betrachten hierzu ein konvexes Polyeder $\pi \subset s^{p+1}$, mit dem Randintegral

$$I(\pi) = \int_{\partial \pi} A(x)\, d_1 x \dots d_p x$$

und dem „Volumen“ $V(\pi)$, welches in bezug auf eine gegebene orientierende Grundform $D h_0 \dots h_p$ $(h_i \in R^{p+1})$ berechnet wird. Es sei $U$ eine Unterteilung von $\pi$ in endlich viele konvexe Polyeder $\pi_U$, welche mit $s^{p+1}$ gleichorientiert sind. Es wird dann

$$\frac{|I(\pi)|}{V(\pi)} = \frac{1}{V(\pi)} \Big|\sum_U I(\pi_U)\Big| \leqslant \frac{1}{V(\pi)} \sum_U |I(\pi_U)| = \frac{1}{V(\pi)} \sum_U \left( V(\pi_U) \frac{|I(\pi_U)|}{V(\pi_U)} \right)$$

(1) Dieser Operator existiert nach (2.13) sicher dann, wenn die Ableitung $A'(x)$ existiert.

und, falls

$$M_U = \max_U \frac{|I(\pi_U)|}{V(\pi_U)}$$

gesetzt wird,

$$\frac{|I(\pi)|}{V(\pi)} \leqslant \left(\frac{1}{V(\pi)} \sum_U V(\pi_U)\right) M_U = M_U. \tag{3.13}$$

Sei nun $U_1, U_2, \ldots$ eine unendliche Folge von Unterteilungen von $\pi_0 = s^{p+1}$, mit den Eigenschaften(¹):

a) $U_{q+1}$ ist eine Unterteilung von $U_q$ $(q=1, 2, \ldots)$;

b) $U_q$ verfeinert sich unbeschränkt für $q \to \infty$;

c) Die Seitenanzahlen und die Regularitätsindizes sämtlicher vorkommenden Teilpolyeder $\pi$ sind gleichmässig beschränkt.

Es bezeichne $\pi_1$ ein Polyeder der Zerlegung $U_1$, wofür das Maximum $M_{U_1} = M_1$ erreicht wird, $\pi_2 \subset \pi_1$ ein Polyeder der Zerlegung $U_2$, welches dem Maximum $M_{U_2} = M_2$ entspricht (wobei man sich zu den in $\pi_1$ liegenden Teilpolyedern $\pi_{U_2}$ hält), und so fort. Nach der Ungleichung (3.13) ergibt sich dann:

$$\frac{|I(s^{p+1})|}{V(s^{p+1})} \leqslant M_1 \leqslant M_2 \leqslant \cdots \leqslant M_q \leqslant \cdots. \tag{3.14}$$

Da die Polyeder $\pi_1, \pi_2, \ldots$ ineinander geschachtelt sind, so gibt es, wegen der Bedingung b), einen wohlbestimmten Punkt $\bar{x} \in \pi_q$ $(q=1, 2, \ldots)$, so dass $\pi_q \to \bar{x}$ für $q \to \infty$. Mit Rücksicht auf die Bedingung c) und auf die Definition (2.15) schliesst man nun, dass

$$\lim_{q \to \infty} M_q = |\varrho(\bar{x})|,$$

wo $\varrho(\bar{x})$ die nach Voraussetzung 2) existierende Dichte des Rotors von $A$ im Punkte $x = \bar{x}$ bezeichnet, und es folgt aus (3.14) für $q \to \infty$:

$$\left| \int_{\partial s^{p+1}} A(x)\, d_1 x \ldots d_p x \right| = |I(s^{p+1})| \leqslant D x_0 \ldots x_p |\varrho(\bar{x})| = |\operatorname{rot} A(\bar{x})\, x_0 \ldots x_p|,$$

womit die Behauptung des Mittelwertsatzes bewiesen ist.

Man bemerke, dass dieser Satz die anschaulich fast evidente und durch den obigen Beweis streng nachweisbare allgemeine Tatsache ausspricht: der Betrag der mittleren Dichte einer additiven Mengenfunktion auf einer gegebenen Menge ist höchstens gleich der oberen Grenze der Beträge der „oberen" Dichte, genommen in den Punkten jener Menge.

(¹) Dass solche Folgen $U_1, U_2, \ldots$ existieren, ergibt sich aus der auf S. 161 zitierten Untersuchung von NIEMINEN.