SUR L'ÉLÉMENT SIMPLE DE LA DÉCOMPOSITION DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE TROISIÈME ESPÈCE.

PAR

PAUL APPELL

à Paris.

I. Dans plusieurs mémoires insérés aux Annales de l'Ecole normale supérieure[1] (Troisième série, T. I, II, III et V, 1884, 5, 6 et 8), j'ai introduit une fonction de deux variables indépendantes u et z,

$$(1) \qquad \chi_m(u, z) = \frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi z i}{K}} q^{mn(n-1)} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2K}(u - z - 2niK'),$$

(m entier positif) où les deux périodes ω et ω' sont désignées par $2K$ et $2iK'$, avec

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}, \quad |q| < 1.$$

Cette fonction de u admet le pôle simple $u = z$ avec le résidu $+1$, et les pôles homologues dans les autres parallélogrammes des périodes, avec les résidus résultant des relations fonctionnelles suivantes. Cette même fonction considérée comme fonction de z admet le pôle simple $z = u$ avec le résidu -1 et les pôles homologues avec les résidus résultant des mêmes relations. La fonction $\chi_m(u, z)$ admet la période $2K$ par rapport à chaque variable. Elle vérifie, en outre, les deux relations

[1] Voyez également Comptes Rendus, 17 décembre 1883, t. 97, p. 1419.

$$(2)\qquad \begin{cases} \chi_m(u, z + 2iK') = e^{-\frac{m\pi zi}{K}}\chi_m(u, z), \\ \chi_m(u + 2iK', z) = e^{\frac{m\pi ui}{K}}\chi_m(u, z) \\ \qquad -\frac{\pi i}{2K}\left(1 + e^{\frac{m\pi ui}{K}}\right)g_0^{(m)}(z) - \frac{\pi i}{K}\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} e^{\frac{(m-\nu)\pi ui}{K}} g_\nu^{(m)}(z) \end{cases}$$

où $g_\nu^{(m)}(z)$ désigne la fonction entière

$$(3)\qquad g_\nu^{(m)}(z) = e^{\frac{\nu\pi zi}{K}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi zi}{K}} q^{mn(n-1)+2n\nu},$$

$$(\nu = 0, 1, 2 \ldots, m-1).$$

Cela posé, on suit qu'il existe deux sortes de fonctions doublement périodiques de troisième espèce, au sens d'Hermite, les unes (A) ayant plus de pôles que de zéros, les autres (B) ayant plus de zéros que de pôles, dans un parallélogramme des périodes.

(A) Soit $F(u)$ une fonction de troisième espèce, ayant m pôles de plus que de zéros: on peut toujours ramener cette fonction à vérifier deux relations de la forme

$$(4)\qquad F(u + 2K) = F(u),\quad F(u + 2iK') = e^{\frac{m\pi ui}{K}}F(u).$$

Supposons que, dans un parallélogramme des périodes, elle admette des pôles du premier ordre $a, b, \ldots l$ avec les résidus correspondants $A, B, \ldots L$; on peut écrire alors la formule de décomposition en éléments simples

$$(4')\qquad F(u) = A\chi_m(u, a) + B\chi_m(u, b) + \cdots + L\chi_m(u, l);$$

les résidus ne sont pas indépendants des pôles; ils vérifient les m relations

$$(4'')\qquad Ag_\nu^{(m)}(a) + Bg_\nu^{(m)}(b) + \cdots + Lg_\nu^{(m)}(l) = 0$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots m-1).$$

(B) Soit $F(z)$ une fonction de troisième espèce ayant, dans un parallélogramme, m zéros de plus que de pôles; appelons $a, b, \ldots l$ les pôles, $A, B, \ldots L$ les résidus. On amènera cette fonction à vérifier les relations

$$(5)\qquad F(z + 2K) = F(z),\quad F(z + 2iK') = e^{-\frac{m\pi zi}{K}}F(z)$$

et on aura

$$(5') \qquad F(z) = -A\chi_m(a, z) - B\chi_m(b, z) - \cdots - L\chi_m(l, z) + G(z),$$

$G(z)$ désignant une fonction entière vérifiant les relations (5), c'est-à-dire une fonction de la forme

$$(5'') \qquad G(z) = \lambda_0 g_0^{(m)}(z) + \lambda_1 g_1^{(m)}(z) + \cdots + \lambda_{m-1} g_{m-1}^{(m)}(z),$$

où les λ sont des constantes. Les résidus $A, B \ldots L$ sont actuellement indépendants des pôles.

Tels sont les deux cas à envisager. C'est un fait remarquable que la même fonction $\chi_m(u, z)$ serve d'élément de décomposition, dans les deux cas: dans le premier cas (A), u est la variable et z un paramètre qui coïncide successivement avec les différents pôles; dans le deuxième cas (B), z est la variable et u un paramètre qui coïncide successivement avec les pôles.

On trouvera un exposé de cette théorie dans le *Traité des fonctions elliptiques* d'HALPHEN (T. I, Chap. XIV, p. 467) et dans le *Précis des fonctions elliptiques* par APPELL et LACOUR (Gauthier-Villars).

On a ainsi des méthodes générales de calcul pour les fonctions de troisième espèce. Ces méthodes permettent de retrouver et de rattacher à un même point de vue les nombreuses formules isolées trouvées par HERMITE, puis les formules établies par BIEHLER dans son intéressante Thèse (*Sur les développements en série des fonctions doublement périodiques de troisième espèce*, Gauthier-Villars, 1879). Quelques-unes des formules que j'ai obtenues de cette façon ont été reproduites par HERMITE, dans un mémoire inséré au tome C du Journal de Crelle.

Dans la Préface des *Oeuvres d'Hermite*, M. EMILE PICARD partant des travaux d'HERMITE sur les fonctions elliptiques, dit:

»Je ne puis m'arrêter sur toutes les questions qu'il a étudiées dans cette théorie. Que de Mémoires seraient encore à citer, renfermant des idées ingénieuses et originales, sur lesquelles il revenait avec joie: décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce, à laquelle M. APPELL devait apporter des compléments importants . . .»

Ce passage, justifié par la constatation du rôle génial joué par HERMITE dans l'établissement d'une théorie générale des fonctions doublement périodiques basée sur les méthodes de CAUCHY, et dans la création de l'élément simple de décomposition des fonctions trigonométriques, elliptiques, et doublement périodiques de deuxième espèce, peut conduire le lecteur à une opinion erronée. Je ne crois pas manquer aux sentiments de reconnaissance et d'affection que j'ai pour mon maître HERMITE, en disant, que l'élément simple de décomposition χ_m des fonctions de troisième espèce a été établi par moi sans aucune indication. Plus tard, après mes premières publications, HERMITE m'a confié un cahier manuscrit que j'ai analysé en conscience dans les Annales de l'Ecole Normale (Troisième série, T. III, 1886); ce cahier contenait seulement de nombreux développements en série isolés; aucun élément simple ne s'y trouvait indiqué; j'ai tenté, par des notations appropriées, de grouper les formules très-intéressantes trouvées par HERMITE de façon à les rattacher à l'élément χ. Cet élément simple χ_m est essentiellement une fonction de deux variables, à laquelle j'ai été conduit en m'inspirant du théorème de M. MITTAG-LEFFLER.

Après ces remarques d'ordre historique, je demande la permission d'établir certaines formules, liant entre elles des fonctions χ_m d'indices différents m', m'', . . ., en ouvrant ainsi un ordre nouveau de recherches.

II. Cherchons d'abord une relation entre χ_1 et χ_2. Pour cela, considérons la fonction

$$F(u, v, z) = \chi_1(u, z)\chi_1(v, z), \tag{6}$$

où u, v, z sont trois variables indépendantes. Considérée comme fonction de z, cette fonction admet la période $2K$ et vérifie la relation

$$F(z + 2iK') = e^{-\frac{2\pi z i}{K}} F(z);$$

c'est une fonction de troisième espèce ayant, dans un parallélogramme, deux zéros de plus que de pôles. On peut prendre pour pôles les deux points u et v; les résidus correspondants sont $-\chi_1(v, u)$ et $-\chi_1(u, v)$. On a donc

$$\begin{aligned}\chi_1(u, z)\chi_1(v, z) = \chi_1(v, u)\chi_2(u, z) + \chi_1(u, v)\chi_2(v, z) + \\ + \varphi_0(u, v)g_0^{(2)}(z) + \varphi_1(u, v)g_1^{(2)}(z)\end{aligned} \tag{7}$$

$\varphi_0(u, v)$ et $\varphi_1(u, v)$ étant deux fonctions uniformes de u et v admettant pour chaque variable la période $2K$.

On obtient une première expression des fonctions $\varphi_0(u, v)$ et $\varphi_1(u, v)$ en donnant à z une valeur annulant soit $g_1^{(2)}(z)$ soit $g_0^{(2)}(z)$. On peut aisément former les équations fonctionnelles que vérifient ces deux fonctions et s'en servir pour les déterminer. Quand on suit cette méthode, on est conduit naturellement à l'étude de la fonction de deux variables dont nous allons nous occuper.

III. *Etude d'une certaine fonction de deux variables.* Soit la fonction

$$\Phi(u, z) = g_0^{(1)}(z)\,\chi_1(u, z) - g_0^{(1)}(u)\,\chi_2(u, z). \tag{8}$$

Considérée comme fonction de z cette fonction admet la période $2K$ et se reproduit multipliée par $e^{-\frac{2\pi i}{K}}$ quand on y change z en $z + 2iK'$; d'ailleurs elle est *entière*, car les infinis relatifs à z se détruisent; on peut dire aussi, en appliquant la formule de décomposition en éléments simples à la fonction de z $g_0^{(1)}(z)\,\chi_1(u, z)$, que l'on a

$$g_0^{(1)}(z)\,\chi_1(u, z) = g_0^{(1)}(u)\,\chi_2(u, z) + f_0(u)\,g_0^{(2)}(z) + f_1(u)\,g_1^{(2)}(z),$$

ce qui montre que la fonction Φ est entière en z,

$$\Phi(u, z) = f_0(u)\,g_0^{(2)}(z) + f_1(u)\,g_1^{(2)}(z).$$

Cette fonction (8) est aussi entière en u. En effet, considérée comme fonction de u elle semble admettre le pôle $u = z$ et les points homologues; mais, dans le voisinage de $u = z$, la partie principale du premier terme de (8) est $\dfrac{g_0^{(1)}(z)}{u - z}$ et celle du deuxième terme est $-\dfrac{g_0^{(1)}(z)}{u - z}$. Les fonctions inconnues $f_0(u)$ et $f_1(u)$ sont donc entières. Elles admettent la période $2K$. Formons la fonction $\Phi(u + 2iK', z)$ d'après (2). Nous avons

$$\begin{aligned}\Phi(u + 2iK', z) = {} & g_0^{(1)}(z)\left[e^{\frac{\pi u i}{K}}\chi_1(u, z) - \frac{\pi i}{2K}\left(1 + e^{\frac{\pi u i}{K}}\right)g_0^{(1)}(z)\right] \\ & - e^{-\frac{\pi u i}{K}}g_0^{(1)}(u)\left[e^{\frac{2\pi u i}{K}}\chi_2(u, z) - \frac{\pi i}{2K}\left(1 + e^{\frac{2\pi u i}{K}}\right)g_0^{(2)}(z)\right. \\ & \left. - \frac{\pi i}{K}e^{\frac{\pi u i}{K}}g_1^{(2)}(z)\right] = \\ = {} & e^{\frac{\pi u i}{K}}\Phi(u, z) - \frac{\pi i}{2K}\left(1 + e^{\frac{\pi u i}{K}}\right)[g_0^{(1)}(z)]^2 \\ & + \frac{\pi i}{2K}\left(e^{-\frac{\pi u i}{K}} + e^{\frac{\pi u i}{K}}\right)g_0^{(1)}(u)\,g_0^{(2)}(z) \\ & + \frac{\pi i}{K}g_0^{(1)}(u)\,g_1^{(2)}(z).\end{aligned} \tag{9}$$

Mais on a

$$[g_0^{(1)}(z)]^2 = \alpha g_0^{(2)}(z) + \beta g_1^{(2)}(z),$$

α et β désignant les constantes

$$\alpha = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2n^2}, \quad \beta = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2n^2+2n}.$$

La formule (9) donne alors

$$\begin{aligned} f_0(u + 2iK')\, g_0^{(2)}(z) + f_1(u + 2iK')\, g_1^{(2)}(z) \\ = e^{\frac{\pi u i}{K}} [f_0(u)\, g_0^{(2)}(z) + f_1(u)\, g_1^{(2)}(z)] \\ - \frac{\pi i}{2K}\left[\alpha\left(1 + e^{\frac{\pi u i}{K}}\right) - \left(e^{-\frac{\pi u i}{K}} + e^{\frac{\pi u i}{K}}\right) g_0^{(1)}(u)\right] g_0^{(2)}(z) \\ - \frac{\pi i}{2K}\left[\beta\left(1 + e^{\frac{\pi u i}{K}}\right) - 2 g_0^{(1)}(u)\right] g_1^{(2)}(z). \end{aligned}$$

D'où enfin, en identifiant les termes en $g_0^{(2)}(z)$ et $g_0^{(1)}(z)$

$$(10) \quad \begin{cases} f_0(u + 2iK') = e^{\frac{\pi u i}{K}} f_0(u) - \frac{\pi i}{2K}\left[\alpha\left(1 + e^{\frac{\pi u i}{K}}\right) - \left(e^{-\frac{\pi u i}{K}} + e^{\frac{\pi u i}{K}}\right) g_0^{(1)}(u)\right] \\ f_1(u + 2iK') = e^{\frac{\pi u i}{K}} f_1(u) - \frac{\pi i}{2K}\left[\beta\left(1 + e^{\frac{\pi u i}{K}}\right) - 2 g_0^{(1)}(u)\right]. \end{cases}$$

Ces relations permettent de déterminer $f_0(u)$ et $f_1(u)$ par la méthode des coefficients indéterminés.

IV. Dans la formule (7) on peut supposer $v = u$; la formule doit alors être modifiée à cause des termes $\chi_1(v, u)$ et $\chi_1(u, v)$ qui deviennent infinis. On a, dans ce cas,

$$(7') \qquad \chi_1^2(u, z) = -\frac{\partial \chi_2(u, z)}{\partial u} + \psi(u)\, \chi_2(u, z) + \lambda_0(u)\, g_0^{(2)}(z) + \lambda_1(u)\, g_1^{(2)}(z)$$

$\psi(u)$, $\lambda_0(u)$, $\lambda_1(u)$ étant des fonctions de u vérifiant des relations fonctionnelles qu'il est aisé d'établir.

V. On obtiendra des formules analogues à (7) et à (7') en appliquant la méthode de décomposition en éléments simples à des fonctions de z des formes suivantes

$$\chi_1(u, z)\, \chi_1(v, z)\, \chi_1(w, z) \tag{11}$$

ou, en général

$$\prod_{i=1}^{i=k} \chi_{m_i}(u_i, z). \tag{12}$$

La fonction (11) de z s'exprime par les fonctions $\chi_3(u, z)$, $\chi_3(v, z)$, $\chi_3(w, z)$ et, en général, la fonction (12) de z est une fonction linéaire de $\chi_{m_1+m_2+\cdots m_k}(u_i, z)$, où $i = 1, 2, \ldots k$.

Paris 25 mars 1919.