SUR LES FONCTIONS À UN NOMBRE FINI DE BRANCHES SATISFAISANT À UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE.

Par

J. MALMQUIST

à Stockholm.

Dans un travail précédent[1] j'ai étudié les fonctions à un nombre fini de branches satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$\frac{dy}{dx} = R(x, y),$$

où $R(x,y)$ est une fonction rationnelle de x, y. Un travail de M. Polya[2] m'a conduit à publier certains résultats que j'ai obtenus pour l'équation générale

$$(1) \qquad F\left(\frac{dy}{dx}, y, t, x\right) \equiv F_0(y,t,x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^m + F_1(y,t,x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \cdots + F_m(y,t,x) = 0,$$

où $F_0, F_1, \ldots F_m$ sont des fonctions entières et rationnelles de y, t et x, t étant lié à x par une équation algébrique $F(t,x) = 0$.

Rappelons d'abord quelques résultats connus.

On peut supposer que l'équation $F(y', y, t, x) = 0$ entre y', y est irréductible pour une valeur quelconque de x. De plus, si l'on fait, au besoin, dans l'équa-

---

[1] *Sur les fonctions à un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre.* Acta mathematica, t. 36, p. 297.

[2] *Zur Untersuchung der Grössenordnung ganzer Funktionen, die einer Differentialgleichung genügen.* Ce tome, p. 309.

tion différentielle (1) une substitution de la forme $y = a + \frac{1}{z}$, où a est une constante convenable, on peut supposer qu'il correspond à une valeur infiniment grande de y m valeurs infiniment grandes de y' satisfaisant à l'équation $F(y', y, t, x) = 0$ et s'obtenant par m séries de la forme

$$y' = \alpha y^2 + \beta y + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{y} \mid x\right), \tag{2}$$

où α, β et les coefficients de $\mathfrak{P}$ sont des fonctions algébriques de x.

Les points singuliers des intégrales d'une équation (1) se divisent en deux classes: les points singuliers fixes et les points singuliers mobiles. Les points de la première classe sont en nombre fini, mais ils sont en général des points transcendants. Les points de la seconde classe sont, d'après un théorème de M. Painlevé,[1] des points singuliers algébriques. Soit y_0 la valeur pour $x = x_0$ d'une intégrale qui en $x = x_0$ a un point singulier de la seconde classe. Si $y_0 = \infty$ il résulte des équations (2) que le point x_0 est un pôle. Supposons ensuite que y_0 soit fini. Alors, y_0 satisfait à l'une des équations

$$F_0(y_0, t_0, x_0) = 0, \quad D(y_0, t_0, x_0) = 0,$$

$D(y, t, x)$ étant le discriminant de la fonction $F(y', y, t, x)$ de y', et t_0 étant une valeur de t pour $x = x_0$. De plus, l'intégrale considérée satisfait à une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = (y - g(x))^{-\frac{\lambda}{\mu}} \mathfrak{P}\left((y - g(x))^{\frac{1}{\mu}}, x - x_0\right), \tag{3}$$

où $g(x)$ est une série de puissances de $x - x_0$ qui satisfait à l'une des équations $F_0(y, t, x) = 0$, $D(y, t, x) = 0$, et où la série au second membre satisfait à l'équation algébrique $F\left(\frac{dy}{dx}, y, t, x\right) = 0$. On a ou bien $\lambda > 0$, $\mu \geqq 1$, ou bien $\lambda = 0$, $\mu > 1$. Dans le premier cas, on aura

$$y = y_0 + c_1 (x - x_0)^{\frac{\mu}{\lambda + \mu}} + \cdots, \quad c_1 \neq 0.$$

Dans le second cas, en posant $y = g(x) + z^{\mu}$ on aura une équation de la forme

$$z^{\mu' - 1} \frac{dz}{dx} = \mathfrak{P}_1(z, x - x_0), \quad \mathfrak{P}_1(0, x - x_0) \neq 0.$$

[1] *Leçons de Stockholm*, p. 57.

Pour que x_0 soit un point singulier il faut et il suffit que $\mu' > 1$; alors, on aura

$$y = g(x) + c_1(x - x_0)^{\frac{\mu}{\mu'}} + \cdots, \quad c_1 \neq 0.$$

Il y a une classe d'équations (1) particulièrement simples, introduite par FUCHS, ce sont les équations à points critiques fixes, satisfaisant à la condition que les points singuliers mobiles sont des pôles. Il résulte immédiatement de ce qui précède que ces équations sont caractérisées par les conditions suivantes:

1) F_0 est indépendant de y; il résulte alors des équations (2) que le degré de F_ν par rapport à y est au plus égal à 2ν;

2) tous les nombres μ' sont égaux à 1.

Nous démontrons maintenant le théorème suivant:

Théorème. Si l'équation (1) *n'est pas une équation à points critiques fixes, toute intégrale à un nombre fini de branches et à un nombre fini de points critiques est nécessairement une fonction algébrique.*

Prenons une équation (3) telle que l'intégrale de cette équation qui pour $x = x_0$ devient égale à $g(x_0)$ ait un point critique en x_0. La série

$$y' = (y - g(x))^{-\frac{\lambda}{\mu}} \mathfrak{P}\left((y - g(x))^{\frac{1}{\mu}},\ x - x_0\right),$$

qui entre dans le second membre de cette équation (3), représente, pour une valeur quelconque de x dans le voisinage de x_0, l'entourage d'un certain point de la courbe algébrique $F(y', y, t, x) = 0$. Il existe une fonction rationnelle de y', y, soit

$$z = R(y', y \mid x)$$

qui ne devient infinie qu'en ce point. Dans le voisinage de ce point, on aura

$$z = (y - g(x))^{-\frac{\lambda'}{\mu}} \mathfrak{P}_1\left((y - g(x))^{\frac{1}{\mu}} \mid x\right), \quad \mathfrak{P}_1(0 \mid x) \neq 0,$$

les coefficients de $\mathfrak{P}_1$ étant des fonctions algébriques de x. Si y est l'intégrale de l'équation (3) considérée qui pour $x = x_0$ devient égale à $g(x_0) = y_0$ on aura

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= (y - g(x))^{-\frac{\lambda + \lambda'}{\mu} - 1} \mathfrak{P}_2\left((y - g(x))^{\frac{1}{\mu}} \mid x\right) \\ &= z^{1 + \frac{\lambda + \mu}{\lambda'}} \mathfrak{P}_3\left(z^{-\frac{1}{\lambda'}} \mid x\right), \quad \mathfrak{P}_3(0 \mid x) \neq 0 \end{aligned}$$

dans le cas où $\lambda > 0$, et

$$\frac{dz}{dx} = (y - g(x))^{-\frac{\mu' + \lambda'}{\mu}} \mathfrak{P}_3 \left((y - g(x))^{\frac{1}{\mu}} \,|\, x\right)$$

$$= z^{1 + \frac{\mu'}{\lambda'}} \mathfrak{P}_3 \left(z^{-\frac{1}{\lambda'}} \,|\, x\right), \ \mathfrak{P}_3 (0 \,|\, x) \neq 0$$

dans le cas où $\lambda = 0$.

On aura un résultat analogue pour une intégrale quelconque quand x est situé dans le voisinage d'un point singulier fixe ξ, en supposant seulement que le point $\left(\frac{dy}{dx}, y\right)$ soit situé dans le voisinage du point considéré de la courbe algébrique $F(y', y, t, x) = 0$. Alors

$$\frac{dz}{dx} = z^{1 + \frac{\lambda + \mu}{\lambda'}} \mathfrak{P} \left(z^{-\frac{1}{\lambda'}} \,|\, x\right), \ \mathfrak{P} (0 \,|\, x) \neq 0 \tag{4}$$

si $\lambda > 0$, et

$$\frac{dz}{dx} = z^{1 + \frac{\mu'}{\lambda'}} \mathfrak{P} \left(z^{-\frac{1}{\lambda'}} \,|\, x\right), \ \mathfrak{P} (0 \,|\, x) \neq 0 \tag{4'}$$

si $\lambda = 0$.

Cela posé, supposons que l'équation (1) soit satisfaite par une fonction y à un nombre fini de branches et à un nombre fini de points critiques. Alors

$$z = R\left(\frac{dy}{dx}, \ y \,|\, x\right)$$

est une fonction à un nombre fini de branches et à un nombre fini de *points singuliers*, car, à l'exception des points singuliers fixes ξ, elle ne saurait devenir infinie qu'en un point critique de y. Étudions l'entourage d'un point ξ. Si $|z|$ est suffisamment grand, z satisfait à l'équation (4) ou (4'). Or $\lambda + \mu > 0$, $\mu' > 0$; par suite, on peut employer les raisonnements par lesquels nous avons déduit, dans le mémoire cité, certains résultats de M. Boutroux concernant la croissance des intégrales. On aura ainsi le résultat qu'il correspond à tout point ξ un nombre τ de telle manière que l'inégalité

$$|z| < |x - \xi|^{\tau}$$

a lieu dans un certain entourage de $x = \xi$. Comme ξ est un point singulier isolé et comme z a, d'après la supposition, un nombre fini de branches, on en conclut que tout point ξ est au plus un point singulier algébrique de z et que z est une fonction algébrique. Par suite, y est une fonction algébrique.

Le théorème démontré peut être complété par le théorème suivant:

Théorème. Une équation (1) *ne peut être satisfaite par une fonction transcendante à un nombre fini de branches et à un nombre fini de points singuliers que dans le cas où l'équation* (1) *se transforme à une équation linéaire*

$$\frac{dz}{dx} = Az + B$$

par une transformation de la forme

$$y = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m,$$

ou à une équation linéaire et homogène

$$\frac{dz}{dx} = Az$$

par une transformation de la forme

$$y = \sum_{\nu=-n'}^{n} a_\nu z^\nu, \quad n + n' = m,$$

A, B et a_ν étant des fonctions algébriques de x.

Supposons qu'il existe une intégrale transcendante y à un nombre fini de branches et à un nombre fini de points singuliers. Il résulte d'abord du théorème démontré que l'équation (1) doit être une équation à points critiques fixes. Ensuite, il résulte d'un théorème de Poincaré[1] que le genre ϱ de la courbe algébrique $F(y', y, t, x) = 0$ doit être ≤ 1, car si $\varrho > 1$, l'intégrale générale est une fonction algébrique.

Supposons que $\varrho = 1$. Alors, l'équation (1) se transforme à une équation

$$\frac{dz}{dx} = a(x)\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$$

par une transformation qui peut s'écrire

$$z = R\left(\frac{dy}{dx}, y \,|\, x\right)$$

[1] *Sur un théorème de M. Fuchs.* Acta mathematica, t. 7, p. 1.

ou inversement

$$y = R_1\left(\frac{dz}{dx}, z \mid x\right),$$

g_2, g_3 étant des constantes, a et les coefficients des fonctions rationnelles R, R_1 étant des fonctions algébriques de x. Introduisant dans R l'intégrale y considérée on aura une fonction z à un nombre fini de branches; elle est nécessairement transcendante, car on a inversement $y = R_1\left(\frac{dz}{dx}, z \mid x\right)$.

La fonction $R_1(z', z \mid x)$ devient infinie pour certains points (z', z) de la courbe $z'^2 = a^2(4z^3 - g_2 z - g_3)$, soit $z = g(x)$ une telle valeur de z. Il est évident que R_1 devient infinie pour le point correspondant, quel que soit x, à l'exception peut-être d'un nombre fini de valeur de x. Il est facile à en conclure que la fonction $y = R_1\left(\frac{dz}{dx}, z \mid x\right)$ devient infinie pour une infinité de valeurs de x, contrairement à l'hypothèse. Il suffit de montrer que $z - g(x)$ a une infinité de zéros. La fonction $u = \frac{1}{z - g(x)}$ satisfait à l'équation

$$\frac{du}{dx} = -u^2\left[a(x)\sqrt{4\left(g(x) + \frac{1}{u}\right)^3 - g_2\left(g(x) + \frac{1}{u}\right) - g_3} - g'(x)\right]$$

dont le second membre devient infini pour $u = \infty$ de l'ordre 2 ou exceptionnellement de l'ordre $^3/_2$. Si la fonction $z - g(x)$ n'avait qu'un nombre fini de zéros, u aurait un nombre fini de points singuliers, d'après les résultats de M. Boutroux u et z seraient des fonctions algébriques.

Par là, il est démontré qu'on ne peut pas avoir $\varrho = 1$; donc, $\varrho = 0$. Alors, l'équation (1) se transforme à une équation de Riccati

$$\frac{dz}{dx} = Az^2 + Bz + C$$

par une transformation

$$z = R\left(\frac{dy}{dx}, y \mid x\right)$$

ou inversement

$$y = R_1(z \mid x).$$

Supposons en premier lieu que l'équation (1) ne puisse être transformée à une équation linéaire. Alors, l'équation de Riccati n'aura aucune intégrale algébrique. Si y est l'intégrale considérée de (1), $z = R\left(\frac{dy}{dx}, y \mid x\right)$ est une fonction transcendante à un nombre fini de branches. On voit comme précédemment que les fonctions $\frac{1}{z}$, $z-g(x)$, où $g(x)$ est une fonction algébrique, ont une infinité de zéros, et on en conclut que la fonction $y=R_1(z\,|\,x)$ a une infinité de pôles, contrairement à l'hypothèse.

Il est donc démontré que l'équation (1) se transforme à une équation linéaire par une transformation $z=R\left(\frac{dy}{dx}, y\,|\,x\right)$ ou inversement $y=R_1(z\,|\,x)$. Si l'équation linéaire n'a aucune intégrale algébrique, on démontrera comme précédemment que la fonction $R_1(z\,|\,x)$ de z ne peut devenir infinie que pour $z=\infty$, c'est-à-dire que R_1 est une fonction entière de z. On voit facilement que son degré est égal à m. Si l'équation linéaire a une intégrale algébrique, on peut supposer que ce soit $z=0$, c'est-à-dire que l'équation est homogène. Alors, on démontre que R_1 ne peut devenir infinie que pour $z=0$ ou $z=\infty$. Par suite, R_1 aura la forme $y=\sum_{\nu=-n'}^{n} a_\nu z^\nu$. À une valeur de y, il correspond $n+n'$ valeurs de z et $n+n'$ valeurs de $\frac{dy}{dx}$, comme on le voit facilement, donc $n+n'=m$. Le théorème est donc démontré.

Les considérations précédentes s'appliquent facilement à l'étude d'un point singulier, soit $x=0$, d'une équation de la forme

$$(5)\qquad F_0(y\,|\,x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^m+F_1(y\,|\,x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1}+\cdots+F_m(y\,|\,x)=0,$$

F_0, F_1, ... F_m étant des fonctions entières et rationnelles de y, dont les coefficients sont des séries de puissances de x. On aura le résultat suivant.

Théorème. Supposons en premier lieu que l'équation (5) *n'est pas une équation à points critiques fixes et qu'il existe une branche d'intégrale, définie pour* $|x|<r$, *ayant un nombre fini de valeurs en chaque point et n'ayant d'autre point critique que* $x=0$. *Alors, cette branche aura au plus un point singulier algébrique en* $x=0$.

Supposons en second lieu qu'il existe une branche d'intégrale, définie pour $|x|<r$, *et ayant en* $x=0$ *un point singulier isolé non algébrique, dans le voisinage duquel un nombre fini de valeurs se permutent. Alors, l'équation* (5) *se transforme à une équation linéaire*

$$\frac{dz}{dx}=Az+B$$

par une transformation de la forme

$$y = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$$

ou à une équation linéaire et homogène

$$\frac{dz}{dx} = A z$$

par une transformation de la forme

$$y = \sum_{\nu=-n'}^{n} a_\nu z^\nu, \quad n + n' = m,$$

A, B et a_ν étant des séries de la forme $x^{\frac{\lambda}{\mu}} \mathfrak{P}\left(x^{\frac{1}{\mu}}\right)$, *où μ est un entier $\geqq 1$ et λ un entier quelconque ou nul.*

L'ordre de croissance de la branche considérée dans la seconde partie de ce théorème est déterminé par l'ordre d'infinitude de la série A pour $x = 0$.[1] Si cette série commence par la puissance $x^{-(1+k)}$ l'ordre de croissance est égal à k. On peut obtenir une limite inférieure de ce nombre. Supposons d'abord que la transformation a la forme $y = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$. On peut supposer que $a_0 = 1$. En étudiant l'entourage de $y = \infty$ on voit facilement que $-m^2 A$ est égal au coefficient de y dans le quotient $\frac{F_1}{F_0}$, par suite, A est une série de puissance de x, donc k est un entier qui est nécessairement $\geqq 1$. Supposons ensuite que la transformation a la forme $y = \sum_{\nu=-n'}^{n} a_\nu z^\nu$. On peut supposer que $a_n = 1$. Par un calcul élémentaire on trouve que les termes de l'équation (5) qui sont du plus grand degré m par rapport à $\frac{dy}{dx}$ et y peuvent s'écrire

$$\left[\frac{dy}{dx} - \left(\frac{a'_{-n'}}{a_{-n'}} - n' A\right) y\right]^{n'} \left(\frac{dy}{dx} - n A y\right)^n$$

$$= \left(\frac{dy}{dx}\right)^m - \left[n'\left(\frac{a'_{-n'}}{a_{-n'}} - n' A\right) + n^2 A\right] y \left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-1} + \left[n' n^2 A \left(\frac{a'_{-n'}}{a_{-u'}} - n' A\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{n'(n'-1)}{2}\left(\frac{a'_{-n'}}{a_{-n'}} - n' A\right)^2 + \frac{n(n-1)}{2} n^2 A^2\right] y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^{m-2} + \cdots$$

---

[1] Je dois à M. Pólya d'avoir posé la question concernant la croissance dont la discussion suivante donne la solution.

On conclut que A et $\frac{a'_{-n'}}{a_{-n'}}$ satisfont à des équations du second degré dont les coefficients sont des séries de puissances de x. L'ordre d'infinitude de $\frac{a'_{-n'}}{a_{-n'}}$ est égal à 1, si ce quotient devient égal à ∞ pour $x=0$; par suite k est un entier si $n \neq n'$. Le seul cas où k pourrait être < 1 est donc celui où $n = n'$; alors, k est égal à $\frac{1}{2}$ ou à un multiple de $\frac{1}{2}$.