SUR LA RÉPRESENTATION ANALYTIQUE D'UNE BRANCHE UNIFORME D'UNE FONCTION MONOGÈNE.

(Sixième note.)

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

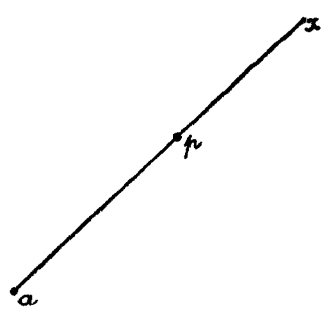
Ma cinquième note publiée sous ce titre a paru en 1904. A peu près à la même époque j'avais déjà en portefeuille une rédaction préliminaire de la suite de mes recherches en vue de nouvelles »notes». Toutefois la publication que je me proposais de faire de ces dernières a été retardée par la maladie ainsi que par la pensée que ce travail prendrait la place d'autres études envoyées par d'éminents auteurs pour être publiées dans mes »Acta».

Des années ayant passé depuis, mes articles ont perdu une grande partie de leur actualité et de leur intérêt. Il me semble pourtant qu'ils peuvent encore avoir une certaine valeur comme appartenant tout à fait à la sphère de pensées qui distingue la théorie des fonctions analytiques telle qu'elle a été formulée et exposée par Carl Weierstrass. Au moment où je reprends la publication de mes »notes», je prie ceux qui m'ont prêté leur précieux concours et sans lesquels je n'aurais pu mettre sur pied ma rédaction finale, et tout particulièrement M. E. Phragmén, M. T. Carleman, maître de Conférences à l'Université d'Upsal, M. J. Malmquist et M. M. Riesz de recevoir mes plus chaleureux remerciements. Comme je n'ai assurément aucun droit à la priorité en ce qui concerne les publications faites par d'autres après la rédaction déjà ancienne de mes notes, je ne me considère pas comme tenu d'entreprendre une comparaison critique avec ces travaux, et je me borne par conséquent, dans la mesure où ces derniers me sont connus, à y renvoyer purement et simplement le lecteur.

Sur la convergence de l'expression d'une fonction analytique en dehors de l'étoile principale de la fonction.

INTRODUCTION.

J'ai introduit dans le temps la nouvelle conception d'*étoile* de la manière suivante. En partant d'un point a, nous menons une demi-droite quelconque ax, sur laquelle nous choisissons suivant une loi déterminée un point p, distinct de a (le point p peut d'ailleurs être à l'infini sur ax). Faisons tourner ax d'un angle égal à 2π autour du centre a, le segment ap engendre alors une aire qui embrasse a, et qui sera appelée une *étoile de centre a;* le point p sera dit un *sommet* de l'étoile et l'ensemble des sommets sera dit la *frontière* de l'étoile.



Si entre une fonction monogène $F(x)$, régulière au point a, et une étoile ayant a pour centre existe une relation telle que le sommet correspondant à chacune des demi-droites qui engendrent l'étoile soit le premier point singulier de $F(x)$ auquel on arrive en partant du point a et en faisant glisser x le long de la demi-droite, cette étoile est appelée l'*étoile principale* de $F(x)$. Elle est désignée par la lettre A et la branche fonctionnelle qui y correspond est désignée par $FA(x)$.

Soit

$$k_0, k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots \tag{1}$$

une suite infinie de constantes soumises à la condition de Cauchy

$$\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|k_\nu|} = \frac{1}{r}, \tag{2}$$

r étant une quantité positive.

La théorie des fonctions analytiques telle qu'elle fut conçue par Weierstrass est basée sur la considération de la série

$$\mathfrak{P}(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu (x-a)^\nu, \tag{3}$$

où x est la variable et a une constante. Cette série définit une fonction analytique $F(x)$ dans une étoile constituée par un cercle de centre C et de rayon r. La branche fonctionnelle de $F(x)$ représentée par la série $\mathfrak{P}(x-a)$ est désignée par $FC(x)$. On sait que par prolongement analytique de la branche $FC(x)$ on obtient la fonction $F(x)$ tout entière partout où elle reste régulière. Dans une suite de mémoires, j'ai montré qu'on peut obtenir de différentes manières des expressions qui sont formées des constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$, tout comme la série $\mathfrak{P}(x-a)$, et de certains coefficients numériques indépendants de la fonction, et qui représentent d'une manière univoque non seulement la branche $FC(x)$, mais encore la branche entière $FA(x)$.

Les plus élégantes de ces expressions, au point de vue formel, me paraissent être

$$(4)\qquad FA(x)=\lim_{n=\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{n^2}\sum_{\lambda_2=0}^{n^4}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}}\frac{F^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}(a)}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_n}}\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}\ [1]$$

$$(5)\qquad FA(x)=\lim_{a=0}\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}F_a(\omega(x-a))\,d\,\omega^{\frac{1}{a}}=$$

$$=\lim_{a=0}\lim_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{k_\nu}{\underline{|\alpha.\nu}}\int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}}e^{-\omega^{\frac{1}{a}}}.\omega^\nu\,d\,\omega^{\frac{1}{a}}.(x-a)^\nu;\ F_a(\omega x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}k_\nu\frac{(\omega x)^\nu}{\underline{|\alpha.\nu}}\ [2]$$

$$(6)\qquad FA(x)=\lim_{a=0}\left(k_0+\frac{k_1}{\underline{|\alpha.1}}(x-a)+\frac{k_2}{\underline{|\alpha.2}}(x-a)^2+\cdots\right);\ \underline{|\alpha.\nu}=\Gamma(\alpha\nu+1).\ [3]$$

Les deux expressions (4) et (6) sont de la forme $\lim\limits_{\omega=\infty} G(x;\omega)$, $G(x;\omega)$ étant une fonction entière (rationnelle dans la première expression, transcendante dans la seconde) dont les coefficients sont des fonctions linéaires de $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n$ avec des coefficients numériques qui dépendent de ω comme paramètre, mais sont indépendants aussi bien des constantes $k_0, k_1, \ldots k_n$ que de la variable x.

---

[1] »Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène.« Note 1. Acta Math., t. 23. 1899.

[2] Formule (109), page 161, Note 5 de ce travail. Acta Math., t. 29. 1904.

[3] »Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe.« Atti del IV Congreso Mat. Roma 1908. Page 82.

MM. Borel et Phragmén ont montré[1] que c'est impossible de former une telle expression qui, pour tout choix des constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$ $(\overline{\lim_n} |\sqrt[n]{k_n}| = \text{fini})$, cesse d'être convergente en dehors de l'étoile A.

M. H. von Koch a repris ce problème d'un point de vue différent.[2] Il s'est demandé: est-il possible de former avec les seules constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$ et avec des coefficients numériques indépendants de ces constantes et de la variable une expression $\lim_{n=\infty} G(x; n)$ qui représente la fonction définie par les k_ν chaque fois qu'on se trouve en dehors des sommets de l'étoile A, sur le prolongement d'une demi-droite génératrice où la fonction reste régulière?

La solution qu'il a donnée de ce problème est en rapport étroit avec la conception de Weierstrass d'une fonction analytique.

Weierstrass a compté non seulement les points réguliers, mais encore les pôles comme appartenant à la fonction (il les nomme »ausserwesentliche singuläre Stellen»),[3] tandis que tous les autres points, qui ne sont ni des points réguliers ni des pôles, sont singuliers. J'ai proposé de remplacer la conception de Weierstrass par celle que voici:[4] les seuls points devant être comptés comme points singuliers de $F(x)$ sont les points x' tels que, d'une part, il existe dans tout voisinage de x' des points pour lesquels $F(x)$ se comporte d'une façon régulière, et que, d'autre part, il n'existe aucun entourage de x' où une égalité de la forme $F(x) = \mathfrak{P}(x - x')$ ait lieu. Il paraît que cette définition des points singuliers d'une fonction est maintenant généralement admise.

En adoptant la manière de voir de Weierstrass, M. von Koch a généralisé de la manière suivante ma conception d'étoile principale. Il définit une étoile K, dont A fait partie, en prolongeant les différentes demi-droites issues de a

---

[1] E. Borel, »Addition au mémoire sur les séries divergentes». Annales de l'Ecole Norm. Sup., T. 16, 1889, p. 134.

E. Borel, »Lecons sur les séries divergentes». Paris 1901, p. 172—175.

G. Mittag-Leffler, »Ueber die analytische Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Funktion». Münchener Berichte, 6. März 1915, p. 154—159.

Dans cette dernière note, qui fut publiée pendant que j'étais en convalescence après une grave maladie, il s'est malheureusement glissé une erreur sérieuse sur laquelle M. Oseen a fixé mon attention (cf. »Sur la représentation analytique de la vitesse dans certains problèmes d'hydrodynamique», page 6, note, Nova Acta Soc. Sci. Upsal., Ser. IV, vol. 4, No. 9). La formule (51), page 149, dans la dite note représente seulement $FC(x)$ mais non $FA(x)$.

[2] Helge von Koch, »Applications nouvelles de la fonction exponentielle». Bihang Kgl. Svenska Vet. Akad. Förhandl. 12 février 1902.

Helge von Koch, »Sur le prolongement analytique d'une série de Taylor». Voir ce journal, T. 27, 1903, p. 79—104.

[3] »Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen.» 1876. Werke, Bd 2, p. 78.

[4] »Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes.» Voir ce journal, T. 4, 1884, p. 4.

jusqu'au premier point qui n'est ni un point régulier ni un pôle, au lieu de s'arrêter, comme c'était le cas pour l'étoile A, aussi bien à un pôle qu'à un autre point singulier. Il cherche après, sans connaissance préalable des pôles, à former une expression qui ne contienne pas d'autres éléments empruntés de la fonction que les constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$ (propriété appartenant aussi à toutes mes expressions), mais qui soit valable non seulement pour l'étoile A, mais encore pour tous les points réguliers à l'intérieur de l'étoile K. Pour bien saisir son idée, il faut se rappeler qu'on savait bien former, avant M. VON KOCH, une expression qui représentait une fonction uniforme d'une manière univoque non seulement dans tout son domaine de régularité,[1] mais encore dans chaque domaine qui embrassait un nombre dénombrable de singularités;[2] mais alors il était nécessaire de connaître non seulement la position de ces singularités, mais encore l'allure de la fonction autour des singularités.

M. VON KOCH parvient à résoudre son problème en se servant de l'expression

$$\lim_{s=\infty} x^s e^{-x^s} = \begin{matrix} 0; & x \lessgtr 1 \\ e^{-1}; & x = 1, \end{matrix}$$

ainsi que d'une espèce de représentation conforme, dont je me suis servi dans plusieurs de mes travaux.[3] M. PAINLEVÉ a énoncé à propos de la publication de M. VON KOCH une autre solution du problème. Il l'obtient en utilisant une fonction auxiliaire toute autre que celle de M. VON KOCH. Sa formule finale paraît aussi plus élémentaire et plus générale que celle de M. VON KOCH.[4]

Je me suis servi moi-même d'une nouvelle fonction auxiliaire, remarquable sous différents rapports. J'exposerai dans le § 1 les propriétés essentielles de cette fonction. Dans le § 2, je donne une nouvelle solution du problème de M. VON KOCH.

Dans le § 3, je m'élève à un point de vue plus général.

---

[1] Voir mon mémoire de 1884, l. c., ainsi que celui de 1899, Acta Math., T. 23.

[2] Voir mon mémoire de 1884, l. c.

[3] Voir p. ex. Note 3 de ce travail, Acta Math. t. 24. 1900.

[4] PAUL PAINLEVÉ, »Sur le développement des fonctions analytiques en séries de polynomes». Comptes Rendus etc., le 7 juillet 1902. T. 135.

Il semble que M. VON KOCH s'élève dans ses derniers travaux au même degré de généralité que M. PAINLEVÉ. Voir H. VON KOCH, »Sur le prolongement d'une série de Taylor». Arkiv för Matematik, Astr. o. Fys., Bd 12, No. 11, Stockholm 1917. — »Contributions à la théorie du prolongement d'une fonction analytique.» Arkiv f. Mat., Astr. o. Fys., Bd 12, No. 23. Stockholm 1917.

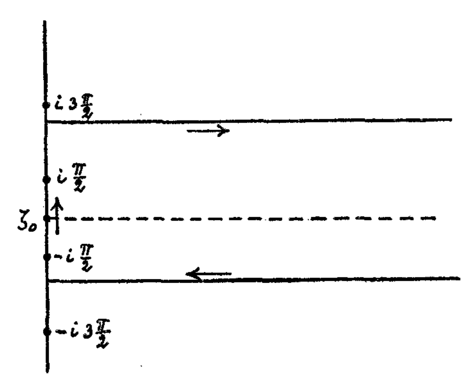
§ 1.

Une nouvelle fonction entière.

On sait que toute fonction entière transcendante peut être rendue aussi voisine qu'on veut d'un nombre quelconque fixe en dehors d'un cercle de rayon arbitrairement grand.[1] Ce fait n'exclut pas qu'il existe des fonctions entières dont le module tend vers une limite bien déterminée égale à zéro quand la variable tend vers l'infini le long d'une demi-droite quelconque issue de l'origine. J'ai donné plusieurs exemples de telles fonctions.[2] Une des plus simples est définie par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{S} e^{e^{\zeta}}\cdot e^{-e^{e^{\zeta}}}\frac{d\zeta}{\zeta - x}, \tag{7}$$

l'intégration se faisant le long d'un contour S défini de la manière suivante: S se compose en partie de deux droites parallèles à l'axe réel des ζ, infinies dans le sens positif de celui-ci et situées de l'un ou de l'autre côté de l'axe à une distance comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et $3\frac{\pi}{2}$, en partie d'une perpendiculaire à l'axe réel réunissant ces parallèles et coupant l'axe en un point arbitraire. L'intégration doit se faire dans le sens direct de droite à gauche.



[1] Karl Weierstrass, »Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen». Werke, Bd 2, p. 124.

[2] »Une nouvelle fonction entière.» Comptes Rendus etc. 18 avril 1904. »Sur une classe de fonctions entières.» Verhandl. d. 3. Internat. Math. Kongress. Heidelberg 1904.

L'intégrale converge évidemment quelle que soit la position donnée à x de l'un ou de l'autre côté de la ligne d'intégration. La valeur de l'intégrale ne varie pas si l'on déplace la perpendiculaire à droite ou à gauche du point ζ_0 où elle coupait au commencement l'axe réel, ou si l'on fait varier les distances des deux parallèles à l'axe entre $\frac{\pi}{2}$ et $3\frac{\pi}{2}$ pourvu que x reste du même côté du chemin d'intégration.

L'intégrale définit deux fonctions analytiques différentes $E(x)$ et $\overline{E}(x)$ selon que x est situé du même côté du chemin d'intégration que les points réels négatifs infiniment distants, le *côté négatif* comme nous dirons, ou de l'autre côté, le *côté positif*.

Envisageons d'abord la fonction $E(x)$. On voit qu'elle est régulière pour tout point x qui est à distance finie de la ligne d'intégration, et qu'elle est par conséquent une fonction entière de x. Elle s'approche indéfiniment de zéro quand x tend vers l'infini du côté négatif d'un contour S.

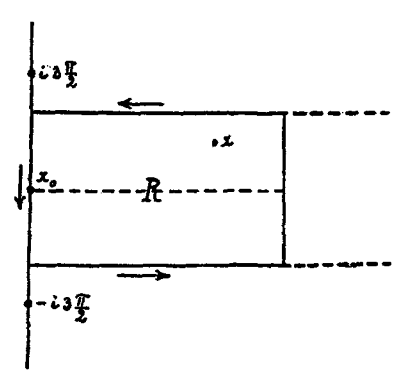
La fonction $\overline{E}(x)$, d'un autre côté, est régulière pour tout point x qui est à distance finie et se trouve entre deux parallèles à l'axe réel menées par les points $i3\frac{\pi}{2}$ et $-i3\frac{\pi}{2}$. Elle s'approche indéfiniment de zéro quand x tend vers l'infini du côté positif d'un contour S.

Soit maintenant x un point à distance finie situé du côté positif d'un contour S donné.

On a

$$E(x) = \overline{E}(x) + \frac{1}{2\pi i}\int^{R} e^{e^{\zeta}} \cdot e^{-e^{e^{\zeta}}} \frac{d\zeta}{\zeta - x}, \tag{8}$$

R étant le chemin d'intégration indiqué dans la figure ci-après, chemin qui entoure le point x.



On voit que les deux fonctions $E(x)$ et $\overline{E}(x)$ sont liées par la relation

$$E(x) = e^{e^x} \cdot e^{-e^{e^x}} + \overline{E}(x). \tag{9}$$

La fonction $\overline{E}(x)$ est par conséquent, tout comme $E(x)$, une fonction entière de x.[1]

Relativement à la fonction $E(x)$ nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 1. »Soit $x_0 (-\infty < x_0 < +\infty)$ un point quelconque sur l'axe réel. La fonction $E(x)$ tend indéfiniment vers zéro quand la variable x tend vers l'infini le long d'une demi-droite quelconque issue de x_0. Soit ω une quantité réelle positive. Si la variable x appartient à un domaine fini quelconque X situé entièrement en dehors de l'axe réel positif, $E(x_0 + \omega x)$ tendra uniformément vers zéro lorsque ω tend vers l'infini.

Il en est de même si le domaine X $(0 < X)$ est une partie quelconque de l'axe réel positif.»

---

[1] On peut voir de la manière suivante que $E(x)$ n'est pas identiquement nul.

La supposition

$$E(x) = 0$$

amènerait

$$\overline{E}(x) = -e^{e^x} \cdot e^{-e^{e^x}}. \tag{A}$$

En posant $x = \xi + i\eta$, on obtient

$$e^{e^x} = e^{e^\xi \cos\eta} (\cos(e^\xi \sin\eta) + i \sin(e^\xi \sin\eta)).$$

Pour un η fixe et incongru à zéro (mod. π), il existe une infinité de valeurs de ξ croissant au dessus de toute limite telles que

$$\cos(e^\xi \sin\eta) = -1.$$

En ces points, on a

$$e^{e^x} = -e^{e^\xi \cos\eta}.$$

On en conclut que

$$\overline{\lim_{\substack{\xi=\infty \\ 0<|\eta|<\frac{\pi}{2}}}} \left| e^{e^x} e^{-e^{e^x}} \right| = \infty.$$

Comme d'autre part

$$\lim_{\substack{\xi=\infty \\ |\eta|<\frac{\pi}{2}}} \overline{E}(x) = 0,$$

on voit que l'égalité (A) est impossible.

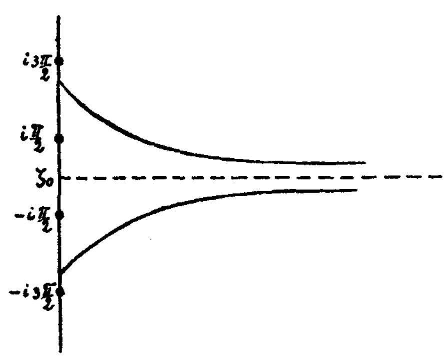
Au lieu de se donner d'abord l'intégrale (7), on aurait pu partir de l'intégrale plus générale

$$(10)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S_\varkappa} e^{e^{\zeta^\varkappa}} \cdot e^{-e^{e^{\zeta^\varkappa}}} \frac{d\zeta}{\zeta - x},$$

où $\varkappa$ est une constante positive plus grande que *un*. Le contour $S_\varkappa$ est alors composé en partie de deux lignes infinies dans le sens positif de l'axe réel:

$$\varrho^\varkappa \sin \varkappa \varphi = a,\ \varrho^\varkappa \sin \varkappa \varphi = -a;\ \frac{\pi}{2} < a < 3\frac{\pi}{2},$$

en partie d'une perpendiculaire à l'axe réel réunissant ces deux lignes. On voit que ces lignes s'approchent d'une manière asymptotique de l'axe réel positif.



Nous désignerons par $E_\varkappa(x)$ et $\bar{E}_\varkappa(x)$ les deux fonctions définies par l'intégrale (10). Elles sont liées par l'égalité

$$(11)\qquad E_\varkappa(x) = e^{e^{x^\varkappa}} \cdot e^{-e^{e^{x^\varkappa}}} + \bar{E}_\varkappa(x).$$

$\varkappa$ étant un nombre entier elles sont toutes les deux des fonctions entières de x. Si $\varkappa \neq$ nombre entier et $\zeta_0 > 0$, $E_\varkappa(x)$ est une fonction entière tandis que $\bar{E}_\varkappa(x)$ est singulier pour $x = 0$. On a le théorème suivant.

Théorème 2. »La fonction $E_\varkappa(x)$ a des propriétés identiques à celles qui sont indiquées pour $E(x)$ dans le théorème 1. Elle a encore les propriétés suivantes. Elle tend indéfiniment vers zéro quand x tend vers l'infini positif ou négatif le long de l'axe réel ou d'une parallèle à cet axe.

Soit ω une quantité réelle positive, et désignons par ξ la partie réelle et par $i\eta$ la partie imaginaire de la variable x. Si cette variable appartient à un domaine

X fini et situé entièrement en dehors de l'axe imaginaire et de l'axe réel positif, $E_\varkappa(\omega\xi + i\eta)$ tend uniformément vers zéro quand ω tend vers l'infini.

La même chose arrive si X $(0 < X)$ est une partie de l'axe réel positif.»

Dans le temps[1] j'ai introduit une autre fonction $\varepsilon_\varkappa(x)$; $1 \leq \varkappa$, définie par l'intégrale

$$(12) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S_\varkappa} e^{e^{\zeta^\varkappa}} \frac{d\zeta}{\zeta - x},$$

où le contour $S_\varkappa$ est le même que pour l'intégrale (10) (S_1 est identique au contour S relatif à l'intégrale (7)). Cette fonction a la propriété suivante:

$$(13) \qquad \begin{cases} \varepsilon_\varkappa(\omega x) \to 0 \text{ pour } \omega \to +\infty\,;\, 1 \leq \varkappa, \\ \varepsilon_\varkappa(\omega\xi + i\eta) \to 0 \text{ pour } \omega \to +\infty\,;\, 1 < \varkappa;\, \xi \neq 0 \end{cases}$$

quand x appartient à un domaine X qui tombe en dehors de l'axe réel positif, tandis que

$$(14) \qquad \left| \varepsilon_\varkappa(\omega x) - e^{e^{\omega^\varkappa \cdot x^\varkappa}} \right| \to 0 \text{ pour } \omega \to +\infty$$

quand $X (0 < X)$ fait partie de cet axe.

On voit que l'intégrale (12) définit encore une seconde fonction $\bar{\varepsilon}_\varkappa(x)$, liée à $\varepsilon_\varkappa(x)$ par la relation

$$(15) \qquad \varepsilon_\varkappa(x) = e^{e^{x^\varkappa}} + \bar{\varepsilon}_\varkappa(x).$$

On voit encore que la fonction

$$(16) \qquad \varepsilon_\varkappa(x)\, e^{-\varepsilon_\varkappa(x)}$$

a des propriétés identiques à celles que j'ai indiquées pour $E_\varkappa(x)$ dans le théorème 2.

§ 2.

Soit b un point sur l'axe réel où $E(x)$ et ses dérivées ne s'annulent pas. Un tel point existe certainement parce que l'ensemble des zéros de $E(x)$, $E'(x)$, ... $E^{(n)}(x)$, ..., étant dénombrable, ne peut pas contenir un intervalle entier de l'axe réel.

[1] »Sur une classe de fonctions entières», p. 262, 263. Verhandlungen d. dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg. Leipzig 1904.

Posons $\zeta_0 > b, \zeta_0$ étant toujours le point où le contour S coupe l'axe réel. On aura

$$E(b) = \frac{1}{2\pi i} \int^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \frac{d\zeta}{\zeta - b}. \tag{17}$$

J'introduis maintenant la fonction

$$G(x) = \frac{E(x+b)}{E(b)}, \tag{18}$$

et je mets

$$G(x) = 1 + H_1 x + H_2 x^2 + \cdots + H_\nu x^\nu + \cdots, \tag{19}$$

où

$$H_\nu = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{E(b)} \int^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \frac{d\zeta}{(\zeta - b)^{\nu+1}}; H_0 = 1. \tag{20}$$

Par conséquent,

$$G(\omega(x-1)) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{E(b)} \int^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \frac{d\zeta}{\zeta - b - \omega(x-1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu (\omega(x-1))^\nu. \tag{21}$$

On obtient la formule (19) en supposant

$$\left| \frac{x}{\zeta_0 - b} \right| < 1,$$

mais, $G(x)$ étant une fonction entière de x, le second membre de (19) est une série toujours convergente par rapport à la variable x, dont les coefficients H_ν sont des constantes indépendantes de x. Le même cas se présente pour la série du second membre de (21). Elle est toujours convergente par rapport à $\omega(x-1)$ regardé comme variable.

Une autre représentation de la fonction $G(\omega(x-1))$ est la suivante. Nous choisissons comme auparavant $\zeta_0 > b$, et posons

$$|x| < 1 + \frac{\zeta_0 - b}{\omega}.$$

On obtient alors

$$G(\omega(x-1)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu(\omega) \cdot x^\nu. \tag{22}$$

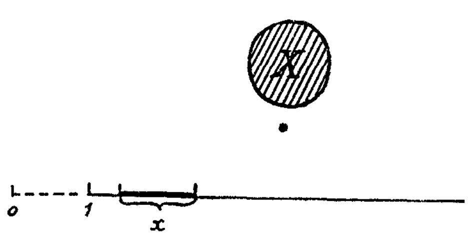
où

$$(23)\qquad K_\nu(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{E(b)}\cdot\int^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \frac{\omega^\nu d\zeta}{(\zeta - b + \omega)^{\nu+1}}$$

et

$$(24)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu(\omega) = 1.$$

La fonction $G(\omega(x-1))$ étant une fonction entière, le second membre de (22) est une série toujours convergente.



Si la variable x appartient à un domaine fini X situé entièrement en dehors de la partie de l'axe réel positif qui s'étend depuis 1 jusqu'à $+\infty$, on constate que $G(\omega(x-1))$ et par conséquent aussi les deux séries $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} H_\nu(\omega(x-1))^\nu$ et $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} K_\nu(\omega)\, x^\nu$ tendent uniformément vers zéro lorsque ω tend vers l'infini.

Si, d'un autre côté, le domaine X fait partie de la portion de l'axe réel positif comprise entre 1 et $+\infty$,

$$1 < X \leq \infty,$$

la fonction $G(\omega(x-1))$ ainsi que les deux séries $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} H_\nu(\omega(x-1))^\nu$ et $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} K_\nu(\omega)\, x^\nu$ tendent encore uniformément vers zéro lorsque ω tend vers l'infini.

Les formules (19) et (21) nous donnent

$$(25)\qquad \frac{G(\omega(x-1)) - 1}{x-1} = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} H_\nu(\omega(x-1))^\nu}{x-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu \omega^\nu (x-1)^{\nu-1}.$$

Au moyen des formules (22), (24) on obtient encore

$$(26)\qquad \frac{1 - G(\omega(x-1))}{1-x} = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} K_\nu(\omega)(1-x^\nu)}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (1 + x + x^2 + \cdots + x^\nu) K_{\nu+1}(\omega).$$

On aura par conséquent, pour $x \neq 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu (\omega(x-1))^{\nu-1}, \tag{27}$$

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (1 + x + x^2 + \cdots + x^\nu) K_{\nu+1}(\omega), \tag{28}$$

égalités qui ont lieu aussi bien si x appartient à un domaine situé en dehors de la ligne $1 \leq x \leq \infty$ que si x fait partie de cette ligne $(1 < x \leq \infty)$.

Pour le point $x=1$, on obtient au moyen de la formule (25)

$$\lim_{x=1} \frac{G(\omega(x-1)) - 1}{x-1} = \omega H_1 \tag{29}$$

et au moyen de la formule (26)

$$\lim_{x=1} \frac{1 - G(\omega(x-1))}{1-x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu+1) K_{\nu+1}(\omega) = \omega H_1. \tag{30}$$

Les deux expressions (27) et (28) sont par conséquent égales à l'infini pour $x=1$.

Nous introduisons maintenant, à l'exemple de M. von Koch, une nouvelle étoile K de centre zéro, qui, en général, embrassera l'étoile A. Nous obtiendrons cette étoile de la manière suivante.

On fait tourner autour d'un centre $x=0$ une demi-droite ayant ce centre comme origine et limitée d'autre part par le point le plus rapproché de centre qui n'est ni un point régulier ni un pôle de la fonction définie par les constantes

$$k_0, k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots,$$

assujetties à la condition de Cauchy

$$\overline{\lim} \left| \sqrt[\nu]{k_\nu} \right| = \frac{1}{r};\ r = \text{nombre positif},$$

c'est à dire la fonction définie par la série

$$\mathfrak{P}(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_\nu x^\nu + \cdots$$

L'ensemble de toutes les demi-droites limitées de cette manière sera l'étoile K.

On voit que cette étoile embrasse l'étoile A, que j'ai appelée l'étoile principale, et que d'autres ont désignée par l'expression »étoile d'holomorphie». En analogie avec l'expression »étoile d'holomorphie» on pourrait appeler l'étoile K »étoile de méromorphie».

Introduisons maintenant l'intégrale de CAUCHY

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits^{B}\frac{F(z)\cdot G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)}{z-x}dz, \tag{31}$$

où B sera le contour d'un domaine simplement connexe qui est situé à l'intérieur de l'étoile K, embrasse l'origine et ne passe par aucun des pôles de $F(z)$.

Lorsque x est situé à l'intérieur de B et diffère des pôles a, on a l'égalité suivante:

$$(32)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int\limits^{B}\frac{F(z)\cdot G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)}{z-x}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits^{(x)}\frac{F(z)\cdot G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)}{z-x}dz-\\
&\qquad-\frac{1}{2\pi i}\int\limits^{(0)}\frac{F(z)\cdot\left(1-G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)\right)}{1-\frac{x}{z}}\frac{dz}{z}+\frac{1}{2\pi i}\sum\int\limits^{(a)}\frac{F(z)}{z-x}\cdot G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)dz\\
&=F(x)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits^{(0)}\frac{F(z)\cdot\left(1-G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)\right)}{1-\frac{x}{z}}\cdot\frac{dz}{z}+\frac{1}{2\pi i}\sum\int\limits^{(a)}\frac{F(z)}{z-x}G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)dz,
\end{aligned}\right.$$

la somme figurant au second membre étant étendue à tous les pôles de $F(z)$ à l'intérieur de B et les intégrations étant faites dans le sens direct le long des périphéries des petits cercles ayant x, 0, a comme centres. Il résulte de la définition de l'étoile K que la somme n'a qu'un nombre fini de termes.

Les formules (25) et (26) nous donnent

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{1-G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)}{1-\frac{x}{z}}=\sum_{\nu=1}^{\infty}H_\nu\,\omega^\nu(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{z}\left(1-\frac{\nu-1}{\lfloor 1}\cdot\frac{x}{z}+\right. \tag{33}$$

$$\left.+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{\lfloor 2}\left(\frac{x}{z}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{x}{z}\right)^{\nu-1}\right),$$

$$(34)\qquad \frac{1}{z}\cdot\frac{1-G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)}{1-\frac{x}{z}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{z}\left(1+\frac{x}{z}+\left(\frac{x}{z}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{z}\right)^{\nu}\right)K_{\nu+1}(\omega).$$

D'un autre côté, nous avons mis

$$(3)\qquad FC(z)=k_0+k_1z+k_2z^2+\cdots,$$

$FC(z)$ étant la branche fonctionnelle de $F(z)$ intérieure au cercle de convergence C de centre zéro et de rayon $r=\left(\overline{\lim_{\nu}}\,|\sqrt[\nu]{k_\nu}|\right)^{-1}$.

On obtiendra par conséquent

$$(35)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(z)\cdot\left(1-G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)\right)}{1-\frac{x}{z}}\frac{dz}{z}=\sum_{\nu=0}^{\infty}H_{\nu+1}\,\omega^{\nu+1}\,(-1)^{\nu}\Big(k_0-\frac{\nu}{\lfloor 1}k_1x+$$
$$+\frac{\nu(\nu-1)}{\lfloor 2}k_2x^2+\cdots+(-1)^{\nu}k_\nu x^\nu\Big)$$

ainsi que

$$(36)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(z)\cdot\left(1-G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)\right)}{1-\frac{x}{z}}\frac{dz}{z}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(k_0+k_1x+k_2x^2+\cdots+k_\nu x^\nu)K_{\nu+1}(\omega).$$

Supposons d'abord que le contour B tombe à l'intérieur de mon étoile principale A, qui n'embrasse aucun pôle ou autre point singulier de $F(z)$.

L'égalité (32) devient dans ce cas

$$(37)\qquad F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)}\frac{F(z)\cdot\left(1-G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)\right)}{1-\frac{x}{z}}\frac{dz}{z}+\frac{1}{2\pi i}\int^{B}\frac{F(z)\cdot G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)}{z-x}dz.$$

Nous avons vu que

$$\lim_{\omega=\infty}G(\omega(y-1))=0$$

tant que y appartient à un domaine fini quelconque situé entièrement en dehors de la ligne $1\leq y\leq\infty$. C'est le cas pour le domaine limité par le contour que décrit $\frac{x}{z}$ quand z parcourt la ligne B. On aura par conséquent

$$\lim_{\omega=\infty}\int^{B}\frac{F(z)\cdot G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)}{z-x}dz=0, \tag{38}$$

et ainsi nous obtenons pour $FA(x)$ deux nouvelles expressions, savoir

$$S_1=\lim_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}H_{\nu+1}\omega^{\nu+1}(-1)^{\nu}\left(k_0-\frac{\nu}{\underline{|1}}k_1x+\frac{\nu(\nu-1)}{\underline{|2}}k_2x^2+\cdots+(-1)^{\nu}k_\nu x^\nu\right) \tag{39}$$

$$S_2=\lim_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(k_0+k_1x+k_2x^2+\cdots+k_\nu x^\nu)K_{\nu+1}(\omega), \tag{40}$$

où

$$H_\nu=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{E(b)}\int^{S}e^{e^{\zeta}}e^{-e^{e^{\zeta}}}\frac{d\zeta}{(\zeta-b)^{\nu+1}};\zeta_0>b;H_0=1, \tag{20}$$

$$K_\nu(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{E(b)}\int^{S}e^{e^{\zeta}}e^{-e^{e^{\zeta}}}\frac{\omega^\nu d\zeta}{(\zeta-b+\omega)^{\nu+1}}. \tag{23}$$

On aura donc la double égalité

$$FA(x)=\frac{S_1}{S_2}. \tag{41}$$

Nous montrerons dans la suite que S_1 aussi bien que S_2 représentent encore d'autres parties de la fonction $F(x)$ que la branche $FA(x)$. Nous verrons que ces expressions représentent $FK(x)$ en tous les points réguliers intérieurs à K.

Retournons, pour établir le premier point, à la formule (32) et étudions l'intégrale

$$\int^{(a)}\frac{F(z)}{z-x}\cdot G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)dz. \tag{42}$$

On a dans l'entourage de $z=a$

$$F(z)=g\left(\frac{1}{z-a}\right)+\mathfrak{P}(z-a), \tag{43}$$

où

$$g\left(\frac{1}{z-a}\right)=\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}. \tag{44}$$

Par conséquent,

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{F(z)}{z-x} &= -\frac{1}{x-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{x-a}}\left(g\left(\frac{1}{z-a}\right)+\mathfrak{P}(z-a)\right)\\
&= -\frac{1}{x-a}\left(1+\frac{z-a}{x-a}+\left(\frac{z-a}{x-a}\right)^2+\cdots\right)\left(\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left.+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\mathfrak{P}(z-a)\right)\\
&= -\frac{1}{z-a}\left(\frac{c_{-1}}{x-a}+\frac{c_{-2}}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(x-a)^m}\right)\\
&\quad -\frac{1}{(z-a)^2}\left(\frac{c_{-2}}{x-a}+\frac{c_{-3}}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(x-a)^{m-1}}\right)\\
&\quad -\frac{1}{(z-a)^3}\left(\frac{c_{-3}}{x-a}+\frac{c_{-4}}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(x-a)^{m-2}}\right)\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad -\frac{1}{(z-a)^m}\cdot\frac{c_{-m}}{x-a}+\cdots
\end{aligned}\right. \tag{45}$$

Quant à $G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right)$, on a

$$\left\{\begin{aligned}
G\left(\omega\left(\frac{x}{z}-1\right)\right) &= \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{E(b)}\int^{S} e^{e^\zeta}e^{-e^{e^\zeta}}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-b+\omega-\omega\dfrac{x}{z}}=\\
&\qquad\qquad = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{E(b)}\int^{S} e^{e^\zeta}e^{-e^{e^\zeta}}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-b+\omega-\omega\dfrac{x}{a}}+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{E(b)}\sum_{\nu=0}^{\infty}(a-z)^{\nu+1}\int^{S} e^{e^\zeta}e^{-e^{e^\zeta}}\cdot\frac{\omega x}{a^{\nu+2}}\cdot\frac{(\zeta-b+\omega)^\nu d\zeta}{\left(\zeta-b+\omega-\omega\dfrac{x}{a}\right)^{\nu+2}}.
\end{aligned}\right. \tag{46}$$

On voit que chacun des coefficients

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \cdot \frac{\omega x}{a^{\nu+2}} \cdot \frac{(\zeta-b+\omega)^{\nu}}{\left(\zeta-b-\omega\left(\frac{x}{a}-1\right)\right)^{\nu+2}} d\zeta$$

dans la série au second membre de (46) a la même propriété que le premier terme

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{E(b)}\int^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta-b-\omega\left(\frac{x}{a}-1\right)},$$

celle notamment de tendre uniformément vers zéro dans tout domaine où $\frac{x}{a}$ est réel et plus grand que *un*.

Tant que $\frac{x}{a}$ est réel et plus grand que *un*, le résidu (42) tendra par conséquent uniformément vers zéro lorsque ω tend vers l'infini.

Dans le cas où $x=a$, le résidu sera (cf. (19))

$$(47) \qquad c_0 + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{E(b)}\sum_{\nu=1}^{m}(-1)^{\nu} c_{-\nu}\int^{S} e^{e^{\zeta}} e^{-e^{e^{\zeta}}} \cdot \frac{\omega}{a^{\nu}}\frac{(\zeta-b+\omega)^{\nu-1}}{(\zeta-b)^{\nu+1}} d\zeta.$$

Le coefficient de ω^m dans cette expression, étant égal à

$$(-1)^m c_{-m}\frac{E^{(m)}(b)}{E(b)a^m}\frac{1}{\underline{|m}},$$

ne peut pas s'annuler. Par conséquent, on voit que le module de la quantité (47) tendra vers l'infini lorsque ω augmente au dessus de toute limite.

On voit que les deux expressions S_1 et S_2 ainsi que $FK(x)$ tendent alors vers l'infini.

Vu qu'il n'y a qu'un nombre fini de pôles à l'intérieur du domaine limité par la courbe B, nous avons le théorème suivant.

Théorème 3. »La fonction $F(x)$ définie par la branche fonctionnelle

$$(3) \qquad FC(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots$$

est représentée à l'intérieur de l'étoile principale A par chacune des deux expressions

$$(39) \qquad S_1 = \lim_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu+1}\,\omega^{\nu+1}(-1)^{\nu}\left(k_0 - \frac{\nu}{\underline{|1}}k_1 x + \frac{\nu(\nu-1)}{\underline{|2}}k_2 x^2 + \cdots + (-1)^{\nu} k_{\nu} x^{\nu}\right)$$

et

$$(40) \qquad S_2 = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_\nu x^\nu) K_{\nu+1}(\omega),$$

où

$$(20) \qquad H_\nu = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{E(b)} \int^{S} e^{e^\zeta} e^{-e^{e^\zeta}} \frac{d\zeta}{(\zeta - b)^{\nu+1}},$$

$$(23) \qquad K_\nu(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{E(b)} \int^{S} e^{e^\zeta} e^{-e^{e^\zeta}} \frac{\omega^\nu d\zeta}{(\zeta - b + \omega)^{\nu+1}},$$

$$(17) \qquad E(b) = \frac{1}{2\pi i} \int^{S} e^{e^\zeta} e^{-e^{e^\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta - b},$$

et dans lesquelles le point ζ_0 où la ligne S coupe l'axe réel est supposé $> b$.

Ces expressions convergent toutes les deux uniformément dans tout domaine intérieur à A. Elles convergent encore en dehors de A sur toute demi-droite passant par un sommet qui est un pôle de $F(x)$ situé à l'intérieur de l'étoile K. La convergence est uniforme sur toute partie d'une telle demi-droite située à une distance fini entre deux pôles consécutifs ainsi que sur toute partie située à une distance finie entre le sommet et le pôle le plus rapproché du sommet. Les égalités

$$(48) \quad FK(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu+1} \omega^{\nu+1} (-1)^\nu \left(k_0 - \frac{\nu}{\underline{|1}} k_1 x + \frac{\nu(\nu-1)}{\underline{|2}} k_2 x^2 + \cdots + (-1)^\nu k_\nu x^\nu\right)$$

$$(49) \qquad FK(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_\nu x^\nu) K_{\nu+1}(\omega)$$

ont lieu pour tout point régulier à l'intérieur de K.»

En chaque pôle $x=a$, au contraire, on a

$$(50) \qquad \lim_{\omega=\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu+1} \omega^{\nu+1} (-1)^\nu \left(k_0 - \frac{\nu}{\underline{|1}} k_1 x + \cdots + (-1)^\nu k_\nu x^\nu\right) \right| = \infty,$$

$$(51) \qquad \lim_{\omega=\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \cdots + k_\nu x^\nu) K_{\nu+1}(\omega) \right| = \infty.$$

La fonction $FK(x)$ devient méromorphe si elle n'a pas ($|x| < \infty$) d'autres singularités que des pôles (ausserw. singuläre Stellen). La fonction étant définie, comme nous avons supposé, par les constantes

$$k_\nu;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

remplissant la condition de CAUCHY

$$\overline{\lim_{\nu}} \sqrt[\nu]{|k_\nu|} = \frac{1}{r};\ r > 0,$$

M. HADAMARD a trouvé un critère de méromorphie de la fonction exprimée par les k_ν, savoir

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\overline{\lim_{n}} D_n^{(p)}} = 0$$

$$D_n^{(p)} = \begin{vmatrix} k_{n+1} & k_{n+2} & \ldots & k_{n+p} \\ k_{n+2} & k_{n+3} & \ldots & k_{n+p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n+p} & k_{n+p+1} & \ldots & k_{n+2p-1} \end{vmatrix}.$$

M. TORSTEN CARLEMAN [1], de son côté, vient de montrer qu'en partant du théorème de M. HADAMARD, on peut obtenir le théorème de M. FREDHOLM [2] suivant lequel la fonction $u(x)$, définie par l'égalité

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x; y)\, u(y)\, dy$$

$$|K(x; y)| < 1 \qquad |f(x)| < 1,$$

est une fonction méromorphe de λ.

M. FREDHOLM a donné différentes expressions de cette fonction valables pour tous les points λ.

On obtient au moyen de chacune de mes formules (39), (40) des nouvelles expressions valables pour tous les λ. La fonction $u(x)$ considérée comme fonction de λ s'exprime en réalité dans l'entourage de $\lambda = 0$ par la série de puissances

$$u(x) = U_x(\lambda) = \mathfrak{P}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, \lambda^n$$

où

---

[1] voir T. CARLEMANN. »Sur les équations intégrales». Comptes Rendus etc., t. 169, 1919, p. 773.

[2] I. FREDHOLM. »Sur une classe d'équations fonctionnelles». Ce journal, t. 27, p. 365—390.

$$f_0(x) = f(x); f_n(x) = \int_0^1 K(x; y) f_{n-1}(y)\,dy \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

et on a par conséquent

$$(39)\begin{cases} U_x(\lambda) = \\ \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu+1}\,\omega^{\nu+1}(-1)^{\nu}\left(f(x) - \frac{\nu}{\underline{|1}} f_1(x)\cdot\lambda + \frac{\nu(\nu-1)}{\underline{|2}} f_2(x)\cdot\lambda^2 + \cdots + (-1)^{\nu} f_{\nu}(x)\,\lambda^{\nu}\right) \end{cases}$$

$$(40)\begin{cases} U_x(\lambda) = \\ \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \left(f(x) + f_1(x)\,\lambda + f_2(x)\,\lambda^2 + \cdots + f_{\nu}(x)\,\lambda^{\nu}\right) K_{\nu+1}(\omega) \end{cases}$$

§ 3.

Dans le paragraphe précédent, je me suis placé au point de vue de WEIERSTRASS, en comptant les pôles aussi bien que les points réguliers comme appartenant à la fonction analytique. Il est pourtant quelquefois utile d'élargir cette conception en annexant à la fonction comme partie intégrante non seulement les pôles, mais encore les points singuliers isolés.

Je donnerai dans ce qui suit à ces points le nom de *poloïdes*. *Un poloïde est un point tel que la fonction soit régulière partout dans l'entourage du point sauf au point même.* Par conséquent, la fonction peut toujours dans l'entourage d'un poloïde P être représentée par la somme de deux séries

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x-P}\right) + \overline{\mathfrak{P}}(x-P)$$

dont la première est toujours convergente et dont la seconde converge dans l'entourage de $x = P$.

Si le nombre des termes de la série $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x-P}\right)$ est fini, le *poloïde* se réduit à un *pôle*. Les points singuliers d'une branche fonctionnelle uniforme dans un domaine donné qui ne sont pas des poloïdes seront appelés *points singuliers essentiels*.

Une fonction entière a donc un poloïde au point $x = \infty$, mais reste régulière partout ailleurs. Si la fonction est entière et rationnelle, le poloïde devient un pôle.

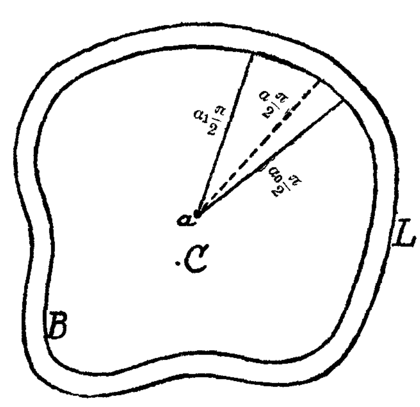
J'introduis maintenant une nouvelle étoile appartenant à la fonction $F(x)$ définie par les constantes a; $k_0, k_1, \ldots, k_\nu, \ldots$; $\overline{\lim_\nu}\, |\sqrt[\nu]{k_\nu}| = \frac{1}{r}$; $r > 0$, c'est à dire par la série convergente $\mathfrak{P}(x-a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu (x-a)^\nu$; je définis cette étoile de la manière suivante.

Je prolonge les différentes demi-droites issues du centre a jusqu'au premier point qui n'est ni un point régulier ni un poloïde, au lieu de m'arrêter, comme c'était le cas pour l'étoile K, au premier point qui n'est ni un point régulier ni un *pôle*. L'étoile que j'obtiens de cette manière sera désignée par L. Soit maintenant B une autre étoile, concentrique à L, située à l'intérieur de L et dont la frontière ne contient aucun poloïde. A l'intérieur de B ne se trouve alors qu'un nombre fini de poloïdes.

Je suis la frontière de B dans le sens direct. Si $\alpha \frac{\pi}{2}$ est l'angle compris entre deux demi-droites consécutives $a + (x-a)e^{i\alpha_0 \frac{\pi}{2}}$ et $a + (x-a)e^{i\alpha_1 \frac{\pi}{2}}$; $\alpha_0 < \alpha_1$ issues du centre qui passent par des *poloïdes* et si $x - a$ parcourt l'axe réel positif, la fonction $F\left(a + (x-a)e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}\right)$ restera régulière tant que $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$ tandis que ses valeurs régulières sur les demi-droites $\alpha = \alpha_0$ et $\alpha = \alpha_1$ deviendront

$$\lim_{\alpha=\alpha_0} F\left(a + (x-a)e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}\right) \text{ et } \lim_{\alpha=\alpha_1} F\left(a + (x-a)e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}\right).$$

C'est une conséquence immédiate de la propriété de $F(x)$ d'être uniforme à l'intérieur de l'étoile L et régulière dans l'entourage de $x = a$.



Il s'ensuit alors de mon théorème (formule 5) que l'égalité

$$(52) \qquad FL(x) = \lim_{\alpha=0} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot F_\alpha\left(\omega(x-a)\, e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$F_\alpha(\omega x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\cdot\nu}} (\omega x)^\nu$$

$$= \lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\cdot\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu \cdot d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \left((x-a)\, e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}\right)^\nu$$

a lieu partout à l'intérieur de l'étoile L.[1]

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant.

Théorème 4. »La fonction $F(x)$ définie par la branche fonctionnelle

$$FC(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots\cdots$$

est représentée à l'intérieur de l'étoile L par chacune des deux expressions

$$(53) \qquad \begin{aligned} &\lim_{\alpha=0} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha\left(\omega(x-a)\, e^{\pm i\alpha\frac{\pi}{2}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}};\ F_\alpha(\omega x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\cdot\nu}} (\omega x)^\nu, \\ &\lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\cdot\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \omega^\nu \cdot d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \left((x-a)\, e^{\pm i\alpha\frac{\pi}{2}}\right)^\nu. \end{aligned}$$

Ces expressions convergent uniformément dans tout domaine intérieur à A. Elles convergent encore en dehors de A sur toute demi-droite passant par un sommet de A qui est un poloïde de $F(x)$ intérieur à l'étoile L. La convergence est uniforme sur toute partie d'une telle demi-droite située à une distance finie entre deux poloïdes consécutifs ainsi que sur toute partie située à une distance finie entre le sommet et le poloïde le plus rapproché du sommet. Les égalités

$$(52) \qquad FL(x) = \lim_{\alpha=0} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha\left(\omega(x-a)\, e^{\pm i\alpha\frac{\pi}{2}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

[1] Cf. surtout la note de M. Oseen: »Zwei Bemerkungen über das Problem eine Taylorsche Reihe analytisch fortzusetzen«, pag. 5, Arkiv för Matematik, Astr. o. Fysik, Bd 13, No. 10, Stockholm 1918, ainsi que l. c. deux notes antérieures de M. H. v. Koch.

$$= \lim_{a=0} \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\lfloor \alpha \cdot \nu} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \cdot \omega^\nu \cdot d\omega^{\frac{1}{a}} \left((x-a)\, e^{\pm i a \frac{\pi}{2}} \right)^\nu$$

ont lieu pour tout point régulier à l'intérieur de L.»

Si la fonction $F(x)$ est analytique, uniforme et régulière en tous les points finis, excepté les poloïdes, ses valeurs régulières s'obtiennent par conséquent toutes au moyen de la formule (52).

L'expression est valable, on le voit facilement, dans une étoile plus étendue que l'étoile L. Il suffit en réalité qu'il n'existe à l'intérieur de chaque étoile B située à l'intérieur de L qu'un *nombre fini* de demi-droites sur lesquelles il se trouve des singularités de $F(x)$ entrecoupées par des parties régulières.

L'uniformité à l'entour de ces singularités n'est pas même nécessaire. Mais dans ce cas mon expression représente des deux côtés de la demi-droite des branches différentes de la fonction.[1]

D'un autre côté, il n'est pas exclu que l'étoile L peut être prolongée linéairement et uniformément en dehors de la frontière de L. Cette question demande une étude approfondie, à laquelle je reviendrai dans une autre note déjà rédigée. Dans la note actuelle comme dans mes notes antérieures je n'ai traité d'autre cas que celui où la fonction est définie dans l'entourage d'un point régulier. Il arrive pourtant en Analyse qu'une fonction soit définie non plus dans l'entourage d'un point régulier, mais dans un certain entourage d'un point singulier. Les représentations obtenues dans le premier cas peuvent souvent être modifiées ou généralisées de manière à rester valable dans le second cas. J'espère y revenir dans d'autres notes qui se trouvent rédigées depuis longtemps.

---

[1] Cf. PAINLEVÉ, OSEEN et v. KOCH l. c.

La formule (52) implique un triple passage à la limite, tandis que les expressions (48), (49) n'impliquent qu'un passage double.

J'ai énoncé un autre théorème très général dans les Comptes Rendus de l'Acad. d. Sci. de Paris, le 11 avril, 18 avril 1904. Cet énoncé doit être modifié pour devenir entièrement exact. J'espère y revenir.

M. OSEEN a publié (l. c. page 7) un autre théorème très général, où il s'occupe du problème de trouver une représentation d'une fonction $F(x)$ quelconque dans tout son domaine d'existence. Pour y parvenir, il se voit forcé d'introduire, outre les constantes $k_0, k_1, k_2, \dots k_\nu, \dots$, encore d'autres éléments de la fonction.

Toutes mes formules, au contraire, jouissent de la propriété essentielle qu'il n'y entre pas d'autres éléments de la fonction que les seules constantes $k_0, k_1, \dots k_\nu, \dots$, tout comme dans la représentation originale par la série de TAYLOR.