LES FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES.

PAR

R. DE MONTESSUS

À LILLE.

Introduction.

1. Sans craindre que l'avenir ne démente une telle assertion, on peut affirmer que l'étude des fractions continues algébriques prendra bientôt une grande place en analyse.

Il semble en effet que les fractions continues sont capables de représenter les fonctions mieux que ne le peuvent la plupart des autres algorithmes usités à cet effet. Elles paraissent de plus se prêter aisément aux calculs numériques.

L'étude des fractions continues est cependant à peine ébauchée et les deux grands problèmes qu'elles posent, le premier surtout, n'ont été résolus que dans des cas très particuliers.

Le premier de ces problèmes est celui-ci: *développer une fonction en fraction continue;* le second est *d'étudier la convergence des fractions continues.*

J'ai contribué déjà à l'étude de ces deux problèmes. Je vais le faire encore. Ces résultats, avec quelques autres, déjà publiés, ont été couronnés en décembre 1906 par l'Académie des Sciences de Paris.

I. Le problème du développement.

2. Soit, d'une part, une fonction $F(z)$, définie d'une manière quelconque, par exemple par une équation différentielle, dans une région E du plan x, y.

Soient, d'autre part, des fractions rationnelles

$$\frac{U_0(z)}{V_0(z)}, \frac{U_1(z)}{V_1(z)}, \frac{U_2(z)}{V_2(z)}, \ldots\ldots, \frac{U_n(z)}{V_n(z)}, \ldots\ldots \quad ,$$

(où $U_n(z)$, $V_n(z)$ sont des polynômes en z de degrés n, une généralisation facile pouvant faire intervenir des polynômes U_n, V_n, qui ne sont pas de même degré en z) telles que pour tout point z_1 d'une certaine région E intérieure à E_1, ou confondue avec E_1, les différences *numériques*

$$mod \left(F(z_1) - \frac{U_0(z_1)}{V_0(z_1)}\right) = \left|F(z_1) - \frac{U_0(z_1)}{V_0(z_1)}\right|, \left|F(z_1) - \frac{U_1(z_1)}{V_1(z_1)}\right|, \ldots, \left|F(z_1) - \frac{U_n(z_1)}{V_n(z_1)}\right|, \ldots$$

aillent en diminuant quand l'indice n croît et tendent vers zéro quand cet indice tend vers l'infini.

Cela posé, la suite

$$(1) \qquad \frac{U_0(z)}{V_0(z)}, \frac{U_1(z)}{V_1(z)}, \ldots, \frac{U_n(z)}{V_n(z)}, \ldots$$

représentera (par définition) la fonction $F(z)$ dans la région E. Elle la représenterait encore, cela est accessoire, si les différences précitées tendaient en moyenne vers zéro quand l'indice n croît indéfiniment, bien que ne diminuant pas toutes quand l'indice croît, si p. e. elles affectaient la forme

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \ldots$$

3. A la suite (1) correspond une fraction continue aisée à construire, mais on peut perdre de vue cette fraction continue et considérer la suite (1) *en soi*.

Le problème du développement de $F(z)$ en fraction continue devient alors celui-ci: *former une suite telle que* (1).

4. Ce problème offre une infinité de solutions *théoriques*, c'est évident.

Or, il se trouve que les fractions continues proprement dites préconisent une solution. La voici.

Si les fractions rationnelles de la suite (1) sont les *réduites* d'une fraction continue

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{\ddots}}}},$$

c. à d. si $\frac{U_0}{V_0} = \frac{a_1}{b_1}$, $\frac{U_1}{V_1} = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}}$, ..., il s'ensuit que les polynômes U_{n+1}, U_n, U_{n-1} sont liés par les relations

$$(2') \qquad U_{n+1} - b_{n+1} U_n - a_{n+1} U_{n-1} = 0$$

et, *de même*, que les polynômes V_{n+1}, V_n, V_{n-1} sont liés par les relations similaires

$$(2'') \qquad V_{n+1} - b_{n+1} V_n - a_{n+1} V_{n-1} = 0 .$$

Il est donc naturel de chercher des suites (1) dont les termes soient définis par la connaissance de U_0, V_0, U_1, V_1 et de relations telles que (2).

Une fois les relations (2) formées, on calculera aisément U_n, V_n, donc $\frac{U_n}{V_n}$, pour une valeur donnée de z. *C'est en ce sens que les fractions continues se prètent aisément au calcul numérique.*

5. En généralisant quelque peu les considérations qui précèdent, on doit donc poser comme il suit le problème du développement:

Former une suite de fractions rationnelles $\frac{U_0}{V_0}$, $\frac{U_1}{V_1}$, $\frac{U_2}{V_2}$, ..., *liées à la fonction* $F(z)$ *par cette condition: que les différences numériques*

$$\left| F(z) - \frac{U_n(z)}{V_n(z)} \right|$$

tendent, dans leur ensemble, vers zéro quand n croît indéfiniment, et, de plus, dont les termes soient liés par des relations de récurrence

$$\begin{cases} U_{n+p} + a_1 U_{n+p-1} + a_2 U_{n+p-2} + \cdots + a_p U_n = 0, \\ V_{n+p} + a_1 V_{n+p-1} + a_2 V_{n+p-2} + \cdots + a_p V_n = 0, \end{cases}$$

où p est indépendant de n, où $a_1, a_2, .., a_p$ *sont des fonctions, évidemment polynômes, connues.* $U_0, U_1, \ldots, U_{p-2}, V_0, V_1, \ldots, V_{p-2}$ *seront calculés directement.*

6. Le problème ainsi posé, et jusqu'ici il ne peut l'être différemment, laisse une large place à l'arbitraire, car cette condition:

les différences $\left| F(z) - \frac{U_n(z)}{V_n(z)} \right|$ *doivent tendre vers zéro quand n croît indéfiniment,*

n'est pas précisée.

Si $F(z) + \textit{polynôme} + s_0 + \frac{s_1}{z} + \cdots + \frac{s_k}{z^k}$ (où les *deux* termes complémentaires écrits *polynôme*, $s_0 + \frac{s_1}{z} + \cdots + \frac{s_k}{z^k}$, peuvent être absents) peut être développée en série

$$S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots + \frac{S_n}{z^n} + \cdots,$$

il est naturel de déterminer $\frac{U_n(z)}{V_n(z)}$ par cette condition: *que les* $2n+1$ *premiers termes de son développement en* $\frac{1}{z}$ *soient* S_0, $\frac{S_1}{z}$, $\frac{S_2}{z^2}$, ..., $\frac{S_{2n}}{z^{2n}}$, *en sorte que, aux deux termes complémentaires près,*

$$F(z) - \frac{U_n(z)}{V_n(z)} = \frac{\lambda_1}{z^{2n+1}} + \frac{\lambda_2}{z^{2n+2}} + \cdots, \text{ où peu importent les } \lambda.$$

Cette condition suffit à définir les fractions $\frac{U_n}{V_n}$.

Reste à calculer la loi de récurrence (2). Le problème n'est pas résolu, mais il est posé de façon précise.

On peut faire de même si $F(z)$ admet un développement de la forme $S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \cdots$.

7. *Le problème du développement n'a été résolu que dans un petit nombre de cas.*

Quelques auteurs, EULER, LAGRANGE, LAPLACE et GAUSS, entre autres, ont formé les relations (2) en calculant

$$U_0, V_0, U_1, V_1, U_2, V_2, U_3, V_3, \ldots., a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots.$$

et en remarquant qu'une loi *apparaît* dans la forme des polynômes a_{n+1}, b_{n+1} (qui figurent dans les relations (2)): cela permet d'écrir a_n, b_n.

Ce procédé n'a aucun interêt.

Seul, LAGUERRE a esquissé une méthode non empirique, mais il n'a vraiment développé que quelques fonctions très-simples.

Au prix de calculs fort compliqués, j'ai réussi à développer, d'après les indications de LAGUERRE, [1] les fonctions $Z(z)$ qui vérifient l'équation différentielle

$$(az+b)(cz+d)Z'(z) = (pz+q)Z + \Pi(z),$$

a, b, c, d, p, q étant des constantes et $\Pi(z)$ un polynôme. Il est supposé que $Z(z)$ admet un développement *formel*

$$S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots$$

et cela exige que l'équation différentielle soit réduite à celle-ci:

$$(az+b)(cz+d)Z'(z) = (pz+q)Z + c_0 + c_1 pz,$$

a, b, c, d, p, q, c_0, c_1 étant des constantes.

[1] *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1905.

Dès lors les fonctions $Z(z)$ effectivement développées en fractions continues sont toutes de la forme

$$Z(z)=\frac{c_0+c_1\,pz}{(az+b)\,(cz+d)}\,e^{-\int\frac{pz+q}{(az+b)\,(cz+d)}dz}$$

Deux formes particulières sont intéressantes; si c_0 et c_1 sont nuls,

$$Z(z)=\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^{\frac{q}{ad-bc}}\;;$$

si p et q sont nuls,

$$Z(z)=\frac{c_0}{bc-ad}\log\frac{cz+d}{az+b}$$

La méthode de développement indiquée par Laguerre est-elle susceptible d'extension?

8. La méthode de développement indiquée par LAGUERRE est actuellement la seule qui offre quelque généralité. Elle s'applique aux fonctions $Z(z)$ qui, admettant un développement formel

$$S_0+\frac{S_1}{z}+\frac{S_2}{z^2}+\cdots \tag{3}$$

vérifient en outre l'équation différentielle

$$(az+b)\,(cz+d)\,Z'(z)=(pz+q)\,Z+c_0+c_1\,pz\,.$$

Cette méthode s'applique-t-elle aux fonctions $Z(z)$ qui, admettant un développement formel (3) vérifient l'équation différentielle plus générale

$$A_a(z)\,.\,Z'(z)+B_b(z)\,.\,Z(z)+C_c(z)=0\,, \tag{4}$$

où $A_a(z)$, $B_b(z)$, $C_c(z)$ sont des polynômes en z de degrés respectifs a, b, c?

9. *La réponse est malheureusement négative.* C'est en vain que LAGUERRE s'est efforcé de vaincre les difficultés qui se présentent. Mais ces difficultés ne sont peut-être pas insurmontables. Il y a donc lieu de les indiquer, car le problème offre un grand interêt.

Tout d'abord, la nécessité que $Z(z)$ admette un développement de la forme (3) implique entre les degrés a, b, c des polynômes A, B, C l'une des relations, qui s'excluent mutuellement,

$$a-2=b>c,\quad a-2=c>b,\quad b=c>a-2,\quad a-2=b=c,$$

ce qui restreint la généralité de l'équation (4).

A dire vrai, en dehors des seuls cas où

$$a-2>b\geqq c,\quad b>a-2\geqq c,$$

$Z(z)$ admet un développement de l'une des formes

$$S_0+\frac{S_1}{z}+\frac{S_2}{z^2}+\cdots,\ \text{polynôme}+S_0+\frac{S_1}{z}+\frac{S_2}{z^2}+\cdots,\ \frac{S^p}{z^p}+\frac{S^{p+1}}{z^{p+1}}+\frac{S^{p+2}}{z^{p+2}}+\cdots$$

et, par suite, on peut déduire de (4) une équation

$$D_d(z)\,T'(z)+E_e(z)\,T(z)+F_f(z)=0$$

dont une solution

$$T(z)=S_0+\frac{S_1}{z}+\frac{S_2}{z^2}+\cdots=\begin{cases}\text{soit } Z(z)-\text{polynôme}\\ \text{soit } S_0+\dfrac{S_1}{z}+\dfrac{S_2}{z^2}+\cdots+\dfrac{S^{p-1}}{z^{p-1}}+Z(z)\end{cases}$$

a la forme voulue.

$T(z)$ étant développée en fraction continue, $Z(z)$ pourra être regardé comme l'étant elle-même.

10. La fonction $Z=c^{-\frac{2}{z}-\frac{g}{z^2}}$, étudiée par Laguerre, nous montrera clairement où gît la difficulté signalée plus haut.

Essayons de la développer.

Elle vérifie l'équation differentielle

$$z^3Z'(z)=2(z+g)Z \tag{5}$$

et elle admet bien un développement formel

$$S_0+\frac{S_1}{z}+\frac{S_2}{z^2}+\cdots\ :$$

il est aisé de le constater, en substituant ce développement dans l'équation (5).

Soient des polynômes U, V définis par les relations (les λ ne sont pas déterminés à priori)

$$\frac{U_0}{V_0}=\frac{a_0^0}{b_0^0}=S_0,\quad \frac{U_1}{V_1}=\frac{a_0^1z+a_1^1}{b_0^1z+b_1^1}=S_0+\frac{S_1}{z}+\frac{S_2}{z^2}+\frac{\lambda_1^1}{z^3}+\cdots$$

$$\frac{U_2}{V_2}=\frac{a_0^2z^2+a_1^2z+a_2^2}{b_0^2z^2+b_1^2z+b_2^2}=S_0+\frac{S_1}{z}+\frac{S_2}{z^2}+\frac{S_3}{z^3}+\frac{S_4}{z^4}+\frac{\lambda_1^2}{z^5}+\cdots,$$

$$\frac{U_n}{V_n}=\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n} = S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots + \frac{S_{2n}}{z^{2n}} + \frac{\lambda_1}{z^{2n+1}} + \cdots ,$$

relations qui permettent de calculer les quantités a, b.

Cela posé, la méthode de LAGUERRE comprend trois parties.

1°. On peut écrire

$$Z(z) = \frac{U_n}{V_n} + \left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right),$$

$\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)$ désignant une série de la forme $\frac{\lambda}{z^{2n+1}} + \frac{\mu}{z^{2n+2}} + + \frac{\nu}{z^{2n+3}} + \cdots$, d'où

$$Z'(z) = \frac{V_n U'_n - U_n V'_n}{V_n^2} + \left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right);$$

substituons dans (5):

$$z^3 [V_n U'_n - U_n V'_n] - 2(z+g) U_n V_n = - V_n^2 \left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right) + 2(z+g) V_n^2 \left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right) = V_n^2 \left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right);$$

changeons z en $\frac{1}{z}$ et désignons par (z^{2n-1}) les séries de la forme $\lambda' z^{2n-1} + \mu' z^{2n} + {}$ $+ \nu' z^{2n+1} + \cdots$:

$$\frac{1}{z^3}\left[V_n\left(\frac{1}{z}\right) U'_n\left(\frac{1}{z}\right) - U_n\left(\frac{1}{z}\right) V'_n\left(\frac{1}{z}\right)\right] - 2\left(\frac{1}{z}+g\right) U_n\left(\frac{1}{z}\right) V_n\left(\frac{1}{z}\right) = V_n^2\left(\frac{1}{z}\right)(z^{2n-1});$$

multiplions par z^{2n+2} et posons

$$z^n U_n\left(\frac{1}{z}\right) = U_{n,1}, \quad z^n V_n\left(\frac{1}{z}\right) = V_{n,1}, \quad \text{etc.} \ldots$$

Il viendra

$$V_{n,1} \cdot U'_{n,1} - U_{n,1} \cdot V'_{n,1} - 2z(1+gz) U_{n,1} \cdot V_{n,1} = V_{n,1}^2 (z^{2n+1}) = h_0 z^{2n+1} + h_0 z^{2n+2} + \cdots$$

Le premier membre de cette relation est un polynôme de degré $2n+2$; donc aussi le second membre, qui, dès lors, se réduit à

$$h_0 z^{2n+1} + h_1 z^{2n+2};$$

divisant par z^{2n+2},

$$\frac{1}{z^3}\left[V_n\left(\frac{1}{z}\right) U'_n\left(\frac{1}{z}\right) - U_n\left(\frac{1}{z}\right) V'_n\left(\frac{1}{z}\right)\right] - 2\left(\frac{1}{z}+g\right) U_n\left(\frac{1}{z}\right) V_n\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{h_0}{z} + h_1;$$

changeant à nouveau z en $\frac{1}{z}$,

$$z^3(V_n U'_n - U_n V'_n) - 2(z+g) U_n V_n = h_0 z + h_1$$

ce qu'on peut écrire

$$V_n^2\left[z^3\left(\frac{U_n}{V_n}\right)' - 2(z+g)\frac{U_n}{V_n}\right] = h_0 z + h_1 . \tag{6}$$

En général, on aura

$$V_n^2\left[A\left(\frac{U_n}{V_n}\right)' + B\left(\frac{U_n}{V_n}\right) + C\right] = D . \tag{7}$$

On a ainsi formé une équation différentielle que vérifie $\frac{U_n}{V_n}$; le second membre de cette équation, $h_0 z + h_1$ ou D, est *inconnu*. S'il se réduit à une constante, comme dans le cas des fonctions $Z(z)$ vérifiant l'équation

$$(az+b)(cz+d)Z'(z) = (pz+q)Z(z) + c_0 + c_1 pz , \tag{8}$$

on peut donner à cette constante une valeur *arbitraire* et poursuivre les calculs. Mais, il est facile de le voir en traîtant directement l'équation (4), ce second membre ne se réduit à une constante que pour l'équation (8).

Il se pose donc ici cette question: *calculer le second membre de l'équation* (6) *et des équations analogues auxquelles on peut être conduit.*

2°. *Ce second membre calculé,* on pourra former, comme l'a indiqué LAGUERRE, une équation différentielle vérifiée par V_n, équation que j'ai formée pour les fonctions $Z(z)$ que définit l'équation (8). Voici le calcul. Posant $T = e^{\int \frac{Bb}{Aa} dz}$, soient

$$y_1 = V_n(z), \quad y_2 = T[U_n(z) - V_n(z) Z(z)],$$

deux solutions d'une équation différentielle

$$Ny'' - My' + Hy = 0 . \tag{9}$$

Cherchons la forme que N, M, H doivent affecter.

Entre

$$Ny''_1 - My'_1 + Hy_1 = Ny''_2 - My'_2 + Hy_2 = 0 ,$$

éliminons H:

$$N(y''_1 y_2 - y''_2 y_1) = M(y'_1 y_2 - y'_2 y_1) ,$$

d'où

(10) $$\frac{M}{N} = \frac{d}{dz} \operatorname{Log}(y'_1 y_2 - y'_2 y_1).$$

Calculons $\frac{M}{N}$:

$$y'_1 y_2 - y'_2 y_1 = V_n^2 \left\{ T\left[Z' - \left(\frac{U_n}{V_n}\right)'\right] + T'\left(Z - \frac{U_n}{V_n}\right)\right\},$$

or, (7) donne

$$V_n^2\left[A\left(\frac{U_n}{V_n}\right)' + B\left(\frac{U_n}{V_n}\right) + C\right] = D,$$

et, par hypothèse

$$V_n^2[AZ' + BZ + C] = 0,$$

d'où, par soustraction,

$$V_n^2\left\{A\left[Z' - \left(\frac{U_n}{V_n}\right)'\right] + B\left[Z - \frac{U_n}{V_n}\right]\right\} = -D;$$

si l'on remarque que

$$T = \varrho A, \quad T' = \varrho B, \quad \left(\varrho = \frac{1}{A} e^{\int \frac{B}{A} dz}\right),$$

on peut écrire

$$y'_1 y_2 - y'_2 y_1 = V_n^2\left\{\varrho A\left[Z' - \left(\frac{U_n}{V_n}\right)'\right] + \varrho B\left(Z - \frac{U_n}{V_n}\right)\right\},$$

et il vient enfin

$$y'_1 y_2 - y'_2 y_1 = -\varrho D,$$

d'où

$$\frac{M}{N} = \frac{d}{dz}\operatorname{Log}(-\varrho D) = -\frac{A'}{A} + \frac{B}{A} + \frac{D'}{D}.$$

L'équation (9) que vérifie y_1 ou V_n s'écrit donc

$$y'' - \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B}{A} + \frac{D'}{D}\right) y' + \frac{H}{N} y = 0.$$

Posant $\frac{H}{N} = \frac{L}{AD}$, on voit que V_n vérifie l'équation différentielle

(11) $$V''_n - \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B}{A} + \frac{D'}{D}\right) V' + \frac{L}{AD} V = 0,$$

où, *D supposé connu*, L (qui est évidemment un polynôme, comme V''_n, V'_n, A, B, D, A', D' ou peut-être une fraction rationnelle) est à déterminer.

Voilà un nouveau problème, sans doute moins difficile que le précédent.

3°. De l'équation (10), il s'agira ensuite de déduire les relations de récurrence

$$(12)\qquad \begin{cases} U_{n+1} - P_n U_n - Q_n U_{n-1} = 0 \\ V_{n+1} - P_n V_n - Q_n V_{n-1} = 0 \end{cases}$$

que vérifient les polynômes U, V. C'est peut-être le plus facile des trois problèmes, car P_n, Q_n ont une forme particulièrement simple.

En effet, d'après la définition même des fractions rationnelles $\frac{U_n}{V_n}$,

$$\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n} = \left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right),$$

d'où

$$U_{n+1} V_n - U_n V_{n+1} = V_n V_{n+1} \left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right).$$

Changeons z en $\frac{1}{z}$, multiplions par z^{2n+1} et posons

$$z^{n+1} U_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) = U_{n+1}^1, \quad z^{n+1} V_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) = V_{n+1}^1, \ldots . :$$

$$U_{n+1}^1 V_n^1 - U_n^1 V_{n+1}^1 = V_n^1 V_{n+1}^1 (z^{2n+1}) = S_0^{n+1} z^{2n+1} + S_1^{n+1} z^{2n+2} + \cdots$$

le premier membre étant de degré $2n+1$, il en est de même du second, qui se réduit par suite à $S_0^{n+1} z^{2n+1}$; donc

$$\frac{U_{n+1}^1}{V_{n+1}^1} - \frac{U_n^1}{V_n^1} = \frac{S_0^{n+1} z^{2n+1}}{V_n^1 V_{n+1}^1};$$

échangeant à nouveau z en $\frac{1}{z}$,

$$\frac{U_{n+1}^1\left(\frac{1}{z}\right)}{V_{n+1}^1\left(\frac{1}{z}\right)} - \frac{U_n^1\left(\frac{1}{z}\right)}{V_n^1\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{S_0^{n+1}}{V_n^1\left(\frac{1}{z}\right) V_{n+1}^1\left(\frac{1}{z}\right) z^{2n+1}},$$

ou

$$\frac{z^{n+1} U_{n+1}^1\left(\frac{1}{z}\right)}{z^{n+1} V_{n+1}^1\left(\frac{1}{z}\right)} - \frac{z^n U_n^1\left(\frac{1}{z}\right)}{z^n V_n^1\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{S_0^{n+1}}{V_n^1\left(\frac{1}{z}\right) V_{n+1}^1\left(\frac{1}{z}\right) z^{2n+1}},$$

ou enfin,

$$\frac{U_{n+1}(z)}{V_{n+1}(z)} - \frac{U_n(z)}{V_n(z)} = \frac{S_0^{n+1}}{V_n(z)\,V_{n+1}(z)}$$

c. à. d.

(13) $$U_{n+1} V_n - U_n V_{n+1} = S_0^{n+1};$$

or, les relations (11) nous donnent, par élimination de P_n,

$$U_{n+1} V_n - U_n V_{n+1} = -Q_n (U_n V_{n-1} - U_{n-1} V_n);$$

de même,

$$U_n V_{n-1} - U_{n-1} V_n = -Q_{n-1} (U_{n-1} V_{n-2} - U_{n-2} V_{n-1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$U_2 V_1 - U_1 V_2 = -Q_1 (U_1 V_0 - U_0 V_1);$$

multipliant toutes ces relations membres à membres,

$$U_{n+1} V_n - U_n V_{n+1} = \pm Q_1 Q_2 \ldots Q_{n-1} Q_n (U_1 V_0 - U_0 V_1);$$

$U_{n+1} V_n - U_n V_{n+1}$, $U_1 V_0 - U_0 V_1$ sont indépendants de z, en vertu de la relation (13); donc $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$ l'est aussi et Q_n l'est lui-même en dernier lieu.

Ainsi, *Q_n est indépendant de z.*

D'autre part, un calcul semblable montre que

$$U_{n+1} V_{n-1} - V_{n+1} U_{n-1}$$

est de la forme

$$\gamma_0^{n+1} + \gamma_1^{n+1} z;$$

or, si l'on élimine Q_n entre les relations (12), il vient

$$U_{n+1} V_{n-1} - V_{n+1} U_{n-1} = P_n (U_n V_{n-1} - U_{n-1} V_n)$$

ou

$$\gamma_0^{n+1} + \gamma_1^{n+1} z = P_n S_0^n;$$

donc P_n est de la forme

$$H_n z + K_n$$

et les relations (12) s'écrivent

(14) $$\begin{cases} U_{n+1} - (H_n z + K_n) U_n - Q_n U_{n-1} = 0 \\ V_{n+1} - (H_n z + K_n) V_n - Q_n V_{n-1} = 0 \end{cases}$$

où H_n, K_n, Q_n sont indépendants de z.

Cette forme très-simple des relations (14) permet de penser qu'on peut les déduire facilement des relations (11) une fois connues. Je l'ai fait pour le cas de l'équation (8).

10. En définitive, la méthode de Laguerre ne peut, telle qu'elle est, se prêter à une extension. Il y a lieu de lui apporter de notables perfectionnements: nous avons dit en quels points. Le problème mérite qu'on l'étudie.

11. Nous allons aborder maintenant le problème de la convergence.

Remarquons à ce propos que ce problème n'est pas intimement lié à celui du développement. Il est peu de fonction qu'on sache développer en séries de puissances, séries de polynômes, séries trigonométriques. On sait cependant quels beaux travaux l'étude de la convergence de ces séries a inspiré.

II. Le problème de la convergence.

12. Je vais préciser et compléter des résultats que j'ai donnés dans un mémoire déjà publié. [1]

L'équation $(az+b)(cz+d)Z' = (pz+q)Z + c_0 + c_1 pz$.

13. J'ai montré [1] que le développement en fraction continue de la fonction Z converge pour toutes les valeurs de z, sauf *peut-être* pour les points du plan des x, y situés sur la droite joignant les deux points $z_1 = -\frac{b}{a}$, $z_2 = -\frac{d}{c}$.

Je vais montrer que si a, b, c, d, p, q, c_0, c_1 sont réels, il y a sûrement divergence en tous les points du segment de droite $z_1 z_2$. Je généraliserai plus loin les considérations que je vais exposer et j'en tirerai une conclusion des plus importantes (§ 15).

Je simplifierai l'exposé en me bornant au cas où $p = 0$ et où $ac < 0$.

Alors, les relations (12) sont [1]

$$(15)\qquad \begin{cases} U_{n+1} - (2n+1)(Pz+Q)\,U_n + (n^2R^2 - \omega^2)\,U_{n-1} = 0, \\ V_{n+1} - (2n+1)(Pz+Q)\,V_n + (n^2R^2 - \omega^2)\,V_{n-1} = 0, \end{cases}$$

avec

$$(15^{\text{bis}})\qquad P = ac, \quad 2Q = ad + bc, \quad 2R = ad - bc, \quad 2\omega = q.$$ [1]

De plus, [1]

---

[1] *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1905. Quelques-uns de ces résultats ont été communiqués sans démonstrations à l'Académie des sciences de Paris (C. R. 1905).

(15^ter) $$(az+b)(cz+d)\frac{d}{dz}V_n = [n(Pz+Q)-\omega]V_n - (n^2R^2-\omega^2)V_{n-1}.$$

Je désignerai par ν le plus petit entier positif vérifiant la relation

(16) $$\nu - 1 < \left|\frac{\omega}{R}\right| < \nu,$$

d'où

(17) $n^2R^2-\omega^2<0$ pour $n=1, 2, 3, \ldots, \nu-1$ et $n^2R^2-\omega^2>0$ pour $n \geqq \nu$.

Considérons alors la suite

(18) $$V_{\nu-1},\ V_{\nu-2},\ V_{\nu-3},\ \ldots,\ V_1,\ V_0.$$

Cette suite a les propriétés suivantes.

1°. Deux fonctions consécutives V_{n+1}, V_n ne s'annulent pas pour une même valeur de la variable z; si ce fait se produisait, en vertu des relations

$$V_{n+1}-(2n+1)(Pz+Q)V_n+(n^2R^2-\omega^2)V_{n-1}=0,\ \text{etc.}\ldots,$$

V_0 s'annulerait pour cette valeur de z. Cela est impossible, puisque V_0 est indépendant de z.

2°. V_0, qui est une constante, a le même signe pour toutes les valeurs réelles de z.

3°. En raison de la relation

$$V_{\nu-p}-[2(\nu-p-1)+1](Pz+Q)V_{\nu-p-1}+[(\nu-p-1)^2R^2-\omega^2]V_{\nu-p-2}=0,$$

si $V_{\nu-p-1}$ s'annule pour une valeur réelle de z, $V_{\nu-p}$, $V_{\nu-p-2}$ sont de signes contraires pour cette même valeur réelle de z, puisque (17) le coefficient de $V_{\nu-p-2}$ est négatif.

4°. On a (15)

$$(az+b)(cz+d)V'_{\nu-1}=[(\nu-1)(Pz+Q)-\omega]V_{\nu-1}-[(\nu-1)^2R^2-\omega^2]V_{\nu-2};$$

donc, si $V_{\nu-1}$ s'annule pour une valeur réelle de z compris entre $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$, $V_{\nu-2}$, $V'_{\nu-1}$ ont le même signe pour cette valeur de z.

La suite (18) *est donc une suite de Sturm pour les valeurs de z comprises entre* $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$.

Théorème. $V_{\nu-1}$ **n'a aucune racine réelle comprise entre** $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$.

[1] *Rendiconti del Circolo math. di Palermo.* 1905.

D'après le théorème de STURM, le nombre de racines réelles de $V_{\nu-1}$ comprises entre $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$ est égal à l'excès du nombre des variations que présente la suite (18) pour $z=-\frac{b}{a}$ sur le nombre des variations qu'elle présente pour $z=-\frac{d}{c}$.

Nous allons voir que cet excès est nul.

Calculons la valeur que prend $Pz+Q$ pour $z=-\frac{b}{a}$, $z=-\frac{d}{c}$;

$$(19)\qquad \begin{cases}(Pz+Q)_{z=-\frac{b}{a}}=P\left(-\frac{b}{a}\right)+Q=ac\left(-\frac{b}{a}\right)+\frac{ad+bc}{2}=R\\ (Pz+Q)_{z=-\frac{d}{c}}=-R.\end{cases}$$

De plus, faisons $z=-\frac{b}{a}$, $z=-\frac{d}{c}$ dans la relation (15) ou plutôt celle-ci:

$$(az+b)(cz+d)\,V'_{\nu-p}=[(\nu-p)(Pz+Q)-\omega]\,V_{\nu-p}-[(\nu-p)^2R^2-\omega^2]\,V_{\nu-p-1};$$

il vient (19) $\left[V^1_\pi=(V_\pi)_{z=-\frac{b}{a}},\ V^2_\pi=(V_\pi)_{z=-\frac{d}{c}}\right]$

$$(20)\qquad V^1_{\nu-p}-[(\nu-p)R+\omega]\,V^1_{\nu-p-1}=0,\ V^2_{\nu-p}+[(\nu-p)R-\omega]\,V^2_{\nu-p-1}=0.$$

Or $$-[(\nu-p)R+\omega],\quad [(\nu-p)R-\omega]$$

sont de même signe, car leur produit

$$-[(\nu-p)R^2-\omega^2]$$

est positif (17).

La suite (18) présente donc, comme le montrent les relations (20), autant de variations pour $z=-\frac{b}{a}$ que pour $z=-\frac{d}{c}$, c. q. f. d.

Considérons maintenant la suite

$$(21)\qquad V_n,\ -V_{n-1},\ +V_{n-2},\ \cdots \pm V_{\nu+1},\ \mp V_\nu,\ \pm V_{\nu-1}.$$

I. Deux fonctions consécutives de cette suite ne s'annulent pas pour une même valeur de z comprise entre $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$, (13) puisque $V_{\nu-1}$ ne s'annule pas elle-même (supra) dans cet intervalle.

II. $V_{\nu-1}$ conserve un signe constant quand z varie de $-\frac{b}{a}$ à $-\frac{d}{c}$ puisqu'elle ne s'annule pas dans cet intervalle.

III. On a (13), $V_{h+1} + (2h+1)(Pz+Q)(-V_h) + (h^2R^2 - \omega^2)V_{h-1} = 0$ avec (17) $h^2R^2 - \omega^2 > 0$; donc si V_h s'annule pour une valeur z_0 de l'intervalle $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$, $V_{h+1}(z_0)$, $V_{h-1}(z_0)$ ont des valeurs de signes contraires.

IV. En raison de la relation (15) où $n^2R^2 - \omega^2 > 0$, pour toute valeur de z annulant V_n, V'_n et $(-V_{n-1})$ ont le même signe.

La suite (21) *est donc une suite de Sturm pour les valeurs de z comprises entre* $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$.

Cela nous permet de calculer le nombre de racines réelles que possède V_n dans l'intervalle $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$.

Pour $z = -\frac{b}{a}$, $z = -\frac{d}{c}$ la relation (15) donne $\left[n = h,\ P\left(-\frac{b}{a}\right) + Q = R,\right.$ $\left. P\left(-\frac{d}{c}\right) + Q = -R,\ V_k^1 = V_k\left(-\frac{b}{a}\right),\ V_k^2 = V_k\left(-\frac{d}{c}\right)\right]$

$$\begin{cases} (hR - \omega)V_h^1 + (h^2R^2 - \omega^2)(-V_{h-1}^1) = 0, \\ -(hR + \omega)V_h^2 + (h^2R^2 - \omega^2)(-V_{h-1}^2) = 0, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} V_h^1 + (hR + \omega)(-V_{h-1}^1) = 0, \\ V_h^2 - (hR - \omega)(-V_{h-1}^2) = 0, \end{cases}$$

avec (17)

$$(hR + \omega)(hR - \omega) = h^2R^2 - \omega^2 > 0,$$

ce qui montre que $hR + \omega$, $-(hR - \omega)$ sont de signes contraires; l'une des suites

$$\ldots, V_h^1, -V_{h-1}^1, V_{h-2}^1, \ldots$$
$$\ldots, V_h^2, -V_{h-1}^2, V_{h-2}^2, \ldots$$

ne présente donc que des variations, tandis que l'autre n'en présente pas; le nombre des variations de celle qui en présente est (21) $n - (\nu - 1) = n - \nu + 1$, c'est aussi l'excès du nombre des variations de l'une des deux suites sur le nombre des variations de l'autre suite, en sorte que V_n possède $n - \nu + 1$ racines réelles dans l'intervalle $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$. ν étant un nombre fixe, on voit que V_n *possède un* *nombre de racines, comprises entre* $-\frac{b}{a}$ *et* $-\frac{d}{c}$, *d'autant plus grand que* n *est lui-même plus grand.*

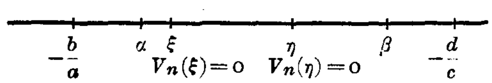
On aperçoit donc ici la cause de la divergence sur le segment rectiligne $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$: *Quel que soit le point* z_0 *de cet intervalle,* $V_n(z_0)$ *tendra vers zéro quand* n *croîtra indéfiniment et par suite,* $\frac{U_n(z_0)}{V_n(z_0)}$ *tendra vers l'infini.*

V_n a bien des racines (en nombre fixe $\nu - 1$) extérieures à ce segment; mais aucune de ces racines n'est infiniment voisine des racines de V_{n+1}, $V_{n+2}, \ldots$; si donc $V_n(z_k) = 0$, z_k extérieur à $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$, on aura une suite convergente au point z_k en supprimant $\frac{U_n(z_k)}{V_n(z_k)}$ de la suite

$$\frac{U_0}{V_0}, \frac{U_1}{V_1}, \ldots, \frac{U_n}{V_n}, \ldots$$

On peut confirmer l'assertion précédente en montrant que:

Théorème: Si ξ, η **sont deux racines réelles, consécutives, comprises entre** $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$ **de l'équation** $V_n = 0$, $(n > \nu)$, **elles comprennent une racine et une seule de l'équation** $V_{n-1} = 0$.



Choisissons deux nombres α, β de l'intervalle $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$, α plus petit que ξ, β plus grand que η (on suppose $\xi < \eta$) tels que $-V_{n-1}(\alpha)$ et $-V_{n-1}(\xi)$ soient de même signe et $-V_{n-1}(\eta)$, $-V_{n-1}(\beta)$ soient aussi de même signe; il suffira que α, β soient assez voisin respectivement de ξ, η.

Si V_n passe d'une valeur négative à une valeur positive quand z atteint et dépasse ξ, il passera d'une valeur positive à une valeur négative quand z atteindra et dépassera η, puisque ξ, η sont deux racines *consécutives* de V_n. Il en résulte que $V'_n(\xi)$ est, dans cette hypothèse, positif; or la relation

$$(az+b)(cz+d)\,V'_n = [n(Pz+Q) - \omega]\,V_n + (n^2R^2 - \omega^2)(-V_{n-1})$$

donne

$$(a\xi+b)(c\xi+d)\,V'_n(\xi) = (n^2R^2 - \omega^2)\,[-V_{n-1}(\xi)],$$

où

$$(a\xi+b)(c\xi+d) > 0 \text{ (on suppose } ac < 0\text{) et } n^2R^2 - \omega^2 > 0;$$

on en conclut que

$$V'_n(\xi) \text{ et } \quad -V_{n-1}(\xi)$$

sont de même signe, que $-V_{n-1}(\xi)$ est positif, que $-V_{n-1}(\alpha)$ est aussi positif. *De même,* $-V_{n-1}(\beta)$ est, comme $-V_{n-1}(\eta)$, négatif.

Si V_n passait du positif au négatif quand z atteint et dépasse ξ, $-V_{n-1}(\alpha)$ serait négatif et $-V_{n-1}(\beta)$ serait positif.

Nous avons donc

soit
$$\begin{cases} V_n(\alpha) < 0 & -V_{n-1}(\alpha) > 0\,, \\ V_n(\beta) < 0 & -V_{n-1}(\beta) < 0\,, \end{cases}$$

soit
$$\begin{cases} V_n(\alpha) < 0 & -V_{n-1}(\alpha) < 0\,, \\ V_n(\beta) < 0 & -V_{n-1}(\beta) > 0\,. \end{cases}$$

Dans la première hypothèse, V_n, $-V_{n-1}$ perdent *une* variation quand on passe de α à β.

Or la suite

$$V_n, \ -V_{n-1}, \ V_{n-2}, \ldots, \pm V_{\nu-1}$$

perd *deux* variations quand on passe de α à β, puisque α, β comprennent deux racines de $V_n = 0$ et pas davantage.

Donc la suite

$$-V_{n-1}, \ V_{n-2}, \ldots, \pm V_{\nu-1}$$

perd *une* variation quand on passe de α à β, ou de ξ à η; par suite, ξ, η comprennent bien une racine et une seule de $-V_{n-1} = 0$.

On voit ainsi que **dans l'intervalle** $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$, **les racines réelles de** $V_n = 0$ **séparent les racines réelles de** $V_{n-1} = 0$.

Resterait à prouver que **dans tout intervalle** $h_1 h_2$ **du segment** $-\frac{a}{b}$, $-\frac{d}{c}$ **existe au moins une racine de** $V_n = 0$, **si l'on prend** n **assez grand, et cela quelque petit que soit l'intervalle** $h_1 h_2$. La divergence de la suite

$$\frac{U_0}{V_0}, \ \frac{U_1}{V_1}, \ \frac{U_2}{V_2}, \ldots$$

sur le segment $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$ serait ainsi *complètement* établie. Je ne m'arrête pas à cette proposition, dont je n'ai pas la démonstration, car d'une part il me suffit de la faire presentir pour indiquer la raison de la divergence de la suite indiquée sur le segment $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$ et, d'autre part, on ne peut songer, avec les moyens dont dispose l'algèbre actuelle à étendre au segment $-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}$, *supposé imaginaire*, les propositions que nous avons démontrées dans le cas où il est réel. Je reviendrai un peu plus loin sur cette question, qui se prête à une généralisation complète (§ 19).

La représentation des fonctions par des fractions continues.

14. Ayant développé une fonction en fraction continue, il y a lieu de prouver que la différence entre la fonction et la réduite $\frac{U_n}{V_n}$ de rang n tend vers zéro. Je vais le faire pour le développement de la fonction

$$Z(z) = S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots$$

qui vérifie l'équation différentielle

$$(az+b)(cz+d)Z'(z) - (pz+q)Z - c_0 - c_1 pz = 0,$$

seul développement que la méthode de Laguerre permette d'obtenir.

Je partirai de la relation

$$az+b)(cz+d)(V_n U'_n - U_n V'_n) - (pz+q)U_n V_n - (c_0 + c_1 pz)V_n^2 = U_n V_{n+1} - U_{n+1} V_n,$$

que j'ai obtenue dans un mémoire précité et que j'écrirai

$$(az+b)(cz+d)\frac{d}{dz}\left(\frac{U_n}{V_n}\right) - (pz+q)\frac{U_n}{V_n} - (c_0 + c_1 pz) = \frac{U_n}{V_n}\frac{V_{n+1}}{V_n} - \frac{U_{n+1}}{V_{n+1}}\frac{V_{n+1}}{V_n};$$

par soustraction de l'équation définissant $Z(z)$, il vient

$$(az+b)(cz+d)\left[Z'(z) - \frac{d}{dz}\left(\frac{U_n}{V_n}\right)\right] - (pz+q)\left(Z - \frac{U_n}{V_n}\right) = \left(\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n}\right)\frac{V_{n+1}}{V_n}.$$

Par hypothèse, $\frac{U_n}{V_n}$ tend vers une limite. Si $Z - \frac{U_n}{V_n}$ tend vers une limite W, on aura donc

$$(az+b)(cz+d)W' - (pz+q)W = 0.$$

Il faut montrer que

$$W = C(az+b)^{a_1}(cz+d)^{b_1} \quad (ac(a_1+b_1)=p,\ a_1ad+b_1bc=q)$$

est nul.

Cela ressort de ce que W n'est pas développable en série $S_0 + \frac{S_1}{z} + \frac{S_2}{z^2} + \cdots$; or, comme $Z(z)$ et comme $\frac{U_n}{V_n}$, il devrait l'être.

Divergence et cause générale de divergence.

15. Dans un mémoire souvent cité au cours de cette étude, j'ai étudié la convergence de types bien définis de fractions continues, ou suites de fractions rationelles $\frac{U_n}{V_n}$.

Tous les types étudiés se ramènent à ceux définis par des relations de récurrence

$$\begin{cases} A \,.\, U_{n+1} + B \,.\, U_n + C \,.\, U_{n-1} = 0 \\ A \,.\, V_{n+1} + B \,.\, V_n + C \,.\, V_{n-1} = 0 \end{cases}$$

où A, B, C sont des polynômes en z et n.

Mes résultats se résument comme il suit.

(22) *Soit* $a + b\alpha + c\alpha^2 = 0$ *la forme que prend l'équation*

$$A + B\alpha + C\alpha^2 = 0$$

pour n infini; la suite de réduites $\frac{U_n}{V_n}$ *converge en tous les points du plan de la variable z, sauf peut-être sur certaines coupures. Ces coupures sont de celles qui rendent uniforme la fonction développée. Elles sont définies comme étant les lieux géométriques des points z dont les coordonnées rendent égaux les modules des racines* α_1, α_2 *de l'équation* (22).

La divergence est *certaine*, c'est une conséquence de la théorie des fonctions. Mais je n'avais pu la démontrer, d'où l'emploi du mot *peut-être*.

Je puis aller plus loin actuellement et démontrer la divergence sur les coupures, dans les cas où elles sont réelles, A, B, C étant eux-même supposés réels.

Si ces coupures sont les segments

$$(a_1, a_2),\ (a_3, a_4), \ldots, (a_{h-1}, a_h)$$

de $o\,x$, les trois fonctions V'_n, V_n, V_{n-1} vérifient en effet une équation de la forme

$$(23) \qquad (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_h)\frac{d\,V_n}{d\,z}=$$
$$=(H_1 z^{h-1}+H_2 z^{h-2}+\cdots+H_h)\,V_n+(L_1 z^h+L_2 z^{h-1}+\cdots+L_{h+1})\,V_{n-1}$$

H_i, L_i étant des fonctions de n aisées à calculer, au moins dans les cas simples, et voici comment.

Dérivons la relation

$$(24) \qquad A\,V_{n+1}+B\,V_n+C\,V_{n-1}=0\,;$$

remplaçons V'_{n+1}, V'_n, V'_{n-1} par leur valeurs (23), nous aurons une relation entre V_{n+1}, V_n, V_{n-1}, V_{n-2}; dans cette relation nous remplacerons V_{n-2} par sa valeur en V_n, V_{n-1} tirée de (24) et nous arriverons à une relation en V_{n+1}, V_n, V_{n-1} qui contiendra les H, K, et qui devra être identique à (24). L'identification avec (24) permettra de calculer *effectivement* les H, L et d'écrire *explicitement* la relation (23), si l'on tient compte des valeurs que prennent les H et L pour $n=1$.

En possession de la relation (23), nous pourrons démontrer la divergence comme nous l'avons démontrée au § 13.

Il en résulte cette conclusion très importante:

Chaque segment, si petit qu'il soit, des coupures contient au moins une racine des dénominateurs V_n des réduits $\frac{U_n}{V_n}$, si n est sufissamment grand.

Pour cette raison, sur les coupures, $\frac{U_n}{V_n}$ tend vers l'infini.

Pour cette raison encore, les points où il y a divergence constituent des arcs de courbe et non pas des aires, car les racines de V_n ne peuvent tendre, sauf cas tout-à-fait exceptionnels, à couvrir une aire.

Extension de la méthode définissant les lieux de divergence des fractions continues.

16. Les fractions continues algébriques convergent *d'ordinaire* en tous les points du plan de la variable sauf sur certains arcs de courbe, aisés à obtenir (§ 19).

La méthode qui m'a conduit à ces résultats généraux [1] suppose que dans la relation de récurrence

$$A V_{n+1} + B V_n + C V_{n-1} = 0$$

A, B, C soient des *polynômes* en z et n. (Je puis actuellement m'affranchir de cette restriction, mais je ne puis publier encore les résultats que j'ai obtenus à ce sujet).

Divers artifices de calcul permettent d'étudier des relations de récurrence ne satisfaisant point à cette condition. [1]

Il est un de ces artifices sur lequel je dois appeler l'attention et je vais exposer sur un exemple particulier les réflexions qu'il m'a fait faire.

Gauss a donné le développement

$$\text{(25)} \qquad \operatorname{Log}(1+z) = z \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{1}{2} z}{1 + \cfrac{\frac{1}{6} z}{1 + \cfrac{\frac{2}{6} z}{1 + \cfrac{\frac{2}{10} z}{1 + \cdots}}}}}$$

Nous avons donc ici

$$\text{(25 bis)} \qquad \begin{cases} U_{n+1} - b_{n+1} U_n - a_{n+1} U_{n-1} = 0 \\ V_{n+1} - b_{n+1} V_n - a_{n+1} V_{n-1} = 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{array}{ll} a_1 = \frac{1}{2} z & a_2 = \frac{1}{6} z \\ a_3 = \frac{2}{6} z & a_4 = \frac{2}{10} z \\ a_5 = \frac{3}{10} z & a_6 = \frac{3}{14} z \\ a_7 = \frac{4}{14} z & \ldots \\ \ldots & \end{array}$$

et, en général,

$$a_n = \frac{\frac{n+1}{2}}{2n} z \sin^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{\frac{n}{2}}{2(n+1)} z \cos^2 \frac{n\pi}{2}$$

$$b_n = 1 .$$

a_n n'étant pas une fraction rationnelle en n (et z) je ne puis appliquer la méthode qui me sert à rechercher les lieux de divergence de la fraction continue.

[1] *Rend. del Circolo math. di Palermo* (loc. cit.).

Or, si $t = \frac{1}{z}$, on a, en général

$$G = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_0 z}{1 + \cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \ddots}}}} = \cfrac{t}{t + \cfrac{a_0}{1 + \cfrac{a_1}{t + \cfrac{a_2}{1 + \ddots}}}}$$

et, vu l'identité

$$t + \cfrac{a_0}{1 + \cfrac{a_1}{\lambda}} = t + a_0 - \frac{a_0 a_1}{a_1 + \lambda},$$

$$G = \cfrac{t}{t + a_0 - \cfrac{a_0 a_1}{t + a_1 + a_2 - \cfrac{a_2 a_3}{t + a_3 + a_4 - \cfrac{a_4 a_5}{\ddots}}}}$$

d'où

(26) $$\operatorname{Log}(1 + z) = \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{t}\right) = \cfrac{1}{t + \cfrac{1}{2} - \cfrac{\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 6}}{t + \cfrac{1}{6} + \cfrac{2}{6} - \cfrac{\frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 10}}{t + \cfrac{2}{10} + \cfrac{3}{10} - \cfrac{\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{14}}{\ddots}}}}$$

fraction continue dont les réduites $\frac{U'_n}{V'_n}$ sont définis par la loi de récurrence

$$a_2 = -\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 6}, \quad a_3 = -\frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 10}, \quad a_4 = -\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{14}, \ldots,$$

$$b_n = t + \frac{1}{2},$$

(26 bis) $$\begin{cases} U'_{n+1} - \left(t + \frac{1}{2}\right) U'_n + \dfrac{n^2}{(4n-2)(4n+2)} U'_{n-1} = 0, \\ V'_{n+1} - \left(t + \frac{1}{2}\right) V'_n + \dfrac{n^2}{(4n-2)(4n+2)} V'_{n-1} = 0, \end{cases}$$

dont je puis étudier la convergence par les méthodes précitées: *la convergence a lieu en tous les points du plan de la variablc z, sauf sur la coupure allant, sur ox, du point -1 à $-\infty$.* [1]

[1] *Rend. del Circolo math. di Palermo* (loc. cit.).

L'artifice employé ici a souvent lieu de l'être. Or, il faut remarquer que *les réduites de la fraction continue* (26) *sont les réduites de rang pair de la fraction continue* (25). Nous avons donc simplement prouvé que *la suite des réduites de rang pair de la fraction continue* (25) *converge en tous les points du plan de la variable z, sauf sur la coupure allant sur* ox *du point* -1 *à* $-\infty$.

Il faut prouver qu'il en est de même pour *la suite des réduites de rang impair et que ces deux suites de réduites convergent vers la même limite.*

On a

$$\frac{a_0}{t+\frac{a_1}{\lambda}} = \frac{a_0}{t} - \frac{a_0 a_1}{a_1 t + t^2\lambda},$$

$$\frac{t}{t+\frac{a_0}{\lambda}} = 1 - \frac{a_0}{a_0 + t\lambda}, \quad \frac{a_1}{t+\frac{a_2}{\lambda}} = \frac{a_1}{t} - \frac{a_1 a_2}{a_2 t + t^2\lambda}, \quad 1 + \frac{a_3}{t+\frac{a_4}{\lambda}} = 1 + \frac{a_3}{t} - \frac{a_3 a_4}{a_4 t + t^2\lambda}, \text{ etc.} \ldots$$

On peut donc écrire

$$G = 1 - \frac{a_0}{a_0 + t\lambda} = 1 - \cfrac{a_0}{a_0 + t + \cfrac{t a_1}{t + \cfrac{a_2}{1 + \cfrac{a_3}{t + \cfrac{a_4}{\ddots}}}}} = 1 - \cfrac{a_0}{a_0 + t + \cfrac{t a_1}{t + \cfrac{a_2}{\lambda}}} = 1 - \cfrac{a_0}{a_0 + t + a_1 - \cfrac{a_1 a_2}{a_2 + \lambda t}} =$$

$$= 1 - \cfrac{a_0}{a_0 + a_1 + t - \cfrac{a_1 a_2}{a_2 + a_3 + t - \cfrac{a_3 a_4}{\ddots}}}$$

fraction continue dont les réduites

$$1, \quad \frac{t}{t+a_0}, \quad \frac{a_1 + t}{a_0 + a_1 + t}, \ldots \text{ ou } 1, \quad \frac{1}{1 + a_0 z}, \quad \frac{a_1 z + 1}{(a_0 + a_1)z + 1}, \ldots$$

sont les réduites d'indice impair de $\cfrac{t}{t + \cfrac{a_0}{1 + \cfrac{a_1}{t + \cfrac{a_2}{1 + \ddots}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_0 z}{1 + \cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_1 z}{\ddots}}}}$;

la loi de récurrence des termes des réduites $\frac{U_n''}{V_n''}$ de (25) transformée de cette façon est

$$(26^{\text{ter}})\quad \begin{cases} U''_{n+1} - \left[\dfrac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} + t\right] U''_n + \dfrac{n(n+1)}{4(2n+1)^2}\, U''_{n-1} = 0, \\ V''_{n+1} - \left[\dfrac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} + t\right] V''_n + \dfrac{n(n+1)}{4(2n+1)^2}\, V''_{n-1} = 0, \end{cases}$$

où il est inutile pour notre objet d'écrire a_1, a_2, b_1, b_2, d'ailleurs aisés à calculer. *Ces réduites convergent*, ma méthode le montre, *en tous les points du plan de la variable* z $\left(z = \frac{1}{t}\right)$, *où les réduites* (26^{bis}) *convergent elles-mêmes.*

Reste donc en tout et pour tout à démontrer que

$$\frac{U''_n}{V''_n} - \frac{U'_n}{V'_n}$$

tend vers zéro ou que deux réduites *consécutives* $\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}}$, $\frac{U_n}{V_n}$ de $(25, 25^{\text{bis}})$ tendent vers la même limite.

Soit
$$\lim \frac{U_0}{V_0}, \frac{U_2}{V_2}, \frac{U_4}{V_4}, \ldots, \frac{U_{2n}}{V_{2n}}, \ldots = \lambda,$$
$$\lim \frac{U_1}{V_1}, \frac{U_3}{V_3}, \frac{U_5}{V_5}, \ldots, \frac{U_{2n+1}}{V_{2n+1}}, \ldots = \mu.$$

Entre les relations (25^{bis}) éliminons b_{n+1}; il vient

$$U_{n+1} V_n - V_{n+1} U_n + a_{n+1} (U_n V_{n-1} - U_{n-1} V_n) = 0,$$

ou

$$\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n} + a_{n+1} \left(\frac{U_n}{V_n} - \frac{U_{n-1}}{V_{n-1}}\right) \frac{V_{n-1}}{V_{n+1}} = 0,$$

soit $n = 2p$:

$$(27)\qquad \frac{U_{2p+1}}{V_{2p+1}} - \frac{U_{2p}}{V_{2p}} + a_{2p+1} \left(\frac{U_{2p}}{V_{2p}} - \frac{U_{2p-1}}{V_{2p-1}}\right) \frac{V_{2p-1}}{V_{2p+1}} = 0,$$

passons à la limite en remarquant que $\frac{U_{2p-1}}{V_{2p-1}}$, $\frac{U_{2p+1}}{V_{2p+1}}$ étant des réduites d'indices impairs, on aura (26^{ter})

$$\alpha = \lim \frac{V_{2p-1}}{V_{2p+1}} = \lim \frac{V''_n}{V''_{n+1}},$$

limite facile à calculer puisque (26^{ter})

$$1 - \left[\frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{1}{z}\right] \frac{V''_n}{V''_{n+1}} + \frac{n(n+1)}{4(2n+1)^2} \frac{V''_{n-1}}{V''_n} \frac{V''_n}{V''_{n+1}} = 0,$$

$$1 - \left[1 + \frac{1}{z}\right]\alpha + \frac{1}{16}\alpha^2 = 0; \tag{28}$$

passant dis-je à la limite, (27) s'écrit

$$\mu - \lambda + (\lim a_{2p+1})\,(\lambda - \mu)\,\alpha = 0\,,$$

$$(\mu\,\lambda)\,[1 - \alpha \lim a_{2p+1}] = 0; \tag{29}$$

or,

$$a_{2p+1} = \frac{\frac{2p+1+1}{2}}{2\,(2p+1)}\,z \sin^2 \frac{(2p+1)\pi}{2} + \frac{\frac{2p+1}{2}}{2\,(2p+2)}\,z \cos^2 \frac{(2p+1)\pi}{2}$$

$$= \frac{p+1}{2\,(2p+1)}\,z\,,$$

$$\lim a_{2p+1} = \frac{z}{4}\,,$$

et (29) s'écrit

$$(\mu - \lambda)\left(1 - \frac{1}{4} z\,\alpha^2\right) = 0\,,$$

relation qui ne peut *coexister* avec (28) que si $\mu = \lambda$, c. q. f. d.

17. On le voit, l'étude des fractions continues algébriques pose de nombreux problèmes. Nous savons peu de choses encore sur la question du développement d'une fonction en fraction continne, mais ce développement tient à des problèmes précis que j'ai indiqués nettement.

Nous sommes plus avancés en ce qui concerne l'étude de la convergence. La divergence ne peut avoir lieu que sur des coupures, relativement aisées à déterminer. Enfin il est presque démontré directement qu'il y a bien divergence sur ces coupures; de plus, la raison générale de cette divergence est connue.

Quant aux problèmes accessoires qui interviennent ici, j'en ai, me semble-t-il, donné une idée suffisante.
