RÉFLEXIONS SUR LES DEUX NOTES PRÉCÉDENTES

PAR

H. POINCARÉ.

à PARIS.

Les considérations présentées par M. SCHÖNFLIES au sujet de la note de M. RICHARD seront lues avec intérêt; non qu'aucune de ses critiques puisse résister à un examen approfondi, mais par ce qu'elles peuvent suggérer d'utiles réflexions.

1. On sait que M. RICHARD considère l'ensemble E des nombres *qui peuvent être définis en un nombre fini de mots.* Il démontre que cet ensemble est dénombrable et c'est cette démonstration que M. SCHÖNFLIES conteste.

Et pourquoi? Parce qu'on peut, dit-il, définir par une même formule une infinité d'objets mathématiques. Il est évident qu'une pareille formule ne peut constituer une définition, au moins au sens où M. RICHARD emploie ce mot. Et en effet ce qui caractérise précisément une définition, c'est qu'elle permet de distinguer l'objet défini de tous les autres objets; si elle s'applique à une infinité d'objets, elle ne permet pas de les discerner les uns des autres; elle n'en définit aucun; elle n'est plus une définition.

Ainsi pour prendre le premier exemple de M. SCHÖNFLIES; quand on dit »une fonction constante«, on a une formule d'un nombre fini de mots et qui s'applique à une infinité de fonctions; mais qui ne les définit pas, qui définit seulement leur relation avec un certain nombre, à savoir la valeur constante de la fonction. Pour achever de définir une de ces fonctions, il faut définir cette valeur constante.

C'est seulement si cette valeur constante peut être définie en un nombre fini de mots, que la fonction elle-même pourra l'être. Il n'est donc pas exact de dire que cette formule définit en un nombre fini de mots un ensemble de fonctions qui a la puissance du continu, c'est à dire la puissance de toutes les constantes possibles; cette formule permet de définir en un nombre fini de mots un ensemble de fonctions qui a même puissance que l'ensemble des constantes définissables en un nombre fini de mots, et ce dernier, d'après la démonstration de M. RICHARD est dénombrable.

La 1ère critique de M. SCHÖNFLIES ne tient donc pas debout; et ce que je viens de dire s'applique sans changement à tous ses autres exemples. Dans tous les cas qu'il cite, il définit un objet A comme ayant une relation B avec un autre objet C. Cette relation B ne suffit pas pour définir A; il faut définir également l'objet C; pour que A se trouve défini en un nombre fini de mots, il faut que non seulement B, mais encore C soient définis en un nombre fini de mots. Les autres critiques qui s'appuient sur la 1ère, tombent évidemment du même coup.

2. Il n'en est pas moins vrai qu'on peut faire les réflexions suivantes. Il n'y a pas d'infini actuel; ce que nous appelons l'infini, c'est uniquement la possibilité de créer sans cesse de nouveaux objets, quelque nombreux que soient les objets déjà créés. Seulement ces nouveaux objets ne sont concevables eux-mêmes que s'ils sont susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots. Il en résulte qu'un ensemble, dont chaque élement ne peut pas être défini en un nombre fini de mots, est un pur néant; on n'en peut rien dire, ni rien penser.

C'est bien ainsi que pense M. RICHARD; et je signalerai en passant une très intéressante démonstration de l'axiome de ZERMELO que ce savant vient de publier dans l'Enseignement Mathématique et où il s'exprime à ce sujet de la façon la plus nette.

Mais alors il n'y a pas d'autre ensemble que ceux dont tous les éléments sont définissables en un nombre fini de mots; et comme on peut leur appliquer la démonstration de M. RICHARD, il semble qu'on doive conclure que *tous* les ensembles sont dénombrables. Que signifie alors la distinction des puissances, et en quoi le continu diffère-t-il de l'ensemble des nombres entiers?

On peut démontrer cependant qu'il y a une différence et c'est en cela, au fond, que consiste l'antinomie RICHARD.

Il est impossible de trouver une formule définissant en un nombre fini de mots une relation entre un nombre réel et un nombre entier et qui soit telle que tout nombre réel définissable en un nombre fini de mots corresponde à un nombre entier en vertu de cette formule. Quelle que soit cette formule, on pourra toujours définir en un nombre fini de mots un nombre réel que cette formule ne fait correspondre à aucun nombre entier. Voilà ce que CANTOR démontre et voilà ce qu'on entend quand on dit que la puissance du continu n'est pas celle de l'ensemble des entiers.

Comment cela s'accorde-t-il avec la démonstration de M. Richard qui nous enseigne que tout ensemble dont les éléments sont définissables en un nombre fini de mots est dénombrable? Considérons une formule F définissant une relation entre les divers entiers et divers nombres réels (qui se trouveront par là définis en un nombre fini de mots) l'ensemble E de ces nombres réels sera dénombrable. Nous pourrons ensuite définir d'autres nombres réels ne faisant pas partie de E; ces définitions ne contiendront qu'un nombre fini de mots mais parmi ces mots figurera le nom de l'ensemble E. Soit E' l'ensemble de ces nouveaux nombres réels. La démonstration de Cantor nous apprend que l'ensemble E' n'est pas nul et celle de Richard nous apprend que l'ensemble $E + E'$ est dénombrable. On pourra donc trouver une formule F' définissant une relation entre les divers entiers et les divers nombres de l'ensemble $E + E'$.

Mais alors on pourra de nouveau trouver d'autres nombres ne faisant pas partie de $E + E'$ et dont l'on pourra donner une définition ne contenant qu'un nombre fini de mots parmi lesquels les noms des ensembles E et E'. Ici encore l'ensemble E'' de ces nombres ne sera pas nul et il sera dénombrable. Et ainsi de suite.

3. Et alors dira-t-on; tous ces nombres, ceux de E, de E', de E'', ceux des ensembles suivants, sont tous définissables en un nombre fini de mots, de sorte qu'en vertu de la démonstration de Richard, il devrait exister une formule d'un nombre fini de mots qui permette de les dénombrer. C'est là l'antinomie dont M. Richard donne l'explication; on doit après avoir formé le tableau de tous les assemblages possibles de syllabes, rejeter ceux qui n'ont aucun sens ou qui ne définissent pas un nombre. Tant que l'ensemble E n'est pas défini, ceux de ces assemblages où figure le nom de cet ensemble sont dénués de sens et doivent être rejetés. Quand on a défini l'ensemble E, ils prennent un sens et il faut les reprendre. La démonstration de M. Richard suppose au contraire que l'on fait ce triage d'un seul coup et sans s'y reprendre à plusieurs fois.

Je ne puis résister à la tentation de rappeler ici un exemple curieux cité par M. Russell et où l'on retrouve la même contradiction apparente, expliquée de la même manière, mais où l'on n'a pas à envisager l'infini, ce qui permet peut-être de mieux se rendre compte des faits. Quel est le plus petit nombre qui n'est pas susceptible d'être défini par une phrase formée de moins de cent mots français? Ce nombre existe-t-il?

Oui, car par une phrase formée de moins de cent mots français, on peut définir au plus n^{100} nombres, n étant le nombre des mots du dictionnaire français. On ne peut donc définir tous les nombres, et parmi ceux qui ne peuvent l'être il y en a certainement un qui est plus petit que tous les autres et qui est par là entièrement défini.

Non, car ce nombre s'il existait impliquerait contradiction; car il serait défini par une phrase de moins de cent mots, à savoir par la phrase même qui annonce qu'il ne peut pas l'être.

C'est que cette phrase tantôt a un sens, tantôt n'en a aucun, selon que tous les autres nombres ont été ou n'ont pas été préalablement définis.

4. J'arrive à la dernière objection de M. SCHÖNFLIES (§ 9). M. RICHARD a tort de dire d'après lui que *toute* définition introduisant la notion de l'ensemble total Δ doit être rayée de son tableau. Et M. SCHÖNFLIES cherche à le prouver par un exemple. Il considère une série de définitions G_1, G_2, ... et l'ensemble G de ces définitions. Aucune de ces définitions, excepté la définition G_ν (*où ν est un nombre impair*) n'introduit la notion de l'ensemble G. Quant à G_ν, elle définit une fraction décimale δ_ν en nous apprenant que la μ^e décimale de δ_ν dépend d'après une certaine loi de la μ^e décimale de la fraction $\delta_{2\mu}$ définie par la définition $G_{2\mu}$. Donc dans la définition G_ν figure la notion du $2\mu^e$ élément $G_{2\mu}$ de l'ensemble G, et par conséquent la notion de l'ensemble G. M. RICHARD la rayerait donc de son tableau, et cependant elle est exempte de contradiction et de cercle vicieux.

Cette objection est sans valeur. Et en effet nous pouvons définir l'ensemble G' formé par les éléments d'ordre pair G_2, G_4, ...

Soit alors δ_ν la fraction décimale dont la μ^e décimale dépend d'après une certaine loi de la μ^e décimale de la fraction $\delta_{2\mu}$ définie par la μ^e élément $G_{2\mu}$ de l'ensemble G'.

Cette phrase que je puis appeler G'_ν a même sens que la phrase G_ν, mais elle n'introduit plus la notion de l'ensemble G, mais seulement celle de l'ensemble G'. Ces deux phrases figureront dans le tableau de M. RICHARD; mais G_ν devra être effacée comme contenant la notion de G, tandis que G'_ν qui est indépendante de cette notion devra être conservée. La fraction δ_ν qui est définie aussi bien par G'_ν que par G_ν restera donc dans notre tableau des fractions δ_μ. Il n'y a donc là aucune difficulté.

5. Je vous envoie en même temps une note de M. ZERMELO. Cette note n'a pu me convaincre et M. ZERMELO ne s'en étonnera pas; puisqu'il signale lui-même que la définition de l'ensemble qu'il appelle M_0 est de celles que je ne regarde pas comme légitimes. Je sais que M. ZERMELO doit exposer ses idées sur ce point dans un mémoire plus étendu, mais ce mémoire n'ayant pas encore été publié, il convient d'en attendre la publication pour apprécier ses raisons.

Je ne puis me faire pour le moment une idée de ces raisons que par les quelques lignes qui sont à la fin du § 3; et je vais tâcher de rétablir l'objection de M. ZERMELO, sans, je l'espère, m'écarter de sa pensée.

Je veux démontrer qu'une équation algébrique $F=0$ a toujours une racine; pour cela je remarque que $|F|$ est toujours positif et a par conséquent une limite inférieure ou minimum, qu'une fonction continue atteint toujours son minimum, et je démontre enfin que $|F|$ ne peut avoir d'autre minimum que 0; j'en conclus qu'il y a un point pour lequel $|F|=0$.

Dans cette démonstration on parle 1° de l'ensemble E des valeurs de $|F|$, 2° de l'une de ces valeurs e qui est la plus petite de toutes celles de E; et 3° de la valeur correspondante de x. La définition de e où figure l'ensemble E est *non-prédicative,* puisque la notion de E devrait être à la fois antérieure à celle de e dont la définition dépend de E et postérieure à celle de e qui est un élément de E. On ne pourrait donc rejeter l'emploi des définitions non-prédicatives sans rejeter une démonstration admise par tous les mathématiciens.

Cela serait grave; heureusement il est aisé de remettre la démonstration sur ses pieds sans y laisser subsister de pétition de principe. Soit x la variable indépendante; soit y une valeur de x dont les parties réelle et imaginaire soient des nombres rationnels; (je dirai pour abréger que y est une valeur rationnelle de x). Soit E' l'ensemble des valeurs que peut prendre $|F(y)|$. Soit e la limite inférieure, ou minimum des diverses valeurs de l'ensemble E'.

On démontre ensuite successivement qu'il y a une valeur de x non rationnelle en général et telle que $|F(x)|=e$, et que e ne peut être différent de zéro.

La pétition de principe a disparu puisque dans la définition de e figure seulement la notion de l'ensemble E' et que e ne fait pas en général partie de E'. Si l'on examine avec quelque attention les détails de la démonstration d'ailleurs bien connue, dont nous n'avons fait que rappeler les lignes générales, on reconnaîtra que c'en est bien là le véritable sens.

Plus généralement; si nous envisageons un ensemble E de nombres réels positifs, par exemple, on peut démontrer que cet ensemble possède une limite inférieure e; cette limite inférieure est définie *après* l'ensemble E; et il n'y a pas de pétition de principe puisque e ne fait pas en général partie de E. Dans certains cas particuliers, il peut arriver que e fasse partie de E. Dans ces cas particuliers, il n'y a pas non plus de pétition de principe puisque e ne fait pas partie de E *en vertu de sa définition,* mais par suite d'une démonstration postérieure à la fois à la définition de E et à celle de e.

La raison invoquée par M. ZERMELO ne saurait donc suffire pour justifier l'emploi des définitions »non-prédicatives», car l'assimilation qu'il fait est inexacte.

M. Zermelo invoque également l'autorité de MM. Peano et Russell; je ferai seulement remarquer que M. Peano se borne à une affirmation qu'il ne justifie pas, et que M. Russell admet au contraire que les définitions non-prédicatives ne sont pas légitimes en général (c'est même lui qui a employé le premier le mot de non-prédicatif), mais qu'elles peuvent l'être à certaines conditions dont je n'ai pu comprendre l'énoncé.