SUR LES NOMBRES e ET π ET LES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES

PAR

EDMOND MAILLET

À PARIS.

On sait que le nombre e^{ϖ}, où ϖ est rationnel ou algébrique, ne peut être racine d'une équation algébrique à coëfficients rationnels, pas plus que les nombres qui présentent après chaque chiffre significatif un nombre de zéros croissants suffisamment vite avec le rang de ce chiffre et que nous appellerons des nombres X.[1]

Ces derniers nombres, comme leurs puissances rationnelles, n'étant pas racines des équations

$$(1) \qquad \sum_0^\infty c_a x^{\varpi_a} = 0,$$

et d'autres analogues, où c_a est rationnel et ϖ_a entier positif, quand $\frac{1}{c_a}$ ou ϖ_a croît suffisamment vite avec a, on pouvait se demander s'il en était de même de e et ses puissances, de π, d'autres nombres encore. La réponse est affirmative: les méthodes de MM. HILBERT et HURWITZ pour établir la transcendance de e et de π permettent de déterminer une limite inférieure de ces modes de croissance: nous en donnons un exemple particulier.

On peut obtenir d'ailleurs des résultats de même nature pour tout nombre ζ algébrique ou non, ou pour les nombres de la forme

$$Y = Y_1 + \frac{a_1}{\zeta_1^{\psi_1}} + \ldots + \frac{a_l}{\zeta_l^{\psi_l}} + \ldots,$$

[1] Comptes rendus, 15 avril 1901 et Journ. de Math., 1901. Au sujet de ce mémoire on pourra consulter E. STRAUSS, Acta math., t. 11, p. 13.

Comp. BOREL, Comptes rendus, 1899, 1[er] semestre, p. 490 et 597. Pour la lecture de notre Mémoire il suffit de connaître les passages d'ouvrages ou mémoires cités par nous ici. Un résumé de ce mémoire a été communiqué à l'Acad. des Sc. de Paris (C. R., 1901, 2[ème] sem., p. 989 et 1191).

On sait qu'Abel a établi l'impossibilité de la résolution par radicaux des équations algébriques de degré > 4. On peut se poser des problèmes analogues pour des équations transcendantes à coefficients rationnels: notre mémoire en traite quelques-uns.

(ζ_1 fonction algébrique d'un nombre quelconque ζ, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \ldots$ entiers $\leqq E(\zeta)$); quand ϕ_l croît suffisamment vite avec l, Y ne peut être ni algébrique ni racine de (1).

Ces résultats s'étendent aux équations rationnelles de la forme

$$\sum_0^\infty c_a x^{\bar{\omega}_a} + \sum_0^\infty \frac{c_a^0}{x^{\bar{\omega}_a^0}} + \ldots + \sum_0^\infty \frac{c_a^k}{(x-\beta_k)^{\bar{\omega}_a^k}} = 0,$$

où $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ sont distincts, rationnels et $\neq 0$.[1]

Au point de vue algébrique, si c_n décroît suffisamment vite, nous donnons un moyen de déterminer approximativement les racines de

$$\sum_0^\infty c_a x^{\bar{\omega}_a} = 0$$

qui sont toutes distinctes, et un moyen simple de trouver le nombre des racines réelles ou imaginaires de module inférieur à une certaine limite quand c_n est réel.

Enfin nous concluons que $\sum_0^\infty c_a x^{\bar{\omega}_a} = 0$ n'a aucune racine algébrique, et que l'ensemble des racines transcendantes de ces équations a la puissance de continu.

II.

Théorème. Le nombre e ne peut être racine d'aucune des équations

$$(1) \qquad \sum_0^\infty c_a x^{\bar{\omega}_a} = 0$$

quand $\frac{1}{c_n}$ croît suffisamment vite avec n (c_n rationnel, c_0 entier, $\bar{\omega}_n = \frac{\chi_n}{q}$, où χ_n est un entier donné fonction de n et croissant, et q entier).

En effet, il suffit de suivre la même marche que dans une des démonstrations relatives au cas des équations algébriques.[2] Si l'on pose

[1] Nous y reviendrons ultérieurement plus en détail. Voir Bull. Soc. Math., t. 33, 1902, p. 147.

[2] Voir p. ex. JORDAN, Cours lithographié de l'École Polytechnique, 2ème division. Tous nos raisonnements restent vrais avec une très-légère modification pour le cas où certains des coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ seraient imaginaires.

$$(2)\qquad f(x)=\frac{x^{p-1}\left(x-\frac{\chi_1}{q}\right)^p\cdots\left(x-\frac{\chi_n}{q}\right)^p}{\underline{|(p-1)}},$$

(p très-grand, 1^{er} à q),

$$F(x)=f(x)+f'(x)+\ldots,$$

on aura

$$(3)\qquad e^a F(0)=F(\alpha)+e^a\int_0^a f(x)e^{-x}dx.$$

Donnant dans cette formule à α les valeurs $0=\varpi_0, \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n$ et additionnant les égalités obtenues en les multipliant par $c_0, c_1, \ldots, c_n$, on a, e étant supposé racine de (1),

$$(4)\qquad \sum_0^n c_a e^{\tilde\omega_a}F(0)=\sum_0^n c_a F(\varpi_a)+\sum_0^n c_a e^{\tilde\omega_a}\int_0^{\tilde\omega_a} f(x)e^{-x}dx=-\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{\tilde\omega_a}F(0).$$

Pour $x=0$, $f(x)$ et ses $p-2$ $1^{\text{ères}}$ dérivées s'annulent; les autres, sauf la $1^{\text{ère}}$, qui est égale à $(-1)^{np}\frac{(\Pi\chi_n)^p}{q^{np}}$, où $\Pi\chi_n=\chi_1\chi_2\ldots\chi_n$, sont des multiples de p divisés par q^{np}, c. à d. de la forme $\frac{mp}{q^{np}}$.

Pour $x=\varpi_a\leqq\varpi_n$ $(a\neq 0)$, $f(x)$ est nul ainsi que ses $p-1$ $1^{\text{ères}}$ dérivées; les autres sont des multiples de p divisés par une puissance de $q\leqq q^{np+p-1}$.

Ceci posé

$$(5)\qquad \sum_0^n c_a F(\varpi_a)=c_0\left(\frac{\lambda_0}{q^{np}}+\frac{m_0 p}{q^{np}}\right)+\sum_1^n\frac{s_n}{t_n}\frac{\text{mult. }p}{q^{np+p-1}},$$

si $\lambda_0=(-1)^{np}(\Pi\chi_a)^p$, $c_n=\frac{s_n}{t_n}$.

Désignant par T_n le p. p. c. m. de $t_0=1, t_1, \ldots, t_n$, on aura

$$(6)\qquad \sum_0^n c_a F(\varpi_a)=\frac{\varepsilon}{T_n q^{np+p-1}},$$

avec $\varepsilon=c_0\lambda_0 T_n q^{p-1}+m'p$; n étant donné, si p est assez grand pour ne pas diviser $c_0\lambda_0 T_n q^{p-1}$, ε sera $\neq 0$, et $|\varepsilon|\geqq 1$, d'où

$$(7)\qquad \sum_0^n c_a F(\varpi_a)\geqq\frac{1}{T_n q^{np+p-1}}.$$

D'autre part, on a encore

$$(8) \qquad \left|\sum_0^n c_a e^{\tilde{\omega}_a} \int_0^{\tilde{\omega}_a} f(x) e^{-x} dx\right| \leqq e^{\tilde{\omega}_n}\left(\sum |c_a|\right) \frac{\varpi_n^{p(n+1)}}{|\underline{(p-1)}}.$$

On pourra toujours prendre p assez grand pour que le second membre soit

$$(9) \qquad < \frac{1}{4 T_n q^{np+p-1}}.$$

Soit $p' = \varphi_n$ la plus petite des valeurs de p satisfaisant à cette condition.

Supposons maintenant que, dans $F(0)$, on fasse $p = p'$; $F(0)$ est une fonction bien déterminée ψ_n de n. Si l'on suppose la série $\sum\limits_{n+1}^{\infty} c_a e^{\tilde{\omega}_a}$ suffisamment convergente (ce qui est le cas quand c_a^{-1} croît suffisamment vite avec a), pour que

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{\tilde{\omega}_a}\right| \leqq |\theta c_{n+1} e^{\tilde{\omega}_{n+1}}|, \qquad (\theta \text{ fini}),$$

on devra avoir, d'après (4), (7) et (9),

$$(10) \qquad \frac{1}{T_n q^{np'+p'-1}} \leqq \frac{|\varepsilon|}{T_n q^{np'+p'-1}} \leqq |\theta c_{n+1} e^{\tilde{\omega}_{n+1}} F(0)| + k e^{\tilde{\omega}_n} \frac{\varpi_n^{p'(n+1)}}{|\underline{(p'-1)}}$$

$$\leqq |\theta c_{n+1} e^{\tilde{\omega}_{n+1}} F(0)| + \frac{1}{4 T_n q^{np'+p'-1}},$$

ce qui est impossible dès que

$$(11) \qquad |\theta c_{n+1} e^{\tilde{\omega}_{n+1}} \psi_n| \leqq \frac{1}{2 T_n q^{np'+p'-1}}.$$

On pourra toujours choisir c_{n+1} assez petit pour qu'il en soit ainsi, quel que soit q, à partir d'une certaine valeur de n, par exemple quand $\varpi_n = \dfrac{ln}{q}$.

Corollaire I. Les puissances fractionnaires positives de e ne peuvent être racines des équations (1).

En effet, e n'est pas racine des équations traitées plus haut; il n'est dès lors pas racine des équations obtenues en remplaçant x par $y^{\frac{q}{s}}$; $e^{\frac{q}{s}}$ n'est donc pas racine des premières équations.

Nous croyons utile de donner un exemple précis d'application de ce théorème.

Prenons $c_n = \frac{\alpha_n}{t_n}$, α_n étant un entier tel que $|\alpha_n| \leqq A$ (A fini) et t_n étant divisible par $t_{n-1}, t_{n-2}, \ldots, t_1, t_0 = 1$: on a $T_n = t_n$. Posons $\varpi_n = \frac{ln}{q}$ (l entier donné), $p = (n+1)^{\mu(n+1)}$ (μ entier > 2): pour une infinité de valeurs de n, p ne divise pas

$$|c_0 \lambda_0 t_n q^{p-1}| = |c_0 l^{np} (\underline{|n})^p t_n q^{p-1}|,$$

si

(12) $$t_n = (\underline{|n})^{\lambda_n}, \qquad (\lambda_n \text{ entier}).$$

D'après (8) et (9) on prendra

$$e^{\frac{ln}{q}} k \left(\frac{ln}{q}\right)^{p(n+1)} \frac{p}{\underline{|p}} < \frac{1}{4 t_n q^{np+p-1}}, \qquad (k = \sum |c_\alpha|),$$

ce qui a lieu, a fortiori, si

$$\frac{e^{\frac{ln}{q}} kp (ln)^{p(n+1)}}{\left(\frac{p}{e}\right)^{p+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi e}} < \frac{kp}{\left(\frac{p}{e}\frac{1}{(ln)^{n+1}}\right)^p \left(\frac{1}{e}\right)^{ln}} \leqq \frac{kp}{\left(\frac{p}{e^2 (ln)^{n+1}}\right)^p} < \frac{q}{4t_n},$$

puisque $p \geqq ln$, quand n est assez grand.

Or

$$\frac{p}{e^2 (ln)^{n+1}} = \frac{(n+1)^{\mu(n+1)}}{e^2 (ln)^{n+1}} > \frac{1}{e^2} \left(\frac{n^{\mu-1}}{l}\right)^{n+1},$$

et

$$\frac{4kp}{\left(\frac{p}{e^2(ln)^{n+1}}\right)^p} < \frac{4kpe^{2p}}{\left(\frac{n^{\mu-1}}{l}\right)^{(n+1)p}} < \frac{1}{\left(\frac{n^{\mu-1}}{2l}\right)^{p(n+1)}},$$

car $4kpe^{2p} < 2^{(n+1)p}$.

Pour que (9) ait lieu il suffit finalement

$$t_n < \left(\frac{n^{\mu-1}}{2l}\right)^{p(n+1)}$$

ou, a fortiori,

(12') $$(\underline{|n})^{\lambda_n} = t_n < n^{(\mu-2)p(n+1)}$$

ou

$$n^{n\lambda_n} \leqq n^{(\mu-2)(n+1)^{\mu(n+1)+1}}$$

ou

$$n\lambda_n \leqq (\mu - 2)(n + 1)^{\mu(n+1)+1}.$$

Il suffira de prendre

$$\lambda_n = (\mu - 2)(n + 1)^{\mu(n+1)}, \qquad \mu > 2 \tag{13}$$

pour que (9) ait lieu.

Occupons-nous maintenant de la condition (11). On a d'abord

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{\frac{la}{q}}\right| \leqq \left|c_{n+1} e^{\frac{l}{q}(n+1)}\right| (1 + k_1 + k_1^2 + \ldots) = \frac{|c_{n+1}|\, e^{\frac{l(n+1)}{q}}}{1 - k_1}$$

$$\leqq 2\, |c_{n+1}|\, e^{\frac{l(n+1)}{q}}, \qquad \left(0 \leqq k_1 \leqq \frac{1}{2}\right)$$

dès que

$$\left|\frac{c_{a+1}}{c_a}\right| e^{\frac{l}{q}} = \left|\frac{a_{a+1} t_a}{a_a t_{a+1}}\right| e^{\frac{l}{q}} \leqq D e^{\frac{l}{q}} \frac{t_a}{t_{a+1}} \leqq k_1 \leqq \frac{1}{2}, \text{ [1]}$$

D étant le maximum du rapport $\left|\frac{a_{a+1}}{a_a}\right|$. Cette condition est toujours remplie pour $a \geqq n + 1$, d'après (12) et (13). (11) devient

$$2\, |c_{n+1}|\, e^{\frac{l(n+1)}{q}} F(0) \leqq \frac{1}{2 t_n q^{np+p-1}}; \tag{14}$$

cherchons une limite supérieure de $F(0)$.

On a

$$\left| \underline{|(p-1)} f(x) \right| = \left| x^{p-1}(x - \varpi_1)^p \ldots (x - \varpi_n)^p \right|,$$

$$\left| \underline{|(p-1)} f'(x) \right| \leqq p \sum |f_1(x)|,$$

$$\left| \underline{|(p-1)} f''(x) \right| \leqq p^2 \sum |f_2(x)|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left| \underline{|(p-1)} f^{(k_2)}(x) \right| \leqq p^{k_2} \sum |f_{k_2}(x)|,$$

[1] Dans le cas ou quelques coëfficients c_a seraient nuls, une inégalité de même nature a lieu pour le rapport d'un terme au précédent. Notre raisonnement ne suppose donc pas $a_a \neq 0$, sauf en général.

$f_1, f_2, \ldots, f_{k_2}$ étant des produits de la forme

$$x^{\beta_0}(x-\varpi_1)^{\beta_1}\ldots(x-\varpi_n)^{\beta_n},$$

avec

$$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n \leqq p,$$

en nombre au plus égal à $n+1, (n+1)^2, \ldots, (n+1)^{k_2}$ respectivement. Chacun de ces produits est d'ailleurs, pour $x=0$, $\leqq l^{np}(\underline{|n})^p$ en valeur absolue, et

$$|F(0)|\,\underline{|(p-1)} \leqq l^{np}(\underline{|n})^p[1+p(n+1)+p^2(n+1)^2+\ldots$$
$$+p^{k_2}(n+1)^{k_2}+\ldots]$$

jusqu'à $k_2 = np+p-1$, d'où

(15) $$|F(0)| \leqq \frac{(\underline{|n})^p}{\underline{|(p-1)}}\, l^{np}\frac{[(n+1)p]^{np+p}-1}{p(n+1)-1}.$$

Il suffira, d'après (14), que

(16) $$\frac{t_{n+1}}{t_n} \geqq \lambda e^{\frac{l(n+1)}{q}} q^{np+p-1}\frac{(\underline{|n})^p}{\underline{|(p-1)}}\frac{[(n+1)p]^{np+p}-1}{p(n+1)-1},$$

λ étant une constante.

D'abord

$$\underline{|(p-1)}[p(n+1)-1] > \underline{|p},$$

$$\frac{\lambda q^{np+p-1}e^{\frac{l(n+1)}{q}}}{\underline{|p}} < 1,$$

si

$$\lambda q < \left(\frac{p}{e}\right)^p \frac{1}{e^{\frac{l(n+1)}{q}} q^{np+p}},$$

ou, puisque $\frac{l(n+1)}{q} < p$, si

$$\lambda q < \left(\frac{p}{e^2 q^{n+1}}\right)^p,$$

ce qui a lieu, puisque $p=(n+1)^{\mu(n+1)}$.

Il suffira donc d'après (16),

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} \geqq (\underline{|n})^p[(n+1)p]^{p(n+1)},$$

ou, a fortiori,

$$t_{n+1} \geqq [(n+1)^2 p]^{p(n+1)} t_n,$$

ou, d'après $t_n = (\underline{|n})^{\lambda^n}$, (12') et $p = (n+1)^{\mu(n+1)}$,

$$t_{n+1} \geqq [(n+1)^2 p]^{p(n+1)} n^{(\mu-2)p(n+1)},$$

$$t_{n+1} \geqq ((n+1)^{\mu} p)^{p(n+1)},$$

$$\geqq (n+1)^{\mu(n+1)^{1+\mu(n+1)}} (n+1)^{\mu(n+1)^{2+\mu(n+1)}},$$

$$\geqq (n+1)^{\mu(n+1)^{\mu(n+1)+1}(n+2)}.$$

Il suffira alors

$$t_{n+1} = [\underline{|(n+1)}]^{\lambda_{n+1}} \geqq \left(\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+\frac{3}{2}} \sqrt{2\pi e}\right)^{\lambda_{n+1}} \geqq (n+1)^{\mu(n+2)(n+1)^{\mu(n+1)+1}},$$

ou, a fortiori,

$$(n+1)^{\left(n+\frac{3}{2}\right)\lambda_{n+1}-(n+1)^{\mu(n+1)+1}\mu(n+2)} \geqq e^{\left(n+\frac{3}{2}\right)\lambda_{n+1}}.$$

Ceci aura lieu pourvu que

$$\frac{1}{2}\left(n+\frac{3}{2}\right)(\mu-2)(n+2)^{\mu(n+2)} \geqq (n+1)^{\mu(n+1)+1}\mu(n+2),$$

ce qui a toujours lieu pour n assez grand quand $\mu \geqq 3$.

La condition (11) est donc alors remplie.

Nous en concluons le corollaire suivant:

Corollaire II. Les puissances entières ou fractionnaires de e ne sont pas racines des équations

$$\sum_0^{\infty}{}^n \frac{a_n}{(\underline{|n})^{(\mu-2)(n+1)^{\mu(n+1)}}} x^{\frac{ln}{q}} = 0$$

(l, q, μ entiers), a_n étant un entier limité, nul ou non, dès que $\mu \geqq 3$.

III.

Les résultats précédents, comme ceux relatifs aux nombres X,[1] s'étendent d'abord au cas des puissances négatives de e pour les équations (1), ensuite au cas des puissances négatives pour les équations $\sum c_n x^{\tilde{\omega}_n} = 0$, dont le 1$^{\text{er}}$ membre converge pour $0 < x < k < 1$; enfin au cas des puissances positives ou négatives pour les équations

$$f_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_a x^{\tilde{\omega}_a} = 0$$

convergentes dans un certain domaine, les c_a et les ϖ_a satisfaisant à certaines conditions de croissance et étant rationnels. Nous nous dispenserons de donner des exemples, et nous contenterons d'établir sommairement les théorèmes généraux.

1°. Pour le cas des puissances négatives il suffit de remarquer que (3) reste vrai quand α ou ϖ_a est négatif: la limite supérieure de $e^{\tilde{\omega}_a}$ devient 1. Toutes les inégalités ou égalités précédentes restent vraies a fortiori sous cette réserve.

2°. Considérons les équations $f_1 = 0$, et soit $f_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_a e^{\tilde{\omega}_a} = 0$, ϖ_a étant de la forme $\frac{\chi_a}{q}$, q entier, χ_a entier positif ou négatif. On prend pour $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^{p-1}[(x-\varpi_1)\ldots(x-\varpi_n)(x-\varpi_{-1})\ldots(x-\varpi_{-n_1})]^p}{\underline{|(p-1)}}.$$

La formule (4) devient

$$F(0)\sum_{-n_1}^{n} c_a e^{\tilde{\omega}_a} = \sum_{-n_1}^{n} c_a F(\varpi_a) + \sum_{-n_1}^{n} c_a e^{\tilde{\omega}_a}\int_0^{\tilde{\omega}_a} f(x)e^{-x}dx$$

$$= -\left[\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{\tilde{\omega}_a} + \sum_{-(n_1+1)}^{-\infty} c_b e^{\tilde{\omega}_b}\right]F(0).$$

Si

$$\lambda_0 = (-1)^{p(n+n_1)}(\Pi\chi_a)^p, \quad \text{avec } \varpi_a = \frac{\chi_a}{q},$$

[1] Journ. de Math., 1901, loc. cit.

on aura

$$\sum_{-n_1}^{n} c_a F(\varpi_a) = c_0\left(\frac{\lambda_0}{q^{(n+n_1)p}} + \frac{m_0 p}{q^{(n+n_1)p+p-1}}\right) + \sum_{-n_1}^{n} \frac{s_a}{t_a} \frac{\text{mult. } p}{q^{(n+n_1)p+p-1}},$$

$$\left|\sum_{-n_1}^{n} c_a F(\varpi_a)\right| \geqq \frac{\varepsilon}{q^{(n+n_1)p+p-1}\, T_{nn_1}}, \qquad \varepsilon \geqq 1$$

si p est assez grand et convenablement choisi, T_{nn_1} étant le plus petit commun multiple de $t_{-n_1}, t_{-n_1+1}, \ldots, t_0, t_1, \ldots, t_n$. Le raisonnement se continue de la même manière pour les puissances positives ou négatives.

3°. Restent les équations

$$\sum_0^\infty c_a x^{\bar{\omega}_a} = 0$$

dont le 1[er] membre converge pour $0 < x < k < 1$, et pour lesquelles nous ne pouvons évidemment traiter que le cas des puissances négatives. On raisonnera de la même manière; (4) devient

$$(16') \qquad \sum_0^n c_a e^{-\bar{\omega}_a} F(0) = \sum_0^n c_a F(-\varpi_a) + \sum_0^n c_a e^{-\bar{\omega}_a} \int_0^{-\bar{\omega}_a} f(x) e^{-x} dx,$$

$$= -\left(\sum_{n+1}^\infty c_a e^{-\bar{\omega}_a}\right) F(0),$$

avec

$$\underline{|(p-1)} f(x) = x^{p-1}(x+\varpi_1)^p \ldots (x+\varpi_n)^p.$$

On a, en faisant $x = 0$, puis

$$-x = \varpi_a \leqq \varpi_n = \frac{\chi_n}{q}$$

($a > 0$, $\varpi_a = \frac{\chi_a}{q}$, χ_a entier positif),

$$\sum_0^n c_a F(-\varpi_a) = c_0\left(\frac{\pm \lambda_0}{q^{np}} + \frac{m_0 p}{q^{np}}\right) + \sum_1^n c_a \frac{\text{mult. } p}{q^{np+p-1}},$$

$$\left|\sum_0^n c_a F(-\varpi_a)\right| \geqq \frac{1}{T_n q^{np+p-1}},$$

si $c_0 \lambda_0 T_n q^{p-1}$ n'est pas divisible par p.

D'autre part

$$\left|\sum_0^n c_a e^{-\tilde{\omega}_a}\int_0^{-\tilde{\omega}_a} f(x)e^{-x}dx\right| \leqq \left(\sum |c_a|\right)\frac{\tilde{\omega}_n^{np+p}}{\underline{|p}}p.$$

On pourra, quelle que soit la loi de croissance de $\tilde{\omega}_a$, prendre p assez grand pour que cette expression soit plus petite que $\frac{1}{4T_n q^{np+p-1}}$. De même on pourra prendre $\tilde{\omega}_{n+1}$ assez grand pour que

$$(17)\qquad \left|\left(\sum_{n+1}^{\infty} c_a e^{-\tilde{\omega}_a}\right)F(0)\right| < \frac{1}{4T_n q^{np+p-1}},$$

en prenant pour p la plus petite valeur p' satisfaisant aux conditions précédentes.

Si la loi de croissance de $\tilde{\omega}_{n+1}$, qui est absolument arbitraire, est alors choisie de façon que ces inégalités soient remplies quel que soit n, pour n suffisamment grand, l'égalité (16') sera impossible.

Nous résumerons les résultats précédents dans les énoncés suivants:

Théorème I. Les puissances entières ou fractionnaires de e ne peuvent être racines d'aucune équation

$$\sum_0^{\infty} c_a x^{\tilde{\omega}} = 0$$

quand $\frac{1}{c_n}$ croît suffisamment vite avec n, (c_a rationnel, $\tilde{\omega}_n = \frac{\chi_n}{q}$, où χ_n est un entier donné fonction de n et croissant, et q entier) pour un mode de croissance donné de χ_n.

C'est le cas quand

$$\frac{1}{c_n} = \frac{(\underline{|n})^{(\mu-2)(n+1)\mu(n+1)}}{a_n}$$

(a_n entier limité, nul ou non, $\mu \geqq 3$), $\tilde{\omega}_n = \frac{ln}{q}$ (l, q entiers).

Théorème II. Il en est de même pour les équations

$$(18)\qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} c_a e^{\tilde{\omega}_a} = 0$$

(ϖ_a étant positif ou négatif et de la forme $\frac{\chi_a}{q}$, χ_a et q entiers), pourvu que $\frac{1}{c_a}$ croisse suffisamment vite avec $|a|$, quand a est positif ou négatif, et que le mode de croissance de χ_a est donné.

Théorème III. Les puissances négatives rationnelles de e ne sont pas racines des équations

$$\sum_0^\infty c_n x^{\varpi_n} = 0 \tag{19}$$

dont le 1[er] membre converge pour $0 < x < k < 1$, quand ϖ_n croît suffisamment vite avec n, pour un mode de variation donné des c_n.

IV.

Lemme I. Soit

$$\sum_0^\infty c_a x^{\varpi_a} = \Phi(x) = 0 \tag{1}$$

une équation transcendante dont le 1[er] membre converge dans tout le plan ($\varpi_n = \frac{\chi_n}{q}$, χ_n entier). On pourra toujours, quel que soit n, supposer la loi de décroissance des c_n assez rapide pour que toute racine de

$$\sum_0^n c_a x^{\varpi_a} = \Phi_n(x) = 0 \tag{20}$$

diffère d'aussi peu qu'on veut d'une racine de (1), et pour que $\Phi_n(x) = 0$ n'ait que des racines distinctes.

En effet, soit x_1 une racine de $\Phi_n(x) = 0$. On a

$$\Phi(x) = \Phi_n(x) + \Psi(x).$$

$\Psi(x)$ est une série convergente, et, x_1 étant limité en fonction de n, on pourra toujours prendre c_{n+1} assez petit pour que $\Psi(x_1) < \varepsilon_{n+1}$.

Or

$$\Phi(x_1) = \Psi(x_1)$$

$\Phi(x)$ prend[1] dans le voisinage de $x = x_1$ toutes les valeurs voisines de $\Phi(x_1)$. On aura

$$(21) \qquad \Phi(x) - \Phi(x_1) = (x - x_1)^k \frac{\Phi^{(k)}(x_1)}{\underline{|k}} + \ldots,$$

si $\Phi^{(k)}(x)$ est la 1$^{\text{ère}}$ des dérivées de $\Phi(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = x_1$. On peut toujours prendre ξ assez petit pour que, si $|x - x_1| < \xi$

$$(22) \qquad |\Phi(x) - \Phi(x_1)| \geqq \left| \frac{(x - x_1)^k \Phi^{(k)}(x_1)}{2 \underline{|k}} \right|.$$

En effet, si $f(z)$ est monodrome aux environs du point z_1 et $t = z - z_1$ on a[2]

$$f(z) = f(z_1) + \frac{t^k f^{(k)}(z_1)}{\underline{|k}} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^{k+1}}{(z - z_1)^{k+1}(z - z_1 - t)} f(z) dz,$$

et le dernier terme a son module

$$\leqq \frac{M \operatorname{mod} t^{k+1}}{R^{k+1}(R - \operatorname{mod} t)}.$$

Nous supposons ici $f'(z_1) = \ldots = f^{(k-1)}(z_1) = 0$; $\int_C$ est prise le long d'un cercle de rayon R ayant z_1 pour centre, M est le maximum de $f(z)$ à l'intérieur de ce cercle (et sur ce cercle).

Appliquant ceci à (21), on a

$$\Phi(x) - \Phi(x_1) = (x - x_1)^k \frac{\Phi^{(k)}(x_1)}{\underline{|k}} + \theta_1 \frac{M(x - x_1)^{k+1}}{R^{k+1}[R - \operatorname{mod}(x - x_1)]},$$

R étant une quantité réelle que nous prendrons $\geqq 2|x - x_1|$. Il suffira dès lors, pour que (22) ait lieu

$$\left| (x - x_1)^k \frac{\Phi^{(k)}(x_1)}{\underline{|k}} \right| \geqq \frac{4M|x - x_1|^{k+1}}{R^{k+2}},$$

$$(23) \qquad |x - x_1| \leqq \frac{\Phi^{(k)}(x_1)}{\underline{|k}} \frac{R^{k+2}}{4M},$$

[1] D'aprés un théorème de WEIERSTRASS (PICARD, *Traité d'analyse*, t. II, p. 241).

[2] V. JORDAN, Cours lithographié de l'Ecole Polytechnique, 1$^{\text{ère}}$ division, par exemple.

M étant le maximum de $\Phi(x)$ à l'intérieur d'un cercle de rayon R ayant le point x_1 comme centre dans le plan des x.

Pour une valeur de R donnée, $\Phi_n(x)$ a une limite supérieure M' dans le cercle en question, et l'on peut toujours prendre c_{n+1} assez petit pour que $M' \geqq 2|\Psi(x)|$ dans ce cercle. M est $\leqq \frac{3}{2}M'$, et il suffit pour que (22) et (23) aient lieu:

$$(23') \qquad \left|\frac{\Phi^{(k)}(x_1)}{\underline{|k}}\frac{R^{k+2}}{6M'}\right| \geqq |x-x_1|.$$

Or

$$(24) \qquad \Phi^{(k)}(x_1) = \Phi_n^{(k)}(x_1) + \Psi^{(k)}(x_1).$$

Soit $\Phi_n^{(k_1)}(x)$ la 1ère des dérivées de $\Phi_n(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = x_1$: on peut supposer, si c_n est assez petit par rapport à c_{n-1}, $k_1 = 1$.

En effet, si non, $\Phi_n(x)$ aura une racine commune avec sa dérivée. Or

$$\Phi_n(x) = c_0 + c_1 x^{\frac{\chi_1}{q}} + \ldots + c_n x^{\frac{\chi_n}{q}}.$$

Posant $y = x^{\frac{1}{q}}$, on a

$$\Phi_n(x) = \varphi_n(y) = c_0 + c_1 y^{\chi_1} + \ldots + c_n y^{\chi_n},$$

et $\varphi_n(y)$ a en commun avec sa dérivée $\varphi_n'(y)$ la racine $y_1 = x_1^{\frac{1}{q}}$, car $\Phi_n'(x) = \varphi_n'(y)y'$ (on suppose $x_1 \neq 0$).

On en conclut que le résultant des 2 équations

$$\varphi_n'(y) = \chi_1 c_1 y^{\chi_1 - 1} + \ldots + \chi_n c_n y^{\chi_n - 1}$$

$$\chi_n \varphi_n(y) - y\varphi_n'(y) = \chi_n c_0 + (\chi_n - \chi_1)c_1 y^{\chi_1} + \ldots + (\chi_n - \chi_{n-1})c_{n-1}y^{\chi_{n-1}},$$

doit être nul. Or ce résultant est, sous la forme de Sylvester, après suppression du facteur $y^{\chi_1 - 1}$ dans $\varphi_n'(y)$,

$$\begin{array}{c} \chi_{n-1} \\ \text{lignes} \\ \\ \chi_n - \chi_1 \\ \text{lignes} \end{array} \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} \chi_1 c_1 & \cdots\cdots & \chi_n c_n & 0 & \ldots \\ 0 & \chi_1 c_1 & \cdots\cdots\cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \chi_n c_0 & \cdots\cdots & (\chi_n - \chi_1)c_1 & \cdots\cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right| = \Delta = 0.$$

c_n entre dans Δ à la puissance χ_{n-1} et son coefficient est

$$\chi_n^{\chi_{n-1}} \begin{vmatrix} \chi_n c_0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \chi_n c_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \chi_n c_0 \end{vmatrix} = \chi_n^{\chi_{n-1}} (\chi_n c_0)^{\chi_n - \chi_1}.$$

On en conclura

$$\Delta = (\chi_n c_0)^{\chi^n - \chi_1} (\chi_n c_n)^{\chi_{n-1}} + A_1 c_n^{\chi_{n-1}-1} + \ldots + A_{\chi_{n-1}} = 0.$$

Or, quand $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0$ et les χ_n sont donnés, cette équation en c_n a comme limite inférieure du module de ses racines une certaine fonction F_n de n; on peut toujours supposer $|c_n|$ plus petit que F_n. En d'autres termes on peut toujours supposer la loi de décroissance des cëfficients assez rapide pour que les équations $\Phi_n(x) = 0$ n'aient que des racines simples, c. à d. pour que $k_1 = 1$.

Ceci posé, on pourra supposer encore c_{n+1} assez petit pour que

$$|\Psi'(x_1)| < \theta |\Phi_n'(x_1)|,$$

θ étant une fraction $\leqq \frac{1}{2}$. Alors $\Phi'(x_1) \neq 0$, d'après (24), et, puisque $\Phi_n(x_1) = 0$,

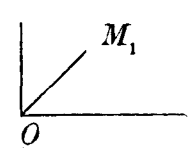
$$(25) \qquad |\Phi(x) - \Psi(x_1)| \geqq \frac{|x - x_1| |\Phi_n'(x_1)|}{2} (1 - \theta) \geqq \left| \frac{(x - x_1)\Phi_n'(x_1)}{4} \right| = \lambda,$$

d'après (22), car

$$\Phi'(x_1) \geqq |(1 - \theta) \Phi_n'(x_1)|.$$

L'inégalité (25) a lieu dès que c_{n+1} est assez petit et que (23') a lieu. Supposons x assez grand et c_{n+1} assez petit pour que

$$(26) \qquad |\Psi(x_1)| < \left| \frac{(x - x_1)\Phi_n'(x_1)}{8} \right| = \frac{\lambda}{2}.$$



D'après (25) et (26), soit M_1 le point représentatif de $u_1 = \Phi(x_1) = \Psi(x_1)$ dans le plan des u, si $\Phi(x) = u$. Le module de $\Phi(x) - \Phi(x_1)$ a une limite inférieure λ indépendante de c_{n+1}; on pourra toujours prendre c_{n+1} assez petit pour que $\lambda \geqq 2OM_1$; il suffira de ne donner à x que des valeurs telles que

$$\left|\frac{(x-x_1)\Phi_n'(x_1)}{4}\right| \geqq 2\,|\Psi(x_1)|,$$

ou

$$(27) \qquad |x-x_1| \geqq \left|\frac{8\Psi(x_1)}{\Phi_n'(x_1)}\right|,$$

ce qui est possible, en prenant c_{n+1} assez petit pour que, d'après (23')

$$(28) \qquad \left|\Phi_n'(x_1)\frac{R^3}{6M'}\right| \geqq \left|\frac{16\Psi(x_1)}{\Phi_n'(x_1)}\right|.$$

Alors le module de $\Phi(x)$ est toujours $\geqq OM_1$.[1] D'après le théorème précité de Weierstrass complété par nous, les valeurs que prend $\Phi(x) - \Phi(x_1)$ quand x varie aux environs de x_1 comprennent toutes les valeurs représentées par les points situés à l'intérieur d'un cercle C_1 de rayon λ et de centre M_1 dans le plan des u, en particulier l'origine pour laquelle Φ a la valeur o, et les valeurs x correspondant à (27) et (23') donnent des points dont aucun n'est situé à l'intérieur de C_1.

D'après (27) la valeur x' correspondante pour laquelle $\Phi(x') = 0$ est telle que

$$|x'-x_1| \leqq \left|\frac{8\Psi(x_1)}{\Phi_n'(x_1)}\right|;$$

$|x'|$ diffère de $|x_1|$ d'une quantité qui tend vers o avec c_{n+1}.

c. q. f. d.

On peut établir un lemme réciproque:

Lemme II. Tout étant posé comme au lemme I, on pourra toujours, quel que soit n, supposer la loi de décroissance des c_n assez rapide pour

[1] On peut encore conclure élégamment comme il suit en employant la terminologie de notre communication (Acad. Sc. Paris) du 3 mars 1902: une ligne de modules minima décroissants issue de x_1 dans le plan des x ne peut sortir du cercle de centre x_1 et de rayon déterminé par (27), puisque sur ce cercle tous les modules de $\Phi(x)$ sont supérieurs à celui de $\Phi(x_1)$. Par conséquent il y a un zéro de $\Phi(x)$ à l'intérieur de ce cercle. Voir encore J. Ec. Polyt., 1903, p. 75—95.

Nous indiquons plus loin d'autres applications des lemmes I et II.

qu'à toute racine ξ de $\Phi = 0$ de module inférieur au double de la limite supérieure du module des racines de $\Phi_n = 0$ corresponde une racine x_1 de $\Phi_n = 0$, la différence $\xi - x_1$ ayant un module η_n petit arbitraire, et pour que $\Phi = 0$ n'ait que des racines distinctes: η_n pourra être pris d'autant plus petit que c_{n+1} sera plus petit par rapport à c_n.[1]

En effet, on a

$$\Phi(\xi) = \Phi_n(\xi) + \Psi_n(\xi) = 0.$$

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de $\Phi_n(x)$; n étant donné, ainsi que $c_0, c_1, \ldots, c_n$, elles sont parfaitement déterminées. Par conséquent si l'on considère toutes les valeurs de x autres que celles comprises à l'intérieur de cercles de rayon η_n ayant $x_1, x_2, \ldots$ comme centres, pour ces valeurs $\Phi_n(x)$ a une limite inférieure L_n parfaitement déterminée pour toute valeur de η_n.

Pour toute valeur ξ_1 de ξ non comprise à l'intérieur de ces cercles on ne peut avoir $\Phi(\xi_1) = 0$ que si $|\Psi_n(\xi_1)|$ est supérieur à la limite en question: ces racines ξ_1 se divisent alors en 2 catégories: celles où $|\xi_1|$ est inférieur au double de la limite supérieure du module des racines de $\Phi_n(x) = 0$, et les autres.

Pour les premières

$$\Psi_n|\xi_1| \leqq |c_{n+1}||\xi_1|^{\tilde{\omega}_{n+1}} + \ldots.$$

On peut assigner à $|\Psi_n(\xi_1)|$ une limite supérieure aussi petite Λ_n qu'on veut pourvu que $|c_{n+1}|$ soit assez petit, c. à. d. telle que $\Lambda_n < L_n$, ce qui est impossible.

On peut également supposer les racines de $\Phi(x) = 0$ distinctes, si le mode de décroissance des $|c_n|$ est suffisamment rapide. En effet, si non, soit $\Phi(\xi) = 0$, $\Phi'(\xi) = 0$: il y a une racine x_1 de $\Phi_n(x) = 0$ telle que $|x_1 - \xi| < \eta_n$ et une x_1' de $\Phi_n'(x)$ telle que $|x' - \xi| < \eta_n'$. Or $c_0, c_1, \ldots, c_n$ étant donnés, on peut prendre c_{n+1} assez petit pour que $\eta_n + \eta_n' < \eta_n''$, η_n'' étant aussi petit qu'on veut. Or $|x_1' - x_1| \leqq \eta_n + \eta_n'$ est limité inférieurement en fonction de $c_0, c_1, \ldots, c_n$, ce qui est contradictoire avec ce qui précède.

Par suite, si le mode de décroissance des $|c_n|$ est suffisamment rapide, $\Phi(x) = 0$ n'a que des racines distinctes. c. q. f. d.

---

[1] Quand η_n est assez petit, à chaque racine de $\Phi_n(x) = 0$ en correspond une, et une seule de $\Phi(x) = 0$.

Ceci posé, nous allons établir ce théorème:

Théorème. Soit

$$\sum_0^\infty c_a x^{\tilde{\omega}_a} = 0$$

une équation transcendante dont le 1[er] membre est convergent ($\varpi_a = \frac{\chi_a}{q}$; $\chi_a =$ entier croissant, q et χ_a entiers positifs). On pourra toujours, les χ_a étant donnés ainsi que q, supposer la loi de décroissance des coëfficients c_a assez rapide pour que π ne puisse en être racine.

En effet, on sait que MM. LINDEMANN, et, après lui, MM. GORDAN, HILBERT, HURWITZ, ROUCHÉ [1] ont établi que e^ζ n'était pas racine d'une équation algébrique à coëfficients entiers quand ζ était algébrique, par suite que π n'était pas algébrique. On peut alors chercher à étendre les résultats des paragraphes précédents aux nombres e^ζ, où ζ est un nombre algébrique ou racine d'une des équations (1), (18) ou (19). Nous nous contenterons d'établir, à titre d'exemple, le théorème pour π ou $i\pi$; il nous suffira de modifier trèslégèrement la méthode de M. HILBERT.

Supposons que $i\pi$ soit racine d'une équation

$$(1) \qquad \sum_0^\infty c_a x^{\tilde{\omega}_a} = 0.$$

On pourra toujours prendre $|c_{n+1}|$ assez petit pour que les racines de

$$(29) \qquad \sum_0^n c_a x^{\tilde{\omega}_a} = 0$$

diffèrent d'aussi peu qu'on veut d'autant de racines correspondantes de (1), dont $i\pi$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda_n}$ les λ_n racines de (29): nous formons [2]

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2})\ldots(1 + e^{\alpha_{\lambda_n}}) = 1 + e^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_N}$$
$$= a + e^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_M} = \varepsilon_n;$$

quand c_{n+1} est assez petit sans que n varie, il y a une des racines α, α_1 par exemple, qui est très voisine de $i\pi$, d'après l'hypothèse et les 2 lemmes

[1] V. Math. Ann. t. 43, 1893, p. 216, 220, 222 et ROUCHÉ, *Traité de Géométrie.*

[2] Nous conservons autant que possible les notations et la démonstration de M. HILBERT, à laquelle il conviendra de se reporter.

précédents, et ε_n est aussi petit qu'on veut. $\beta_1, \ldots, \beta_M$ sont racines d'une équation algébrique de degré M à coefficients entiers

$$f(z) = bz^M + \ldots + b_M = 0,$$

$b, \ldots, b_M$ ne dépendant que de $c_0, \ldots, c_n$.

On formera alors

$$(30) \qquad \int_0^\infty z^\rho [g(z)]^{\rho+1} e^{-z} dz (a + e^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_M}) = \int_0^\infty \varepsilon_n z^\rho [g(z)]^{\rho+1} e^{-z} dz,$$

où ρ est un nombre entier positif, et $g(z) = b^M f(z)$, et l'on sera encore conduit, en posant

$$P_1 = a\int_0^\infty + e^{\beta_1}\int_{\beta_1}^\infty + \ldots + e^{\beta_M}\int_{\beta_M}^\infty,$$

$$P_2 = e^{\beta_1}\int_0^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_M}\int_0^{\beta_M},$$

aux relations

$$\frac{P_1}{\underline{|\rho}} \equiv ab^{\rho M + M} b_M^{\rho+1} \qquad (\text{mod } \rho + 1),$$

$$\frac{|P_2|}{\underline{|\rho}} < \frac{\varkappa K^\rho}{\underline{|\rho}},$$

$$\varkappa = \{|\beta_1 e^{\beta_1}| + \ldots + |\beta_M e^{\beta_M}|\} k.$$

$\beta_1, \ldots, \beta_M$ diffèrent d'aussi peu qu'on veut de fonctions bien déterminées de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, et leur valeur est limitée en fonction de n, $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Il en est de même de $b_1, \ldots, b_M$, par suite de $\varkappa$, k et K.

D'autre part, le second membre de (30) est égal à

$$|\varepsilon_n| \int_0^\infty = |\varepsilon_n| \underline{|\rho} (b^{\rho M + M} b_M^{\rho+1} + \text{mult.} (\rho + 1)),$$

et (30) devient

$$(31) \qquad |ab^{\rho M + M} b_M^{\rho+1} + \text{mult.} (\rho + 1)| \underline{|\rho} + \varkappa K^\rho$$
$$= |\varepsilon_n| \underline{|\rho} (b^{\rho M + M} b_M^{\rho+1} + \text{mult.} (\rho + 1)).$$

Ceci posé, n, c_0, c_1, ..., c_n étant donnés, choisissons ρ assez grand pour que abb_M soit 1^er^ à $\rho + 1$, et ρ suffisamment grand pour que

$$\left|\frac{\chi K^\rho}{\underline{|\rho}}\right| < \frac{1}{4}$$

$|ab^{\rho M+M} b_M^{\rho+1} + \text{mult.}(\rho + 1)|$ est un entier $\neq 0$, et le 1^er^ membre de (31) est $\geqq \frac{3}{4}(\underline{|\rho})$. Donnant alors à ρ une valeur limitée en fonction de n et satisfaisant aux conditions ci-dessus, on pourra toujours prendre c_{n+1}, par suite ε_n assez petit pour que le second membre de (31) soit $< \frac{3}{4}(\underline{|\rho})$. L'égalité (31) est alors impossible, et nous obtenons le théorème annoncé.

V.

Le véritable caractère des théorèmes qui précèdent est surtout qu'ils donnent un moyen de calculer une limite supérieure de c_{n+1} en fonction de c_0, c_1, ..., c_n, de façon que les théorèmes énoncés aient lieu. Ils peuvent être regardés comme des cas particuliers, ou, plus exactement, des corollaires de théorèmes beaucoup plus généraux, mais dont l'application conduit aux mêmes raisonnements lorsqu'on veut déterminer la limite en question.

On peut établir, à titre d'exemple, la propriété générale suivante:

Théorème I. Soient t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1}, ... des entiers fonctions données de n telles que la série $\sum \frac{a_n}{t_n} x^n$ soit convergente quels que soient les entiers positifs ou négatifs a_0, a_1, ..., a_n, ..., quand $|a_0|$, $|a_1|$, ..., $|a_n|$, ... ont une limite supérieure finie A. Étant donné un nombre ζ quelconque non algébrique,[1] si t_1, t_2, ..., t_n, ... croissent suffisamment vite avec n, aucun nombre fonction algébrique à coëfficients entiers de ζ n'est racine d'une des équations $\sum_0^\infty \frac{a_n}{t_n} x^n = 0$.[2]

[1] Nous verrons plus loin (p. 326) qu'une propriété analogue a lieu quand ζ est algébrique.

[2] Si l'on se place au point de vue de la théorie des ensembles de M. Cantor, on remarquera que ce théorème et tous les théorèmes précédents s'appliquent à un en-

En effet, considérons l'ensemble de celles de ces équations pour lesquelles $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n| \leqq A$, et les valeurs correspondantes de $\sum\limits_0^n \frac{a_n}{t_n} x^n$ quand on donne à x toutes les valeurs possibles non algébriques racines des équations algébriques de degré $\leqq d$ dont les coefficients sont des polynomes en ζ à coëfficients entiers, de degré $\leqq \delta$, les coëfficients entiers dans chaque polynome ne dépassant pas δ_1. Ces valeurs sont en nombre limité; il en est par suite de même des valeurs correspondantes de mod. $\sum\limits_0^n \frac{a_n}{t_n} x^n$, et celles-ci possèdent une limite inférieure fonction de n, A, d, δ et δ_1, $\varphi(n, A, d, \delta, \delta_1)$, $t_1, \ldots, t_n$ étant supposés donnés. On peut toujours supposer que l'on prenne pour φ une fonction non croissante de A, d, δ, δ_1, et l'on pourra écrire pour n assez grand, si l'on prend $A, d, \delta, \delta_1 \leqq n$,

$$\varphi(n, A, d, \delta, \delta_1) \geqq \varphi(n, n, n, n, n) \geqq \psi(n).$$

Si donc $\frac{a_{n+1}}{t_{n+1}}$ est suffisamment petit par rapport à $\psi(n)$, $\sum\limits_0^\infty \frac{a_n}{t_n} x_n = 0$ est impossible pour toutes les valeurs en question.

Dès lors pour un mode de croissance suffisamment rapide de t_n, l'équation $\sum\limits_0^\infty \frac{a_n}{t_n} x^n = 0$ ne peut avoir pour racines les valeurs x satisfaisant aux conditions précitées, quels que soient A, d, δ, δ_1. On peut en effet trouver toujours une valeur de n suffisamment grande pour que le raisonnement précédent soit applicable. c. f. q. d.

Remarque I. Une propriété semblable a lieu, quand on considère non plus les fonctions algébriques (à coëfficients entiers) d'un seul nombre ζ, mais l'ensemble des fonctions algébriques (à coëfficients entiers) d'un nombre limité de nombres $\zeta_1, \ldots, \zeta_\mu$ non algébriques. Le raisonnement est le même.

---

semble dénombrable (que nous appellerons ensemble D) de nombres; au contraire, les théorèmes relatifs aux nombres X s'appliquent à un ensemble de nombres ayant la puissance du continu (que nous appellerons ensemble C). Nous verrons plus loin qu'on peut établir des propriétés de même nature pour une infinité d'ensembles C analogues à celui des nombres X.

Remarque II. Quand on précise la nature du nombre ζ, on peut appliquer pour la détermination de la limite supérieure de c_{n+1} des principes tout semblables à ceux qui nous ont servi dans les 4 premier paragraphes.

Nous citerons à titre d'exemple l'ensemble des nombres $m + pe^{\frac{r}{q}}$, $\frac{r}{q}$, $m = \frac{r_1}{q_1}$, $p = \frac{r_2}{q_2}$ prenant toutes les valeurs rationnelles possibles.

Considérons l'équation

$$\sum_0^\infty c_a x^{la} = 0. \tag{32}$$

Si $m + pe^{\frac{r}{q}}$ en est racine quand r, r_1, r_2, q, q_1, q_2 sont $\leqq A$ en valeur absolue, on aura

$$\sum_0^\infty c_a \left(m + pe^{\frac{r}{q}}\right)^{la} = 0.$$

Soit $e^{\frac{r}{q}} = \varepsilon$; considérons

$$\sum_0^n c_a (m + p\varepsilon)^{la} = d_0 + d_1 \varepsilon + \ldots + d_{ln} \varepsilon^{ln} = \sum_0^{ln} d_a e^{a\frac{r}{q}}.$$

On aura, d'après (3)

$$\sum_0^{ln} d_a e^{a\frac{r}{q}} F(0) = \sum_0^{ln} d_a F\left(a\frac{r}{q}\right) + \sum_0^{ln} d_a e^{a\frac{r}{q}} \int_0^{a\frac{r}{q}} f(x) e^{-x} dx$$

$$= -\sum_{n+1}^\infty c_a (m + p\varepsilon)^{la} F(0).$$

On prendra ici

$$f(x) = \frac{x^{p_1 - 1}\left[x - \frac{r}{q}\right]^{p_1} \ldots \left[x - \frac{rln}{q}\right]^{p_1}}{\underline{|(p_1 - 1)}},$$

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots.$$

La marche à suivre est dès lors la même que dans le cas où $m = 0$, $p = 1$. Il en résulte que pour

$$c_{n+1} < \varphi(A, c_0, c_1, \ldots, c_n)$$

l'équation (32) est impossible: elle le sera a fortiori si $c_{n+1} < \varphi(n, c_0, c_1, \ldots, c_n)$ pour n assez grand, ce qui est toujours possible; φ est une fonction que les formules précédentes permettent de déterminer. On en déduira que, pour un mode de décroissance suffisamment rapide de c_n, aucun des nombres $m + pe^{\frac{r}{q}}$ n'est racine de (32) quel que soit A.

Ce qui précède ne donne, pour chaque nombre ζ non algébrique, qu'un ensemble D de nombres qui ne sont pas racines d'équations de la forme $\sum\limits_0^\infty c_n x^n = 0$. Mais on peut établir pour tout nombre ζ, algébrique ou non, l'existence d'une infinité d'ensembles C jouissant de propriétés analogues: nous avons déjà indiqué ce théorème dans le cas où ζ est un nombre entier ordinaire[1] (nombres X). Nous allons voir que la même propriété a lieu quand ζ est algébrique ou transcendant.

Soit Y un nombre quelconque, ζ un autre nombre > 1, X_1 la partie entière de Y; on pourra écrire

$$Y = X_1 + \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 < 1.$$

Posons

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha_1 + \varepsilon_2}{\zeta}, \quad \varepsilon_2 < 1, \ \alpha_1 \text{ entier } < \zeta;$$

on aura

$$\varepsilon_2 = \frac{\alpha_2 + \varepsilon_3}{\zeta}, \quad \varepsilon_3 < 1, \ \alpha_2 \text{ entier } < \zeta$$

. . . .

Finalement on mettra Y d'une seule manière sous la forme

$$Y = X_1 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2}{\zeta^2} + \ldots;$$ [2]

---

[1] loc. citat.

[2] Il en résulte en particulier que tout nombre ζ non algébrique satisfait à une infinité d'équations transcendantes à coëfficients rationnels. Mais, pour $\zeta > 1$ ces équations présentent un point singulier essentiel à l'origine. Pour $\zeta < 1$, il faudrait poser $\zeta = \frac{1}{\zeta'}$ et on aurait un développement analogue: ζ est alors effectivement racine d'une infinité d'équations $A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n + \ldots = 0$ à coëfficients rationnels ou entiers.

on aura

$$\varepsilon_1\zeta = \alpha_1 + \varepsilon_2 < \zeta, \qquad \alpha_1 \leqq E(\zeta),$$
$$\varepsilon_2\zeta = \alpha_2 + \varepsilon_3 < \zeta, \qquad \alpha_2 \leqq E(\zeta),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots$$

On arrive ainsi à représenter tout nombre dans un *système de numération de base quelconque non entière,* et l'on peut se proposer de voir si l'on ne peut obtenir pour ce système des théorèmes analogues à ceux que nous avons obtenus pour les nombres X.

Considérons l'ensemble des nombres

$$(33) \qquad Y = X_1 + \frac{\alpha_1}{\zeta^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\alpha_l}{\zeta^{\psi_l}} + \ldots,$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \ldots$ pouvant avoir toutes les valeurs entières positives ou négatives $\leqq E(\zeta)$ en valeur absolue. Quels que soient $\psi_1, \ldots, \psi_l, \ldots$, cet ensemble a la puissance du continu:[1] c'est un ensemble C.

Prenons alors une équation

$$(34) \qquad \sum_0^\infty c_a x^{\varpi_a} = 0$$

algébrique ou transcendante (ϖ_a entier). Peut-on avoir $\sum\limits_0^\infty c_a Y^{\varpi_a} = 0$? Nous poserons

$$Y = X_1 + \sum_0^l{}^b \frac{\alpha_b}{\zeta^{\psi_b}} + \sum_{l+1}^\infty{}^b \frac{\alpha_b}{\zeta^{\psi_b}} = A_l + \sum_{l+1}^\infty \frac{\alpha_b}{\zeta^{\psi_b}},$$

et il faudra

$$0 = c_0 + c_1\Big(A_l + \sum_{l+1}^\infty\Big)^{\varpi_1} + \ldots + c_n\Big(A_l + \sum_{l+1}^\infty\Big)^{\varpi} + \sum_{n+1}^\infty c_a\Big(A_l + \sum_{l+1}^\infty\Big)^{\varpi_a},$$

ce qui peut s'écrire

$$(35) \qquad 0 = c_0 + c_1 A_l^{\varpi_1} + \ldots + c_n A_l^{\varpi} + B\sum_{l+1}^\infty + \sum_{n+1}^\infty c_a\Big(A_l + \sum_{l+1}^\infty\Big)^{\varpi_a}.$$

ζ étant donné, ainsi que $\psi_1, \ldots, \psi_l$, $c_0, c_1, \ldots, c_n$, $A_l^{\varpi_1}, \ldots, A_l^{\varpi_n}$, B sont limités en fonction de ψ_l et ϖ_n, quels que soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ et $X_1 \leqq A$. On pourra alors toujours prendre c_{n+1} assez petit t ψ_{l+1} assez grand pour

[1] Voir par ex. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 32.

que $\left| B \sum_{l+1}^{\infty} + \sum_{n+1}^{\infty} c_a \left(A_l + \sum_{l+1}^{\infty} \right)^{\tilde{\omega}_a} \right| < \varepsilon_{n,l}$, $\varepsilon_{n,l}$ étant aussi petit qu'on veut. On devra donc avoir

$$(36) \qquad M_{n,l} = |c_0 + c_1 A_l^{\tilde{\omega}_1} + \ldots + c_n A_l^{\tilde{\omega}_n})| < \varepsilon_{n,l}.$$

Ceci posé, si ζ est algébrique le 1^er^ membre pourra parfaitement s'annuler. Mais s'il n'est pas algébrique, il en est différemment: soit donc ζ transcendant.

1°. Supposons que $c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = 0$, c. à. d. que (34) soit une équation algébrique: $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont des entiers que l'on peut supposer $\leqq d$. Le 1^er^ membre $M_{n,l}$ de (36), pour toute valeur donnée de ζ, est limité inférieurement en fonction de d, n, ψ_l. On aura

$$M_{n,l} \geqq \varphi_1(d, n, \psi_l, A),$$

φ_1 étant une fonction de A, d, n, ψ_l qu'on peut toujours supposer non croissante.

Si l'on prend $l \geqq A$, $l \geqq d$, $l \geqq n$, on aura a fortiori

$$M_{n,l} \geqq \varphi_1(l, l, \psi_l, l).$$

Prenant alors ψ_{l+1} assez grand pour que

$$\varepsilon_{n,l} < \varphi_1(l, l, \psi_l, l)$$

quand $n < l$, ce qui est toujours possible, on voit que (36) est impossible.

Par conséquent on peut toujours trouver un mode de croissance assez rapide des ψ_l pour que, à partir d'une certaine valeur de l, quelles que soient l'équation algébrique (34) et la valeur X_1, (36) soit impossible. Y ne peut alors être racine d'aucune équation algébrique.

2°. Supposons que (34) soit une équation transcendante, et prenons

$$c_0 = a_0, \qquad c_1 = \frac{a_1}{t_1}, \ \ldots, \ c_n = \frac{a_n}{t_n}, \ \ldots, \qquad (a_i \text{ entier}).$$

Posons $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n| \leqq A$ (A entier donné). Pour toutes les valeurs de $a_0, \ldots, a_n$ satisfaisant à cette condition, quand $t_1, \ldots, t_n$ sont donnés, on peut encore assigner, quand ζ est donné et non algébrique, une limite inférieure de $M_{n,l}$ en fonction de A, l et n,

$$M_{n,l} \geqq \varphi_2(A, n, l),$$

φ_2 n'étant pas une fonction croissante de A, n, l. Si l'on prend par exemple $n = l \geqq A$, on aura

$$M_{n,n} \geqq \varphi_2(n, n, n).$$

On pourra toujours prendre ψ_{l+1} et $a_{n+1}^{-1} t_{n+1}$ assez grands pour que $\varepsilon_{n,n} < \varphi_2(n, n, n)$, et (36) sera alors impossible. Si le mode de croissance des t_n et ψ_n est suffisamment rapide, il y aura impossibilité quel que soit A.

3°. Supposons encore que (34) soit une équation transcendante: pour les valeurs particulières de ζ de la forme e, ou $e^{\frac{r}{q}}$ ($\frac{r}{q}$ rationnel) ou π, on pourra encore probablement trouver des limites inférieures précises de ψ_{l+1} et t_{n+1} par les mêmes procédés que ceux employés par nous dans l'extension des démonstrations de MM. HURWITZ et HILBERT. Nous n'insistons pas.

Il nous reste à considérer le cas où ζ est algébrique.

1°. Si (34) est une équation algébrique $f(x) = 0$, qu'on peut supposer irréductible, on a aux environs d'une racine $|f'(x)| < M$. Si $Y = A_l + \varepsilon_l$ est une racine, $f(A_l + \varepsilon_l) = 0 = f(A_l) + \varepsilon_l \mu$

$$|\varepsilon_l| = \left|\frac{f(A_l)}{\mu}\right| > \frac{|f(A_l)|}{kM},$$

M et k étant finis.

D'abord on peut supposer $f(A_l) \neq 0$: en effet le module de la différence entre 2 racines de $f(x) = 0$ est limité inférieurement en fonction du degré n de $f(x)$ et de d, si tous les coëfficients de $f(x)$ sont $\leqq d$; il suffira de prendre

$$\psi_{l+1} > \chi(n, d),$$

pour que $f(A_l) \neq 0$. Alors $\frac{|f(A_l)|}{kM}$ est limité inférieurement en fonction de n, d, l, et $|\varepsilon_l|$ aussi: par suite on voit que, quelle que soit l'équation algébrique irréductible à coëfficients entiers considérée, si le mode de croissance de ψ_l est suffisamment rapide il y aura toujours une valeur de l pour laquelle notre raisonnement sera applicable, et Y ne sera pas algébrique.

2°. Si (34) est une équation transcendante, pour toute valeur de A_l, $M_{n,l}$ ou $M_{n+1,l}$ est $\neq 0$. Le raisonnement qui nous a servi pour le cas où ζ est transcendant est à peu près applicable. On aura

$$\text{soit} \quad |\varepsilon_{n,l}| > M_{n,l} \geqq \varphi_{n,l}\,, \qquad \text{si} \quad M_{n,l} \neq 0,$$

$$\text{soit} \quad |\varepsilon_{n+1,l}| > M_{n+1,l} \geqq \varphi_{n+1,l}, \quad \text{si} \quad M_{n,l} = 0.$$

Si le mode de croissance des $\frac{1}{c_n}$ et des ψ_l est suffisamment rapide, on voit successivement que ces 2 inégalités sont impossibles.

Les résultats ci-dessus peuvent être résumés comme il suit:

Théorème. Soit

$$Y = X_1 + \frac{a_1}{\zeta^{\psi_1}} + \ldots + \frac{a_l}{\zeta^{\psi_l}} + \ldots,$$

($|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_l|, \ldots$ entiers $\leqq E(\zeta)$) un nombre exprimé dans le système de numération de base ζ ($|\zeta| > 1$), algébrique ou non, et

$$\sum_0^{\infty} c_a x^{\varpi_a} = 0, \qquad (\varpi_a \text{ entier}), \tag{34}$$

une équation algébrique ou transcendante: ζ étant donné, pour un mode de croissance suffisamment rapide de ψ_l avec l: 1°, Y ne peut être algébrique; 2°, si $c_0 = a_0$, $c_1 = \frac{a_1}{t_1}, \ldots, c_n = \frac{a_n}{t_n}, \ldots$, ($|a_1|, \ldots, |a_n|, \ldots$ entiers limités quelconques), Y ne peut être racine de (34) quand t_n croît suffisamment vite avec n.

Remarque. Il est bien évident que si, au lieu d'un nombre transcendant ζ, on considère k nombres $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$, on pourra encore montrer par les mêmes procédés qu'aucun des nombres Y correspondant à $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ ne peut être solution d'une équation algébrique ou de $\sum_0^{\infty} \frac{a_n}{t_n} x^{\varpi_n} = 0$, quand ψ_l et t_n croissent suffisamment vite avec l et n. Dans le cas particulier où $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ seraient liés par certaines relations, par exemple si ce sont des puissances rationnelles de ζ_1, ou des fonctions algébriques à coëfficients entiers de ζ_1, on pourra aller un peu plus loin. Supposons par exemple que $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ soient l'ensemble des racines des équations algébriques de degré $\leqq d$ dont les coëfficients sont des polynomes à coëfficients entiers en ζ_1 de degré $\leqq \delta$, les coëfficients de chaque polynome ne dépassant pas δ_1 en valeur absolue: k est limité en fonction de d, δ, δ_1. Les limites inférieures de ψ_{l+1} et t_{n+1} sont fonctions non décroissantes de

d, ∂ et ∂_1; pour l et n assez grands avec $n = l$, par exemple, on pourra prendre comme limite inférieure une fonction de n seul. On pourra donc encore trouver un mode de croissance suffisamment rapide de ψ_l et t_n pour que le théorème précédent reste vrai quand ζ est un quelconque des nombres fonctions algébriques de ζ_1. Donc

Corollaire. Le théorème précédent reste vrai pour l'ensemble des nombres Y obtenus en donnant à ζ toutes les valeurs des fonctions algébriques d'un même nombre ζ_1.

Il existe ainsi des nombres, les racines des équations algébriques ou des équations $\sum_0^\infty c_n x^{\bar{\omega}_n} = 0$ (le mode de croissance des $\bar{\omega}_n$ étant donné et c_n croissant assez vite avec n), qui, mis sous la forme

$$X = X_1 + \frac{\alpha_1}{\zeta^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\alpha_l}{\zeta^{\psi_l}} + \ldots$$

X_1 entier, $|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_l|, \ldots \leqq |\zeta|$ ne peuvent jamais présenter un mode de croissance des ψ_l qui soit trop rapide, quand on prend successivement pour ζ toutes les valeurs des fonctions algébriques d'un même nombre transcendant ζ_1 arbitraire, mais donné.

VI.

Nous avons rencontré au § IV une propriété algébrique des équations transcendantes $\sum_0^\infty c_a x^{\bar{\omega}_a} = 0$. Nous ne croyons pas inutile [1] d'étudier à ce point de vue quelques propriétés algébriques de ces équations et de montrer qu'elles forment un cas limite très-voisin de celui des équations algé-

[1] Nous nous contentons d'établir les propriétés relatives à $\sum_0^\infty c_a x^{\bar{\omega}_a} = 0$. On a pour les équations (18), (19) et plus généralement

$$\sum_0^\infty c_a x^{\bar{\omega}_a} + \sum_0^\infty \frac{c_a^0}{x^{\bar{\omega}_a^0}} + \ldots + \sum_0^\infty \frac{c_a^k}{(x - \beta_k)^{\bar{\omega}_a^k}} = 0$$

des résultats tout-à-fait analogues. Nous y reviendrons ultérieurement. (Voir Bull. Soc. Math., 1902, loc. cit.)

briques, en particulier des équations binômes. Les résultats précédents, joints à ceux de LIOUVILLE et à ceux que nous avons obtenus dans une note antérieure déjà citée, l'établissent amplement au point de vue arithmétique.

Nous allons d'abord établir le théorème suivant:

Théorème I. Soit l'équation transcendante

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty c_a x^{\varpi_a} = 0 \quad \left(\varpi_a = \frac{\chi_a}{q}, \ q, \ \chi_a \ \text{entiers}\right),$$

les c_a décroissant suffisamment vite quand les ϖ_a sont donnés. Si les c_n sont tous réels et si $\Phi_n(x) = 0$ a $2p$ racines imaginaires et $\varpi_n q - 2p$ racines réelles, $\Phi(x) = 0$ a $2p$ racines imaginaires et $\varpi_n q - 2p$ racines réelles correspondantes distinctes.

Nous savons déjà que les racines de $\Phi(x)$ dont le module ne dépasse pas le double de la limite supérieure du module des racines de $\Phi_n(x) = 0$ diffèrent de racines correspondantes de $\Phi_n(x) = 0$ d'aussi peu qu'on veut, et réciproquement pourvu que $|c_{n+1}|$ soit suffisamment petit par rapport à c_n.

Soit $\alpha + \beta i$ une racine imaginaire de $\Phi(x)$: quand $|c_{n+1}|$ tend vers 0, $\alpha + \beta i$ tend vers une racine $a + bi$ de $\Phi_n(x)$. Si $b \neq 0$, on a évidemment, quand $|c_{n+1}|$ suffisamment petit, $\beta \neq 0$. Si $b = 0$, il y aura 2 racines $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$ tendant vers a: alors $\Phi(\alpha + \beta i) - \Phi(\alpha - \beta i)$ est nul, et, quand β tend vers 0 il en résulte $\Phi'(a) = \Phi'_n(a) = 0$ contrairement à ce qu'on a vu. Donc une racine imaginaire de $\Phi(x)$ ne peut correspondre qu'à une racine imaginaire de $\Phi_n(x)$. Il y a réciprocité, car soit α une racine réelle de $\Phi(x)$; quand c_{n+1} tend vers 0 elle a évidemment pour limite une racine réelle de $\Phi_n(x)$.

Le nombre des racines de $\Phi_n(x)$ étant évidemment $\varpi_n q$, le théorème en résulte immédiatement.

Les équations $\Phi(x) = 0$, que nous appellerons des *équations pseudo-* ou *quasialgébriques,* peuvent donc être étudiées au point de vue du nombre de leurs racines réelles comme les équations algébriques. Dans ce but nous considérerons seulement le cas où ϖ_n est entier, le cas où $\varpi_n = \frac{\chi_n}{q}$ s'en déduisant facilement, et nous établirons d'abord le lemme suivant:

Lemme. L'équation $\Phi_n(x) = 0$, où les c_n sont réels, a les $\bar\omega_n - \bar\omega_{n-1}$ racines $\xi_1(1+\varepsilon_1)$, $\xi_2(1+\varepsilon_2)$, ..., $\xi_{\bar\omega_n-\bar\omega_{n-1}}(1+\varepsilon_{\bar\omega_n-\bar\omega_{n-1}})$, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\bar\omega_n-\bar\omega_{n-1}}$ étant les racines de $c_n x^{\bar\omega_n-\bar\omega_{n-1}} + c_{n-1} = 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\bar\omega_n-\bar\omega_{n-1}}$ tendant vers 0 quand c_n tend vers 0, $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ étant donnés. Les racines correspondantes de $\Phi(x) = 0$ sont de la même forme.

En effet, soit

$$c_n \xi^{\bar\omega_n-\bar\omega_{n-1}} + c_{n-1} = 0,$$

$$\begin{aligned} O = \Phi_n[\xi(1+\varepsilon)] &= c_n\xi^{\bar\omega_n}(1+\varepsilon)^{\bar\omega_n} + c_{n-1}\xi^{\bar\omega_{n-1}}(1+\varepsilon)^{\bar\omega_{n-1}} + \ldots \\ &= c_n\xi^{\bar\omega_n}(\bar\omega_n\varepsilon + C^2_{\bar\omega_n}\varepsilon^2 + \ldots) + c_{n-1}\xi^{\bar\omega_{n-1}}(\bar\omega_{n-1}\varepsilon + C^2_{\bar\omega_{n-1}}\varepsilon^2 + \ldots) \\ &\quad + c_{n-2}\xi^{\bar\omega_{n-2}}(1+\varepsilon)^{\bar\omega_{n-2}} + \ldots \\ &= \varepsilon(\bar\omega_{n-1} - \bar\omega_n)c_{n-1}\xi^{\bar\omega_{n-1}} + \varepsilon^2 c_{n-1}\xi^{\bar\omega_{n-1}}A + c_{n-2}\xi^{\bar\omega_{n-2}}(1+\varepsilon)^{\bar\omega_{n-2}} + \ldots; \end{aligned}$$

A ne dépend que de $\bar\omega_n$, $\bar\omega_{n-1}$ et ε et reste fini quand ε tend vers zéro.

Cette équation donne alors

$$\varepsilon = \frac{c_{n-2}\xi^{\bar\omega_{n-2}}(1+\varepsilon)^{\bar\omega_{n-2}} + \ldots}{(\bar\omega_n - \bar\omega_{n-1})c_{n-1}\xi^{\bar\omega_{n-1}} - \varepsilon c_{n-1}\xi^{\bar\omega_{n-1}}A}$$

et est satisfaite par une valeur de ε qui tend vers 0 quand c_n tend vers 0, car ξ croît alors indéfiniment et $\bar\omega_{n-1} > \bar\omega_{n-2}$.

Il n'y a plus qu'à appliquer les lemmes du § IV.

c. q. f. d.

On en conclut de suite le théorème suivant:

Théorème II. Soit l'équation

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty c_n x^{\bar\omega_n} = 0$$

où $\bar\omega_n$ est entier: si le mode de décroissance des c_n est suffisamment rapide, on obtiendra le nombre des racines réelles ou imaginaires de $\Phi(x) = 0$ qui correspondent à celles de $\Phi_n(x) = 0$, et même une valeur approchée de ces racines en déterminant celui des équations binômes [1]

$$c_n\xi^{\bar\omega_n-\bar\omega_{n-1}} + c_{n-1} = 0, \qquad c_{n-1}\xi^{\bar\omega_{n-1}-\bar\omega_{n-2}} + c_{n-2} = 0, \ \ldots,$$

[1] On a ici un exemple net, *dans un cas limite*, de l'influence de la croissance des coëfficients d'une fonction entière sur la croissance des racines.

et les racines réelles ou imaginaires de ces équations: à chacune de ces dernières correspond une racine de $\Phi(x)$ qui est en même temps réelle ou imaginaire.

En effet, soit $\xi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ une racine imaginaire de

$$c_n x^{\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1}} + c_{n-1} = 0.$$

On a

$$\cos\varphi = \cos\frac{k\pi}{\varpi_n - \varpi_{n-1}}, \qquad \sin\varphi = \sin\frac{k\pi}{\varpi_n - \varpi_{n-1}},$$

k étant un entier pair ou impair suivant le signe de $c_n c_{n-1}$. Pour une valeur donnée de n et de ϖ_n, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ sont finis et $\xi(1+\varepsilon)$ est imaginaire avec ξ quand c_n est suffisamment petit. Si ξ est réel, $\xi(1+\varepsilon)$ a son module compris entre $\frac{\xi}{k}$ et $k\xi$ (k fini > 1, et voisin de 1). D'autre part, si $c_n c_{n-1} < 0$, il y a une racine réelle quand $\varpi_n - \varpi_{n-1}$ est impair, $\sqrt[\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1}]{\frac{-c_{n-1}}{c_n}}$; il y en a 2 quand $\varpi_n - \varpi_{n-1}$ est pair, $\pm \sqrt[\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1}]{\frac{-c_{n-1}}{c_n}}$. Si $c_n c_{n-1} > 0$ il n'y en a qu'une, si $\varpi_n - \varpi_{n-1}$ est impair, $\sqrt[\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1}]{\frac{-c_{n-1}}{c_n}}$.

Or, si $k > 1$,

$$\Phi_n\left(\frac{\xi}{k}\right) = c_n\left(\frac{\xi}{k}\right)^{\bar{\omega}_n} + c_{n-1}\left(\frac{\xi}{k}\right)^{\bar{\omega}_{n-1}} + \dots$$

$$= c_{n-1}\,\xi^{\bar{\omega}_{n-1}}\left(\frac{1}{k^{\bar{\omega}_{n-1}}} - \frac{1}{k^{\bar{\omega}_n}}\right) + c_{n-2}\frac{\xi^{\bar{\omega}_{n-2}}}{k^{\bar{\omega}_{n-2}}} + \dots,$$

$$\Phi_n(k\xi) = c_{n-1}\,\xi^{\bar{\omega}_{n-1}}(k^{\bar{\omega}_{n-1}} - k^{\bar{\omega}_n}) + c_{n-2}(k\xi)^{\bar{\omega}_{n-2}} + \dots;$$

$\Phi_n\left(\frac{\xi}{k}\right)$ et $\Phi_n(k\xi)$ sont de signes contraires, et $\Phi_n(x) = 0$ a une racine réelle au moins comprise entre $\frac{\xi}{k}$ et $k\xi$, quel que soit le signe de ξ.

Si l'on considère alors les racines réelles distinctes ξ', ξ'', ... des équations binômes

$$c_n\xi^{\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1}} + c_{n-1} = 0, \qquad c_{n-1}\xi^{\bar{\omega}_{n-1} - \bar{\omega}_{n-2}} + c_{n-2} = 0, \quad \dots,$$

on peut toujours choisir un mode de décroissance assez rapide des coëfficients c_n pour que parmi les quantités ξ', ξ'', ... il n'y en ait pas deux comprises entre $k\xi'$ et $\frac{\xi'}{k}$, $k\xi''$ et $\frac{\xi''}{k}$, ..., ces intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres. Il en résulte qu'aux $\varpi_n - \varpi_{n-1}$ racines de

$$c_n x^{\varpi_n - \varpi_{n-1}} + c_{n-1} = 0$$

correspondront $\varpi_n - \varpi_{n-1}$ racines de Φ voisines et en même temps réelles ou imaginaires.

Le théorème est alors vrai pour $\Phi_1(x) = 0$; on sait que $\Phi_2(x)$ a ϖ_1 racines vosines de celles de Φ_1 et $\varpi_2 - \varpi_1$ voisines de celles de

$$c_2 \xi^{\varpi_2 - \varpi_1} + c_1 = 0.$$

Le théorème est vrai pour Φ_2; et ainsi de suite. c. q. f. d.

Remarque I. Il serait intéressant d'étendre ce qui précède aux séries de la forme $\sum_0^\infty c_n P_n$, où les P_n sont des polynomes de degrés ϖ_n croissants ou des fractions rationnelles.

Remarque II. On pourrait aussi considérer les équations $\sum_0^\infty c_n x^{\varpi_n} = 0$, où les $k + 1$ 1[ers] coëfficients sont absolument arbitraires: les transcendantes correspondantes ont pour limite les racines des équations algébriques générales quand $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots,$ tendent vers zéro.

Théorème III. Si le mode de décroissance des c_n à partir d'un quelconque d'entre eux est suffisamment rapide, l'équation $\Phi(x) = 0$ n'a aucune racine algébrique.

Supposons que $\Phi(x) = 0$ ait une racine commune ω avec une équation algébrique donnée irréductible

$$f(x) = A_0 x^p + \dots + A_p.$$

Nous supposons ici que $|A_0|, |A_1|, \dots, |A_p|$ et p sont des entiers $\leqq A$, A étant donné.

$\Phi_n(\omega)$ diffère de 0 d'une quantité qui est d'autant plus petite que c_{n+1} est plus petit par rapport à $c_0, c_1, \dots, c_n$, et tend vers 0 quand c_{n+1} tend vers 0. Cherchons le plus grand commun diviseur de $\Phi_{n-1}(x)$ et $f(x)$ d'une part, $\Phi_n(x)$ et $f(x)$ d'autre part, en supposant les ϖ_n entiers et $\varpi_{n-1} \geqq p$. On a

$$\begin{aligned} &\Phi_{n-1}(x) = Qf(x) + P_1, &\qquad &\Phi_n(x) = Q'f(x) + P'_1,\\ &f(x) = Q_1P_1 + P_2, & &f(x) = Q'_1P'_1 + P'_2,\\ &P_1 = Q_2P_2 + P_3, & &\dots\dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots & &\\ &P_{\lambda-1}(x) = Q_\lambda P_\lambda(x) + P_{\lambda+1}(x), & &P'_{\lambda'-1}(x) = Q'_{\lambda'}(x)P'_{\lambda'}(x) + P'_{\lambda'+1}(x),\\ &P_\lambda(x) = Q_{\lambda+1}(x)P_{\lambda+1}(x), & &P'_{\lambda'}(x) = Q'_{\lambda'+1}(x)P'_{\lambda'+1}(x). \end{aligned}$$

Donnant à x la valeur ω, on aura soit

$$\Phi_{n-1}(\omega) \neq 0, \quad \text{soit} \quad \Phi_n(\omega) \neq 0.$$

Si $\Phi_{n-1}(\omega) \neq 0$, le système précédent d'égalités donne $P_{\lambda+1}(\omega) \neq 0$ et

$$P_{\lambda+1}(\omega) = \psi(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, A_0, A_1, \dots, A_p, p).$$

ψ ne dépend pas de ω et est une constante, car l'équation $f(x) = 0$ étant irréductible, on ne pourra avoir $P_{\lambda+1}(x) \neq Cf(x)$ (C const.) que si $P_{\lambda+1}(x) =$ const., c. à. d. que si $\Phi_{n-1}(\omega) \neq 0$, et réciproquement.

Si $\Phi_n(\omega) \neq 0$, ce sera $P'_{\lambda'+1}(\omega)$ qui ne dépendra pas de ω.

Finalement on aura

$$\begin{aligned} &\text{soit} \quad P_{\lambda+1} = \psi(c_0, \dots, c_{n-1}, \dots, A_p, p),\\ &\text{soit} \quad P'_{\lambda'+1} = \chi(c_0, \dots, c_n, \dots, A_p, p), \end{aligned}$$

ψ et χ étant des fonctions parfaitement déterminées pour un mode de croissance donné des $\varpi_1, \dots, \varpi_n, \dots$.

On aura alors

$$(37) \qquad \begin{cases} \text{soit} \quad P_{\lambda+1} \geqq \psi_1(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, A), \\ \text{soit} \quad P'_{\lambda'+1} \geqq \chi_1(c_0, c_1, \dots, c_n, A), \end{cases}$$

ψ_1 et χ_1 pouvant toujours être considérées comme des fonctions non croissantes de A.

Or si c_n est suffisamment petit par rapport à c_{n-1}, $\Phi_{n-1}(\omega)$, quand il n'est pas nul, est aussi petit qu'on veut, par suite aussi $P_1, P_2, \dots, P_{\lambda+1}$. On est alors conduit pour les valeurs de c_n inférieures à une certaine limite à l'impossibilité de la première des conditions (37). Ne donnant à c_n que ces valeurs, on voit encore que, si c_{n+1} est suffisamment petit, la 2ème des conditions (37) est également impossible. Prenons alors $A = n$, et déterminons la suite des c_n de façon que toutes les conditions analogues à (37) soient vérifiées, on obtient le théorème en question, car quel que soit l'équation irréductible $f(x) = 0$, il existe toujours une valeur de n à partir de laquelle on peut raisonner comme ci-dessus. c. q. f. d.

Il est à remarquer que ce raisonnement laisse entièrement arbitraires les 1ers coëfficients $c_0, c_1, \ldots, c_k$, k étant arbitraire, mais donné. Si alors $|c_{k+1}|$ est suffisamment petit, et si les $|c_n|$ décroissent suffisamment vite pour $n \geqq k$, il y a ϖ_k racines de $\Phi(x) = 0$ aussi voisines que l'on veut des ϖ_k racines d'une équation algébrique à coëfficients rationnels absolument quelconques. Les nombres transcendants dont nous établissons ici l'existence peuvent donc être considérés comme ayant pour limite les nombres algébriques.

Enfin nous établirons encore le théorème suivant:

Théorème IV. Si le mode de décroissance des c_n à partir d'un quelconque d'entre eux est suffisamment rapide, l'ensemble des racines des équations $\Phi(x) = 0$ correspondantes renferme un ensemble qui a la puissance du continu et qui ne contient que des nombres transcendants tous distincts des nombres X.

Supposons que $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ aient une racine commune ω, et

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty c_n x^{\varpi_n} = 0, \qquad \Psi(x) = \sum_0^\infty c'_n x^{\varpi_n} = 0.$$

Cherchons le plus grand commun diviseur de $\Phi_n(x)$ et $\Psi_n(x)$. On a

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= P\Psi_n(x) + P_1, \\ \Psi_n(x) &= Q_1 P_1 + P_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{\lambda-1} &= Q_\lambda P_\lambda + P_{\lambda+1}, \\ P_\lambda &= Q_{\lambda+1} P_{\lambda+1}(x). \end{aligned}$$

Supposons ω de module $< A$. On a

$$\Phi(\omega) = \Phi_n(\omega) + \varphi_n(\omega), \qquad \Psi(\omega) = \Psi_n(\omega) + \psi_n(\omega).$$

On peut toujours prendre c_{n+1} et c'_{n+1} assez petits pour que $|\varphi_n(\omega)|$ et $|\psi_n(\omega)|$ soient aussi petits que l'on veut, plus exactement soient inférieures à ε donné a priori: $|P_{\lambda+1}(\omega)|$ doit alors être $< \varepsilon_1$, ε_1 étant aussi petit qu'on veut.

Deux cas sont à distinguer: Φ_n et Ψ_n ont un diviseur commun ou n'en ont pas. S'ils n'en ont pas, le module de leur résultant $P_{\lambda+1}$ a une limite inférieure L: en prenant $L > \varepsilon_1$ on a une impossibilité. Donc ils en ont un et leur résultant est constamment nul quel que soit n. Par suite:

Si le mode de décroissance des $|c_n|$, dès que $n > k$, est suffisamment rapide, deux des équations $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ ne peuvent avoir une racine commune de module $< A$ (A fini) que s'il en est de même de $\Phi_n = 0$ et $\Psi_n = 0$, dès que $n > k$.

Considérons d'abord les équations

$$(38) \qquad \Phi(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = 0.$$

Prenons

$$c_1 = \frac{a_1}{t_1}, \qquad c_2 = \frac{a_2}{t_2}, \quad \ldots,$$

$t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ nombres réels croissants déterminés, avec

$$t_1 = \frac{1}{10}, \qquad t_n \geqq 10^n, \qquad (n > 1), \qquad a_1, a_2, \ldots = \pm 1.$$

Ces équations auront toutes une racine réelle de module compris entre 0 et 1, car $\Phi(0) = 1$, tandis que

$$\Phi(x) - 1 = \pm x(10 \pm c_2 x \pm \ldots),$$

et

$$|10 \pm c_2 x \pm \ldots| \geqq 10 - \frac{1}{10^2} - \frac{1}{10^3} - \ldots > 9,$$

en sorte que soit $\Phi(+1)$, soit $\Phi(-1)$ est négatif.

Prenons alors $A = 1$, et considérons 2 équations $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ de la forme (38).

Les équations $1 - 10x = 0$ et $1 + 10x = 0$ n'ont pas de racine commune, contrairement à ce qui doit être, si t_2 est suffisamment grand. Si donc Φ et Ψ ont une racine commune de mod < 1, les 2 valeurs de c_1 sont les mêmes.

Les équations $1 + c_1 x + c_2 x^2 = 0$, où les c_1 ont une même valeur, n'ont pas de racine commune contrairement à ce qui doit être, si t_3 est suffisamment grand, à moins qu'elles ne coïncident. Donc pour Φ et Ψ les valeurs de c_2 sont les mêmes.

Et ainsi de suite.

Nous vérifions finalement que l'ensemble d'équations (38) est un ensemble d'équations telles qu'à chaque équation correspond au moins une racine réelle de mod < 1, ces équations n'ayant 2 à 2 aucune racine réelle de mod < 1 commune.

L'ensemble de ces équations a d'ailleurs la même puissance que l'ensemble des nombres

$$\frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \frac{\alpha_3}{3^3} + \dots,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ peuvent prendre les valeurs 1 et 2 de toutes les manières possibles, c. à. d. a la puissance du continu.[1] Il en est de même alors des racines réelles de mod < 1 de ces équations.

On est, de plus, sûr que cet ensemble est formé exclusivement de nombres transcendants,[2] d'après le théorème III.

La même méthode peut servir pour obtenir un ensemble C formé exclusivement de racines transcendantes voisines des racines d'une équation algébrique donnée quelconque (à coëfficients rationnels)

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k = 0.$$

On considèrera

$$P(x) + c_{k+1} x^{k+1} + c_{k+2} x^{k+2} + \dots = 0,$$

où

$$c_{k+1} = \pm \frac{1}{t_{k+1}}, \qquad c_{k+2} = \frac{\pm 1}{t_{k+2}}, \quad \dots,$$

t_{k+1} suffisamment grand, $t_{k+2} \leqq \frac{t_{k+1}}{10}, \dots$.

[1] Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 33.

[2] L'ensemble des nombres $\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$ où $a_1, a_2, \dots$ prennent toutes les valeurs entières $1, 2, \dots, 9$ contient bien un ensemble de nombres transcendants ayant la puissance du continu, comme l'a montré M. Borel, mais il contient aussi des nombres algébriques.

Si ξ est une racine de $P(x) = 0$, ces équations ont toutes une racine au moins voisine de ξ dès que t_{k+1} est assez grand.[1] Prenons A supérieur au double du module des racines de $P(x)$.

Φ et Ψ n'ont de racine commune de module $< A$ que si Φ_{k+1} et Ψ_{k+1} en ont une; de même si Φ_{k+2} et Ψ_{k+2} en ont une, etc. Si le mode de croissance des t_i est suffisamment rapide, on aura encore une impossibilité.

Le théorème annoncé en résulte a fortiori.

L'ensemble C des nombres X est aussi formé exclusivement de nombres transcendants, comme l'a montré LIOUVILLE.[2] Mais ces nombres sont tous distincts de ceux que nous obtenons ici, comme nous l'avons montré antérieurement.[3]

Bourg-la-Reine, mars 1902.

---

[1] d'après les 2 lemmes du § IV.

[2] Journ. de Math., 1851.

[3] Journ. de Math., 1901, p. 419. En réalité nous obtenons ici aux environs de toute racine ξ d'une équation algébrique à coëfficients rationnels un ensemble de racines transcendantes ayant la puissance du continu.