ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DES RIEMANN'SCHEN PROBLEMS IN DER THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

T. BRODÉN
in LUND.

Bekanntlich rührt von RIEMANN eine Aufgabe her, welche in folgender Weise formulirt werden kann: Es seien in der Ebene einer Variabeln x σ von $x = \infty$ verschiedene Stellen

$$e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$$

gegeben, und andererseits σ lineare homogene Substitutionen in n Veränderlichen,

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_\sigma;$$

dann sollen n monogene Functionen von x

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

bestimmt werden, welche beim Überschreiten, in positiver Richtung, von σ die x-Ebene zerschneidenden Schnitten $(e_1\infty), (e_2\infty), \ldots, e_\sigma\infty)$ bez. die Substitutionen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_\sigma$ erleiden, sonst aber im endlichen durchgehends holomorph sind, während überdies die Stellen $e_1, \ldots, e_\sigma$, sowie auch $e_{\sigma+1} = \infty$ den »Charakter der Bestimmtheit» aufweisen.[1]

[1] RIEMANN, *Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten* (Nachlass), Ges. Werke, Leipzig 1876, p. 357—69. Man sehe auch SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der lin. Differentialgl.* II, 1, p. 109; II, 2, p. 382 ff.; und *Zur Theorie der lin. Differentialgl. im Anschluss an das Riemann'sche Problem*, Journ. für Math., Bd. 123, p. 138 ff. — Vergl. auch KLEIN, Math. Ann. 46, p. 83.

Diese Aufgabe ist im wesentlichen mit der folgenden gleichbedeutend: es soll eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung der FUCHS'schen Klasse bestimmt werden, für welche einerseits die im endlichen liegenden Verzweigungsstellen, andererseits die Monodromiegruppe vorgeschrieben sind.[1]

Hieran knüpft sich zunächst die Frage nach der *Existenz* von Functionen (bez. Differentialgleichungen) der verlangten Art. Diese Existenzfrage ist bisher nur unter einer sehr wesentlichen Specialisirung in strenger Weise entschieden worden, indem Herr L. SCHLESINGER zeigte, dass dieselbe zu bejahen ist, wenn die von ihm sogenannten »Convergenzbedingungen» erfüllt sind.[2]

Im folgenden wird nicht diese RIEMANN'sche Frage in unveränderten Form behandelt, sondern eine etwas allgemeinere, in welcher weniger verlangt wird: *der »Charakter der Bestimmtheit» an den Stellen e_i wird nicht länger gefordert.*

Die zugehörige zu bestimmende lineare Differentialgleichung hat dann *eindeutige*, im allgemeinen aber nicht rationale Coefficienten.

Die Frage nach der Lösbarkeit der hiermit angegebenen Aufgabe wird im folgenden *auf den Fall $n = 2$ zurückgeführt.* Oder eigentlich noch mehr: es wird gezeigt, dass die Existenzfrage in ihrer vollen Allgemeinheit zu bejahen ist, falls für $n = 2$ gewisse im wesentlichen nur durch Ungleichheiten charakterisirte Voraussetzungen überhaupt mit der Existenz von 2 Functionen der verlangten Art verträglich sind. Und der Beweis hierfür wird so geführt, dass für die n Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gewisse analytische Ausdrücke hervorgehen, welche die postulirten, auf den Fall $n = 2$ sich beziehenden Functionen enthalten. Diese Ausdrücke sind Quotienten, deren Zähler als Modificationen der POINCARÉ'schen ξ-Reihen bezeichnet werden können.[3]

Hierbei sei noch daran erinnert, dass wenn man in der genannten Weise — oder in irgend einer Weise — n Functionen $y_1 \ldots y_n$ bestimmt

---

[1] Vgl. HILBERT, *Mathematische Probleme* (Pariser Vortrag), Sep.-Abzug aus den Gött. Nachr., p. 37, Archiv d. Math. u. Phys. (3), I.

[2] S. die citirten Stellen.

[3] Eine vorläufige Mittheilung über diese Untersuchung erschien in Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förhandl., Stockholm 1902, p. 5—11. Das Problem wurde hier, der Einfachheit wegen, in unwesentlich verschiedener Form genommen.

hat, welche die geforderten Verzweigungsverhältnisse haben (die gegebenen Verzweigungsstellen $e_1 \ldots e_\sigma$ mit den zugehörigen gegebenen linearen Substitutionen), dadurch auch *alle* Systeme $z_1 \ldots z_n$ mit denselben Verzweigungsverhältnissen — alle »cogredienten» Systeme — bestimmt sind, indem alle solchen Systeme in der Form

$$z_i = r_{i0}y_i + r_{i1}y_i' + r_{i2}y_i'' + \ldots + r_{i,n-1}y_i^{(n-1)} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

enthalten sind, wo die r_{ik} eindeutige Functionen von x bedeuten.[1] Falls Systeme $z_1 \ldots z_n$ existiren, welche den RIEMANN'schen Forderungen genügen, sind sie also auch in dieser Form enthalten.

Wir müssen mit gewissen Hilfsbetrachtungen beginnen.[2]

Für σ *hyperbolische* lineare Substitutionen

$$\frac{z'-h_i}{z'-k_i} = p_i^2 \frac{z-h_i}{z-k_i}, \qquad (i=1,2,\ldots,\sigma)$$

kurz

$$B_1, B_2, \ldots, B_\sigma,$$

seien die 2σ Fixpunkte h_i, k_i vorgeschrieben und durchaus von einander getrennt; dagegen die Multiplicatoren p_i^2 vorläufig unbestimmt; nur setzen wir fest, dass sie alle > 1 angenommen werden sollen (so dass also die unendlich oft wiederholte Anwendung der Substitution B_i bez. der inversen B_i^{-1} auf die Stelle k_i bez. h_i als Grenzstelle führt). Die zu B_i gehörenden Niveaulinien sind (unabhängig von p_i) die Orthogonaltrajectorien (Kreise) des durch h_i und k_i bestimmten Kreisbüschels. Man denke sich für jede Substitution B_i einen zugehörigen Niveaukreis H_i gezeichnet, welcher die Stelle h_i einschliesst (und also k_i ausschliesst). Diese σ Kreise seien ferner so klein gewählt, dass sie einander vollständig ausschliessen (und auch nicht äusserlich berühren), was möglich ist, da die σ Punkte h_i nach unserer

[1] S. etwa SCHLESINGER, *Handbuch etc.* II, 1, p. 112—13.

[2] Ähnliche Betrachtungen habe ich bei BURNSIDE gefunden, in einer Abhandlung wo er die Convergenz der POINCARÉ'schen Thetareihen zum Falle $m = 1$ [Reihen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension] auszudehnen sucht, Proceedings of the London Math. Soc., Vol. 23, p. 55 ff. Mit Recht, scheint es, wird diese Stelle der (nicht überall ganz correcten) BURNSIDE'schen Arbeit in der neulich erschienenen Lieferung (II, 1) des FRICKE-KLEIN'schen Werkes über automorphe Functionen als interessant bezeichnet (p. 166); vgl. unten.

Annahme vollständig getrennt liegen. Bei Ausübung der Substitution B_i geht H_i in einen anderen Niveaukreis K_i über, welcher mit p_i veränderlich ist, aber für hinreichend grosse p_i-Werthe [wir denken uns $p_i > 0$] die Stelle k_i einschliesst und beliebig kleinen Radius erhält. Es ist daher möglich, eine positive Grösse P so zu bestimmen, dass sobald alle $p_i > P$ sind, die Kreise K_i einander ausschliessen, sowie auch die H_i ausschliessen. Man ertheile jetzt den p_i bestimmte Werthe, welche dieser Bedingung genügen. Dann liegen also 2σ einander ausschliessende Kreise vor, welche durch die Substitutionen B_i paarweise auf einander bezogen sind. Die *Substitutionsgruppe* Γ, welche durch $B_1 \dots B_\sigma$ als Fundamentalsubstitutionen bestimmt wird, ist mit Sicherheit in der z-Ebene *eigentlich discontinuirlich*, und es kann für dieselbe der von sämmtlichen Kreisen H_i und K_i ausgeschlossene Theil R_0 der Ebene als Discontinuitätsbereich (Fundamentalbereich) gelten.[1] Ein beliebiger Punkt von R_0 geht bei der Substitution B_i bez. B_i^{-1} in einen inneren Punkt von K_i bez. H_i über (aber natürlich nicht immer umgekehrt). Es können ferner unter den Substitutionen B_i keine Fundamentalrelationen bestehen.[2] Es lässt sich daher, von »identischen Umformungen»[3] abgesehen, jede Substitution V_ν der Gruppe nur in einer Weise in der Form

$$(1) \qquad V_\nu \equiv B_{i_n}^{\lambda_n} B_{i_{n-1}}^{\lambda_{n-1}} \dots B_{i_2}^{\lambda_2} B_{i_1}^{\lambda_1}$$

darstellen, wo $i_1 \dots i_n$ ganze positive Zahlen $\leqq \sigma$ sind, $\lambda_1 \dots \lambda_n$ ganze Zahlen $\gtrless 0$. Oder m. a. W.: jeder Gruppensubstitution (welche von der Identität verschieden ist) entspricht ein symbolisches Produkt (1) mit unzweideutig bestimmten Werthen von n, $i_1 \dots i_n$, $\lambda_1 \dots \lambda_n$, wenn man feststellt, dass niemals $i_{\rho+1} = i_\rho$ sein darf. Und umgekehrt stellt jedes Produkt der Form (1), welches dieser Bedingung genügt, eine von der Identität verschiedene Gruppensubstitution dar. Bekanntlich wird unter solchen Umständen die

---

[1] Man sehe etwa FRICKE-KLEIN, *Autom. Funct.* I, p. 190—92; oder SCHLESINGER, *Handbuch etc.* II, 2, p. 240.

[2] S. z. B. FRICKE-KLEIN, l. c. I, p. 174.

[3] Dieser Ausdruck wird in KLEIN-FRICKE *Modulfunctionen* benutzt und erklärt, (I, p. 452).

unzweideutig bestimmte Summe $\sum_1^n |\lambda_k|$ als **Index** der fraglichen Substitution V_ν bezeichnet, $\sum|\lambda_k| = \text{Ind. } V_\nu$.[1]

Es gilt nun auch folgender Satz, den wir für unseren jetztigen Zweck als Hülfssatz benutzen werden:

Hülfssatz. *Über die 2σ gegebenen, von einander getrennten Fixpunkte h_i, k_i sei angenommen, dass keiner mit dem Nullpunkte ($z = 0$) zusammenfällt* [oder unendlich entfernt ist, was schon oben vorausgesetzt wurde]. *Wenn dann q eine beliebig grosse positive Zahl bedeutet, so lässt sich eine andere positive Grösse P so bestimmen, dass sobald jedes $p_i > P$ ist, die vier Coëfficienten einer jeden von der Identität verschiedenen Substitutionen*

$$V_\nu \equiv \left\{ z', \frac{a_\nu z + b_\nu}{c_\nu z + d_\nu} \right\}$$

der Gruppe Γ dem absoluten Betrage nach je grösser sind als

$$q^{\text{Ind } V_\nu},$$

wenn die Substitution in unimodularer Form geschrieben ist ($a_\nu d_\nu - b_\nu c_\nu = 1$).[2]

Der Beweis dieses Satzes lässt sich folgendermassen führen. Jede beliebige λ^{te} Potenz ($\lambda \gtrless 0$) einer Fundamentalsubstitution B_i lässt sich in unimodularer Form folgendermassen schreiben:

$$B_i^\lambda \equiv \left\{ z', \frac{\dfrac{k_i p_i^\lambda - h_i p_i^{-\lambda}}{h_i - k_i} z - \dfrac{h_i k_i (p_i^\lambda - p_i^{-\lambda})}{h_i - k_i}}{\dfrac{p_i^\lambda - p_i^{-\lambda}}{h_i - k_i} z - \dfrac{h_i p_i^\lambda - k_i p_i^{-\lambda}}{h_i - k_i^1}} \right\}. \tag{2}$$

Dies gesetzt, betrachte man irgend eine bestimmte Substitution V_ν und bezeichne für den Augenblick mit f_1, g_1, l_1, m_1; f_2, g_2, l_2, m_2; f_3, g_3, l_3, m_3 etc. die Coefficienten der nach der Productdarstellung (1) in V_ν eingehenden Substitutionen

$$B_{i_1}^{\lambda_1},\ B_{i_2}^{\lambda_2} B_{i_1}^{\lambda_1},\ B_{i_3}^{\lambda_3} B_{i_2}^{\lambda_2} B_{i_1}^{\lambda_1} \text{ etc.},$$

---

[1] Vgl. SCHLESINGER, *Handbuch etc.* II, 2, p. 270, 350.

[2] Der Satz kommt nicht in dieser Form bei BURNSIDE vor. Auch fehlt bei ihm die Bedingung, dass die h_i und k_i von Null verschieden sein sollen.

wobei für diese n Substitutionen (von denen die letzte mit V_ν zusammenfällt) unimodulare Form vorausgesetzt wird. Von einer erlaubten Zeichenänderung abgesehen, gelten dann, für $\rho = 1, 2, \ldots, n-1$, die Relationen

$$f_{\rho+1} = \alpha^{(\rho+1)} f_\rho + \beta^{(\rho+1)} l_\rho, \qquad g_{\rho+1} = \alpha^{(\rho+1)} g_\rho + \beta^{(\rho+1)} m_\rho,$$

$$l_{\rho+1} = \gamma^{(\rho+1)} f_\rho + \delta^{(\rho+1)} l_\rho, \qquad m_{\rho+1} = \gamma^{(\rho+1)} g_\rho + \delta^{(\rho+1)} m_\rho,$$

wo für den Augenblick $\alpha^{(\rho+1)}, \beta^{(\rho+1)}, \gamma^{(\rho+1)}, \delta^{(\rho+1)}$ die Coefficienten der in der Form (2) geschriebenen Substitution $B_{i_{\rho+1}}^{\lambda_{\rho+1}}$ bedeuten. Demgemäss wird

$$(3) \quad \begin{cases} l_{\rho+1} = l_\rho \cdot \dfrac{1}{h_{i_{\rho+1}} - k_{i_{\rho+1}}} \left\{ p_{i_{\rho+1}}^{\lambda_{\rho+1}} \left(\dfrac{f_\rho}{l_\rho} - h_{i_{\rho+1}} \right) - p_{i_{\rho+1}}^{-\lambda_{\rho+1}} \left(\dfrac{f_\rho}{l_\rho} - k_{i_{\rho+1}} \right) \right\}, \\ m_{\rho+1} = m_\rho \cdot \dfrac{1}{h_{i_{\rho+1}} - k_{i_{\rho+1}}} \left\{ p_{i_{\rho+1}}^{\lambda_{\rho+1}} \left(\dfrac{g_\rho}{m_\rho} - h_{i_{\rho+1}} \right) - p_{i_{\rho+1}}^{-\lambda_{\rho+1}} \left(\dfrac{g_\rho}{m_\rho} - k_{i_{\rho+1}} \right) \right\} \end{cases}$$

(und auf $f_{\rho+1} : f_\rho$, $g_{\rho+1} : g_\rho$ beziehen sich zwei ähnliche, aber nicht ganz so einfache Relationen, welche wir nicht benutzen werden).

Die Stellen $f_\rho : l_\rho$ liegen nothwendig innerhalb eines Kreises H_i oder K_i. Sie sind nämlich Bildpunkte der in R_0 liegende Stelle $z = \infty$ bei einer gewissen nicht identischen Substitution der Gruppe Γ. Zufolge der Annahme, dass kein Fixpunkt h_i oder k_i mit dem Nullpunkt zusammenfällt, lässt sich dasselbe hinsichtlich der Stellen $g_\rho : m_\rho$ erreichen. Dieselben sind nämlich Bildpunkte der Stelle $z = 0$. Da nun diese Stelle mit keinem Fixpunkt h_i zusammenfällt, so kann man die Kreise H_i so klein wählen, dass keiner derselben die Nullstelle einschliesst. Wenn nachher die p_i hinreichend gross gewählt werden, wird dasselbe auch für die Kreise K_i erreicht, da diese die Stellen k_i einschliessenden Kreise für hinreichend grosse p_i beliebig klein werden (s. oben), und andererseits auch keine Stelle k_i in $z = 0$ liegt. Dies vorausgesetzt, liegt also $z = 0$ innerhalb R_0, und folglich jeder Bildpunkt von $z = 0$ innerhalb irgend eines Kreises H_i oder K_i, und zwar innerhalb desselben Kreises, wie der entsprechende Bildpunkt von $z = \infty$, da bei jeder Substitution das ganze Gebiet R_0 in ein anderes übergeht, welches im Inneren eines Kreises H_i oder K_i liegt. Wenn man ferner beachtet, dass jede Substitution B_i^λ bez. $B_i^{-\lambda}$ $(\lambda > 0)$ das ganze von den beiden Kreisen H_i und K_i ausgeschlossene Gebiet in ein gewisses Gebiet innerhalb K_i bez. H_i verwandelt, und andererseits dass im Producte

(1) $i_{\rho+1}$ und i_ρ immer verschieden sind, so sieht man ein, dass eine Substitution

$$B_{i_\rho}^{\lambda_\rho} B_{i_{\rho-1}}^{\lambda_{\rho-1}} \dots B_{i_2}^{\lambda_2} B_{i_1}^{\lambda_1}$$

den Bereich R_0 in einen Theil von K_{i_ρ} bez. H_{i_ρ} überführt, je nachdem $\lambda_\rho > 0$ oder < 0 ist (für $i_\rho = i_{\rho-1}$ und mit verschiedenen Vorzeichen von λ_ρ und $\lambda_{\rho-1}$ würde dies dagegen nicht nothwendig gelten). Da dies für das ganze Gebiet R_0 und seine Abbildungen gilt, so gilt es speciel für die R_0-Stellen $z = \infty$ und $z = 0$ und ihre Bildpunkte: die Stellen $f_\rho : l_\rho$ und $g_\rho : m_\rho$ liegen beide in K_{i_ρ} oder beide in H_{i_ρ}. Da nun diese Kreise von denjenigen $[K_{i_{\rho+1}}$ und $H_{i_{\rho+1}}]$ *verschieden* sind, deren Centra in $k_{i_{\rho+1}}$ und $h_{i_{\rho+1}}$ fallen, und da die 2σ Kreise sich vollständig ausschliessen, so lässt sich für die absoluten Beträge der in (3) vorkommenden 4 Differenzen $\frac{f_\rho}{l_\rho} - h_{i_{\rho+1}}$ etc. eine von Null verschiedene untere Grenze angeben, sowie offenbar auch eine endliche obere Grenze. Hieraus in Verbindung mit der ersten der Gleichungen (3) folgt ersichtlich, dass unabhängig vom Vorzeichen für $\lambda_{\rho+1}$ sowie überhaupt von der Wahl der Substitution V_ν und vom Werthe der Zahl ρ

$$\left|\frac{l_{\rho+1}}{l_\rho}\right| > P^{|\lambda_{\rho+1}|} . C . [1 - P^{-2|\lambda_{\rho+1}|} . D] \tag{4}$$

ist, wo P eine (positive) untere Grenze für die p_i bedeutet, C und D positive Minimum- bez. Maximum-Grössen, welche sich bei unbegrenzter Vergrösserung von P gewissen festen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwerthen nähern, welche nur von der Lage der Fixpunkte h_i, k_i abhängen. Für hinreichend grosses P kommt also der Klammerausdruck in (4) — welcher ja unter Umständen < 0 sein könnte — beliebig nahe dem Werthe 1. Es lässt sich somit jedenfalls eine Grösse $g < 1$ aber > 0 so bestimmen, dass sobald P hinreichend gross ist

$$\left|\frac{l_{\rho+1}}{l_\rho}\right| > g . P^{|\lambda_{\rho+1}|}$$

und folglich (da $g < 1$, $|\lambda_{\rho+1}| \geqq 1$ ist)

$$\left|\frac{l_{\rho+1}}{l_\rho}\right| > (gP)^{|\lambda_{\rho+1}|} \tag{5}$$

wird. Hiermit verbinde man noch die aus (2) unmittelbar hervorgehende Ungleichheit

$$|l_1| > P^{|\lambda_1|} \cdot \frac{1 - P^{-2}}{\operatorname{Max} |h_i - k_i|},$$

welche wiederum auf

$$(6) \qquad |l_1| > (gP)^{|\lambda_1|}$$

führt — nachdem man, wenn nöthig, den vorher gewählten g-Werth hinreichend vermindert hat. Aus 5 und 6 folgt

$$(7) \qquad |l_n| > (gP)^{\sum\limits_1^n |\lambda_\rho|}.$$

Für $|m_n|$ erhält man in derselben Weise ganz dieselbe Ungleichheit; nur muss man möglicherweise für g einen kleineren Werth nehmen, da m_1 nach (2) nicht ganz dieselbe Form hat, wie l_1, und also die Ungleichheit (6) nicht nothwendig mit dem früheren g auch für $|m_1|$ gilt. Jedenfalls kann man aber g so klein (aber > 0) wählen, dass nicht nur $|l_n|$ sondern auch $|m_n|$ grösser als das rechte Glied in (7) wird. Wir denken uns ein solches g gewählt. Hinsichtlich f_n und g_n erinnern wir uns, dass die Quotienten $f_n : l_n$ und $g_n : m_n$ zwischen (endlichen und) von Null verschiedenen Grenzen bleiben. Hieraus folgt, dass wenigstens für einen hinreichend kleinen $g_1 < g$ aber > 0 weder $|f_n|$ noch $|g_n|$ kleiner als oder gleich

$$(g_1 P)^{\sum\limits_1^n |\lambda_\rho|}$$

sein kann. Und dies heisst mit anderen Worten: es lässt sich eine Grösse $g > 0$ so bestimmen, dass nicht nur $|l_n|$ und $|m_n|$, sondern auch $|f_n|$ und $|g_n|$ grösser als das zweite Glied in (7) werden — immer unter der Voraussetzung, dass P hinreichend gross ist (und somit die p_i hinreichend gross). Jetzt sei q eine beliebige, gegebene positive Grösse. Nach dem vorigen ist es möglich, einen P-Werth so zu bestimmen, dass die Ungleichheit (7) und die drei analogen für diesen P-Werth und alle grösseren gelten, wenn g einen gewissen *festen* Werth hat (und — wie immer vorausgesetzt wurde — in jedem Falle die p_i, welche die Coefficienten l_n etc. näher bestimmen, sämmtlich grösser als P sind). Wenn nöthig, vergrössern wir jetzt P so, dass $gP > q$ wird. Dann gelten die vier genannten Ungleichheiten *a fortiori*, wenn man q statt gP einführt. Da nun ferner, der obigen Herleitung gemäss, jene Ungleichheiten nicht an einer bestimmten Substitution geknüpft sind, sondern unter den angegebenen Voraussetzungen hinsichtlich g und P für *jede* Substitution der Gruppe Γ gelten, so folgt: bei gegebenem, beliebigem q lässt sich ein P so bestimmen, dass sobald alle $p_i > P$ sind, die absoluten Beträge der Coefficienten $a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu$ einer beliebigen in unimodularer Form geschriebenen Substitution V_ν der Gruppe Γ je grösser als

$$q^{\operatorname{Ind} V_\nu}$$

sind, w. z. b. w.

Erweiterung des Satzes. Die Annahme, dass die σ Substitutionen *hyperbolisch* sein sollten (die p_i reell und positiv), haben wir bisher nur der Einfachheit wegen festgehalten. Der Satz gilt (mit $|p_i|$ statt p_i) eben so gut, wenn sie (alle oder theilweise) *loxodromisch* sind. Der Beweis ist grösstentheils wörtlich in derselben Weise zu führen, doch können natürlich die Kreise H_i und K_i jetzt nicht Niveaulinien sein.[1]

Die entsprechenden homogenen Gruppen.

Da der Fundamentalbereich R_0 keine elliptischen oder parabolischen Ecken aufweist, und da jedenfalls für hinreichend grosse p_i auch keine »secundäre Relationen»[2] zwischen den Erzeugenden der Gruppe Γ bestehen können [sobald, wie wir immer annehmen, die 2σ Kreise H_i, K_i einander vollständig ausschliessen, können ja, wie schon bemerkt, überhaupt keine Relationen zwischen den B_i vorhanden sein] so ist die Gruppe Γ in folgender Weise »isomorph spaltbar»:[3] wenn man von den Substitutionen B_i,

$$B_i \equiv \left\{ z', \frac{L_i z + M_i}{N_i z + P_i} \right\},$$

[1] Bei Voraussetzung von *parabolischen* Substitutionen (äusserlicher Berührung zweier Kreise H_i und K_i) behauptet — beiläufig gesagt — BURNSIDE (l. c. p. 57), dass der von ihm bewiesene Satz sich auch in diesem Falle durch eine sehr einfache Modification der Beweisführung darlegen lässt, ohne dass die Art dieser Modification näher angegeben wird. Auch bei FRICKE-KLEIN (*Autom. F.* II, 1, p. 166) wird diese Behauptung BURNSIDE's hervorgehoben. Ist aber dieselbe wirklich richtig?

[2] FRICKE-KLEIN, l. c. I, p. 175.

[3] Ibid. p. 200.

wo L_i, M_i, N_i, P_i die unimodulare Form

$$L_i = \frac{k_i p_i - h_i p_i^{-1}}{h_i - k_i}, \qquad M_i = -\frac{h_i k_i (p_i - p_i^{-1})}{h_i - k_i},$$

$$N_i = \frac{p_i - p_i^{-1}}{h_i - k_i}, \qquad P_i = -\frac{h_i p_i - k_i p_i^{-1}}{h_i - k_i}$$

haben [welche aus (2) für $\lambda = 1$ hervorgeht], zu den *homogenen* Substitutionen C_i,

$$C_i \equiv \begin{Bmatrix} t', & L_i t + M_i v \\ v', & N_i t + P_i v \end{Bmatrix} \tag{8}$$

übergeht, so bestimmen die *σ unimodularen* Substitutionen C_i als Fundamentalsubstitutionen eine homogene ternäre Gruppe Δ, welche mit Γ *holoedrisch isomorph* ist [und eine ähnliche Gruppe geht hervor, wenn man in (8) für gewisse bez. für alle i die vier Coefficienten mit -1 multiplicirt; wir bestimmen uns aber jetzt eben für die Form (8)].

Da die Fundamentalsubstitutionen der Gruppe Δ sämmtlich unimodular sind, so ist auch jede zu Δ gehörende Substitution unimodular. Die Relationen (2) und (3) gelten somit — mutatis mutandis — noch für die Gruppe Δ, da sie unimodulare Form der entsprechenden Γ-Substitutionen voraussetzen. In der That sind aber jene Gleichungen so gebildet, dass sie ganz unmittelbar (ohne Zeichenänderung) die Coefficienten bez. Coefficientenrelationen auch für die Δ-Substitutionen U_ν angeben (was doch jetzt unwesentlich ist).

Offenbar lässt sich der obige »Hülfssatz» auch auf die Gruppe Δ übertragen:

Abgeänderte Form des Hülfssatzes: Der Satz lässt sich so modificieren, dass man statt die nicht-homogene Gruppe Γ zu betrachten und dabei unimodulare Form vorauszusetzen, *die unimodulare homogene Gruppe Δ einführt; der Wortlaut des Satzes bleibt übrigens ganz derselbe.*

Modification der Poincaré'schen ξ-Reihen.

Die Poincaré'schen ξ-Reihen sind bekanntlich in folgender Weise gebildet.

Es liege eine lineare homogene Substitutionsgruppe Θ in n Veränderlichen vor, etwa mit σ Fundamentalsubstitutionen A_i (wie oben in der Einleitung). Dann ist es immer möglich, eine FUCHS'sche Gruppe ϑ mit dem Einheitskreise als Hauptkreis zu bestimmen, welche mit Θ in der Weise isomorph ist, dass jeder ϑ-Substitution eine bestimmte Θ-Substitution entspricht [Θ und ϑ $(1, r)$-deutig isomorph]. Man ordne die (immer abzählbare) Menge der ϑ-Substitutionen in irgend einer Weise in eine einfache Reihe

$$S_0(\eta), S_1(\eta), \ldots, S_\nu(\eta) \ldots \qquad (S_0 \equiv 1)$$

Jeder Substitution S_ν entspricht also eine bestimmte Θ-Substitution T_ν. Man bezeichne zur Abkürzung mit

$$T_\nu y_i$$

den Ausdruck, in den sich y_i verwandelt, wenn man T_ν auf ein System von n Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ anwendet; also

$$T_\nu y_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{i\varkappa}^{(\nu)} y_\varkappa, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

wenn

$$T_\nu \equiv (a_{i\varkappa}^{(\nu)}). \qquad (i,\varkappa=1,2,\ldots,n)$$

Die ξ-Reihen haben die Form

$$\xi_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \{T_\nu^{-1} H_i(S_\nu \eta)\} \left(\frac{dS_\nu \eta}{d\eta}\right)^m \qquad (9) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

wo $H_1(\eta), H_2(\eta), \ldots, H_n(\eta)$ rationale Functionen bedeuten, welche niemals für $|\eta| = 1$ unendlich gross werden, und m eine ganze positive Zahl $\geqq 2$. Eine leichte Überlegung zeigt, dass wenn die unbedingte Convergenz dieser Reihen vorausgesetzt wird, die einfache Relation

$$\xi_i(S_\mu \eta) = \left(\frac{d\eta}{dS_\mu \eta}\right)^m T_\mu \xi_i(\eta) = (\gamma_\mu \eta + \delta_\mu)^{2m} T_\mu \xi_i(\eta)$$

besteht, wobei die Bezeichnung

$$S_\nu = \frac{\alpha_\nu \eta + \beta_\nu}{\gamma_\nu \eta + \delta_\nu}, \qquad \alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu = 1,$$

vorausgesetzt wird.[1] In dem Falle, wo die Gruppe ϑ lauter elliptische Substitutionen enthält, lässt es sich zeigen, dass jene Convergenz für η-Werthe innerhalb des Einheitskreises wirklich stattfindet, nur mit Ausnahme für gewisse nirgends gehäufte Stellen.[2] Wenn dagegen parabolische Substitutionen vorhanden sind, so kann die Convergenz nur unter der Voraussetzung bestehen, dass diejenigen Fundamentalsubstitutionen von Θ, welche parabolischen Substitutionen in ϑ entsprechen, Fundamentalgleichungen besitzen, deren sämmtliche Wurzeln dem absoluten Betrage nach gleich 1 sind. Diese wesentliche Beschränkung hat zur Folge, dass die ξ-Reihen nur in sehr beschränkter Weise angewandt werden können, wenn es sich um die RIEMANN'sche Existenzfrage handelt: nur unter der schon oben angedeuteten, sehr wesentlichen Specialisirung lässt sich, wie Herr SCHLESINGER gezeigt hat, die Existenzfrage mittels der ξ-Reihen entscheiden. Anders scheint es sich aber zu verhalten, wenn man die Form der Reihen in geeigneter Weise modificiert.

Zunächst werden wir uns jetzt, ohne direkte Rücksicht auf die RIEMANN'sche Existenzfrage, mit einer möglichen Modification der ξ-Reihen beschäftigen.

Wir setzen vorläufig nur voraus, dass bei gegebenen, im endlichen liegenden Stellen $e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$ und gegebenen Fixpunkten h_i, k_i für die σ Fundamentalsubstitutionen B_i einer nicht-homogenen Gruppe Γ der oben beschriebenen Art, wenigstens für alle $|p_i|$, welche je $>$ ein gewisses P sind, Functionen $t(x)$ und $v(x)$ angebbar seien, welche, wenn x die Schnitte $(e_1\infty)\ldots(e_\sigma\infty)$ im positiven Sinne überschreitet bez. die homogenen Substitutionen $C_1\ldots C_\sigma$, welche den B_i entsprechen (s. oben), erfahren, sonst aber in der ganzen x-Ebene holomorph sind.

Dies vorausgesetzt, betrachten wir jetzt eine »normale FUCHS-sche Differentialgleichung» zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = q(x)y, \tag{10}$$

---

[1] POINCARÉ, Acta Math. 5, p. 232. SCHLESINGER, *Handbuch*, II, 2, p. 347.

[2] Eine Punktmenge, welche im *Inneren* des Kreises $|\eta| = 1$ keine Häufungsstellen hat, bezeichnen wir kurz als innerhalb des Kreises »nirgends gehäuft» — was natürlich etwas anderes als »nirgends dicht» ist, sowie auch etwas anderes als »isolirt».

für welche die endlichen wesentlichen singulären Stellen eben die gegebenen $e_1 \dots e_\sigma$ sind, und die zugehörigen Fundamentalsubstitutionen

$$A_1, A_2, \dots, A_\sigma,$$

der projectiven Monodromiegruppe ϑ sämmtlich *parabolisch* sind, sowie auch die Umlaufssubstitution

$$A_{\sigma+1} \equiv A_1^{-1} A_2^{-1} \dots A_\sigma^{-1}.$$

Es ist somit x eine *eindeutige* Function eines Integralquotienten η innerhalb des Einheitskreises $|\eta| = 1$. Und zwischen den σ Substitutionen $A_1 \dots A$ bestehen (da keine elliptischen Substitutionen vorkommen) keine »Fundamentalrelationen». Dass eine solche Differentialgleichung wirklich existieren muss, lässt sich bekanntlich mittels der von POINCARÉ und KLEIN herrührenden »méthode de continuité» nachweisen.[1]

Da auch zwischen den B_i keine Relationen bestehen, so werden bekanntlich die beiden Gruppen Γ und ϑ holoedrisch isomorph, und zwar so, dass $B_1, B_2, \dots, B_\sigma$ bez. mit $A_1, A_2, \dots, A_\sigma$ correspondiren. Da nun, wie wir sahen, andererseits zwischen Γ und Δ holoedrische Isomorphie besteht, so sind also auch ϑ und Δ holoedrisch isomorph (so dass A_i mit C_i correspondirt). Als Folge hiervon im Verein mit der Eindeutigkeit von x als Function von η erkennt man sofort: wenn die postulirten Functionen $t(x)$ und $v(x)$, wie wir es jetzt thun wollen, als *mehrdeutige Functionen einer Stelle der unzerschnittenen x-Ebene* aufgefasst werden,[2] so sind sie *als Functionen von η eindeutig:*

$$t = \varphi(\eta), \qquad v = \psi(\eta),$$

mit der Eigenschaft

$$\varphi(S_\nu\eta) = a_\nu\varphi(\eta) + b_\nu\psi(\eta),$$
$$\psi(S_\nu\eta) = c_\nu\varphi(\eta) + d_\nu\psi(\eta),$$

wo S_ν eine beliebige Substitution der in einfacher Reihe geordneten Gruppe

---

[1] Es würde übrigens für unseren jetztigen Zweck hinreichen, dass es Differentialgleichungen zweiter Ordnung giebt, welche der genannten »subordinirt» sind. Vgl. SCHLESINGER, *Handbuch etc.* II, 2, p. 383—84.

[2] Es handelt sich hier natürlich um die mehrdeutigen Functionen, welche durch irgend ein Element der ursprünglichen Function $t(x)$ bez. $v(x)$ bestimmt werden.

ϑ bedeutet, a_ν, b_ν, c_ν, d_ν die Coefficienten der entsprechenden Δ-Substitution U_ν (wie oben).

Die Abwesenheit von Relationen zwischen $A_1 \ldots A_\sigma$ hat natürlich auch zur Folge, dass ϑ und Θ $(r, 1)$-deutig holomorph sind. Wir können also bei der Bildung der ξ-Reihen (9) *formal* gesehen eben die gegenwärtige Gruppe ϑ benutzen. Aber freilich ist hierbei im allgemeinen nicht an Convergenz zu denken, da sogar alle Fundamentalsubstitutionen von ϑ parabolisch sind. Wir werden es aber jetzt versuchen, die Reihen so zu modificieren, dass Convergenz erreicht wird, und zwar mit Hülfe der postulirten Functionen $t(x) = \varphi(\eta)$, $v(x) = \psi(\eta)$. Man setze in der That, ξ durch χ ersetzend,

$$\chi_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ T_\nu^{-1} \frac{H_i(S_\nu \eta)}{\varphi(S_\nu \eta)} \right\} \left(\frac{d(S_\nu \eta)}{d\eta} \right)^m. \tag{11}$$

Wir werden zeigen, dass diese Reihen, von einer nirgends gehäuften Menge von η-Werthen abgesehen, überall innerhalb des Einheitskreises $|\eta| = 1$ unbedingt convergiren, sobald die oben mit p_i bezeichneten Grössen hinreichend gross sind (wogegen m nur $\geqq 2$ sein soll).

Man weiss, dass die Poincaré'schen *Thetareihen*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} H_i(S_\nu \eta) \left(\frac{d(S_\nu \eta)}{d\eta} \right)^m \tag{12}$$

diese Convergenz aufweisen, wenn $m \geqq 2$. Jedem Gliede von (12) entspricht aber ein Glied in (11) mit n Partialgliedern. Es hat nämlich (11), ausführlicher geschrieben, die Form

$$\chi_i(\eta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\varkappa=1}^{n} A_{i\varkappa}^{(\nu)} \frac{H_\varkappa S_\nu(\eta)}{\varphi(S_\nu \eta)} \right\} \left(\frac{d(S_\nu \eta)}{d\eta} \right)^m,$$

wo $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ Coefficienten der Substitution T_ν^{-1} bedeuten (und also zur Determinante der directen Substitution T_ν als Subdeterminanten gehören, falls die Gruppe Θ unimodular ist, was wir doch jetzt keineswegs voraussetzen). Hieraus folgt, dass mit Sicherheit unbedingte Convergenz der Reihen (11) stattfindet, falls die Quotienten

$$\frac{A_{i\varkappa}^{(\nu)}}{\varphi(S_\nu \eta)} \tag{13}$$

dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Grenze bleiben. Dies können wir aber jetzt bewirken. Wenn die Coefficienten zweier linearer homogener Substitutionen in n Veränderlichen dem absoluten Betrage nach kleiner als A (>0) bez. B (>0) sind, so sind die Coefficienten der aus diesen beiden Substitutionen (in der einen oder anderen Ordnung) zusammengesetzten Substitution absolut genommen $< n\,.\,AB$. Hieraus folgt: wenn M eine solche positive Grösse bedeutet, dass die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen A_i ($i = 1, \ldots, \sigma$) der Gruppe θ und ebenso der inversen A_i^{-1} dem absoluten Betrage nach durchgehends $< M$ sind, so müssen die Coefficienten einer θ-Substitution, welche sich aus μ successiven A_i und A_i^{-1} zusammensetzen lässt, absolut genommen kleiner als

$$M\,.\,(nM)^{\mu-1} = n^{\mu-1}\,.\,M^{\mu}$$

sein, und folglich auch $< (nM)^{\mu}$. Dies gesetzt, betrachte man eine bestimmte ϑ-Substitution $S_\nu\eta$ und die entsprechende Δ-Subst. $U_\nu\eta$. Beide haben einen bestimmten »Index«, welcher auch für beide denselben Werth hat, $\beta = \sum |\lambda_i|$ (s. oben). Die entsprechende (eindeutig bestimmte) θ-Substitution T_ν, sowie auch die inverse T_ν^{-1} lässt sich natürlich immer aus β successiven A_i und A_i^{-1} zusammensetzen (obgleich möglicherweise auch aus einer geringeren Anzahl, da die Isomorphie zwischen θ und ϑ bez. Δ nicht holoedrisch vorausgesetzt wurde). Es ist somit $|A_{i\varkappa}^{(\nu)}| < |nM|^{\beta}$. Wir wählen jetzt eine positive Grösse $q > nM$ und nehmen die Grössen $|p_i|$ sämmtlich so gross, dass (nicht nur die für dieselben immer vorausgesetzten Bedingungen erfüllt sind, sondern auch) $|a_\nu|$ und $|b_\nu| > q^{\beta}$ werden, was nach dem Hülfssatze möglich ist. Andererseits: wenn η so gewählt wird, dass $\psi(\eta)$ nicht verschwindet, so kann man den Quotienten (13) in der Form

$$(14)\qquad \frac{A_{i\varkappa}^{(\nu)}}{a_\nu \psi(\eta)\left\{\dfrac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)} + \dfrac{b_\nu}{a_\nu}\right\}}$$

schreiben. Zufolge des soeben über die $A_{i\varkappa}^{(\nu)}$ und a_ν gesagten, liegt also der absolute Betrag des Quotienten (13) unabhängig von ν unterhalb einer endlichen Grenze, falls für die Grösse

$$(15)\qquad \left|\frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)} + \frac{b_\nu}{a_\nu}\right| = \left|z(\eta) + \frac{b_\nu}{a_\nu}\right|$$

eine von Null verschiedene untere Grenze angebbar ist (es wurde hier $\varphi : \psi = z$ gesetzt). Dies ist aber zufolge unserer Annahmen wirklich der Fall, nur mit Ausnahme für eine im Inneren des Kreises $|\eta| = 1$ nirgends gehäufte Menge von η-Werthen, wie man folgendermassen einsehen kann.

Als Quotient zweier eindeutiger Functionen ist z eine eindeutige Function von η (für $|\eta| < 1$). Bei Ausübung einer Substitution der Gruppe ϑ auf η ändert sich z nach der entsprechenden Substitution der mit ϑ holoedrisch isomorphen Gruppe Γ (durch deren Spaltung die homogene Gruppe Δ entstand). Der Functionszusammenhang zwischen η und z kann auch einfach so ausgedrückt werden, dass sie beide Functionen von x mit denselben Verzweigungsstellen, nämlich $e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$ und $e_{\sigma+1} = \infty$, sind.[1] Einer beliebigen Stelle η_0 im Inneren des Kreises $|\eta| = 1$ entspricht eine bestimmte x-Stelle x_0, welche von den Stellen $e_1, \ldots, e_\sigma, e_{\sigma+1} = \infty$ verschieden ist. Und in der Umgebung von η_0 ist x holomorphe Function von η. Andererseits wurde angenommen, dass t und v in der Nähe von $x = x_0$ holomorph sind; folglich werden t und v, d. h. $\varphi(\eta)$ und $\psi(\eta)$ in der Nähe von $\eta = \eta_0$ holomorphe Functionen von η. Der Quotient $z = \varphi : \psi$ ist also überall innerhalb des Kreises $|\eta| = 1$ meromorphe Function von η. Dem Werthe $z = 0$ entspricht, da derselbe (wie oben angenommen wurde) innerhalb R_0 liegt und also nicht zu den »Grenzpunkten» der Gruppe Γ gehört, eine gewisse Menge M von η-Werthen innerhalb des Kreises $|\eta| = 1$. Diese Menge kann, auch wenn sie unendlich ist, im Inneren des Kreises keine Häufungsstellen haben, weil eine solche die Meromorphie aufheben sollte. Die mit $z = 0$ im Sinne der Gruppe Γ congruenten z, d. h. die Stellen $-(b_\nu : a_\nu)$ correspondiren je mit einer Menge M_ν, welche im Sinne der Gruppe ϑ mit M congruent ist, und ganz wie M keine Häufungsstelle mit $|\eta| < 1$ haben kann. Es kann auch die Gesammtheit M aller dieser Mengen $M, M_1, M_2, \ldots$ nur auf der Kreisperipherie Häufungsstellen haben. Denn eine Häufungsstelle für M muss offenbar auch den Grenzstellen der Gruppe Γ angehören. Es ist, m. a. W., M eine im Inneren des Einheitskreises nirgends gehäufte η-Menge (für welche aber »die derivirte Menge» M' aus sämmtlichen Punkten der Kreisperipherie besteht). Ganz ähnliches gilt auch für die Gesammtheit N aller

[1] Hieraus folgt natürlich nicht, dass auch η eindeutige Function von z wird, da x nicht als eindeutige Function von z nachgewiesen ist.

η-Stellen, für welche $\psi : \varphi = 0$ [$z = \varphi : \psi$ unendlich gross] ist, oder welche mit solchen Stellen congruent sind. Dasselbe gilt [da φ und ψ, für sich betrachtet, holomorph sind, sobald $|\eta| < 1$] auch für die Menge $\mathbf{M}_1$ bez. $\mathbf{N}_1$ derjenigen η-Stellen, welche für φ bez. ψ Nullstellen oder mit Nullstellen congruente Stellen sind [da für $|\eta| < 1$ φ und ψ endlich sind, hat man $\mathbf{M}_1 \equiv \mathbf{M} +$ eine eventuelle nirgends gehäufte η-Menge mit $\varphi = \psi = a_\nu \varphi + b_\nu \varphi = 0$, aber z nicht $= 0$; und analog für $\mathbf{N}_1$]. Und $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{N}_1$ bilden dann natürlich auch zusammengenommen eine im Inneren des Einheitskreises nirgends gehäufte Menge.

Jetzt wählen wir im Kreisinneren eine Stelle η, welche nicht zur Menge $\mathbf{M}_1$ gehört und andererseits für $\psi(\eta)$ nicht gerade eine Nullstelle ist. Dann ist der entsprechende z-Werth von jeder Stelle $-(b_\nu : a_\nu)$ [darunter $z = -(b_0 : a_0) = 0$ einbegriffen] verschieden, und gehört auch nicht zu den Grenzstellen der Gruppe Γ. Es lässt sich somit eine von Null verschiedene untere Grenze für (15) angeben. Folglich ist (s. oben) die Reihe (11) unbedingt convergent, falls η nicht mit einer ∞-Stelle der Function $H_i(\eta)$ congruent oder zusammenfallend ist. Nun sind innerhalb $|\eta| = 1$ nicht nur diese letztgenannten Stellen nirgends gehäuft, sondern auch die Menge $\mathbf{M}_1 +$ Nullstellen von $\psi(\eta)$ hat, dem gleich oben gesagten gemäss, diese Eigenschaft. Wir haben also wirklich bewiesen, dass unter den obengenannten Voraussetzungen die Reihe (11) für $|\eta| < 1$ unbedingt convergirt, nur mit Ausnahme für eine nirgends gehäufte η-Menge.

Hierbei kann nachher bemerkt werden, dass die Convergenz auch für gewisse unter den bei unserer Beweisführung ausgeschlossenen Stellen noch besteht (oder bestehen kann). Es sind dies die Nullstellen von ψ, welche nicht zugleich Nullstellen von φ sind; für solche Stellen (wenn sie existiren) ist $\varphi(S_\nu \eta) = a_\nu \varphi(\eta)$, was im Verein mit den Eigenschaften der Coefficienten a_ν zur Folge hat, dass der Quotient (13) dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. Für $\varphi = \psi = 0$ wird dagegen im allgemeinen jedes Glied der Reihe unendlich gross.

Nachdem wir also die mit den erwähnten Ausnahmen bestehende *unbedingte* Convergenz unserer Reihen dargethan haben, sieht man leicht ein, dass in einer hinreichend kleinen Umgebung einer beliebigen Convergenzstelle die Convergenz auch *gleichmässig* ist (so dass also die Reihen mit Sicherheit analytische Functionen darstellen). Es folgt dies daraus, dass einerseits jene gleichmässige Convergenz bei den Thetareihen stattfindet, andererseits die unbedingte Convergenz der χ-Reihen in der oben angegebenen Weise aus derjenigen der Thetareihen folgt.

Wenn wir jetzt die n Reihen χ_i durch zugehörige Thetareihen dividiren, also n Functionen

$$y_i = \frac{\chi_i(\eta)}{\Theta_i(\eta)}$$

bilden, so haben diese Quotienten, ganz wie die analogen, mit convergenten ξ-Reihen gebildeten, die Eigenschaft, die Substitutionen $\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_\sigma$ zu erfahren, wenn man auf η bez. die Substututionen $A_1 \dots A_\sigma$ ausübt, und folglich auch als x positive Umläufe um die Stellen $e_1 \dots e_\sigma$ vollzieht.

Inwieweit diese y_i auch den übrigen Bedingungen der gestellten Aufgabe genügen, werden wir jetzt zusehen.

Reduction der aufgestellten Existenzfrage auf den Fall $n = 2$.

In der Umgebung einer von den $e_1 \dots e_\sigma$, $e_{\sigma+1}$ verschiedenen x-Stelle sind die y_i [d. h. alle Zweige der y_i] meromorph (bez. holomorph). Wenn nämlich zunächst angenommen wird, dass die entsprechenden η mit keiner Nullstelle von $\varphi(\eta)$ und mit keiner ∞-Stelle einer Function $H_i(\eta)$ zusammenfällt oder congruent ist, so werden nicht nur die Reihen $\Theta_i(\eta)$ sondern auch die $\chi_i(\eta)$ für den fraglichen x-Werth (absolut) convergent und in der Umgebung desselben holomorph (obgleich natürlich unendlich vieldeutig, den verschiedenen zur x-Stelle gehörenden η entsprechend). Bei einem x-Werth, für den die entsprechenden (unter einander congruenten) η eine ∞-Stelle von $H_i(\eta)$ enthalten, wird bekanntlich (und aus leicht ersichtlichen Gründen) ein Glied der Reihe Θ_i wie eine rationale Function unendlich gross, während die übrigen für sich eine convergente Reihe bilden, weshalb die ganze Reihe sich meromorph verhält. Diese Meromorphie geht auch auf die χ-Reihen über, indem auch hier ein entsprechendes Glied wie eine rationale Function unendlich wird (doch kann hierbei sogar Holomorphie eintreten, wenn zwei verschiedene H_i gleichzeitig unendlich werden, wobei eine Compensation denkbar ist). Der Einfachheit wegen nehmen wir an (obgleich dies nicht nothwendig ist, vgl. unten), dass die ∞-Stellen der Functionen $H_i(S_\nu\eta)$ von den Nullstellen der Functionen $\varphi(S_\nu\eta)$ vollständig getrennt liegen. Was nun die Nullstellen von $\varphi(S_\nu\eta)$ betrifft, so nehmen wir zunächst an, dass einem gewissen x-Werthe (unter anderem) ein η-Werth entspricht, für den $\varphi(\eta) = 0$ ist, ohne dass $\psi(\eta) = 0$. Für diesen η-Werth wird im allgemeinen das erste Glied einer χ-Reihe unendlich gross; für die congruenten η je ein anderes Glied; die restierenden Glieder bilden aber in jedem Falle eine convergente Reihe; dies ergiebt sich in ganz derselben Weise, wie oben die Convergenz der ganzen Reihe bei einem beliebigen η-Werthe (wie wir sahen, hängt dieselbe wesentlich davon ab, dass die Gruppe Γ eigentlich discontinuirlich ist). Etwas anders liegt die Sache, wenn in der fraglichen η-Menge ein η-Werth vorkommt, für den $\varphi(\eta) = \psi(\eta) = 0$ ist. Dann verschwinden in der That

$$\varphi(S_\nu\eta) = a_\nu\varphi(\eta) + b_\nu\psi(\eta), \qquad \psi(S_\nu\eta) = c_\nu\varphi(\eta) + d_\nu\psi(\eta)$$

unabhängig von ν [oder m. a. W.: für den fraglichen $x(=x_0)$ verschwinden *alle* Werthe der unendlich vieldeutigen Functionen $t(x)$ und $v(x)$] weshalb im allgemeinen alle Glieder einer χ-Reihe unendlich gross werden. In einer hinreichend kleinen Umgebung eines η-Werthes η_0 der fraglichen Werthgruppe bleibt, da $\psi(\eta)$ holomorphe Function von x ist, $|(x-x_0)^k : \psi(\eta)|$ unterhalb einer endlichen Grenze, falls k einen gewissen ganzen positiven Werth hat. Wenn andererseits $\lim\limits_{\eta=\eta_0} z(\eta)$ von Null und von jedem mit der Stelle Null congruenten z-Stelle $[-b_\nu : a_\nu]$ verschieden ist, so bleibt auch der inverse Werth des Ausdruckes (15), aus oben angegebenen Gründen, unterhalb einer endlichen Grenze. Da dasselbe auch für $|A_{ik}^{(\nu)} : a_\nu|$ gilt, so resultirt, dass der Quotient (14) nach Multiplication mit $(x - x_0)^k$ in der Umgebung von η_0 innerhalb endlichen, von ν unabhängigen Grenzen bleibt. Hieraus folgt Meromorphie der χ-Reihe an der betrachteten Stelle: es kann keine Verzweigung in Frage kommen, da der betrachtete x nicht für $t(x)$ oder $v(x)$ Verzweigungsstelle ist, und andererseits hat die mit $(x - x_0)^k$ multiplicirte Reihe, zufolge des soeben gesagten, für $x = x_0$ einen endlichen Grenzwerth. Es liegt aber auch die Möglichkeit vor, dass für irgend einen ν-Werth $z = -b_\nu : a_\nu$ ist. Dann wird der inverse Werth von (15) für diesen ν-Werth unendlich gross, aber — ganz wie oben — so, dass nach Multiplication mit einer gewissen Dignität $(x - x_0)^h$ einen endlichen Grenzwerth hervorgeht. Für die übrigen ν bleibt aber — auch ganz wie oben — jener inverse Werth unterhalb einer (von ν unabhängigen) endlichen Grenze. Hieraus im Verein mit dem gleich oben gesagten folgt sofort, dass die Reihe nach Multiplication mit $(x - x_0)^{h+k}$ einen endlichen Grenzwerth erhält, indem der Grenzwerth eines gewissen einzelnen Gliedes einen gewissen endlichen Werth hat, während die Summe der übrigen Glieder gegen Null tendirt. Die Meromorphie bleibt also offenbar auch jetzt bestehen.

Da also in den Ausdrücken für die n Functionen y_i sowohl Zähler als auch Nenner, als Functionen von x betrachtet, wenigstens *von den Stellen* $e_1 \ldots e_\sigma$, $e_{\sigma+1}$ *abgesehen*, sich überall *wie rationale Functionen* verhalten, so gilt dasselbe auch für die Quotienten y_i selbst.

Was nun endlich die Stellen $e_1 \ldots e_\sigma$, $e_{\sigma+1}$ betrifft, so haben bekanntlich die Thetareihen der jetzt fraglichen Art, als Functionen von x betrachtet, auch an diesen Stellen den »Charakter der Bestimmtheit» (wenn auch nicht den Charakter rationaler Functionen). Für die χ-Reihen ist ein ähnliches Verhalten durchaus nicht zu erwarten, falls schon die Functionen $t(x)$ und $v(x)$ sich an den Stellen e_i nicht bestimmt verhalten. Aber auch die Annahme, dass alle e_i für $t(x)$ und $v(x)$ Bestimmtheitsstellen sind, ermöglicht (so viel wir haben finden können) nicht den Beweis, dass die χ-Reihen ein ähnliches Verhalten aufweisen. Bei speciellen Annahmen über die Gruppe Θ kann dies wahrscheinlich eintreffen, kaum aber in allgemeinen. Unter dieser Voraussetzung verlieren also auch die Functionen y_i an den Stellen e den Charakter der Bestimmtheit. Der Bestimmtheitscharakter dieser Stellen wurde auch bei der obigen Fragestellung nicht erfordert.

Die Forderungen unseres Problems sind somit jetzt sämmtlich erfüllt nur mit Ausnahme für diejenige, dass die y_i an allen von den e_i verschiedenen Stellen *holomorph* sein sollten. Da aber Meromorphie schon erreicht ist, so kann man durch eine einfache Modification Holomorphie erreichen: man hat nur sämmtliche y_i durch eine *eindeutige*, mit Ausnahme für den e_i holomorphe Function $F(x)$ von x zu multipliciren, deren Nullstellen die ∞-Stellen der y_i compensiren. Die n Functionen

$$F(x) \,.\, y_i$$

haben dann alle verlangten Eigenschaften.

Das Resultat der obigen Untersuchung lässt sich folgendermassen zusammenfassen:

Es seien $e_1, e_2, \ldots, e_\sigma$ *gegebene* im Endlichen liegende x-Stellen. Ferner betrachte man σ lineare Substitutionen in der Ebene einer anderen Veränderlichen z:

$$\frac{z'-h_i}{z'-k_i} = p_i^2 \cdot \frac{z-h_i}{z-k_i} \qquad (i=1,2,\ldots,\sigma)$$

wo h_i, k_i, p_i die Bedingungen erfüllen, dass die h_i und k_i (die Fixpunkte) 2σ von einander getrennte Stellen der z-Ebene sind, welche auch sämmtlich von der Stelle $z = 0$ getrennt liegen, und andererseits die absoluten Werthe der (reellen oder imaginären) Multiplicatoren p_i^2 grösser als Eins sind (also die Substitutionen hyperbolisch oder loxodromisch). Von diesen (z', z)-Substitutionen gehe man durch »Spaltung» zu *unimodularen* homogenen $(t', v'; t, v)$-Substitutionen

$$C_1, C_2, \ldots, C_\sigma$$

über. Es kann gefragt werden, ob bei gegebenen Werthen der h_i, k_i und p_i (welche die genannten Bedingungen erfüllen) Functionen $t(x)$ und $v(x)$ immer existiren, welche beim Überschreiten (in positiver Richtung) von Schnitten $(e_1\infty \ldots e_\sigma\infty)$ bez. die Substitutionen $C_1 \ldots C_\sigma$ erleiden, sich aber sonst im Endlichen überall wie ganze rationale Functionen verhalten. Wir ersetzen aber diese Frage durch die folgende, in welcher viel weniger verlangt wird: Ist es möglich, die 2σ Stellen h_i und k_i so zu bestimmen, dass, wenn nachher eine *beliebig* grosse positive Zahl P gewählt wird, immer ein Werthsystem $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ mit

$$|p_1| > P, |p_2| > P, \ldots, |p_\sigma| > P$$

überhaupt gefunden werden kann, welches im Verein mit den h_i, k_i Substitutionen C_i geben, für welche Functionen $t(x)$ und $v(x)$ mit den genannten Eigenschaften existiren? *Wenn* diese Verhältnissmässig sehr bescheidene Existenzfrage im bejahenden Sinne zu beantworten ist (was wir hier nicht bewiesen haben) *dann* gilt dasselbe — dies ist unser Resultat — auch für die in der Einleitung formulirte Existenzfrage in ihrer vollen Allgemeinheit.

Wir knüpfen hieran noch folgende Bemerkungen. Es ist wohl kaum zu bezweifeln, dass die soeben erwähnte, auf den Fall $n = 2$ sich beziehende Existenzfrage im bejahenden Sinne zu beantworten ist. Doch habe ich bisher einen strengen Beweis hierfür nicht durchgeführt. Es sei mir indessen gestattet, über diese Frage folgendes zu bemerken.

Zunächst ist leicht ersichtlich, dass man im jetztigen Zusammenhange die genannte Existenzfrage ein wenig modificiren kann, so dass noch weniger verlangt wird. Dies beruth darauf, dass der oben benutzte Hilfssatz sich in der That auf folgende Weise modificieren lässt. Für die 2σ Grössen h_i, k_i braucht man nicht bestimmte Werthe vorauszusetzen, sondern kann dieselben als unbestimmte Grössen betrachten, welche nur folgenden Bedingungen unterworfen sind: für $|h_i|$, $|k_i|$, $|h_i - k_i|$, $|h_i - h_j|$, $|h_i - k_j|$, $|k_i - k_j|$, wo $j \gtrless i$, sollen von Null verschiedene untere Grenzen existiren, und andererseits für h_i und k_i endliche obere Grenzen. Man bestätigt sehr leicht, dass der oben gegebene Beweis des Satzes noch unter diesen Voraussetzungen gültig bleibt. Dementsprechend kann auch die auf den Fall $n = 2$ sich beziehende Frage, auf welche sich die Hauptfrage reducirte, so abgeändert werden, dass man für die h_i, k_i ganz dieselbe Art von Unbestimmtheit voraussetzt, was geeignet sein kann, die Behandlung der Frage zu vereinfachen. Bei dieser Behandlung scheint es andererseits vortheilhaft zu sein können, für die Functionen $t(x)$ und $v(x)$ auch den ausnahmlosen »Charakter der Bestimmtheit» vorauszusetzen, also zunächst Differentialgleichungen (zweiter Ordnung) der FUCHS'schen Klasse im Auge zu haben. Dagegen dürfte es nicht viel daran zu denken sein, auch für $t(x)$ und $v(x)$ analytische Entwickelungen bilden zu können, welche die vorgeschriebenen functionalen Eigenschaften in Evidenz stellen.

Wenn es gelingt, für die soeben besprochene Existensfrage und damit auch für unsere jetztige Hauptfrage (als Existenzfrage betrachtet) eine bejahende Antwort definitiv festzustellen, so wird hiermit die ausnahmlose Lösbarkeit der ursprünglichen RIEMANN'schen Aufgabe nicht dargethan sein. Hierzu wäre noch der Nachweis erforderlich, dass in jedem Systeme von »cogredienten» linearen homogenen Differentialgleichungen auch Gleichungen der FUCHS'schen Klasse vorkommen. Da aber ein solcher Nachweis, obgleich noch nicht erbracht, jedenfalls als denkbar bezeichnet werden muss, so ist es auch nicht ausgeschlossen, dass die Entscheidung unserer jetztigen Frage auch für das unveränderte RIEMANN'sche Problem Bedeutung gewinnen kann.

Lund, Februar 1902.