REMARQUES SUR UN THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

(Extraits de deux lettres adressées à M. Mittag-Leffler)

PAR

ERNST LINDELÖF.

En étudiant ces derniers temps la théorie des ensembles, j'ai été amené à m'occuper en particulier du théorème fondamental de MM. CANTOR et BENDIXSON,[1] théorème sur lequel M. SCHOENFLIES est revenu dans une publication récente.[2] Les démonstrations de tous ces auteurs reposent sur la notion des nombres transfinis que M. CANTOR a introduits dans l'Analyse. Cependant, la partie la plus importante du théorème en question, celle qui concerne la décomposition d'un ensemble fermé en un ensemble parfait et un ensemble dénombrable, semble assez étrangère à la notion du transfini, et il est donc désirable d'en trouver une démonstration où cette notion n'intervienne pas. C'est aussi, si je ne me trompe, l'opinion que vous avez exprimée lors de notre dernière entrevue. Or, je me suis aperçu qu'on peut y parvenir en apportant à la démonstration de M. BENDIXSON une légère modification qui, en somme, revient à un changement de terminologie. C'est ce que je me permettrai de vous indiquer en quelques mots ci-après.

Quant à la seconde partie du même théorème, la propriété fondamentale des ensembles dérivés, jointe à la seule définition des nombres transfinis, suffit pour l'établir une fois qu'on aura démontré la première

[1] Acta mathematica, t. 2.

[2] Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1903 Heft 1.

partie. Je n'en parlerai donc pas dans la suite, et je me bornerai à la première partie du théorème qui s'énonce ainsi:

Tout ensemble fermé non dénombrable se compose d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable.

1. Toutefois je me placerai d'abord à un point de vue plus général, en considérant un ensemble non dénombrable quelconque, (P), fermé ou non; je suppose cet ensemble situé dans un espace à un nombre fini n de dimensions, ou plutôt, pour simplifier, dans une région limitée T de cet espace, hypothèse qui ne restreint en rien la généralité, puisqu'on peut toujours la réaliser par une projection convenable de l'espace.

Voici maintenant une nouvelle notion que j'introduirai et qui va jouer un rôle fondamental dans la démonstration:

Je dirai qu'un point donné C de la région T constitue *un point de condensation de l'ensemble* (P), si une sphère construite de ce point comme centre, quelque petit qu'on en choisisse le rayon, renferme toujours une infinité non dénombrable de points P.

Cela posé, je démontre successivement les propositions suivantes:

(a) *La région T comprend au moins un point de condensation C de l'ensemble* (P).

La démonstration est analogue à celle par laquelle on prouve qu'il y a dans T au moins un point limite de (P). On peut supposer tout d'abord que la région T affecte la forme d'un cube dont les arêtes sont parallèles aux axes des coordonnées. Divisons T par exemple en 2^n cubes égaux par des plans parallèles aux plans des coordonnées. L'un au moins de ces cubes comprendra nécessairement, à l'intérieur ou à la surface, une partie non dénombrable de l'ensemble (P); car si chacun d'eux n'en comprenait qu'une partie dénombrable, la somme de tous ces ensembles partiels serait également dénombrable et, par suite, il en serait de même de (P). En choisissant donc, suivant une convention déterminée, l'un des cubes qui renferment une infinité non dénombrable de points P, puis en divisant celui-ci en 2^n cubes plus petits, et en continuant de la sorte, on arrivera bien à prouver l'existence d'un point C jouissant de la propriété distinctive des points de condensation.

(b) *L'ensemble C des points de condensation de (P) est un ensemble fermé.*

Soit en effet C' un point limite de l'ensemble (C). Toute sphère décrite de C' comme centre, quelque petite qu'elle soit, comprendra nécessairement des points C dans son intérieur et renfermera par suite, d'après la définition même des points C, une partie non dénombrable de l'ensemble (P). Le point C' est donc lui-même un point de condensation de (P) et figure, par conséquent, dans l'ensemble (C), C. Q. F. D.

En désignant maintenant par (R) l'ensemble des points P qui ne figurent pas dans l'ensemble (C), je démontrerai cette nouvelle proposition:

(c) *L'ensemble (R) est dénombrable.*

A cet effet, je n'ai qu'à répéter une démonstration donnée par M. PHRAGMÉN,[1] en y changeant seulement la terminologie.

Puisque (C) est un ensemble fermé, les distances d'un point donné quelconque de l'ensemble (R) aux différents points C admettront un minimum déterminé δ distinct de zéro. Fixons une suite de nombres positifs décroissant vers zéro:

$$\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_\nu > \ldots \qquad \left(\lim_{\nu - \infty} \delta_\nu = 0\right),$$

et divisons (R) en des ensembles partiels: $(R_1), (R_2), \ldots, (R_\nu), \ldots\ldots,$ (R_ν) désignant l'ensemble des points de (R) qui vérifient la condition

$$\delta_\nu < \delta \leqq \delta_{\nu-1}.$$

Je dis d'abord que chacun de ces ensembles partiels est dénombrable. En effet, si (R_ν) par exemple était un ensemble non dénombrable, il en existerait au moins un point de condensation dans la région T, d'après la première proposition démontrée ci-dessus. Ce point serait aussi point de condensation pour l'ensemble (P), dont (R_ν) fait partie, et figurerait par suite dans l'ensemble (C). Mais cela est impossible, car le point en question, étant point limite de l'ensemble (R_ν), aura nécessairement une distance $\geqq \delta_\nu$ à l'un quelconque des points C. Donc (R_ν) est bien un

---

[1] Acta mathematica, t. 5.

ensemble dénombrable, et comme nous n'avons qu'une infinité dénombrable de tels ensembles, leur somme, c'est à dire (R), sera également dénombrable, C. Q. F. D.

(d) *L'ensemble* (C) *est parfait.*

Puisque j'ai déjà démontré que cet ensemble est fermé, il ne me reste plus qu'à faire voir qu'il ne saurait renfermer de points isolés. Admettons donc un instant que C_1 soit un point isolé de (C) et, de ce point comme centre, décrivons une sphère S laissant à l'extérieur tous les autres points C. La partie $(P)_S$ de l'ensemble (P) qui est intérieure à cette sphère doit être un ensemble non dénombrable, puisque C_1 en est un point de condensation. Mais, d'autre part, tous les points P compris dans S, excepté le seul point C_1 dans le cas où celui-ci figure dans l'ensemble (P), font partie de l'ensemble (R), et comme celui-ci est dénombrable, d'après la proposition (c), il en doit donc être de même de $(P)_S$. Cette contradiction prouve l'exactitude de la proposition énoncée.

En somme, j'ai donc démontré ce théorème:

Étant donné un ensemble non dénombrable quelconque (P) *situé dans un espace à un nombre fini de dimensions, les points de cet espace qui constituent des points de condensation de l'ensemble* (P) *forment un ensemble parfait* (C), *et les points de* (P) *qui ne figurent pas dans* (C) *forment un ensemble dénombrable* (R).

2. On voit qu'il y a des points P, et même une infinité non dénombrable de ces points, qui figurent dans l'ensemble (C), et on peut ajouter qu'une sphère arbitrairement petite décrite d'un point quelconque C comme centre renfermera toujours une infinité non dénombrable de points P faisant partie de l'ensemble (C). On peut en tirer, en particulier, cette conséquence:

Tout ensemble infini de points, situé dans un espace à un nombre fini de dimensions et tel, qu'autour de chacun de ses points on puisse construire une sphère qui n'en renferme qu'une partie dénombrable, est lui-même un ensemble dénombrable.

Je ferai remarquer qu'en s'appuyant sur cette proposition qui, au premier abord, semble presque intuitive, on peut démontrer en quelques mots le théorème du n° 1. Il serait donc intéressant de trouver une démonstration directe et simple de la proposition en question.

3. En revenant maintenant aux considérations développées au n° 1, j'introduirai cette nouvelle hypothèse que l'ensemble (P) est *fermé*, c'est à dire qu'il comprend tous ses points limites. Tout point de condensation étant en même temps point limite, on voit que l'ensemble (C) est dans ce cas compris tout entier dans l'ensemble donné (P), de sorte qu'on aura

$$(P) = (R) + (C).$$

C'est là précisément le théorème de MM. Bendixson et Cantor que je voulais démontrer.

Helsingfors, juillet 1903.

II.

Une remarque de M. Borel, à qui j'avais communiqué le contenu de ma dernière lettre, m'ayant conduit à étudier de nouveau la proposition que j'y ai établie au n° 2, je me suis aperçu qu'on peut la rattacher à un théorème général très élémentaire, qui constitue d'ailleurs l'extension directe d'un théorème de M. Borel. Par cette voie, on arrive à une nouvelle démonstration du théorème fondamental de MM. Cantor et Bendixson qui me semble remarquable par son caractère direct et intuitif, et que je me permettrai de vous présenter ici.

1. Je commence par démontrer le lemme suivant, qui est d'ailleurs, géométriquement, presque évident.

Étant donné, dans un espace à un nombre fini de dimensions, un ensemble borné quelconque de points, (P), si, de chacun de ses points comme centre, on construit une sphère d'un rayon supérieur ou égal à une longueur donnée r, on pourra toujours choisir un nombre fini de ces sphères de telle sorte que tout point de (P) soit intérieur à l'une d'elles.

Dans l'ensemble (P), je prends au hasard un point P_1, puis je choisis un point P_2 dont la distance à P_1 soit $\geqq r$, puis un point P_3 dont la distance à chacun des points P_1 et P_2 soit $\geqq r$, puis un point P_4 dont la distance à chacun des points P_1, P_2, P_3 soit $\geqq r$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de point satisfaisant aux conditions requises.

Il est en effet évident que le procédé que je viens de décrire ne saurait fournir qu'un nombre *fini* de points

$$P_1, P_2, P_3, \ldots. \tag{1}$$

Pour le faire nettement voir, il suffit de construire de chacun de ces points comme centre une sphère de rayon $\frac{r}{2}$ et, d'autre part, une surface fermée T enveloppant tout l'ensemble (P) et ayant à l'un quelconque de ses points une distance supérieure à $\frac{r}{2}$. Les sphères seront extérieures l'une à l'autre, mais intérieures à la surface T, de sorte que la somme de leurs volumes sera inférieure au volume V limité par cette surface. Donc le nombre n des points (1) sera certainement inférieur à $\frac{V}{v}$, en désignant par v le volume d'une sphère de rayon $\frac{r}{2}$.

Tout point P ayant, d'après ce qui précède, une distance inférieure à r de l'un au moins des points (1), on voit dès lors que les n sphères S correspondant à ces mêmes points jouissent bien de cette propriété, que tout point P est intérieur à l'une d'elles.

2. J'arrive au théorème général annoncé au début de ma lettre.

Théorème. *Étant donné un ensemble quelconque de points, (P), situé dans un espace à un nombre fini de dimensions, si à chaque point P on fait correspondre une sphère S ayant ce point comme centre, on pourra choisir une infinité dénombrable de ces sphères de telle sorte, que tout point de l'ensemble donné soit intérieur à l'une d'elles.*

Comme on peut décomposer un ensemble quelconque en une infinité dénombrable d'ensembles bornés, il suffit évidemment de démontrer le théorème dans le cas où *l'ensemble (P) est borné.*

Fixons une suite indéfinie de nombres positifs décroissant vers zéro:

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_{n-1} > r_n > \ldots \qquad \left(\lim_{n=\infty} r_n = 0\right),$$

divisons les sphères S en ensembles partiels

$$(S)_1, (S)_2, \ldots, (S)_n, \ldots,$$

suivant que leurs rayons vérifient les inégalités:

$$r \geqq r_1, \quad \text{resp.} \quad r_1 > r \geqq r_2, \ldots, r_{n-1} > r \geqq r_n, \ldots,$$

et désignons par

$$(P)_1, (P)_2, \ldots, (P)_n, \ldots$$

les parties de l'ensemble (P) formées par les centres des sphères S comprises resp. dans les ensembles précédents.

D'après le lemme démontré ci-dessus, on pourra choisir un nombre fini de sphères de l'ensemble $(S)_1$ de telle sorte que tout point de l'ensemble $(P)_1$ soit intérieur à l'une d'elles; de même un nombre fini de sphères de l'ensemble $(S)_2$ de telle sorte que tout point de l'ensemble $(P)_2$ soit intérieur à l'une d'elles, et ainsi de suite. En somme, on aura donc une infinité dénombrable de sphères S telles que tout point de l'ensemble donné soit intérieur à l'une d'elles au moins, C. Q. F. D.

Si, en particulier, on suppose l'ensemble (P) borné et *fermé*, on peut démontrer qu'il existe un nombre *fini* de sphères S répondant aux conditions voulues. C'est là le théorème de M. Borel [1] dont j'ai parlé au début de cette lettre, et sur lequel il avait bien voulu appeler mon attention.

Du théorème que je viens de démontrer découle immédiatement la proposition suivante, établie au n° 2 de ma dernière lettre:

Étant donné un ensemble de points, (P), situé dans un espace à un nombre fini de dimensions, si, autour de chacun de ses points, on peut construire une sphère qui ne renferme qu'un nombre dénombrable de points P, on peut affirmer que (P) est un ensemble dénombrable.

En effet, d'après le théorème précédent on peut, parmi les sphères envisagées, en choisir une infinité dénombrable de telle sorte que tout point

[1] Comptes rendus, 4 mai 1903. La condition que l'ensemble (P) soit fermé n'y figure pas expressément, évidemment par inadvertance, puisque cette condition joue un rôle essentiel dans la démonstration qu'avait donnée M. Borel p. 42—43 de ses *Leçons sur la théorie des fonctions,* et à laquelle il renvoie dans la note citée.

P soit intérieur à l'une d'elles, et comme chacune de ces sphères, par hypothèse, ne renferme qu'un nombre dénombrable de points P, il s'ensuit bien que l'ensemble (P) est lui-même dénombrable.

3. Après ces préliminaires, voici maintenant avec quelle facilité on établit le théorème fondamental de MM. Cantor et Bendixson:

Tout ensemble fermé non-dénombrable (P), *situé dans un espace à un nombre fini de dimensions, se compose d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable.*

Écrivons $(P) = (R) + (C)$, l'ensemble (R) comprenant tout point P tel qu'on puisse l'entourer d'une sphère qui ne renferme qu'une partie dénombrable de (P), et l'ensemble (C) tous les autres points P.

De la dernière proposition démontrée ci-dessus, il résulte immédiatement que *l'ensemble* (R) *est dénombrable* et que, par suite, l'ensemble (C) existe effectivement et comprend une infinité non dénombrable de points.

D'après la définition même de ce dernier ensemble, tout point C jouit de cette propriété qu'une sphère arbitrairement petite ayant ce point comme centre renferme une infinité non dénombrable de points P. Or, l'ensemble (R) étant dénombrable, la sphère considérée renfermera nécessairement aussi des points C, et même une infinité non dénombrable de ces points; d'où cette conséquence que *l'ensemble* (C) *ne comprend pas de points isolés.*

D'ailleurs *tout point limite* C' *de l'ensemble* (C) *fait lui-même partie de cet ensemble.* En effet, le point C' est d'abord compris dans l'ensemble (P), puisque celui-ci est fermé. D'autre part, si de C' comme centre on construit une sphère aussi petite qu'on voudra, celle-ci renfermera à l'intérieur des points C et, par suite, une infinité non dénombrable de points P. Donc C' figure bien dansl'ensemble (C), ce que nous voulions démontrer.

Par conséquent, (C) *est un ensemble parfait,* et la démonstration se rouve ainsi achevée.

Helsingfors, août 1903.