SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE BRANCHE UNIFORME D'UNE FONCTION MONOGÈNE

(cinquième note)

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

J'ai consacré le § 2 de ma quatrième note[1] à une étude approfondie d'une généralisation de l'intégrale LAPLACE-ABEL dont les conséquences ont

[1] Après la publication de la quatrième note ont paru les travaux suivants qui se rapportent au mémoire présent:

ÉDOUARD A. FOUËT. *Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.* Paris 1902. Prem. partie. Chap. V.

ALFRED PRINGSHEIM. *Jacques Hadamard. La série de Taylor et son prolongement analytique.* Archiv. der Math. u. Physik. III Reihe, Bd. 3, 1902, pag. 289, 290, 294, 295.

ERNST LINDELÖF. *Une application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor.* Comptes Rendus, etc. T. 135, 29 décembre 1902, pag. 1315—1318.

FRANC G. RADELFINGER. *Analytical representation of complex functions.* Phil. Soc. of Washington. Bull. Vol. 14. 1902, pp. 227—232.

FRANC G. RADELFINGER. Bull. of the Amer. Math. Soc. Vol. 8, 1901—1902, pp. 15, 16.

F. R. MOUTTON. Bull. of the Amer. Math. Soc. Vol. 9, pp. 98, 99.

LUCIUS HANNI. *Zurückführung der allgemeinen Mittelbildung Borel's auf Mittag-Lefflers n-fach unendliche Reihe.* Monatshefte für Math. und Physik. Jahrg. 14, 1903, pag. 105—124.

SALVATORE PINCHERLE. *Di una nuova operazione funzionale e di qualche sua applicazione.* Rend. R. Accad. delle scienze dell' Ist. di Bologna. 8 marzo 1903, pag. 4.

GEORG FABER. *Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorschen Reihen.* Math. Annalen. Bd. 57. H. 3, 1903, pag. 385.

GEORG FABER. *Über polynomische Entwickelungen.* Math. Annalen. Bd. 57. H. 3, 1903, pag. 406—408.

ERNST LINDELÖF. *Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytiques des séries de Taylor.* Journ. de math. pures et appl. Sér. 5. T. 9, 1903, pag. 213—221.

été résumés dans le théorème 7 b. J'arriverai dans la note présente par une seconde voie à une nouvelle généralisation qui amène à un résultat

---

J. Malmquist. *Sur le calcul des intégrales d'un système d'équations différentielles par la méthode de Cauchy-Lipschitz.* Arkiv för Mat. Astr. och Fysik. Stockholm. Bd. 1. 13 maj 1903, pag. 149—156.

Helge von Koch. *Sur une classe remarquable de fonctions entières et transcendentes.* Arkiv för Mat. Astr. och Fysik. Stockholm. Bd. 1. 9 sept. 1903, pag. 205—208.

Georg Faber. *Über Reihenentwickelungen analytischer Functionen.* Inaug. Diss. München 1903, pag. 65—66.

Ernst Lindelöf. *Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par un développement de Taylor.* Bull des. sciences math. Sér. 2. T. 27, août 1903, pag. 224, 225.

Leopold Fejer. *Untersuchung über Fourier'sche Reihen.* Math. Annalen. Bd. 58, pag. 51.

S. Pincherle. *Sulla Sviluppabilità di una funzioni in serie de fettoriali.* R. Ac. d. Lincei. Vol. 12. 2 sem. Serie 5, 8 nov. 1903.

S. Pincherle. *Sulle funzioni meromorfe.* R. Ac. d. Lincei. Vol. 12. 2 sem. Serie 5, 22 nov. 1903.

E. Phragmén. *Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions.* Ce journal. T. 28, pag. 351—368.

Émile Picard. *Sur certains développements en séries déduits de la méthode de Cauchy dans la théorie des équations différentielles ordinaires.* An. École Norm. T. 21. An. 1902, pag. 141—151.

Sous presse:

L. Hanni. *Über die Beziehungen zwischen der Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Function durch Herrn Mittag-Leffler, der Methode des Mittelwerte des Herrn Borel und der Transformation des Herrn Lindelöf.* Acta Math. Ce Tôme.

A. Wiman. *Über den Fundamentalsatz in der Theorie der Functionen $E_a(x)$.* Acta Math. Ce Tôme.

A. Wiman. *Über die Nullstellen der Functionen $E_a(x)$.* Ce Tôme.

J. Malmquist. *Étude d'une fonction entière.* Acta Math. Ce Tôme.

Voir encore mes articles:

Sur l'intégrale de Laplace-Abel. Comptes Rendus etc. T. 135, 1 décembre 1902, pag. 937—939.

Une généralisation de l'intégrale de Laplace-Abel. Comptes Rendus etc. T. 136, 2 mars 1903, pag. 537—539.

Sur la nouvelle fonction $E_a(x)$. Comptes Rendus etc. T. 137, 12 octobre 1903, pag. 554—558.

Sopra la funzione $E_a(x)$. R. Accad. dei Lincei. Atti. Ser. 5. Vol. 13, 3 gennaio 1904, pag. 3—5.

final de la même portée que l'autre, ayant de plus l'avantage d'être d'une très grande simplicité et de mettre mon problème sous un jour nouveau.

Rappelons d'abord la définition de l'intégrale LAPLACE-ABEL. Soit $k_0, k_1, k_2, \ldots$ une suite de constantes assujetties à la condition que la limite supérieure des valeurs limites des nombres $|\sqrt[\nu]{k_\nu}|$ soit finie.[1] On sait que l'inverse de cette limite supérieure, soit r, est le rayon de convergence de la série.

J'exprimerai avec M. PRINGSHEIM[2] cette propriété des constantes k_0, $k_1, k_2, \ldots$ par la formule

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} |\sqrt[\nu]{k_\nu}| = \frac{1}{r} \tag{1}$$

et je désignerai par $F(x)$ la fonction analytique qui est définie par les constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$.

On sait que

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\frac{1}{\underline{|\nu}}} = 0.$$

La série

$$\overline{F}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|\nu}} x^\nu \tag{2}$$

est donc une série toujours convergente. C'est alors l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega} \overline{F}(\omega x) d\omega$$

où l'intégrale est prise par rapport aux valeurs positives de ω qui est la célèbre intégrale LAPLACE-ABEL.

Monsieur BOREL dans une série de travaux[3] d'une très grande im-

Un nouveau théorème général de la théorie des fonctions analytiques. Comptes Rendus etc. T. 138, 11 avril 1904, pag. 881—884.

Une nouvelle fonction entière. Comptes Rendus etc. T. 138, 18 avril 1904, pag. 941, 942.

[1] c. f. première note, pag. 43, note 12.

[2] ALFRED PRINGSHEIM. *Zur Theorie des Doppel-Integrals.* Sitzb. d. math. phys. Cl. d. K. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 28. 1898, H. 1, pag. 62.

[3] Voir surtout:

ÉMILE BOREL. *Mémoire sur les séries divergentes.* Annales de l'École normale. Sér. 3. T. 16. Année 1899.

ÉMILE BOREL. *Leçons sur les series divergentes.* Paris, Gauthier-Villars, 1901.

portance est arrivé le premier à fixer le domaine de x pour lequel l'intégrale converge.

Ce domaine est une étoile de centre zéro inscrite dans l'étoile principale définie par les constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$ et circonscrite au cercle de convergence de la série $k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots$.[1] Je désignerai dans la présente note cette étoile par la lettre $B^{(1)}$. L'étoile s'obtient de la manière suivante. On limite chacun des vecteurs l issu du centre à une longueur ρ qui est la limite supérieure d'une autre longueur d, limitant l elle-même, et telle que le cercle ayant d comme diamètre fasse partie de l'étoile principale A.

M. Borel avait démontré la convergence de l'intégrale Laplace-Abel pour l'intérieur de $B^{(1)}$. M. Phragmén[2] est arrivé à montrer que l'intégrale Laplace-Abel ne peut pas converger en dehors de $B^{(1)}$. L'étoile $B^{(1)}$ est donc quant à la variable x une véritable étoile de convergence pour l'intégrale Laplace-Abel, de même que le cercle C de centre zéro et de rayon r est un cercle de convergence de la série $k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots$. L'égalité

$$FB^{(1)}(x) = \int_0^\infty e^{-\omega} \overline{F}(\omega x) d\omega \tag{3}$$

a lieu pour un domaine quelconque à l'intérieur de $B^{(1)}$ de même que l'égalité de Taylor

$$FC(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu x^\nu \tag{4}$$

a lieu pour chaque domaine à l'intérieur de C.

Voyons maintenant une manière fort simple de généraliser l'intégrale Laplace-Abel qui permet d'obtenir une étoile de convergence plus étendue que $B^{(1)}$ s'approchant indéfiniment avec la variation d'un certain paramètre

---

[1] voir pour la définition de »l'étoile», »l'étoile principale», »étoile inscrite» et »étoile circonscrite»: première note page 47, seconde note page 200, seconde note page 183. J'ai désigné auparavant l'étoile A comme étoile principale des constantes $k_0, \underline{|1} k_1, \underline{|2} k_2, \underline{|3} k_3, \ldots$.

[2] E. Phragmén. *Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie* $\int_0^\infty F(ax)e^{-a}da$. Comptes Rendus. etc. 10 juin 1901.

de l'étoile principale A. Introduisons au lieu de »la fonction génératrice» d'Abel $\overline{F}(x)$ une nouvelle fonction génératrice un peu plus générale définie par l'égalité

$$(5) \qquad F_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\Gamma(\alpha\nu+1)} x^\nu$$

où

$$(6) \qquad \Gamma(\alpha\nu+1) = \Gamma(\alpha\nu + 1)$$

et où α désigne une quantite positive donnée. On a

$$(7) \qquad F_1(x) = \overline{F}(x),$$

et on voit que $F_\alpha(x)$ est une série toujours convergente de même que $\overline{F}(x)$.

J'introduirai donc au lieu de l'intégrale Laplace-Abel:

$$\int_0^\infty e^{-\omega} F_1(\omega x)\, d\omega$$

l'intégrale nouvelle plus générale

$$(8) \qquad f(x) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^\infty e^{-\omega} F_\alpha(\omega^\alpha x)\, d\omega$$

et je démontrerai le théorème suivant:

»L'intégrale $f(x)$ possède par rapport à x une étoile de convergence $B^{(\alpha)}$ qui est inscrite dans l'étoile A et qui tend indéfiniment vers cette étoile en même temps que α tend vers zéro. L'égalité

$$FB^{(\alpha)}(x) = f(x)$$

a lieu partout à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$.»

La démonstration de ce théorème sera partagée en trois parties différentes.

1° »L'intégrale $f(x_0)$ étant convergente l'intégrale $f(x)$ est uniformément convergente pour le domaine $\theta x_0 (\theta_0 \leqq \theta \leqq 1)$, où θ_0 désigne une quantité positive.»

2° »L'intégrale $f(x_0)$ étant convergente l'intégrale $f(x)$ représente sur le vecteur $(0x_0)$ la fonction $FC(x)$ ainsi que sa continuation analytique le long de ce vecteur.

Faisons parcourir à x_0 tous les points à l'intérieur de l'étoile A pour lesquels le domaine[1]

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1\,; \qquad \begin{array}{ll} -\alpha\frac{\pi}{2} < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \alpha\frac{\pi}{2} & (\text{si } 0 < \alpha < 2) \\ -\pi < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \pi & (\text{si } \alpha \geqq 2) \end{array}$$

est situé à l'intérieur de A et appelons $B^{(\alpha)}$ l'étoile obtenue de cette manière. L'intégrale $f(x)$ n'est jamais convergente en dehors de $B^{(\alpha)}$.»

3° L'intégrale $f(x)$ converge d'une manière uniforme pour tout domaine à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$.»

Les deux propositions 1 et 2 seront démontrées dans le § 1. Quant à la proposition 3 elle demande pour être démontrée l'intervention d'une nouvelle transcendente qu'on obtient en simplifiant $F_\alpha(x)$ en faisant

$$k_0 = k_1 = k_2 = \ldots = k_\nu = \ldots = 1$$

et que je désignerai par

$$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\underline{|\alpha\nu}}. \tag{9}$$

Des propriétés différentes de cette transcendente seront développées dans les §§ 2 et 3. La démonstration complète de la proposition 3 sera donnée dans le § 4.

Dans le cas $\alpha = 1$ l'intégrale Laplace-Abel

$$\int_0^\infty e^{-\omega} F_1(\omega x)\, d\omega$$

pouvait être transformée dans l'expression de M. Borel:

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} e^{-\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_n x^n) \frac{\omega^{n+1}}{\underline{|n+1}}$$

qui a le même domaine de convergence $B^{(1)}$ que l'intégrale. J'obtiendrai dans le § 4 pour α quelconque une nouvelle expression ayant la même forme que celle de M. Borel. J'obtiendrai de même deux nouvelles expression d'une forme interessante. Dans le § 5, où je laisse tomber la condition que l'étoile de l'expression doit être une étoile de convergence j'obtiendrai encore des nouvelles expressions.

[1] Je désigne par $R(z)$ la partie réelle de z et par $Arg(z)$ l'argument de z.

§ 1.

Je commence par établir le théorème suivant.

A. »Si on admet que l'intégrale

$$f(x_0) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

est convergente, l'intégrale

$$f(\theta x_0) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega \theta x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

est nécessairement uniformément convergente pour le domaine $\theta x_0 (\theta_0 \leqq \theta \leqq 1)$ où θ_0 désigne une quantité positive.»

On voit l'analogie complète avec le célèbre théorème d'Abel pour la série de puissances.[1] La démonstration est absolument la même que celle que M. Phragmén a donnée pour le cas $\alpha = 1$.[2]

Posons

$$F_\alpha(\omega x_0) = \varphi(\omega) + i\psi(\omega)$$

$\varphi(\omega)$ et $\psi(\omega)$ étant réels. Les deux intégrales

$$\int_0^\infty \varphi(\omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad \int_0^\infty \psi(\omega) e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

---

[1] *Recherches sur la série* $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots$ Théorème 4. Oeuvres. Nouvelle éd. T. 1, pag. 223.

[2] E. Phragmén. *Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie* $\int_0^\infty F(ax)e^{-a}da$. Comptes Rendus etc. 10 juin 1901.

convergent, et il s'agit de démontrer, que les intégrales

$$\int_0^\infty \varphi(\theta\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad \int_0^\infty \psi(\theta\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

convergent de même d'une manière uniforme pour le domaine $\theta_0 \leqq \theta \leqq 1$, θ_0 étant positif. Considérons par exemple la première. On a:

$$\int_{\omega_1^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega_2^{\frac{1}{\alpha}}} \varphi(\theta\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}\int_{(\theta\omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta\omega_2)^{\frac{1}{\alpha}}} \varphi(\omega)e^{-\left(\frac{\omega}{\theta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\alpha}}}\int_{(\theta\omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta\omega_2)^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(\theta^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)}\varphi(\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Appliquons maintenant le second théorème de la moyenne pour les intégrales définies et nous aurons:

$$\int_{(\theta\omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta\omega_2)^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(\theta^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)}\varphi(\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = e^{-\omega_1^{\frac{1}{\alpha}}\left(1-\theta^{\frac{1}{\alpha}}\right)}\int_{(\theta\omega_1)^{\frac{1}{\alpha}}}^{(\theta\varpi)^{\frac{1}{\alpha}}} \varphi(\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

ϖ désignant une certaine valeur entre ω_1 et ω_2. Il s'ensuit immédiatement que l'intégrale $\int_0^\infty \varphi(\theta\omega)e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ converge uniformément pour $\theta_0 \leqq \theta \leqq 1$, θ_0 étant positif.

Le théorème A est par conséquent démontré.

Quant à la fonction $F_\alpha(\omega x_0)$ la seule condition à laquelle elle soit assujetie dans le théorème est, on le voit, que l'expression

$$e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}F_\alpha(\omega x)d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

soit intégrable. L'importance de cette remarque qui a été déjà faite par M. Phragmén sera mise en évidence dans une autre occasion.

L'intégrale $f(\theta x_0)$ peut être transformée de la manière suivante

$$(10) \qquad f(\theta x_0) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega\theta x_0) d\omega^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\omega}{\theta}\right)^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

Posons encore:

$$(11) \qquad \Phi_a(\omega) = \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

L'intégrale $f(x_0)$ étant convergente la limite supérieure de l'intégrale $\Phi_a(\omega)$ reste évidemment finie.

On a:

$$(12) \qquad f(\theta x_0) = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}\left(\theta^{-\frac{1}{a}}-1\right)} \frac{d\Phi_a(\omega)}{d\omega^{\frac{1}{a}}} d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

On obtient par conséquent en faisant l'intégration par partie:

$$(13) \qquad f(\theta x_0) = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}}\left(\frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}} - 1\right) \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}\left(\theta^{-\frac{1}{a}}-1\right)} \Phi_a(\omega) d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

Le second membre de cette égalité converge évidemment pour

$$R\left(\frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}}\right) > 1$$

θ étant ou réel ou complexe, c'est à dire il converge pour

$$R\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{a}}\right) > 1.$$

Par conséquent:

B. »L'intégrale

$$f(x_0) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

étant convergente, la transformée de l'intégrale

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

à savoir l'intégrale:

$$(14) \qquad \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right)} \Phi_\alpha(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

où

$$\Phi_\alpha(\omega) = \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

est convergente tant que

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1.«$$

L'intégrale

$$\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right)} \Phi_\alpha(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

représente évidemment pour chaque domaine

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1; \qquad \begin{aligned} &2k\pi - \alpha\frac{\pi}{2} < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < 2k\pi + \alpha\frac{\pi}{2} \quad (\text{si } 0 < \alpha < 2) \\ &2k\pi - \pi < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < 2k\pi + \pi \quad (\text{si } \alpha > 2) \end{aligned}$$

$$k = -\infty \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

une branche fonctionnelle. Cette branche est en général pour chaque domaine différent la branche d'une fonction différente. La seule considération intéressante pour l'instant est celle du domaine qui correspond à $k = 0$. Ce domaine embrasse le vecteur $(0x_0)$, et l'égalité

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega\theta x_0)\,d\omega^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}}\left(\frac{1}{\theta^{\frac{1}{a}}} - 1\right)\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}\left(\theta^{-\frac{1}{a}}-1\right)} \Phi_a(\omega)\,d\omega^{\frac{1}{a}}.$$

a lieu pour les valeurs positives de θ, $\theta_0 \leqq \theta \leqq 1$. Par conséquent:

C. »L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x_0)\,d\omega^{\frac{1}{a}}$$

étant convergente, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x)\,d\omega^{\frac{1}{a}}$$

représente sur le vecteur $(\theta_0 x_0, x_0)$, où θ_0 est une quantité positive si petite qu'elle soit, une fonction analytique de x.»

Les théorèmes ***B*** et ***C*** sont encore valables comme l'était auparavant le théorème ***A*** quand la seule condition à laquelle soit assujettie la fonction $F_a(\omega x)$ est que l'expression $e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x)d\omega^{\frac{1}{a}}$ sera intégrable.

Dans notre cas où la fonction $F_a(x)$ est définie par l'égalité (5) nous montrerons que la fonction analytique qui est représentée le long du vecteur $(0x_0)$ par l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x)\,d\omega^{\frac{1}{a}}$$

est identique à la fonction $FC(x)$ et à la continuation analytique de $FC(x)$ le long du même vecteur.

En realité on sait que

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^\infty e^{-\omega}\omega^{\alpha\nu}d\omega = \Gamma(\alpha\nu + 1) = |\underline{\alpha\nu}.$$

A cause de la supposition exprimée par la formule (1) on peut toujours en déterminant un nombre positif ε aussi petit que l'on voudra trouver un entier positif n tel que l'on ait

$$\sum_{\nu=n}^\infty |k_\nu| \cdot |x|^\nu < \frac{\varepsilon}{2}$$

pourvu que

$$|x| \leqq r' < r.$$

Pour ce domaine de x, en désignant par ω' et ω'' deux quantités positives telles que $\omega' < \omega''$ on aura donc

$$\sum_{\nu=n}^\infty \frac{|k_\nu|}{|\underline{\alpha\nu}} \int_{\omega'^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega''^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} |x|^\nu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part pour ce même domaine de x en choisissant ω' suffisamment grand on aura

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{|k_\nu|}{|\underline{\alpha\nu}} \int_{\omega'^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega''^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} |x|^\nu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, en prenant ε et r' arbitrairement on peut toujours trouver un nombre positiv ω' suffisamment grand pour que

$$(16) \qquad \sum_{\nu=0}^\infty \frac{|k_\nu|}{|\underline{\alpha\nu}} \int_{\omega'^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega''^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} |x|^\nu < \varepsilon$$

pourvu que

$$|x| \leqq r' < r.$$

La série de puissances

$$(5) \qquad F_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|a\nu}} x^\nu$$

est toujours convergente. Il en est donc de même de la série:

$$e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^\nu}{\underline{|a\nu}} x^\nu$$

considérée par rapport à $\omega^{\frac{1}{a}}$. On obtient donc $\int e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$ en intégrant chaque terme separément et on a le droit d'écrire

$$(17) \qquad \int_{\omega'^{\frac{1}{a}}}^{\omega''^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|a\nu}} \int_{\omega'^{\frac{1}{a}}}^{\omega''^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{a}} x^\nu.$$

On a par suite en vertu de (16)

$$(18) \qquad \left| \int_{\omega'^{\frac{1}{a}}}^{\omega''^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}} \right| < \varepsilon$$

pourvu que

$$|x| \leqq r' < r.$$

L'intégrale

$$(9) \qquad \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega x) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

regardée comme fonction de x est donc uniformément convergente dans chaque domaine

$$|x| \leqq r' < r.$$

On a maintenant en désignant par $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ une suite de constantes positives croissant au delà de toute limite:

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^{\omega_1^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} + \sum_{\nu=1}^\infty \int_{\omega_\nu^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega_{\nu+1}^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= k_0 + \frac{k_1}{\lfloor \alpha . 1} \int_0^{\omega_1^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x + \frac{k_2}{\lfloor \alpha . 2} \int_0^{\omega_1^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^2 d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^2 + \ldots$$

$$+ \sum_{\nu=1}^\infty \left\{ k_0 + \frac{k_1}{\lfloor \alpha . 1} \int_{\omega_\nu^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega_{\nu+1}^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x + \frac{k_2}{\lfloor \alpha . 2} \int_{\omega_\nu^{\frac{1}{\alpha}}}^{\omega_{\nu+1}^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^2 d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^2 + \ldots \right\}$$

égalité valable pour le domaine $|x| \leqq r' < r$.

On a donc en vertu du théorème fondamental de WEIERSTRASS[1]

$$(19) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \sum_{\nu=1}^\infty k_\nu x^\nu = FC(x)$$

égalité valable au moins pour chaque domaine à l'intérieur du cercle de convergence C de la série $\sum_{\nu=0}^\infty k_\nu x^\nu$.

La fonction analytique qui, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

---

[1] KARL WEIERSTRASS. *Zur Functionenlehre.* Werke. Bd. 2, pag. 205.

étant convergente, est représentée par l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

le long du vecteur (ox_0) coincide donc pour les points $|x| < r$ sur ce vecteur avec $FC(x)$. Par conséquent:

D. »L'intégrale $\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ étant convergente l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ représente sur le vecteur (ox_0) une branche fonctionnelle qui est identique à $FC(x)$ et à la continuation analytique de $FC(x)$ le long de vecteur.»

Soit maintenant $B^{(\alpha)}$ une étoile définie comme à la page 106. L'intégrale $\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ ne peut pas être convergente en dehors de $B^{(\alpha)}$. On a en effet en admettant qu'elle soit convergente et en posant

$$\Phi_\alpha(\omega) = \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x_0) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \tag{11}$$

l'égalité:

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right)} \Phi_\alpha(\omega) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Le premier et le second membre représentent tous les deux la même fonction analytique sur le vecteur (ox_0). Le second membre nous montre que cette fonction est régulière partout dans le domaine

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1; \quad \begin{array}{ll} -\alpha\frac{\pi}{2} < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \alpha\frac{\pi}{2} & (\text{si } 0 < \alpha < 2) \\ -\pi < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \pi & (\text{si } \alpha \geqq 2). \end{array}$$

On voit donc en vertu du théorème $\boldsymbol{D}$ et de la définition de $B^{(\alpha)}$ que le point x_0 ne peut pas être situé en dehors de $B^{(\alpha)}$.

Par conséquent:

E. »Faisons parcourir à x_0 tous les points à l'intérieur de l'étoile principale A définie par les constantes $k_0, k_1, \ldots, k_\mu, \ldots$ pour lesquelles le domaine

$$R\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1; \qquad \begin{array}{l} -\alpha\frac{\pi}{2} < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \alpha\frac{\pi}{2} \ (\text{si } 0 < \alpha < 2) \\ -\pi < Arg\left(\frac{x_0}{x}\right) < \pi \quad (\text{si } \alpha \geqq 1) \end{array}$$

est situé à l'intérieur de A et désignons par $B^{(\alpha)}$ l'étoile qui est obtenue de cette manière.

L'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

ne peut jamais être convergente en dehors de $B^{(\alpha)}$.»[1]

Il reste maintenant à voir si l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ qui ne peut pas être convergente en dehors de $B^{(\alpha)}$ converge partout à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$. C'est seulement si cette circonstance a lieu et si la convergence est uniforme pour tout domaine à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$ que $B^{(\alpha)}$ est en realité une étoile de convergence à notre intégrale.

On ne voit pas au premier abord la possibilité d'étendre au cas général où α est quelconque la démonstration que j'ai employée dans la note 4, § 2, pour le cas $\alpha = 1$. Il faut donc chercher une autre voie.

Je simplifierai d'abord le problème en introduisant au lieu de $F(x)$ la fonction élémentaire $\frac{1}{1-x}$.

Je démontrerai ensuite qu'on peut ramener le cas général à ce cas.

---

[1] En parcourant de nouveau ma note 4 j'ai remarqué une omission dans la démonstration page 378. J'y suppose tacitement $\frac{1}{x_0 - a}$ réel et je ne mentionne pas le cas général qui se ramène du reste immédiatement au cas réel.

MM. PHRAGMÉN et BOREL[1] de leur côté ont démontré que si l'on sait développer $\frac{1}{1-x}$ en une série dont les termes différents sont des fonctions rationnelles de x, on obtient immédiatement le développement de $F(x)$ en une pareille série. Lorsqu'ils ont publié leurs résultats ils n'ont pas remarqué que j'avais démontré ce même théorème il y a déjà plus de vingt et un ans.[2]

---

[1] ÉMILE BOREL. *Addition au mémoire sur les séries divergentes.* Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. T. 16. Année 1899, pag. 132—134.

E. PHRAGMÉN. *Sur une extension d'un théorème de Mittag-Leffler.* Comptes Rendus 12 juin 1899.

[2] *Fullständig analytisk framställning af hvarje entydig monogen funktion, hvars singulära ställen utgöra en värdemängd af första slaget.* Öfversigt af K. Vet. Ak. Förhandl. 8 febr. 1882.

J'y ai démontré (pag. 25, 26) la formule

$$F(x) = B_0k_0 + B_1k_1x + \ldots + B_nk_nx^n$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(z)\left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z}\left(B_0 + B_1\frac{x}{z} + \ldots + B_n\left(\frac{x}{z}\right)^n\right)\right]dz$$

où $B_0, B_1, \ldots, B_n$ sont des constantes par rapport à z mais non par rapport à x, et où S est un contour limitant une surface simplement connexe pour laquelle $F(z)$ est régulière. J'ai même donné la formule sous la forme plus générale

$$F(x) = B_0k_0 + B_1k_1x + \ldots + B_nk_nx^n + \sum_{\nu=0}^{m}\left[G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m-1} B_\mu A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu\right]$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(z)\left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z}\left(B_0 + B_1\frac{x}{z} + \ldots + B_n\left(\frac{x}{z}\right)^n\right)\right]dz$$

où la fonction, uniforme pour la surface limitée par S et régulière sur le contour S lui-même, possède un nombre limité de points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_m$ à l'intérieur de S; et où $G_1(z), \ldots G_m(z)$ sont des fonctions entières définies par l'égalité

$$F(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x-a_\nu)$$

qui a lieu dans le voisinage de a_ν, l'égalité

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu$$

Si dans ce mémoire je n'ai pas eu recours auparavant à la méthode qui consiste à ramener l'étude de $F(x)$ à celle de $\frac{1}{1-x}$ c'est pour les deux raisons suivantes.

Mes développements seraient dans les deux cas devenus au fond absolument les mêmes et j'aurais obtenu par conséquent une simplification plutôt formelle que réelle.[1]

En second lieu — et c'est la raison qui m'a déterminé pour mes trois premières notes — j'ai voulu arriver au but par des considérations directes et purement élémentaires, et par conséquent sans avoir recours à l'intégrale de CAUCHY. Mais la méthode qui consiste à ramener le développement de $F(x)$ au développement de $\frac{1}{1-x}$ présuppose essentiellement le passage par l'intégrale de CAUCHY. Or dans cette note le cas n'est plus le même et la simplification à laquelle on arrive en étudiant d'abord

$$F(x) = \frac{1}{1-x}$$

devient d'une importance capitale.

---

ayant lieu dans le voisinage de $x = 0$. Ma formule montre immédiatement qu'en ayant

$$\frac{1}{z-x} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{1}{z}\left(B_0 + B_1 \frac{x}{z} + \ldots + B_n\left(\frac{x}{z}\right)^n\right)$$

à l'intérieur d'une figure génératrice (c. f. troisième note, page 219) passant par les points 0, x et enveloppant la ligne $(0x)$ l'égalité

$$F(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} (B_0 k_0 + B_1 k_1 x + \ldots + B_n k_n x^n)$$

a lieu pour une étoile E qu'on obtient en construisant autour de chaque vecteur issu de l'origine la plus grande des figures génératrices qui n'embrasse aucun point singulier de $F(x)$ et en adjugeant à E la partie du vecteur entre l'origine et x.

C'est justement le même théorème qui à été démontré par MM. BOREL et PHRAGMÉN.

[1] Les auteurs qui ont parlé de la simplification de ma première démonstration à laquelle d'autres auteurs seraient arrivés après moi (voir p. ex. PRINGSHEIM, JACQUES HADAMARD. *La série de Taylor et son prolongement analytique.* Archiv d. Math. und Physik. 3 Reihe. Bd. 3, pag. 289) ne paraissent pas avoir saisi le fond de ma pensée.

§ 2.

En faisant

$$F(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \tag{20}$$

on obtient pour $F_a(x)$ la série:

$$E_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\underline{|\alpha\nu}}. \tag{9}$$

Dans le paragraphe actuel j'aborderai l'étude de la fonction $E_a(x)$ à l'aide de la formule sommatoire de MACLAURIN éclaircie par les méthodes d'ABEL et de CAUCHY.[1]

J'imposerai encore au nombre positif α la restriction suivante:

$$2 \geqq \alpha > 0. \tag{21}$$

Désignons par ε une quantité positive plus petite que un et par n un nombre entier positif. Soit R un rectangle dont deux côtés situés à la distance n de part et d'autre de l'axe réel sont parallèles à cet axe et dont les deux autres perpendiculaires à cet axe passent l'un par le point $-\varepsilon$ et l'autre par le point $n + 1 - \varepsilon$.

Nous aurons:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} = \int^{R} \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{x^z}{\underline{|\alpha z}} dz. \tag{22}$$

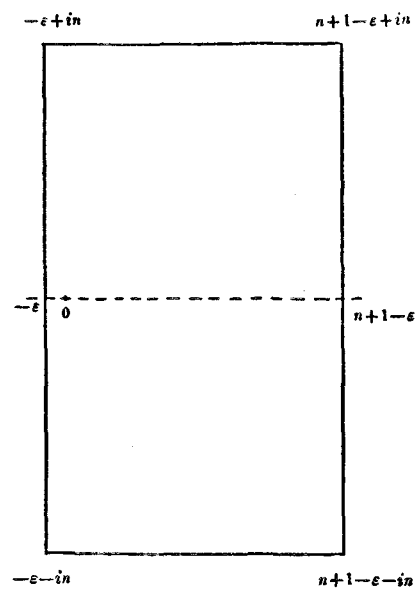
---

[1] Voir par exemple:

JULIUS PETERSEN. *Vorlesungen über Functionstheorie.* Kopenhagen. Andr. Fr. Høst & søn 1898. Kapitel 8, §§ 78, 79.

HJ. MELLIN. *Die Dirichlet'schen Reihen, die zahlentheoretischen Functionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht.* Acta Soc. Sc. Fennicae. T. 31, n° 2.

ERNST LINDELÖF. *Quelques applications d'une formule sommatoire générale.* Acta Soc. Sc. Fennicae. T. 31, n° 3.



Faisons

$$\int\limits^{R} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\frac{x^z}{\underline{|\alpha z}}dz = \int\limits^{R_1} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\frac{x^z}{\underline{|\alpha z}}dz + \int\limits^{R_2} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\frac{x^z}{\underline{|\alpha z}}dz \tag{23}$$

où R_1 désigne la ligne $(n+1-\varepsilon\,,\; n+1-\varepsilon+in\,,\; -\varepsilon+in\,,\; -\varepsilon)$ et R_2 la ligne $(-\varepsilon\,,\; -\varepsilon-in\,,\; n+1-\varepsilon-in\,,\; n+1-\varepsilon)$.

En introduisant:

$$z = \tau + it, \tag{24}$$

$$x = re^{i\varphi} \tag{25}$$

où τ, t, φ désignent des quantités réelles et où r est le module $|x|$, on trouve:

$$\left\{\begin{aligned}\int\limits^{R_1} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\frac{x^z}{\underline{|\alpha z}}dz &= i\int_0^n \frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|\alpha(n+1-\varepsilon+it)}}\,r^{it}e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}dt\\ &\quad-\int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{1}{e^{2\pi i\tau-2\pi n}-1}\,\frac{r^{\tau}e^{-\varphi n}}{\underline{|\alpha(\tau+in)}}\,r^{in}e^{i\varphi\tau}d\tau\\ &\quad-i\int_0^n \frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|\alpha(-\varepsilon+it)}}\,r^{it}e^{-i\varphi\varepsilon}dt,\end{aligned}\right. \tag{26}$$

$$
(27)\quad\left\{\begin{aligned}
\int^{R_2}\frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\frac{x^z}{\underline{|az}}dz &= i\int_0^n\frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon-it)}}r^{-it}e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}dt\\
&+\int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon}\frac{1}{e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1}\frac{r^{\tau}e^{\varphi n}}{\underline{|a(\tau-in)}}r^{-in}e^{i\varphi\tau}d\tau\\
&-i\int_0^n\frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon-it)}}r^{-it}e^{-i\varphi\varepsilon}dt.
\end{aligned}\right.
$$

Par conséquent:

$$
(28)\quad\left\{\begin{aligned}
&\int^{R}\frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\frac{x}{\underline{|az}}dz\\
&=i\int_0^n\Bigg[\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon+it)}}\\
&\qquad+\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon-it)}}\Bigg]e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}dt\\
&+\int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon}\left[\frac{r^{-in}}{e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1}\frac{r^{\tau}e^{\varphi n}}{\underline{|a(\tau-in)}}-\frac{r^{in}}{e^{2\pi i\tau-2\pi n}-1}\frac{r^{\tau}e^{-\varphi n}}{\underline{|a(\tau+in)}}\right]e^{i\varphi\tau}d\tau\\
&-i\int_0^n\left[\frac{r^{-it}}{e^{-2i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon-it)}}+\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon+it)}}\right]e^{-i\varphi\varepsilon}dt.
\end{aligned}\right.
$$

Pour discuter la formule (28) il nous faut connaître le module de $\frac{1}{\underline{|z}}$. L'expression de WEIERSTRASS nous donne: [1]

---

[1] Voir par exemple: SCHLÖMILCH. *Compendium der höheren Analysis.* 2ter Band. 3 Aufl., pag. 248.

$$\frac{1}{\underline{|\tau+it}}\,\frac{1}{\underline{|\tau-it}} = e^{c(\tau+it)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\tau+it}{n}\right)e^{-\frac{\tau+it}{n}}\cdot e^{c(\tau-it)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\tau-it}{n}\right)e^{-\frac{\tau-it}{n}}$$

$$= e^{2c\tau}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2\tau}{n}+\frac{\tau^2+t^2}{n^2}\right)e^{-\frac{2\tau}{n}}$$

$$= \left[e^{c\tau}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\tau}{n}\right)e^{-\frac{\tau}{n}}\right]^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{(\tau+n)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(\underline{|\tau})^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{(\tau+n)^2}\right).$$

Par conséquent:

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\underline{|\tau+it}} \leqq \frac{1}{\underline{|\tau}}\sqrt{\frac{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}{2\pi t}}; \qquad \tau \geqq 0,\ +\infty > t > -\infty, \\ &\frac{1}{\underline{|-\varepsilon+it}} \leqq \frac{1}{\underline{|-\varepsilon}}\sqrt{\frac{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}{2\pi t}}\sqrt{1+\frac{t^2}{(1-\varepsilon)^2}}; \qquad 0<\varepsilon<1. \end{aligned}\right.$$

Considérons maintenant la première intégrale dans le second membre de la formule (28). En vertu de la première formule (29) et puisque le minimum des deux modules $|e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1|$ et $|e^{-2\pi i\varepsilon}-e^{-2\pi t}|$; $0\leqq t$ est une quantité h différente de zéro, on aura:

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\left|\int_0^n\left[\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon+it)}}+\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon-it)}}\right]e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}dt\right| \\ &\qquad \leqq \frac{r^{n+1-\varepsilon}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon)}}\,\frac{1}{h}\int_0^{\infty}\left(e^{-\varphi t}+e^{-(2\pi-\varphi)t}\right)\sqrt{\frac{e^{a\pi t}-e^{-a\pi t}}{2a\pi t}}\,dt. \end{aligned}\right.$$

L'intégrale du second membre est convergente si φ remplit la condition

$$(31)\qquad 2\pi-\alpha\frac{\pi}{2}\geqq\varphi\geqq\alpha\frac{\pi}{2}.$$

L'expression $\dfrac{r^{n+1-\varepsilon}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon)}}$ tend indéfiniment vers zéro avec $\dfrac{1}{n}$. Le module de l'intégrale

$$\int_0^{n}\left[\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon+it)}}+\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon-it)}}\right]e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}dt$$

s'approche donc indéfiniment de zéro avec $\frac{1}{n}$, tant que φ remplit la condition (31).

Considérons maintenant la seconde intégrale du second membre de la formule (28). On a en vertu de la seconde des formules (29)

$$(32)\quad \begin{cases} \left| \int\limits_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \left[\frac{r^{-in}}{e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1} \frac{r^{\tau} e^{\varphi n}}{\underline{|a(\tau-in)}} - \frac{r^{in}}{e^{2\pi i\tau-2\pi n}-1} \frac{r^{\tau} e^{-\varphi n}}{\underline{|a(\tau+in)}} \right] e^{i\varphi\tau} d\tau \right| \\ < \frac{e^{-(2\pi-\varphi)n}+e^{-\varphi n}}{1-e^{-2\pi n}} \sqrt{1+\frac{n^2}{(1-\varepsilon)^2}} \sqrt{\frac{e^{a\pi n}-e^{-a\pi n}}{2a\pi n}} \int\limits_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{r^{\tau}}{\underline{|a\tau}} dt \end{cases}$$

l'intégrale $\int\limits_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{r^{\tau}}{\underline{|a\tau}} d\tau$ ayant une valeur finie. Le second membre de la formule (32) tendra indéfiniment vers zéro avec $\frac{1}{n}$, tant que φ remplira la condition:

$$(33)\qquad 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha\frac{\pi}{2}.$$

Cette condition suppose essentiellement

$$(34)\qquad 2 > \alpha > 0.$$

En ajoutant à la condition (21) pour α cette nouvelle condition (34) et en supposant que φ remplit la condition (33) on voit donc que le module de chacune des deux premières intégrales du second membre de (27) tend indéfiniment vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

On obtient donc la formule fondamentale:

$$(35)\qquad E_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{\underline{|a\nu}}$$

$$= -i \int\limits_0^{\infty} \left[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon-it)}} + \frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon+it)}} \right] e^{-i\varphi\varepsilon} dt.$$

On a:

$$
(36)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left|\int_0^\infty\left[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|\,\alpha(-\varepsilon-it)}}+\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|\,\alpha(-\varepsilon+it)}}\right]e^{-i\varphi\varepsilon}\,dt\right|\\
&<\frac{1}{h}\,\frac{r^{-\varepsilon}}{\underline{|-\alpha\varepsilon}}\int_0^\infty\left(e^{-(2\pi-\varphi)t}+\varepsilon^{-\varphi t}\right)\sqrt{1+\frac{t^2}{(1-\varepsilon)^2}}\,\sqrt{\frac{e^{\alpha\pi t}-e^{-\alpha\pi t}}{2\alpha\pi t}}\,dt.
\end{aligned}\right.
$$

L'intégrale du second membre est convergente tant que φ remplit la condition (33). Les deux conditions (34) et (33) étant vérifiées l'intégrale du second membre de la formule (35) est par conséquent convergente. Mais la formule (36) nous donne encore un autre renseignement précieux. On a:

$$\lim_{r=\infty}\frac{r^{-\varepsilon}}{\underline{|-\alpha\varepsilon}}=0$$

tandis que l'intégrale:

$$\int_0^\infty\left(e^{-(2\pi-\varphi)t}+e^{-\varphi t}\right)\sqrt{1+\frac{t^2}{(1-\varepsilon)^2}}\,\sqrt{\frac{e^{\alpha\pi t}-e^{-\alpha\pi t}}{2\alpha\pi t}}\,dt$$

est indépendante de r.

Par conséquent le théorème suivant à lieu:

F. »Supposons

$$(34)\qquad 2>\alpha>0.$$

Le module de $E_\alpha(x)$ s'approche indéfiniment de zéro avec $\frac{1}{r}$ quand x tend vers l'infini dans un angle intérieur à l'angle

$$(33)\qquad 2\pi-\alpha\frac{\pi}{2}>\varphi>\alpha\frac{\pi}{2}.«$$

En faisant $\alpha=1$ on obtient une propriété connue de la fonction exponentielle $E_1(x)=e^x$. Par ce théorème se trouve encore tranchée une question importante soulevée il y a quelques années par M. Borel.[1]

[1] Intermédiaire des mathématiciens. T. 6, nº 4, avril 1899.

»Peut-on trouver une fonction entière dont le module ne dépasse l'unité qu'à l'intérieur d'un angle aussi petit que l'on veut donné d'avance, ou si non, peut-on démontrer rigoureusement que cette question doit être résolue par la négative?»

La question doit être résolue par l'affirmative et on obtient en $E_\alpha(x)$ la fonction désirée en donnant seulement à α une valeur suffisamment petite. Il n'est pas difficile de former encore d'autres fonctions que la fonction $E_\alpha(x)$ jouissant de cette même propriété.

Une pareille fonction est la suivante par exemple,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\lfloor \alpha_1 \nu \lfloor \alpha_2 \nu \ldots \lfloor \alpha_m \nu}; \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = \alpha.$$

La fonction

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{(\lfloor \alpha_1 \nu)^{\beta_1} (\lfloor \alpha_2 \nu)^{\beta_2} \ldots (\lfloor \alpha_m \nu)^{\beta_m}}; \qquad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_m\beta_m = \alpha$$

en est une autre.

Le raisonnement que nous avons employé pour $E_\alpha(x)$ nous fait voir de même que le module de chacune de ces fonctions tend indéfiniment vers zéro quand $|x|$ croît au dela de toute limite le long d'un vecteur situé dans l'angle

$$(33) \qquad 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha\frac{\pi}{2}.$$

Nous connaissons donc la croissance de $E_\alpha(x)$ dans cet angle. Abordons maintenant la question de la croissance de $E_\alpha(x)$ dans l'autre partie du plan, c'est à dire dans l'angle

$$(37) \qquad \alpha\frac{\pi}{2} \geqq \varphi \geqq -\alpha\frac{\pi}{2}.$$

Revenons à la formule (23) où nous ferons subir à l'intégrale $\int^{R_1}$ une légère modification.

On a:

$$\frac{1}{e^{2\pi i z}-1} = -1 - \frac{1}{e^{-2\pi i z}-1}. \tag{38}$$

Par conséquent,

$$\int^{R_1} \frac{1}{e^{2\pi i z}-1} \frac{x^z}{\underline{|az}} dz = -\int^{R_1} \frac{x^z}{\underline{|az}} dz - \int^{R_1} \frac{1}{e^{-2\pi i z}-1} \frac{x^z}{\underline{|az}} dz. \tag{39}$$

La fonction $\dfrac{x^z}{\underline{|az}}$ se comporte d'une manière régulière à l'intérieur du rectangle $(-\varepsilon\,,\ n+1-\varepsilon\,,\ n+1-\varepsilon+in\,,\ -\varepsilon+in\,,\ -\varepsilon)$ et sur son contour.

Par suite

$$-\int^{R_1} \frac{x^z}{\underline{|az}} dz = \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{x^\tau}{\underline{|a\tau}} d\tau. \tag{40}$$

On a d'autre part:

$$\left\{\begin{aligned} & -\int^{R_1} \frac{1}{e^{-2\pi i z}-1} \frac{x^z}{\underline{|az}} dz \\ & = -i \int_0^n \frac{1}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1} \frac{r^{n+1-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon+it)}} r^{it} e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)} dt \\ & \quad + \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{1}{e^{-2\pi i\tau+2\pi n}-1} \frac{r^\tau e^{-\varphi n}}{\underline{|a(\tau+in)}} r^{in} e^{i\varphi\tau} d\tau \\ & \quad + i \int_0^n \frac{1}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1} \frac{r^{-\varepsilon} e^{-\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon+it)}} r^{it} e^{-i\varphi\varepsilon} dt. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

On a donc en vertu des formules (23), (39), (40), (41), (27)

$$
(42)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\int^{R} \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\,\frac{x^{z}}{\underline{|az}}\,dz \\
&= \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \frac{x^{\tau}}{\underline{|a\tau}}\,d\tau \\
&+ i\int_{0}^{n}\Bigg[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon-it)}} \\
&\qquad\qquad - \frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon+it)}}\Bigg]e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}\,dt \\
&+ \int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon}\Bigg[\frac{r^{-in}}{e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1}\,\frac{r^{\tau}e^{\varphi n}}{\underline{|a(\tau-in)}} + \frac{r^{in}}{e^{-2\pi i\tau+2\pi n}-1}\,\frac{r^{\tau}e^{-\varphi n}}{\underline{|a(\tau+in)}}\Bigg]e^{i\varphi\tau}\,d\tau \\
&- i\int_{0}^{n}\Bigg[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon-it)}} - \frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon+it)}}\Bigg]e^{-i\varphi\varepsilon}\,dt
\end{aligned}
\right.
$$

formule qui est un pendant à la formule (28).

L'intégrale:

$$\int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{\tau}}{\underline{|a\tau}}\,d\tau$$

est convergente pour toutes les valeurs de r et de φ. On a pour la seconde intégrale du second membre

$$
(43)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\Bigg|\int_{0}^{n}\Bigg[\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon-it)}} \\
&\qquad\qquad - \frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{n+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon+it)}}\Bigg]e^{i\varphi(n+1-\varepsilon)}\,dt\Bigg| \\
&\leq \frac{r^{n+1-\varepsilon}}{\underline{|a(n+1-\varepsilon)}}\,\frac{1}{h}\int_{0}^{\infty}\left(e^{-(2\pi-\varphi)t}+e^{-(2\pi+\varphi)t}\right)\sqrt{\frac{e^{a\pi t}-e^{-a\pi t}}{2a\pi t}}\,dt.
\end{aligned}
\right.
$$

Le module de cette intégrale tend donc indéfiniment vers zéro avec $\frac{1}{n}$ pourvu que φ remplisse la condition:

$$(44) \qquad 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} \geqq \varphi \geqq -\left(2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}\right).$$

Quant à la troisième intégrale du second membre de la formule (42) on a:

$$(45) \qquad \begin{cases} \left| \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{n+1-\varepsilon} \left(\frac{r^{-in}}{e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1} \frac{r^{\tau}e^{\varphi n}}{\underline{|a(\tau-in)}} + \frac{r^{in}}{e^{-2\pi i\tau+2\pi n}-1} \frac{r^{\tau}e^{-\varphi n}}{\underline{|a(\tau+in)}} \right) e^{i\varphi\tau}\,d\tau \right| \\ < \left(e^{-(2\pi-\varphi)n} + e^{-(2\pi+\varphi)n}\right) \sqrt{1+\frac{n^2}{(1-\varepsilon)^2}} \sqrt{\frac{e^{a\pi n}-e^{-a\pi n}}{2a\pi n}} \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{r^{\tau}}{\underline{|a\tau}}\,d\tau. \end{cases}$$

Le module de cette intégrale tend donc indéfiniment vers zéro avec $\frac{1}{n}$ lorsque φ remplit la condition:

$$(46) \qquad 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > -\left(2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}\right).$$

On obtient par conséquent:

$$(47) \qquad E_a(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{\underline{|a\nu}}$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{\tau}}{\underline{|a\tau}}\,d\tau + i\int_{0}^{\infty} \left(\frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1} \frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon+it)}} - \frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1} \frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon-it)}} \right) e^{-i\varphi\varepsilon}\,dt$$

formule qui doit être mise à côté de la formule (35) et où l'intégrale:

$$(48) \qquad \int_{0}^{\infty} \left(\frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1} \frac{r^{-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon+it)}} - \frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1} \frac{r^{-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\underline{|a(-\varepsilon-it)}} \right) e^{-i\varphi\varepsilon}\,dt$$

est convergente tant que la condition (46) est remplie. Le module de l'intégrale étant inférieur à $Kr^{-\varepsilon}$ où K est une constante indépendante de

r (c. f. la discussion concernant la formule (36)) tend indéfiniment vers zéro en même temps que r augmente au dela de toute limite le long d'un vecteur situé dans l'angle (46). Quant à la quantité positive α la condition (46) revient simplement à

$$4 > \alpha > 0 \tag{49}$$

et la convergence de l'intégrale (48) a lieu sous les deux conditions (49) et (46).

La formule (47) donne:

$$E_1(x) = e^x = e^{re^{i\varphi}} = \int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^\tau}{\underline{|\tau}} d\tau + \delta_r^{(1)}. \tag{50}$$

Dans cette formule l'argument φ de x est supposé remplir la condition

$$\frac{3\pi}{2} > \varphi > -\frac{3\pi}{2} \tag{51}$$

qui dérive de (46). Le module de $\delta_r^{(1)}$ diminue indéfiniment avec $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{r}$ quand x tend vers l'infini le long d'un vecteur situé dans l'angle (51).

On a:

$$\int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^\tau}{\underline{|\alpha\tau}} d\tau = \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\underline{|\tau}} d\tau.$$

Par suite en vertu de (50) et en y introduisant $\alpha\varepsilon$ au lieu de ε et en désignant par $\delta_r^{(\alpha)}$ la transformée de $\delta_r^{(1)}$ par cette substitution:

$$\int_{-\varepsilon}^{\infty} \frac{x^\tau}{\underline{|\alpha\tau}} d\tau = \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{\varphi}{\alpha}}} - \frac{1}{\alpha} \delta_r^{(\alpha)}$$

égalité qui exige que la condition

$$\alpha\frac{3\pi}{2} > \varphi > -\alpha\frac{3\pi}{2} \tag{52}$$

soit remplie.

En retournant à la formule (47) on obtient par conséquent le théorème suivant:

G. »Supposons

$$4 > \alpha > 0. \tag{49}$$

Dans le cas où x est situé dans un angle intérieur à l'angle défini par les deux conditions:

$$2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > -\left(2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}\right), \tag{46}$$

$$\alpha\frac{3\pi}{2} > \varphi > -\alpha\frac{3\pi}{2} \tag{52}$$

on a:

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{\varphi}{\alpha}}} + \varepsilon_r^{(\alpha)} \tag{53}$$

où le module de $\varepsilon_r^{(\alpha)}$ diminue indéfiniment en même temps que $|x| = r$ augmente au dela de toute limite.»

Les deux théorèmes ***F*** et ***G*** pris ensemble nous renseignent complètement sur la croissance de $E_\alpha(x)$ dans toutes les différentes directions, pourvu que:

$$2 > \alpha > 0. \tag{34}$$

On pourra donc énoncer le théorème suivant:

Théorème 8 a. La fonction $E_\alpha(x)$ où α désigne une constante positive vérifiant la condition

$$2 > \alpha > 0 \tag{34}$$

se comporte quant à sa croissance dans les diverses directions de la manière suivante:

On doit distinguer trois cas différents. Le module de x augmente indéfiniment dans un angle intérieur à l'angle

$$2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha\frac{\pi}{2}. \tag{33}$$

Dans ce cas le module $|E_\alpha(x)|$ tend en même temps indéfiniment vers zéro. Le module $|x|$ augmente indéfiniment le long d'un des deux vecteurs:

$$\varphi = \pm \alpha \frac{\pi}{2}.$$

Dans ce cas le module $|E_\alpha(x)|$ tend en même temps indéfiniment vers $\frac{1}{\alpha}$. Le module $|x|$ augmente indéfiniment dans un angle intérieur à l'angle

$$\alpha \frac{\pi}{2} > \varphi > -\alpha \frac{\pi}{2}.$$

Dans ce cas le module $|E_\alpha(x)|$ augmente en même temps au dela de toute limite, tandis que

$$\left| E_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{\varphi}{\alpha}}} \right|$$

diminue indéfiniment.»

Pour $\alpha = 1$ on retombe sur la propriété connue et caractéristique de la fonction exponentielle $E_1(x) = e^x$.

Le théorème G nous renseigne encore sur la croissance de $E_\alpha(x)$ dans le cas

$$\alpha = 2$$

pourvu que

$$\pi > \varphi > -\pi.$$

Nous voyons que $|E_2(x)|$ augmente indéfiniment en même temps que $|x|$ tend vers l'infini dans un angle intérieur à l'angle

$$\pi > \varphi > -\pi$$

tandis que

$$\left| E_2(x) - \frac{1}{2} e^{r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}} \right|$$

diminue en même temps indéfiniment.

Mais ni le théorème F ni le théorème G ne donne la croissance de $|E_2(x)|$ dans le cas

$$\varphi = \pm \pi.$$

Cette croissance s'obtient au contraire directement si on a égard à l'égalité

$$(53) \qquad E_2(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2} = \frac{e^{r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}} + e^{-r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varphi}{2}}}}{2}$$

d'où l'on tire

$$(54) \qquad E_2(re^{i\pi}) = E_2(-r) = \cos r^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le présent paragraphe nous avons donc complètement épuisé la question relative à la croissance de $E_\alpha(x)$ dans le cas

$$(21) \qquad 2 \geqq \alpha > 0.$$

Je montrerai dans le paragraphe suivant qu'on peut encore arriver à la connaissance complète de la croissance de $E_\alpha(x)$ dans le cas

$$\alpha > 2.$$

§ 3.

Dans le paragraphe précédent j'ai étudié la croissance de la fonction $E_\alpha(x)$ à l'aide de la formule sommatoire de MACLAURIN. La constante α était alors soumise à la restriction

$$(21) \qquad 2 \geqq \alpha > 0.$$

Je suivrai dans ce paragraphe une nouvelle voie et nous verrons que celle-ci nous conduit à la connaissance de la croissance non seulement d'une fonction $E_\alpha(x)$ qui correspond à une valeur α limitée par la restriction (21), mais en même temps à la connaissance de la croissance d'une fonction $E_\alpha(x)$ correspondant à α réel positif quelconque.

Quelque temps après la publication du mémoire de RIEMANN sur les nombres premiers [1] HANKEL publia un mémoire fort remarquable [2] où

[1] *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.* Monatsber. der Berl. Academie. Nov. 1859. Ges. Werke. Zweite Aufl. pag. 145.

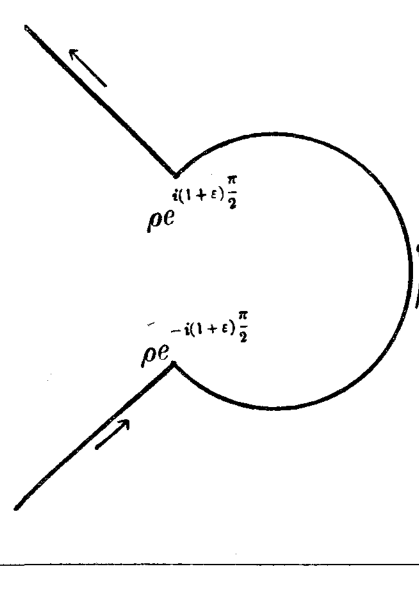
[2] *Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes.* Zur Habilitation in der philos. Facultät der Universität Leipzig bearb. von Dr HERMANN HANKEL. In Commission bei Leopold Voss. 1863. Zeitschrift für Math. und Physik. Neuntes Jahrgang, pag. 1—21.

il obtenait une expression pour $\frac{1}{\underline{|z}}$ au moyen d'une intégrale définie analogue à celle donnée auparavant par RIEMANN pour la fonction $\zeta(z)$.[1] Cette expression est:

$$\frac{1}{\underline{|z}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits^{S} e^t t^{-z}\frac{dt}{t} \tag{55}$$

où le contour S est un contour ouvert laissant l'origine à gauche, parcouru dans le sens positif et qui peut être défini de la manière suivante.

On introduit deux quantités positives ρ et ε dont l'une ε est plus petite que le nombre deux. Le contour se compose de trois lignes différentes. D'abord la partie d'un vecteur, issu de l'origine et ayant pour argument $-i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$ entre l'infini et le point $\rho e^{-i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$. Ensuite l'arc de cercle tracé par l'extremité d'un vecteur de la longueur ρ tournant autour de l'origine dans le sens direct de $\rho e^{-i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ à $\rho e^{i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$. Finalement la partie d'un nouveau vecteur, issue de l'origine et ayant pour argument $i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$, entre le point $\rho e^{i(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et l'infini.



[1] Werke. Zweite Auflage, pag. 146.

Supposons:

$$|x| < \rho^\alpha$$

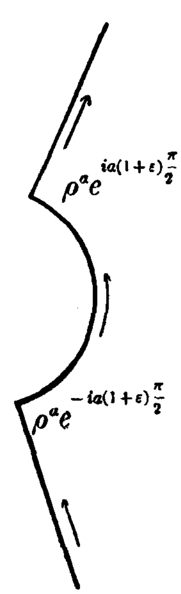
nous aurons:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x_\nu}{\underline{|\alpha\nu}} = \frac{1}{2\pi i}\int^{S} e^t\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{x}{t^\alpha}\right)^\nu\right)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{1}{\alpha}e^t\frac{dt^\alpha}{t^\alpha - x}.$$

Faisons

$$t^\alpha = \omega$$

et désignons par $\overline{S}$ un nouveau contour ouvert dans le plan des ω laissant l'origine à gauche et formé de la partie entre l'infini et $\rho^\alpha e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ d'un vecteur issu de l'origine et ayant pour argument $-i\alpha(1 + \varepsilon)\frac{\pi}{2}$, de l'arc de cercle tracé par l'extremité d'un vecteur de longueur ρ^α tournant autour de l'origine dans le sens direct de $\rho^\alpha e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ à $\rho^\alpha e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et ensuite de la partie entre $\rho^\alpha e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et l'infini d'un vecteur issu de l'origine et ayant pour argument $i\alpha(1 + \varepsilon)\frac{\pi}{2}$.



Nous aurons:

(56)
$$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\lfloor \alpha\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int^{\bar{S}} \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{d\omega}{\omega - x}$$

où l'intégrale est prise dans le sens direct. L'intégrale représente une seule et même fonction de x tant que x est situé du même côté de $\bar{S}$ que l'origine.

Regardons le cas:

(34)
$$2 > \alpha > 0.$$

La quantité positive ε étant aussi petite qu'on veut, la formule (56) nous montre que $|E_\alpha(x)|$ diminue infiniment avec $\frac{1}{r}$ $(x = re^{i\varphi})$ quand x tend vers l'infini dans un angle intérieur à l'angle

(33)
$$2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \varphi > \alpha\frac{\pi}{2}.$$

C'est le théorème F § 2.

La formule (56) nous renseigne encore sur la croissance de $E_\alpha(x)$ dans l'angle

(37)
$$\alpha\frac{\pi}{2} \geqq \varphi \geqq -\alpha\frac{\pi}{2}$$

dans le cas (34) et nous donne dans le cas

(57)
$$\alpha \geqq 2$$

la croissance de $E_\alpha(x)$ dans toutes les différentes directions.

Supposons que α étant quelconque x soit situé dans l'angle (37).

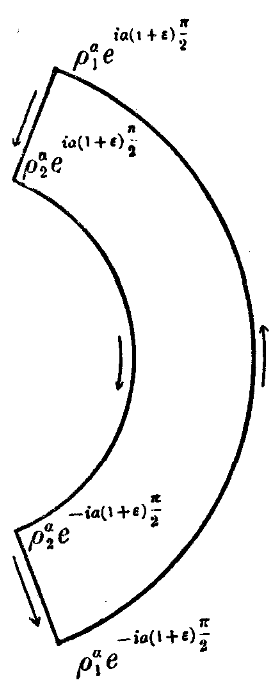
Introduisons deux contours différents à savoir $\bar{S}_1$ correspondant au rayon $\rho = \rho_1$ et $\bar{S}_2$ correspondant au rayon $\rho = \rho_2$ où

$$\rho_2 < |x| < \rho_1.$$

On a:

(58)
$$E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i} \int^{\bar{S}_1} \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{d\omega}{\omega - x}.$$

Désignons par R un quadrilatère, formé des quatres lignes suivantes. L'arc de cercle tracé par l'extremité d'un vecteur de longueur ρ_1^α tournant autour de l'origine dans le sens direct de $\rho_1^\alpha e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ à $\rho_1^\alpha e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$. La partie entre $\rho_1^\alpha e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et $\rho_2^\alpha e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ du vecteur issu de l'origine et ayant pour argument $i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$. L'arc de cercle tracé par l'extremité d'un vecteur de longueur ρ_2^α tournant autour de l'origine dans le sens invers de $\rho_2^\alpha e^{i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ à $\rho_2^\alpha e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$. Finalement la partie entre $\rho_2^\alpha e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ et $\rho_1^\alpha e^{-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}$ du vecteur issu de l'origine et ayant pour argument $-i\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}$.



On a:

$$(59) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{\bar{S}_1}\frac{1}{\alpha}e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{d\omega}{\omega-x}=\frac{1}{2\pi i}\int^{\bar{S}_2}\frac{1}{\alpha}e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{d\omega}{\omega-x}+\frac{1}{2\pi i}\int^{R}\frac{1}{\alpha}e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{d\omega}{\omega-x}.$$

L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{\bar{S}_2}\frac{1}{\alpha}e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{d\omega}{\omega-x}$$

qui représentait une seule et même fonction de x quand x était situé du même côté de $\bar{S}_2$ que l'origine représente aussi bien une autre seule et même fonction de x quand x est situé du côté opposé à l'origine. Cette intégrale tend indéfiniment vers zéro en même temps que x va vers l'infini dans l'angle:

$$\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2} > \varphi > -\alpha(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}. \tag{60}$$

Nous mettons donc:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{\bar{S}_2}\frac{1}{\alpha}e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{d\omega}{\omega-x} = \varepsilon_r^{(\alpha)}. \tag{61}$$

Il s'ensuit qu'on a dans l'angle (60)

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{R}\frac{1}{\alpha}e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{d\omega}{\omega-x} + \varepsilon_r^{(\alpha)} \tag{62}$$

où le module de $\varepsilon_r^{(\alpha)}$ diminue indéfiniment avec $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{r}$.

Dans le cas

$$2 > \alpha > 0 \tag{34}$$

on a en choisissant ε suffisamment petit

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{R}\frac{1}{\alpha}e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{d\omega}{\omega-x} = \frac{1}{\alpha}e^{x^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{63}$$

On obtient donc dans ce cas:

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} + \varepsilon_r^{(\alpha)} = \frac{1}{\alpha}e^{r^{\frac{1}{\alpha}}e^{i\frac{\varphi}{\alpha}}} + \varepsilon_r^{(\alpha)} \tag{64}$$

égalité valable dans l'angle (60) et le théorème 8 a est par conséquent démontré.

La formule (62) nous fournira encore le moyen de faire une étude complète de la croissance de la fonction

$$E_\alpha(x); \qquad \alpha \geqq 2. \tag{65}$$

Cette fonction est d'une autre nature que la fonction

$$E_\alpha(x); \qquad 2 > \alpha > 0 \tag{66}$$

et paraît bien moins importante. Il est pourtant intéressant de voir que les propriétés caractéristiques des deux fonctions dérivent de la même source.

Pour simplifier nous ferons en sorte que dans l'intégrale

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\bar{S}} \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{d\omega}{\omega - x} \tag{56}$$

les parties infinies du chemin d'intégration se confondent toutes deux avec l'axe réel positif (ou dans un cas particulier avec un vecteur voisin de cet axe). Cela est possible parce que dans le cas

$$\alpha \geqq 2 \tag{57}$$

il existe toujours un nombre pair tel que

$$\frac{\alpha}{2} < 2m < \frac{3\alpha}{2}. \tag{67}$$

Le nombre m étant fixé le chemin d'intégration $\bar{S}$ sera composé des parties suivantes:

1° la partie de l'axe réel extérieur à un cercle d'un certain rayon ρ^α cet axe étant parcouru dans le sens négatif;

2° la circonférence de rayon ρ^α parcourue $2m$ fois dans le sens positif;

3° la partie de l'axe réel nommée dans 1° parcourue dans le sens positif.

Nous déterminerons la fonctions $\omega^{\frac{1}{\alpha}}$ de manière que, au point de l'axe réel où finit la m^e et commence la $(m+1)^e$ circonférence, elle ait une valeur réelle et positive. Grâce à cette détermination on aura, sur les parties du chemin d'intégration situées à distance infinie

$$\omega^{\frac{1}{a}} = \left|\omega^{\frac{1}{a}}\right| e^{\pm \frac{2m}{a}\pi i}$$

ce qui démontre à cause de l'inégalité (67) la convergence de l'intégrale (56).

Revenons maintenant à la formule:

$$E_a(x) = \frac{1}{2\pi i}\int^{R} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x} + \varepsilon_r^{(a)}. \tag{62}$$

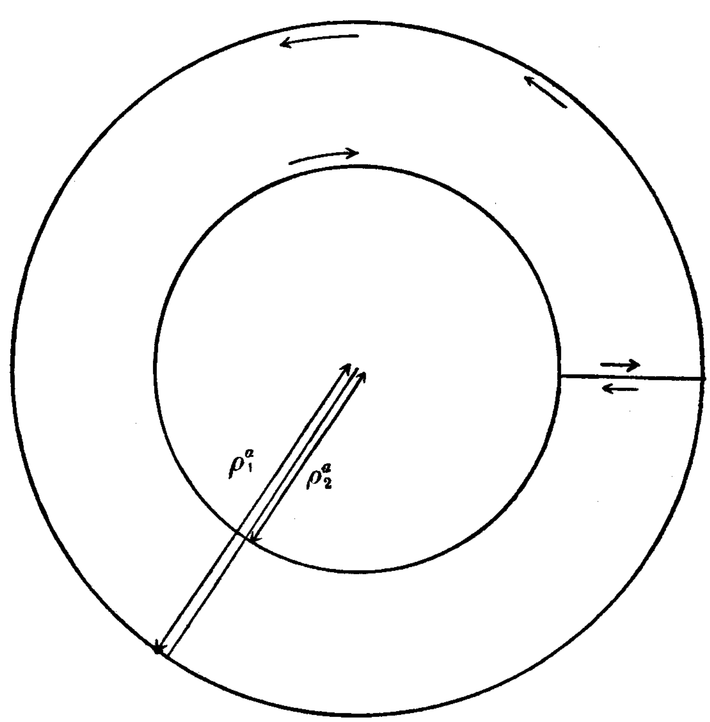
L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{R} \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x}$$

se réduit à la somme de $2m$ intégrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x}$$

le chemin d'intégration, qui est le même dans toutes les intégrales, étant celui indiqué dans la figure ci-jointe.



Ce qui est différent dans les diverses intégrales c'est la détermination de la fonction $\omega^{\frac{1}{a}}$. En effet, en posant $\omega = \rho e^{i\theta}$, on doit prendre

dans la $(m+1)^{\text{e}}$ intégrale: $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\theta}{a}}$

. . . .

. . . .

dans la $(m+1+\nu)^{\text{e}}$ intégrale: $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\theta+2\nu\pi}{a}}$ $(\nu=0,\ldots,m-1)$

. . . .

. . . .

dans la m^{e} intégrale: $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\theta-2\pi}{a}}$

. . . .

. . . .

dans la $(m+1-\nu)^{\text{e}}$ intégrale: $\omega^{\frac{1}{a}} = \rho^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\theta-2\nu\pi}{a}}$ $(\nu=1,\ldots,m)$

. . . .

. . . .

Par conséquent en écrivant

$$x = re^{i\varphi} \tag{25}$$

et en supposant

$$0 < \varphi < 2\pi$$

on a pour la $(m+1+\nu)^{\text{e}}$ intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{a} e^{\omega^{\frac{1}{a}}} \frac{d\omega}{\omega - x} = \frac{1}{a} e^{r^{\frac{a}{1}} e^{i\frac{\varphi+2\nu\pi}{a}}} \qquad (\nu=-m\ldots+(m-1))$$

J'ai donc démontré cette formule

$$E_a(x) = \sum_{\nu=-m}^{m-1} \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\varphi+2\nu\pi}{a}}} + \varepsilon_r^{(a)} \tag{68}$$

formule qui dans les suppositions (57), (67) est valable pour

$$0 < \varphi < 2\pi.$$

Le cas $\varphi = 0$ est resté exclus jusqu'ici. Mais il est facile de modifier la démonstration de manière à embrasser ce cas. En effet en faisant tourner le chemin d'intégration $\overline{S}$ d'un petit angle ε dans le sens négatif on démontre de la même manière que ci-dessus que l'on a toujours

$$E_a(x) = \sum_{\nu=-m}^{m-1} \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\varphi+2\nu\pi}{a}}} + \varepsilon_r^{(a)} \tag{68}$$

mais avec cette modification que la formule est valable pour

$$-\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon$$

La formule (68) est donc valable encore pour

$$\varphi = 0.$$

On démontre d'une manière analogue qu'elle est valable pour

$$\varphi = 2\pi.$$

Il est donc démontré que la formule (68) a lieu pour

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi. \tag{69}$$

Il est évident qu'on peut négliger dans la formule (68) tous les termes pour lesquels on a:

$$\left|\frac{\varphi + 2\nu\pi}{a}\right| > \frac{\pi}{2}. \tag{70}$$

En effet puisque on a dans tous ces termes à cause de (67):

$$\left|\frac{\varphi + 2\nu\pi}{a}\right| \leqq \frac{2m\pi}{a} < \frac{3\pi}{2} \tag{71}$$

chacun d'eux tend vers zéro quand r devient infini.

Nous sommes par conséquent arrivés à la formule finale:

$$E_a(x) = \sum_{(\nu)} \frac{1}{a} e^{r^{\frac{1}{a}} e^{i\frac{\varphi+2\nu\pi}{a}}} + \varepsilon_r^{(a} \tag{72}$$

où la sommation s'étend à tous les nombres ($\nu = -m, \ldots, +(m-1)$) pour lesquels

$$(73) \qquad \left|\frac{\varphi + 2\nu\pi}{\alpha}\right| \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Ce résultat peut être résumé dans le théorème suivant.

Théorème 8 b. »La fonction $E_\alpha(x)$ où α désigne une constante positive remplissant la condition

$$(57) \qquad \alpha \geqq 2$$

se comporte quant à sa croissance dans les diverses directions de la manière suivante.

Choisissons un nombre entier m qui sera soumis à la restriction

$$(67) \qquad \frac{\alpha}{2} < 2m < \frac{3\alpha}{2}.$$

Quand $|x|$ augmente au delà de toute limite le long d'un vecteur quelconque ($x = re^{i\varphi}$; $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$) le module

$$\left|E_\alpha(x) - \sum_{(\nu)} \frac{1}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{2\nu\pi+\varphi}{\alpha}}}\right|$$

où la sommation s'étend à tous les nombres entiers

$$\nu = -m, -(m-1), \ldots, m-1$$

remplissant la condition

$$(73) \qquad \left|\frac{2\nu\pi + \varphi}{\alpha}\right| \leqq \frac{\pi}{2}$$

diminue en même temps indéfiniment.»

On voit que $|E_\alpha(x)|$ tend vers l'infini avec $|x|$ pour tous les vecteurs sauf l'axe réel négatif. On a encore:

$$(74)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{r=\infty} e^{-r^{\frac{1}{\alpha}}} |E_\alpha(r)| = \frac{1}{\alpha}, \\ \lim\limits_{r=\infty} e^{-r^{\frac{1}{\alpha}}} |E_\alpha(x)| = 0; \qquad 0 < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Pour l'axe réel négatif on obtient:

$$(75)\qquad E_\alpha(-r) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{2}{\alpha} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{2\nu+1}{\alpha}\pi} \cos\left(r^{\frac{1}{\alpha}} \sin \frac{2\nu+1}{\alpha}\pi\right).$$

La fonction $E_\alpha(x)$ $(\alpha \geqq 2)$ partage donc avec $\sin x$ la propriété que son module augmente au dela de toute limite avec $|x|$ quand x tend vers l'infini le long de tout vecteur, *un seul* excepté. D'autre part le module d'une fonction entière rationnelle $G(x)$ augmente sans exception au de la de toute limite avec $|x|$ quand x tend vers l'infini le long d'un vecteur quelconque.

Il est donc naturel de poser cette question. Existe-il des fonctions entières transcendantes dont le module sans exception comme celui de $G(x)$ augmente avec $|x|$ au de là de toute limite quand x tend vers l'infini le long d'un vecteur quelconque déterminé?

M. Helge von Koch a répondu d'une manière affirmative à cette question[1] en donnant comme exemple la fonction $\overline{G}(x) = x \sin(x + i)$ qui possède évidemment cette propriété. Une autre fonction de cette nature est

$$(76)\qquad \overline{G}(x) = G(x) + E_\alpha(x).$$

On peut exprimer la différence entre la manière dont les fonctions $G(x)$ et $\overline{G}(x)$ tendent vers l'infini en disant que $G(x)$ tend vers l'infini d'une manière uniforme pour toutes les directions tandis que $\overline{G}(x)$ devient infini d'une manière non uniforme. La fonction $G(x)$ de son côté peut être définie par la propriété de tendre vers l'infini d'une manière uniforme.

Une autre question plus profonde se pose ici.

---

[1] Helge von Koch. *Sur une classe remarquable de fonctions entières et transcendentes.* Arkiv f. Mat. Astr. o. Fysik. Stockholm. Bd 1, 9 sept. 1903.

La fonction

$$E_\alpha(x); \qquad 0 < \alpha < 2$$

tend vers l'infini seulement à l'intérieur de l'angle

$$-\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{\pi}{2}.$$

En faisant diminuer α on peut rendre cet angle aussi petit qu'on veut. Est-il possible de former une fonction entière qui ne devienne infinie que si $|x|$ augmente le long d'un seul vecteur, mais qui diminue indéfiniment si $|x|$ augmente le long de tous les autres vecteurs? Un de mes élèves M. J. Malmquist est parvenu à donner un tel exemple.[1] La fonction

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{x^{\nu-2}}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{(\log \nu)^\alpha}\right)}; \qquad 0 < \alpha < 1$$

possède cette propriété. Elle tend en réalité indéfiniment vers zéro quand $|x|$ augmente au dela de toute limite le long d'un vecteur déterminé situé dans l'angle

$$0 < \varphi < 2\pi$$

tandis qu'elle augmente au dela de toute limite quand x tend vers l'infini le long de l'axe réel positif. On le démontre facilement en suivant une marche presque identique à celle que j'ai employée dans le § 2.

M. E. Lindelöf de son côté en se rattachant à ma note préliminaire des Comptes Rendus[2] et en s'appuyant sur un théorème fort remarquable trouvé par lui[3] vient de former la fonction[4]

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\log\left(\nu+\frac{1}{\alpha}\right)}\right)^\nu; \qquad 0 < \alpha < 1$$

[1] J. Malmquist. *Étude d'une fonction entière.* Acta math. Ce tôme.
[2] 2 mars 1903.
[3] Acta Soc. Sc. Fenn. T. 31, n° 3, pag. 29.
[4] Bull. des Sc. Math. Août 1903, pag. 224—225.

qui possède les mêmes propriétés que celle de M. MALMQUIST. Une telle fonction est encore la suivante:

$$(77)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu(\log\nu)^{\alpha}} x^{\nu}; \qquad 0 < \alpha < 1.$$

En introduisant dans l'intégrale (56) au lieu de $e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}$ une nouvelle fonction de ω nous rencontrerons dans une note suivante une nouvelle classe de fonctions de cette espèce.[1]

Désignons par $\mathfrak{E}_{\alpha}(x)$ une fonction de cette nature. A l'aide d'une telle fonction on peut répondre à une autre question intéressante. Existe-il des fonctions entières qui tendent indéfiniment vers zéro quand $|x|$ augmente au delà de toute limite le long d'un vecteur *quelconque* déterminé?

La fonction

$$(78)\qquad e^{-\mathfrak{E}_{\alpha'}(x)} - e^{-\mathfrak{E}_{\alpha''}(x)}; \qquad \alpha' \geqq \alpha''$$

possède évidemment cette propriété. On voit sans peine que l'explication de ce phénomène qui paraît d'abord assez paradoxal est que le module de la fonction diminue d'une manière *non-uniforme* quand x tend vers l'infini le long de différentes directions.

Il est facile de voir que dans tous nos exemples la fonction $\mathfrak{E}_{\alpha}(x)$ n'est pas de genre fini. Existe-il de pareilles fonctions de genre fini? La réponse est négative à cause d'un théorème de la plus haute importance qui vient d'être démontré par M. PHRAGMÉN[2] et qui n'est pas sans rapport avec les propriétés caractéristiques que j'ai démontrées concernant la fonction $E_{\alpha}(x)$. Ce théorème dans les propres termes de son auteur est le suivant:[3]

»Soit α et ρ deux quantités satisfaisant aux inégalités

$$0 < \alpha < 2, \qquad 0 < \rho < \frac{1}{\alpha}$$

[1] c. f. E. PHRAGMÉN. *Sur une extension* etc. Ce journal. T. 28, pag. 357, 358. Ainsi que mes deux notes *Un nouveau théorème* etc. Comptes Rendus 11 avril 1904 et *Une nouvelle fonction* etc. Comptes Rendus 18 avril 1904.

[2] *Sur une extension* etc.

[3] c. f. ma note des Comptes Rendus etc. pour le 12 octobre 1903.

et supposons que la fonction entière $E(x)$ satisfasse aux deux conditions suivantes. En posant

$$x = re^{i\varphi}$$

on a

$$1^\circ \qquad |E(x)|\, e^{-r^\rho} \leqq A \quad \text{pour} \quad -\alpha\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \alpha\frac{\pi}{2}$$

et

$$2^\circ \qquad |E(x)| \leqq B \quad \text{pour} \quad \alpha\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}$$

A et B étant deux constantes.

Je dis que cette fonction $E(x)$ sera nécessairement une constante.»

Je n'entrerai pas cette fois dans une étude plus approfondie que celle qui vient d'être faite des autres propriétés de la fonction $E_\alpha(x)$. Je laisserai d'abord la parole à M. A. WIMAN qui vient de terminer un travail fort intéressant[1] sur la distribution des zéros de cette fonction. Je rappellerai encore que M. E. PHRAGMÉN[2] a montré que la fonction $E_\alpha(x)$ est à un certain point de vue la plus simple de son espèce. Pourtant il convient avant de terminer de voir si la propriété qu'a la fonction $E_1(x) = e^x$ de satisfaire à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels en x peut être généralisée à savoir pour $E_\alpha(x)$, α ayant d'autres valeurs que *un*. C'est en réalité ce qui a lieu quand α est rationnel.

Faisons

$$(79) \qquad \alpha = \frac{m}{n}$$

où m et n sont des nombres entiers positifs. On trouve immédiatement en employant la forme symbolique:

$$(80) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m E_{\frac{m}{n}}\left(\xi^{\frac{m}{n}}\right) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\xi^{-\frac{m}{n}\nu}}{\underline{\left| -\frac{m}{n}\nu \right.}} + E_{\frac{m}{n}}\left(\xi^{\frac{m}{n}}\right), \\ &\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m E_m(\xi^m) = E_m(\xi^m) \end{aligned} \right.$$

---

[1] *Über die Nullstellen der Functionen $E_\alpha(x)$.* Ce Tome.

[2] *Sur une extension* etc. T. 28, pag. 357.

ou

$$(81)\qquad \begin{cases} \left(\frac{m}{n} x^{1-\frac{n}{m}} \frac{d}{dx}\right)^m E_{\frac{m}{n}}(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{n-1} \frac{x^{\nu-n}}{\left|\underline{\frac{m}{n}(\nu-n)}\right.} + E_{\frac{m}{n}}(x); \qquad n > 1, \\ \left(m x^{1-\frac{1}{m}} \frac{d}{dx}\right)^m E_m(x) = E_m(x). \end{cases}$$

On a donc par exemple:

$$(82)\qquad \begin{cases} E'_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\left|\underline{\frac{1}{2}}\right.} + 2x E_{\frac{1}{2}}(x), \\ E'_{\frac{1}{n}}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\left|\underline{\frac{1}{n}}\right.} + \frac{x^2}{\left|\underline{\frac{2}{n}}\right.} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{\left|\underline{\frac{n-1}{n}}\right.}\right) + n x^{n-1} E_{\frac{1}{n}}(x), \\ E''_2(x) + \frac{1}{2x} E'_2(x) - \frac{1}{4x} E_2(x) = 0. \end{cases}$$

§ 4.

Je reprendrai maintenant à l'aide des théorèmes 8 l'étude de l'intégrale

$$(8)\qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Je la simplifierai d'abord en faisant

$$F_\alpha(x) = E_\alpha(x).$$

Écrivons comme auparavant

$$(25)\qquad x = re^{i\varphi}$$

et considérons d'abord le cas

$$(34)\qquad 2 > \alpha > 0.$$

A cause du théorème 8 a et en désignant par δ une quantité positive qui peut devenir aussi petite que l'on voudra et en faisant croître suffisamment la quantité positive ω, on a:

$$(83)\quad \begin{cases} \left| e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} |E_\alpha(\omega x)| - e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(1 - r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha}\right)} \right| < \delta e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{\pi}{2}, \\ e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} |E_\alpha(\omega x)| < \delta e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}; \qquad \alpha\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq 2\pi - \alpha\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Il s'ensuit que l'intégrale

$$(84)\qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

est convergente tant que la variable x se trouve du même côté de la ligne

$$(85)\qquad r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha} = 1; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{2}{\pi}$$

que l'origine: c'est à dire à l'intérieur de l'étoile de centre zéro limitée par la ligne (85).

Cette ligne qui passe toujours par le point $x = 1$ a dans le cas

$$1 > \alpha > 0$$

une forme d'apparence hyperbolique et possède les deux asymptotes

$$re^{i\alpha\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad re^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}; \qquad 0 < r < \infty.$$

Quand α s'approche de zéro elle s'aplatit donc de plus en plus jusqu'à se confondre avec la ligne droite $(1, +\infty)$.

Dans le cas

$$\alpha = 1$$

elle devient la perpendiculaire à l'axe réel au point $x = 1$. Dans le cas

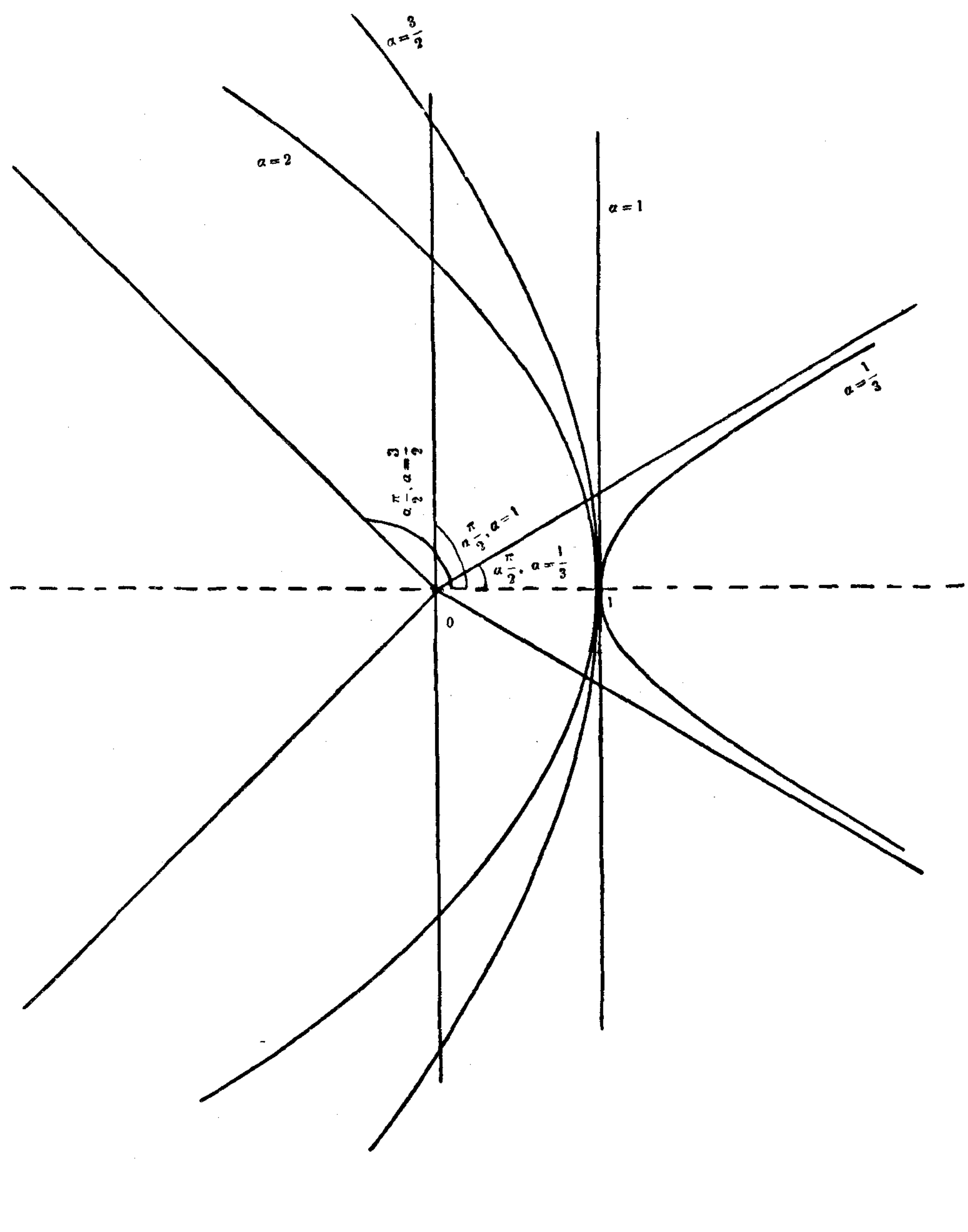
$$2 > \alpha > 1$$

elle a au contraire une forme d'apparence parabolique et s'éloigne quand

φ s'approche des angles $\alpha\frac{\pi}{2}$ et $-\alpha\frac{\pi}{2}$ indéfiniment des deux lignes $re^{i\alpha\frac{\pi}{2}}$ et $re^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}$; $0 \leqq r < +\infty$. Dans le cas

$$\alpha = 2$$

elle devient un parabole.



L'étoile de centre zéro qui est limitée par la ligne

$$(85) \qquad r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha} = 1; \qquad -\alpha \frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha \frac{\pi}{2}$$

est pour l'intégrale

$$(84) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

l'étoile que nous avons déjà désignée au § 1 (Théorème $\boldsymbol{E}$) par $B^{(\alpha)}$. Le théorème $\boldsymbol{E}$ montre que la convergence de l'intégrale ne peut pas avoir lieu en dehors de $B^{(\alpha)}$. L'étoile $B^{(\alpha)}$ est donc une étoile de convergence pour l'intégrale (84). D'autre part il s'ensuit du théorème $\boldsymbol{D}$ que l'égalité

$$(86) \qquad \frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

a lieu partout à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$.

Etudions maintenant l'intégrale (84) dans le cas

$$(57) \qquad \alpha \geqq 2.$$

Il s'ensuit du théorème 8 b qu'en faisant croître suffisamment la quantité positive ω et en désignant par δ une quantité positive qui peut devenir aussi petite que l'on voudra on a:

$$(87) \qquad \left| e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left| E_\alpha(\omega x) \right| - \frac{1}{\alpha} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(1 - r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha}\right)} \right| < \delta e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left(1 - r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha}\right)}; \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi.$$

Par conséquent l'intégrale

$$(84) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

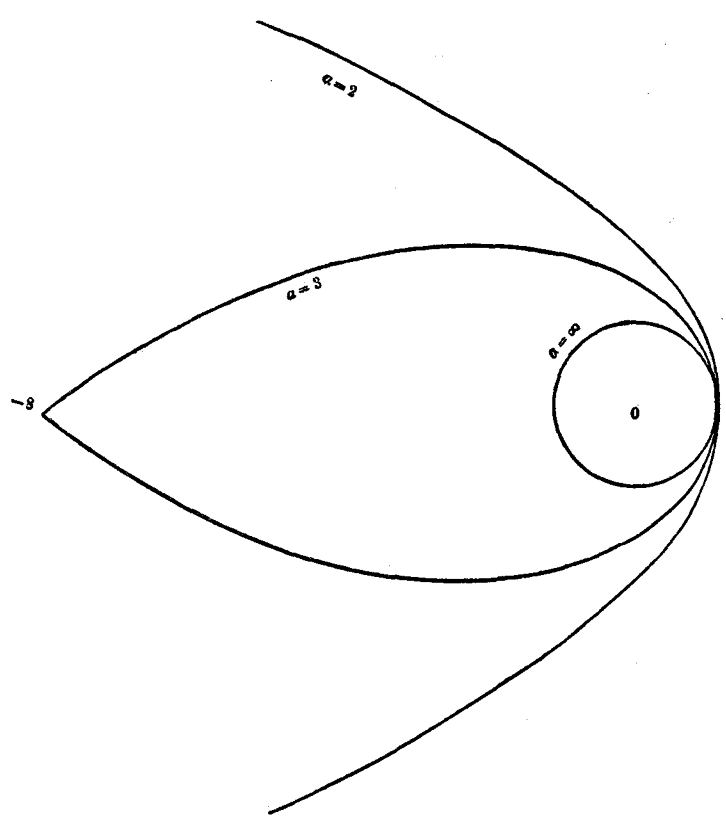
dans la supposition

$$(57) \qquad \alpha \geqq 2$$

est convergente à l'intérieur de l'étoile de centre zéro limitée par la ligne

$$(88) \qquad r^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha} = 1 ; \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi .$$

Cette ligne comme nous l'avons déjà remarqué (page 149) est une parabole pour $\alpha = 2$. Pour $\alpha > 2$ elle devient une ligne fermée symétrique par rapport à l'axe réel et coupant cet axe aux deux points $r = 1$, $\varphi = 0$ et $r = \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{\alpha}}\right)^{\alpha}$; $\varphi = \pm \pi$. Quand α tend vers l'infini elle s'approche de plus en plus du cercle de centre zéro et de rayon un.



On voit par les mêmes considérations que dans le cas $2 \geqq \alpha > 0$ que l'étoile de centre zéro qui est limitée par la ligne (88) est une étoile de convergence pour l'intégrale (84).

On voit encore que l'égalité

$$(86)\qquad \frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\,d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

a lieu partout à l'intérieur de cette étoile.

Nous sommes donc arrivés au théorème suivant:

Théorème 9. »L'intégrale

$$(84)\qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\,d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

où α est une constante positive assujettie à la condition

$$2 \geqq \alpha > 0$$

possède par rapport à $x = re^{i\varphi}$ une étoile de convergence de centre zéro limitée par la ligne

$$(85)\qquad r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha} = 1\,; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{\pi}{2}.$$

On a partout à l'intérieur de cette étoile

$$(86)\qquad \frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\,d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'expression

$$(89)\qquad \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\,d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

possède par rapport à x une étoile de convergence de centre zéro formée par tout le plan à l'exclusion de la ligne droite $(1\,,\,\infty)$. On a partout à l'intérieur de cette étoile qui est l'étoile principale des constantes $1, 1, 1, \ldots$ l'égalité

$$(90)\qquad \frac{1}{1-x} = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x)\,d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Quand d'autre part

$$\alpha \geqq 2 \tag{57}$$

l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \tag{84}$$

possède une étoile de convergence de centre zéro limitée par la ligne

$$r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha} = 1; \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi \tag{88}$$

et l'égalité

$$\frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \tag{86}$$

a lieu partout à l'intérieur de cette étoile.

L'expression

$$\lim_{\alpha=\infty} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \tag{91}$$

possède par rapport à x le cercle de convergence de centre zéro et de rayon un et on a partout à l'intérieur de ce cercle

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{\alpha=\infty} \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}. \text{»} \tag{92}$$

A l'aide du théorème 9 il est maintenant facile d'arriver à la connaissance complète de l'intégrale générale

$$\int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{8}$$

Je reviens à mon théorème de 1882 (voir la note page 117) et au lieu de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(z)\left[\frac{1}{z-x}-\frac{1}{z}\left(B_0+B_1\frac{x}{z}+\ldots+B_n\left(\frac{x}{z}\right)^n\right)\right]dz$$

je considère l'intégrale analogue:

$$(93)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\int_0^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right)dy.$$

L'étoile $B^{(\alpha)}$ a été construite de la manière suivante (Théorème $\boldsymbol{E}$). Autour du vecteur $re^{i\varphi}$ on construit dans le cas

$$2 \geqq \alpha > 0$$

une figure génératrice

$$(94)\qquad \rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^{\alpha}; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} < \psi < \alpha\frac{\pi}{2}$$

et dans le cas

$$\alpha \geqq 2$$

une autre figure génératrice

$$(95)\qquad \rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^{\alpha}; \qquad -\pi \leqq \psi \leqq \pi$$

où ρ, ψ sont des coordonnées polaires relatives au vecteur et où r est déterminé en sorte que la figure appartient entièrement à l'étoile principale A des constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$.[1] Si R désigne la limite supérieure de r le contour limite de $B^{(\alpha)}$ sera décrit par $Re^{i\varphi}$; où φ parcourt les valeurs $0 \leqq \varphi < 2\pi$.

Considérons de plus près la ligne (94). C'est une ligne fermée symétrique par rapport au vecteur r, φ et qui passe par les deux points $\rho = 0$, $\rho = r$. Pour $\alpha = 1$, et c'est le cas de M. Borel elle devient un

---

[1] voir pour la signification des constantes k page 103.

cercle ayant la droite $(0, \varphi; r, \varphi)$ pour diamètre. L'ordonné du point (ρ, ψ) par rapport à la ligne (r, φ) est $r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^{\alpha}\sin\psi$. On voit donc que la ligne s'aplatit de plus en plus jusqu'à se confondre avec la ligne droite $(0, \varphi; r, \varphi)$ quand α tend vers zéro. Il s'ensuit que l'étoile $B^{(\alpha)}$ s'approche infiniment de l'étoile principale A quand α tend vers zéro.

La ligne (95) au contraire est aussi une ligne fermée symétrique par rapport à la ligne r, φ qu'elle coupe aux deux points r et $-r\left(\cos\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\alpha}$. Elle embrasse donc le point zéro. Quand α tend vers l'infini elle se rapproche infiniment du cercle de centre zéro et de rayon r. L'étoile $B^{(\alpha)}$ s'approche par conséquent infiniment du cercle de centre zéro inscrit dans l'étoile principale A en même temps que α tend vers l'infini.

Revenons à l'intégrale:

$$(93) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\int_{0}^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy$$

où x sera situé à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$ et S sera un contour fermé qui embrasse la ligne $(0, 1)$ ainsi que la figure génératrice par rapport à cette ligne et qui est tel que le contour correspondent décrit par xy sera en même temps situé à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$.

On a:

$$(96) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\int_{0}^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy \\ &= F(x) - \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(xy)}{y}\left(\int_{0}^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy \end{aligned}\right.$$

où l'intégrale

$$(97) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(xy)}{y}\left(\int_{0}^{\omega} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_{\alpha}\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy$$

est prise le long d'un petit cercle de centre zéro. Introduisons dans l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \tag{98}$$

la série qui représente la fonction $E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)$; on aura:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(xy)}{y}\left(\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(xy)}{y^{\nu+1}} dy \frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(z)}{z^{\nu+1}} dz \frac{(\omega x)^\nu}{\underline{|\alpha\nu}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}\right. \tag{99}$$

Par conséquent:

$$\left\{\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int^{(S)} F(xy)\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy. \end{aligned}\right. \tag{100}$$

Pour chaque valeur de y qui appartient à S nous avons

$$\frac{1}{y-1} = \frac{1}{y}\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}; \tag{101}$$

d'où

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \tag{102}$$

égalité qui est valable pour chaque domaine X situé à l'intérieur de l'étoile $B^{(\alpha)}$. Si on se remémore maintenant les théorèmes $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$ on voit que l'étoile $B^{(\alpha)}$ est une étoile de convergence de l'intégrale

$$(8) \qquad \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'énoncé donné dans l'introduction de cette note est donc complètement démontré.

J'attirerai encore l'attention sur la formule

$$(103) \qquad FB^{(\alpha)}(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\lfloor \alpha\nu} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^\nu$$

qui est une conséquence immédiate de la formule (99) et où $B^{(\alpha)}$ est une étoile de convergence de l'expression limite du second membre.

La série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\lfloor \alpha\nu} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^\nu$$

est une fonction entière de x qui dépend de deux paramètres ω et α. Elle s'approche indéfiniment de $FB^{(\alpha)}(x)$ quand ω augmente au dessus de toute limite, et de $FA(x)$ quand α s'approche indéfiniment de zéro. Par conséquent:

G a. »Soit $FA(x)$ une branche fonctionnelle quelconque appartenant aux constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$, dont A est l'étoile principale. On peut toujours à l'aide des constantes k former une fonction entière de x, $G_{\omega,\alpha}(x)$ qui, en outre de x et des k, dépend de deux paramètres positifs ω et α et qui est telle que

$$\lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x) = FA(x)$$

et que l'expression

$$\lim_{\alpha=0} \lim_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x)$$

diverge en dehors de A.

On peut choisir $G_{\omega,\alpha}(x)$ de telle manière qu'on obtienne en même temps

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x) = FB^{(\alpha)}(x),$$

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x) = FC(x)$$

et que les expressions:

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x); \qquad \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} G_{\omega,\alpha}(x)$$

divergent, la première en dehors de $B^{(\alpha)}$ et la seconde en dehors de C.»

Si on laisse tomber la condition que l'expression qui aura $FA(x)$ pour limite aura en même temps A pour étoile de convergence, il est facile de choisir la fonction entière de telle manière qu'elle ne dépende que d'un seul paramètre. Nous le verrons dans la suite au § 5. Le théorème est analogue au théorème suivant de WEIERSTRASS[1] auquel le grand analyste attachait une importance spéciale.

g. »Soit $f(x)$ une fonction quelconque réelle et continue de x. Il est toujours possible de former une fonction entière de x, soit $g_\omega(x)$ qui dépend, en outre de x d'un paramètre positif ω et qui est telle que

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} g_\omega(x) = f(x)$$

pour toutes les valeurs réelles de x.»

La formule (103) peut être transformée d'une manière intéressante. On a:

$$\sum_{\nu=0}^{n}(k_0+k_1x+\ldots+k_\nu x^\nu)\left(\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}}\,d\omega^{\frac{1}{\alpha}}-\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\,d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\nu}}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^\nu\,d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\,x^\nu-\left(\sum_{\nu=0}^{n}k_\nu x^\nu\right)\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^{n+1}}{\underline{|\alpha(n+1)}}\,d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

[1] WEIERSTRASS. *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente.* Theorem A. Berl. Sitzungsber., 9 Juli 1885. Werke, Bd 3, Pag. 4.

On a de même:

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\lfloor \alpha n} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^n d\omega^{\frac{1}{\alpha}}} = 0$$

et par conséquent (voir 4[ième] note page 370 la note)

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{n} k_\nu x^\nu \right| \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{n+1}}{\lfloor \alpha(n+1)} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} = 0.$$

On obtient donc:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\lfloor \alpha\nu} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} x^\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^\nu}{\lfloor \alpha\nu} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\lfloor \alpha(\nu+1)} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

et par suite:

(104) $$FB^{(\alpha)}(x)$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^\nu}{\lfloor \alpha\nu} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\lfloor \alpha(\nu+1)} \right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Pour $\alpha = 1$ cette formule devient celle de M. Borel savoir:

$$FB^{(1)}(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{e^{-\omega} \omega^{\nu+1}}{\lfloor \nu+1}.$$

Le second membre de (104) est uniformément convergent par rapport à x. On peut faire par conséquent:

$$(105) \qquad FB^{(\alpha)}(x) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{\nu=0}^\infty \left[\left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu} k_\mu x^\mu\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

La formule (104) nous fait voir qu'on aurait pu obtenir les quatre formules fondamentales (102), (103), (104), (105) en faisant subir à l'intégrale (93) la transformation

$$(106) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{1}{y}\,\frac{F(xy)}{y-1}\left[\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left(E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) - y\left(E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) - 1\right)\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right]dy$$

et en appliquant au second membre des considérations tout à fait semblables à celles du § 2 de ma quatrième note.

Nous sommes donc arrivés aux égalités suivantes:

$$(107)\left\{\begin{aligned}
&FB^{(\alpha)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty}(k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu)\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= FB^{(\alpha)}(x) - \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu} k_\mu x^\mu\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= FB^{(\alpha)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\nu}}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\,\omega^\nu\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\; x^\nu
\end{aligned}\right.$$

$$
\left|\begin{aligned}
&= FB^{(\alpha)}(x) - \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int^{S} F(xy)\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\right) dy,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(108)\left\{\begin{aligned}
FB^{(\alpha)}(x) &= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu} k_\mu x^\mu\right)\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\, x^\nu \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(109)\left\{\begin{aligned}
&FA(x) \\
&= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\omega^\nu}{\underline{|\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu} k_\mu x^\mu\right)\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\underline{|\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\, x^\nu = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x)\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}\right.
$$

J'ai obtenu par conséquent le théorème suivant:

Théorème 10. »Désignons par A une étoile de centre a, par α une quantité positive et par $B^{(\alpha)}$ une étoile concentrique à A, inscrite dans A et engendrée dans le cas $2 \geqq \alpha > 0$ par la figure génératrice

$$\rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^\alpha; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq \alpha\frac{\pi}{2}$$

et dans le cas $\alpha \geqq 2$ par la figure génératrice

$$\rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^\alpha; \qquad -\pi \leqq \psi \leqq \pi$$

où ρ et ψ sont des coordonnées polaires relatives au vecteurs $x - a = re^{i\varphi}$; $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. L'étoile $B^{(\alpha)}$ s'approche infiniment du cercle de centre a inscrit en A quand α tend vers l'infini. Elle augmente continuellement avec $\frac{1}{\alpha}$ et devient pour $\alpha = 1$ l'étoile de Borel (Théorème 7 a). Elle renferme dans son intérieur tout domaine situé à l'intérieur de A pourvu que α soit chosi suffisamment petit.

L'étoile A étant l'étoile principale des constantes $F(a), F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ assujetties à la condition de Cauchy, l'étoile $B^{(\alpha)}$ est une étoile de convergence pour l'expression:

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{\lfloor 1}(x-a) + \ldots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{\lfloor \nu}(x-a)^\nu\right) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^\nu}{\lfloor \alpha\nu} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\lfloor \alpha(\nu+1)}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^\nu}{\lfloor \alpha\nu} - \frac{\omega^{\nu+1}}{\lfloor \alpha(\nu+1)}\right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{\lfloor \mu}(x-a)^\mu\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{\lfloor \nu} \frac{1}{\lfloor \alpha\nu} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^\nu = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{\alpha}};$$

$$F_\alpha(x-a) = F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{\lfloor 1} \frac{(x-a)}{\lfloor \alpha.1} + \frac{F^{(2)}(a)}{\lfloor 2} \frac{(x-a)^2}{\lfloor \alpha.2} + \frac{F^{(3)}(a)}{\lfloor 3} \frac{(x-a)^3}{\lfloor \alpha.3} + \ldots$$

De plus on a l'égalité:

$$FB^{(\alpha)}(x)$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{|\underline{1}}(x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}}(x-a)^{\nu}\right) \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}}\right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\underline{\mu}}(x-a)^{\mu}\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}} \frac{1}{|\underline{\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a))\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'expression limite:

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{F^{(1)}(a)}{|\underline{1}}(x-a) + \dots + \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}}(x-a)^{\nu}\right)$$

$$\times \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}}\right) d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^{\nu}}{|\underline{\alpha\nu}} - \frac{\omega^{\nu+1}}{|\underline{\alpha(\nu+1)}}\right) \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{F^{(\mu)}(a)}{|\underline{\mu}}(x-a)^{\mu}\right] d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{|\underline{\nu}} \frac{1}{|\underline{\alpha\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} \omega^{\nu} d\omega^{\frac{1}{\alpha}} (x-a)^{\nu}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_{\alpha}(\omega(x-a))\, d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

possède une étoile de convergence identique à l'étoile A et on a l'égalité:

$$FA(x)$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\ \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{F^{(1)}(a)}{\underline{|1}}(x-a)+\ldots+\frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}}(x-a)^{\nu}\right)$$

$$\times \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}}-\frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}}-\frac{\omega^{\ +1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{F^{(\mu)}(a)}{\underline{|\mu}}(x-a)^{\nu}\right)\right]d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\ \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}}\frac{1}{\underline{|\alpha\nu}}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^{\nu}\,d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\,(x-a)^{\nu}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}F_{\alpha}(\omega(x-a))d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

D'un autre côté l'expression limite:

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty}\ \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{F^{(1)}(a)}{\underline{|1}}(x-a)+\ldots+\frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}}(x-a)^{\nu}\right)$$

$$\times \int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}}-\frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty} \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}}-\frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{F^{(\mu)}(a)}{\underline{|\mu}}(x-a)^{\mu}\right)\right]d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}}\frac{1}{\underline{|\alpha\nu}}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^{\nu}\,d\omega^{\frac{1}{\alpha}}(x-a)^{\nu} = \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty}\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}F_{\alpha}(\omega(x-a))d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

possède le cercle de convergence C de centre zéro inscrit dans l'étoile principale A, et on a l'égalité

$$FC(x) = \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(F(a)+\frac{F^{(1)}(a)}{\underline{|1}}(x-a)+\dots+\frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}}(x-a)^{\nu}\right)$$

$$\times\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}}-\frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \quad \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty}\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}}-\frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{F^{(\mu)}(a)}{\underline{|\mu}}(x-a)^{\mu}\right)\right]d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}}\frac{1}{\underline{|\alpha\nu}}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\,\omega^{\nu}\,d\omega^{\frac{1}{\alpha}}(x-a)^{\nu}$$

$$= \quad \operatorname*{Lim}_{\alpha=\infty}\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}F_{\alpha}(\omega(x-a))\,d\omega^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Si dans l'intégration on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre fini ω on aura l'égalité:

$$FB^{(\alpha)}(x)-\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(F(x)+\frac{F^{(1)}(a)}{\underline{|1}}(x-a)+\dots+\frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}}(x-a)^{\nu}\right)$$

$$\times\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}}-\frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)d\omega^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= FB^{(\alpha)}(x)-\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\omega^{\nu}}{\underline{|\alpha\nu}}-\frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}\right)\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{F^{(\mu)}(a)}{\underline{|\mu}}(x-a)^{\mu}\right)\right]d\omega^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= FB^{(a)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{\underline{|\nu}} \frac{1}{\underline{|a\nu}} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} \omega^\nu d\omega^{\frac{1}{a}} (x-a)^\nu$$

$$= FB^{(a)}(x) - \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} F_a(\omega(x-a)) d\omega^{\frac{1}{a}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^S F(z) \left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} \int_0^{\omega^{\frac{1}{a}}} e^{-\omega^{\frac{1}{a}}} E_a\left(\omega \frac{x}{z}\right) d\omega^{\frac{1}{a}} \right) dz$$

qui a lieu partout à l'intérieur de $B^{(a)}$, S désignant un contour fermé embrassant la ligne (ax) ainsi que la figure génératrice par rapport à cette ligne et situé en même temps à l'intérieur de $B^{(a)}$.»

On peut former de plusieurs manières différentes, je le montrerai dans le paragraphe suivant, des formules tout à fait analogues aux formules (107), (108), (109); mais il paraît difficile de les établir de telle manière que l'étoile où elles convergent reste toujours, la fonction étant quelconque, une étoile de convergence. C'était là au contraire, je viens de le démontrer, une propriété fondamentale des formules (108), (109).

§ 5.

Regardons l'intégrale

(110) $$J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{F(xy)}{y-1} E\left(\omega\left(\frac{1}{y} - 1\right)\right) dy$$

$F(x)$ étant comme toujours défini par l'égalité

(4) $$FC(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots$$

où C est un cercle de centre zéro et de rayon r déterminé par l'égalité:

(1) $$\overline{\lim_{\nu=\infty}} |\sqrt[\nu]{k_\nu}| = \frac{1}{r}$$

et $E(x)$ désignant une fonction entière de x telle que

$$E(0) = 1. \tag{111}$$

Le contour S doit faire la limite d'une surface simplement connexe pour laquelle la fonction $F(xy)$ reste régulière. Il doit être parcouru dans le sens direct et embrasser les deux points $y = 0$, $y = 1$.

On a:

$$J(x) = F(x) + \frac{1}{2\pi i}\int^{(0)} \frac{F(xy)}{y-1} E\left(\omega\left(\frac{1}{y} - 1\right)\right) dy \tag{112}$$

ou

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1} + J(x). \tag{113}$$

La série

$$E(-\omega + h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} h^\nu$$

étant pour toutes les valeurs de ω toujours convergente par rapport à h on a pour toute valeur de ω

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left| \sqrt[\nu]{\frac{E^{(\nu)}(-\omega)}{\underline{|\nu}}} \right| = 0.$$

D'un autre côté en mettant $r_1 < r$ et en désignant par g_1 la limite supérieure de $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu x^\nu\right|$ pour $|x| = r_1$, on a d'après le théorème de CAUCHY-WEIERSTRASS [1]

$$|k_\mu| \leqq g_1 r_1^{-\mu}$$

et par conséquent

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} |k_\mu x^\mu| \leqq g_1 \frac{1 - \left(\frac{|x|}{r_1}\right)^{\nu+1}}{1 - \frac{|x|}{r_1}} = g_1 \left(\frac{|x|}{r_1}\right)^\nu \frac{1 - \left(\frac{r_1}{|x|}\right)^{\nu+1}}{1 - \frac{r_1}{|x|}}.$$

---

[1] WEIERSTRASS. Werke. Bd. 1, pag. 67.

La série:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(|k_0|+|k_1x|+\ldots+|k_\nu x^\nu|)\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}}h^{\nu+1}$$

est donc pour toutes les valeurs de x et de ω une série toujours convergente par rapport à h. Elle est encore, ω et h étant fixés, uniformément convergente pour un domaine quelconque de la variable x. Par conséquent (cf. pag. 158)

$$(114)\qquad \operatorname*{Lim}_{\nu=\infty}(|k_0|+|k_1x|+\ldots+|k_\nu x^\nu|)\frac{\int_0^\omega E^{(\nu+2)}(-\omega)\omega^{\nu+1}\,d\omega}{\underline{|\nu+1}}=0$$

et encore en faisant

$$\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}}\omega^{\nu+1}=\int_0^\omega\left(\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}}\omega^\nu-\frac{E^{(\nu+2)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}}\omega^{\nu+1}\right)d\omega$$

et à cause du théorème fondamental de WEIERSTRASS [1]

$$(115)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}(k_0+k_1x+\ldots+k_\nu x^\nu)\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}}\omega^{\nu+1}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}k_\nu\left(\int_0^\omega\frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}}\omega^\nu d\omega\right)x^\nu.$$

La quantité ω étant fixée, les deux membres de cette égalité sont toujours convergents par rapport à x.

Soit maintenant W un domaine fini dans la variété ω, soit ρ une quantité positive aussi grande qu'on voudra et désignons par g la limite supérieure de $|E(-\omega+h)|$ quand ω appartient à W et h à $|h|\leqq\rho$. On a alors

$$\left|\frac{E^{(\nu)}(-\omega)}{\underline{|\nu}}\right|\leqq g\rho^{-\nu}.$$

En se rappelant la formule

$$|k_\nu|\leqq g_1r_1^{-\nu}$$

[1] WEIERSTRASS. *Zur Functionenlehre.* Werke. Bd. 2, pag. 205.

on voit donc que

$$\left| k_\nu \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} \right| < (\nu + 1) \frac{g g_1}{(r_1\rho)^\nu} \frac{1}{\rho}.$$

Par conséquent la série:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} (\omega x)^\nu$$

x appartenant à un domaine fini donné, est par rapport à ω uniformément convergente pour un domaine fini quelconque. On a donc le droit de faire

$$(116) \qquad \int_0^\omega \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} (\omega x)^\nu \right] d\omega = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \int_0^\omega \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)\,\omega^\nu d\omega}{\underline{|\nu}} x^\nu.$$

On a par conséquent et à cause de (110), (113), (115) et (116) l'égalité suivante:

$$(117) \qquad \left\{ \begin{aligned} & F(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1} \\ & = F(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \left(\int_0^\omega \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} \omega^\nu d\omega \right) x^\nu \\ & = F(x) - \int_0^\omega \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu}} (\omega x)^\nu \right] d\omega \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{F(xy)}{y-1} E\left(\omega\left(\frac{1}{y} - 1\right)\right) dy. \end{aligned} \right.$$

Nous voyons immédiatement que par un procédé absolument égal au précédent on obtient encore la formule:

$$(118)\qquad F(x)-\sum_{\nu=0}^{\infty}(k_0+k_1x+\ldots+k_\nu x^\nu)\frac{1}{E(\omega)}\frac{E^{(\nu+1)}(0)}{\underline{|\nu+1}}\omega^{\nu+1}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int^{S}\frac{F(xy)}{y-1}\frac{E\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E(\omega)}dy.$$

Pour obtenir les expressions de $F(x)$ que nous cherchons il s'agit donc de trouver des fonctions $E(x)$ telles que le dernier membre, soit de (117) ou de (118), s'approche de zéro en même temps que ω va vers l'infini.

Regardons d'abord la formule (118) et mettons

$$E(x)=E_a(x).$$

Soit $B^{(\alpha)}$ l'étoile de centre zéro appartenant aux constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$ déjà considérée au § 4 et soit x un point à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$. Supposons d'abord

$$(34)\qquad 2>\alpha>0.$$

La figure génératrice par rapport à la ligne (01) est

$$\rho^{\frac{1}{\alpha}}=\cos\frac{\psi}{\alpha};\qquad -\alpha\frac{\pi}{2}\leqq\psi\leqq\alpha\frac{\pi}{2}.$$

Choisissons pour S un contour qui embrasse cette ligne, et tel que xy soit situé à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$.

Désignons par $\bar{S}$ le contour décrit par $z=\frac{1}{y}$ en même temps que S est décrit par la variable y.

La ligne $\bar{S}$ est fermée, embrasse l'origine et reste toujours extérieure à la ligne

$$\bar{\rho}^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\bar{\psi}}{\alpha}=1;\qquad (z=\bar{\rho}e^{i\bar{\psi}})$$

qui est la transformée de la ligne $\rho^{\frac{1}{\alpha}}=\cos\frac{\psi}{\alpha}$ au moyen de la substitution $z=\frac{1}{y}$.

On sait que $\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} E_\alpha(\omega z)$ s'approche indéfiniment de zéro pour chaque point de $\bar{S}$ situé dans l'angle

$$2\pi - \alpha\frac{\pi}{2} > \psi > \alpha\frac{\pi}{2}$$

et que $\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} |E_\alpha(\omega z)| = \frac{1}{\alpha}$ pour les points de $\bar{S}$ où

$$\bar{\psi} = \pm\alpha\frac{\pi}{2}.$$

On sait encore que

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\left(|E_\alpha(\omega z)| - \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}\bar{\rho}^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\bar{\psi}}{\alpha}}\right) = 0$$

pour chaque point de $\bar{S}$ qui est situé dans l'angle

$$-\alpha\frac{\pi}{2} < \bar{\psi} < \alpha\frac{\pi}{2}.$$

D'après la supposition concernant S et $\bar{S}$, la partie de $\bar{S}$ qui est située dans l'angle

$$-\alpha\frac{\pi}{2} < \bar{\psi} < \alpha\frac{\pi}{2}$$

reste toujours par rapport à la ligne $\bar{\rho}^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\bar{\psi}}{\alpha} = 1$ du même côté que l'origine. La limite supérieure de $\bar{\rho}^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\bar{\psi}}{\alpha}$ dans cet angle est par conséquent toujours plus petite que *un*.

On voit donc que:

$$\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\frac{E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E_\alpha(\omega)} = 0; \qquad 2 > \alpha > 0$$

pour chaque point de S et on voit encore que $\frac{E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E_\alpha(\omega)}$ s'approche d'une manière uniforme de zéro pour tous les points de S.

On arrive au même résultat pour

$$\alpha \geqq 2.$$

La figure génératrice par rapport à la ligne (01) est alors

$$\rho^{\frac{1}{\alpha}} = \cos\frac{\phi}{\alpha}; \qquad -\pi \leqq \phi \leqq \pi$$

et on a (c. f. (87)), δ désignant une quantité positive qui devient infiniment petite avec $\frac{1}{\omega}$:

$$\left| |E_\alpha(\omega z)| - \frac{1}{\alpha} e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\overline{\phi}}{\alpha}} \right| < \delta e^{\omega^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\overline{\phi}}{\alpha}}; \qquad -\pi \leqq \overline{\phi} \leqq \pi.$$

Revenons maintenant à la formule (118).

On a:

$$\text{(119)} \qquad \lim_{\omega=\infty} \int^{S} \frac{F(xy)}{y-1} \frac{E_\alpha\left(\frac{\omega}{y}\right)}{E_\alpha(\omega)} dy = 0$$

Par conséquent:

$$\text{(120)} \qquad \left\{ \begin{aligned} FB^{(\alpha)}(x) &= \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{1}{E_\alpha(\omega)} \cdot \frac{E_\alpha^{(\nu+1)}(0)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1} \\ &= \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}} \end{aligned} \right.$$

égalité valable partout à l'intérieur de l'étoile $B^{(\alpha)}$ et où l'expression:

$$\text{(121)} \qquad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{\omega^{\nu+1}}{\underline{|\alpha(\nu+1)}}$$

est uniformément convergente pour tout domaine intérieur à $B^{(\alpha)}$.

On voit l'analogie complète avec l'expression de M. Borel qu'on obtient en faisant $\alpha = 1$.

Faisons encore la remarque qu'on peut mettre pour $E(x)$ au lieu de $E_\alpha(x)$ une fonction de l'espèce que j'ai considérée page 51; c'est à dire une fonction qui s'approche indéfiniment de zéro quand x tend vers l'infini le long d'un vecteur quelconque autre que l'axe réel positif, tandis qu'elle sera une quantité réelle positive croissant au delà de toute limite quand x tendra vers l'infini le long de l'axe réel positif. En choisissant en outre cette fonction de telle sorte que $\frac{E(\omega x)}{E(\omega)}$ s'approche de zéro d'une manière uniforme tant que x appartient à un domaine fini situé en dehors de la partie de l'axe réel positif compris entre $x = 1$ et l'infini, on obtient une expression

$$(122) \qquad \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{E(\omega)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \frac{E^{(\nu+1)}(0)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1}$$

qui est uniformément convergente pour tout domaine intérieur à l'étoile principale A et qui représente la branche fonctionnelle $FA(x)$ partout à l'intérieur de cette étoile.

J'ai considéré ailleurs[1] une telle fonction $E(x)$ et j'y reviendrai dans une note suivante.

Le résultat auquel nous sommes arrivés par l'étude de la formule (118) peut être résumé dans le théorème suivant:

Théorème 11. »Désignons par A une étoile de centre a, par α une quantité positive et par $B^{(\alpha)}$ une étoile concentrique à A inscrite en A et engendrée dans le cas $2 > \alpha > 0$ par la figure génératrice

$$\rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^\alpha; \qquad -\alpha\frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq \alpha\frac{\pi}{2}$$

et dans le cas $\alpha \geqq 2$ par la figure génératrice

$$\rho = r\left(\cos\frac{\psi}{\alpha}\right)^\alpha; \qquad -\pi \leqq \psi \leqq \pi$$

où ρ et ψ sont des coordonnées polaires relatives au vecteur $x - a = re^{i\varphi}$; $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. L'étoile A étant l'étoile principale appartenant aux constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., $F^{(\nu)}(a)$, ... assujetties à la condition de CAUCHY, on a les deux égalités:

[1] *Un nouveau théorème général de la théorie des fonctions analytiques.* Comptes Rendus etc. T. 138, 11 avril 1904.

Voir encore pour cette fonction:

E. PHRAGMÉN. *Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions.* Ce journal, t. 28, p. 357—359.

$$FB^{(\alpha)}(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \frac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\alpha(\mu+1)}},$$

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0} \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \frac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\alpha(\mu+1)}}$$

où $E_\alpha(x)$ désigne la fonction:

$$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\underline{|\alpha\nu}}$$

et où ω est une variable positive.

La première de ces égalités a lieu partout à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$ et la seconde partout à l'intérieur de A. Le second membre de la première égalité est uniformément convergent pour tout domaine intérieur à $B^{(\alpha)}$, le second membre de la deuxième égalité est uniformément convergent pour tout domaine intérieur à A.

Si on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre fini ω on aura l'égalité

$$FB^{(\alpha)}(x) - \frac{1}{E_\alpha(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu\right) \frac{\omega^{\mu+1}}{\underline{|\alpha(\mu+1)}}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{S} \frac{F(z)}{z-x} \, \frac{E_\alpha\left(\omega \dfrac{x-a}{z-a}\right)}{E_\alpha(\omega)} \, dz$$

qui a lieu partout à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$ si on désigne par S un contour fermé qui étant situé à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$ embrasse la figure génératrice par rapport à la droite (ax).

En désignant par $E(x)$ une fonction telle que, pour chaque domaine fini situé en dehors de la partie de l'axe réel compris entre $x = 1$ et l'infini $\dfrac{E(\omega x)}{E(\omega)}$ s'approche uniformément de zéro lorsque ω augmente au delà de toute limite on a

$$FA(x) = \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{E(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{E^{(\nu+1)}(0)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1}$$

où le second membre est uniformément convergent pour tout domaine à l'intérieur de A.

Si on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre fini ω on a:

$$FA(x)$$
$$-\frac{1}{E(\omega)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}} F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \right) \frac{E^{(\nu+1)}(0)}{\underline{|\nu+1}} \omega^{\nu+1}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{S} \frac{F(z)}{z-x} \frac{E\left(\omega \frac{x-a}{z-a}\right)}{E(\omega)} d\omega$$

où le contour S est un contour fermé qui étant situé à l'intérieur de A embrasse la droite (ax).»

Revenons maintenant à la formule (117) et faisons y comme auparavant dans la formule (118)

$$E(x) = E_{\alpha}(x).$$

Supposons encore:

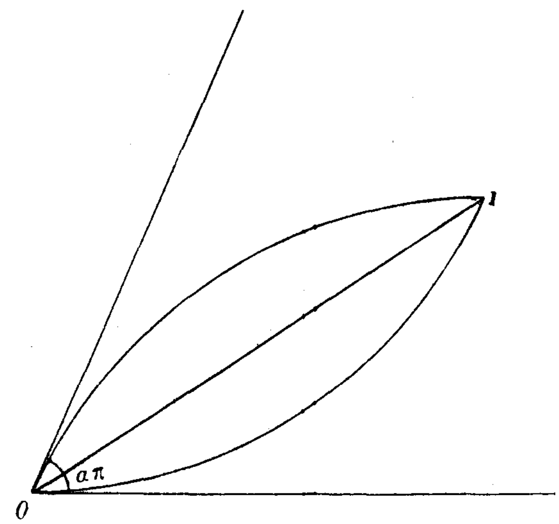
$$2 > \alpha > 0.$$

Faisons décrire à la variable y autour de la ligne (01) une figure cunéiforme composée de deux arcs de cercle symétriques par rapport à cette ligne et se coupant aux deux points 0 et 1 sous l'angle $\alpha\pi$.

Désignons par $V^{(\alpha)}$ l'étoile de centre zéro inscrite dans l'étoile principale A qui est engendrée par cette figure cunéiforme comme figure génératrice.[1]

---

[1] pour la définition de »figure génératrice» engendrant une étoile inscrite dans une autre étoile, voir page 219 de ma troisième note.



C'est, légérement modifiée la même étoile que j'ai discutée autre fois avec M. Vito Volterra.[1]

Choisissons pour S une ligne qui embrasse la figure génératrice par rapport à la ligne (01) en étant en même temps située à l'intérieur de l'étoile $V^{(\alpha)}$. Désignons par $\bar{S}$ une ligne décrite par $z = \frac{1}{y}$ en même temps que y décrit la ligne S. A la figure cunéiforme dans le plan des y qui a la ligne (01) pour axe correspondent dans le plan des z deux demi-droites symmétriques par rapport à l'axe réel passant par le point $z = 1$ et se coupant sous l'angle $\alpha\pi$.

La ligne $\bar{S}$ est donc une ligne fermée qui embrasse l'origine et reste toujours du même côté des deux demi-droites que l'origine. On voit donc, à cause de la propriété connue de la fonction $E_\alpha(x)$, que

$$\lim_{\omega=\infty} E_\alpha(\omega(z-1))$$

s'approche indéfiniment de zéro et d'une manière uniforme, pour tous les points z qui appartiennent à $\bar{S}$.

On a par conséquent:

$$(123) \qquad \lim_{\omega=\infty} \int^{S} \frac{F(xy)}{y-1} E_\alpha\left(\omega\left(\frac{1}{y}-1\right)\right) dy = 0$$

[1] voir page 229 de ma troisième note.

et on obtient au moyen de la formule (117):

$$
(124)\quad \begin{cases}
FV^{(\alpha)}(x) = \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \dfrac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{\lfloor \nu+1} \omega^{\nu+1}, \\[2ex]
FV^{(\alpha)}(x) = \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \left(\int\limits_0^{\omega} \dfrac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{\lfloor \nu} \omega^\nu d\omega \right) x^\nu, \\[2ex]
FV^{(\alpha)}(x) = \int\limits_0^{\infty} \left(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \dfrac{E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)}{\lfloor \nu} (\omega x)^\nu \right) d\omega.
\end{cases}
$$

En faisant $\alpha = 1$ on obtient pour l'étoile $V^{(\alpha)}$ l'étoile de M. Borel que j'ai désignée par $B^{(1)}$. La première et la troisième formule deviennent alors celles de M. Borel, la seconde celle que j'ai indiquée dans ma quatrième note (formule (37)).

Si on introduit au lieu de $E_\alpha(x)$ une fonction $E(x)$ de l'espèce que j'ai considérée dans mes notes des Comptes Rendus aux dates du 11 et du 18 avril 1904 c'est à dire une fonction telle que $E(0) = 1$ et que, quand la variable réelle et positive ω augmente au dessus de toute limite, $E(\omega x)$ s'approche d'une manière uniforme de zéro pour un domaine fini quelconque de x ne comprenant pas l'axe réel positif, on obtient les formules:

$$
(125)\quad \begin{cases}
FA(x) = \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (k_0 + k_1 x + \ldots + k_\nu x^\nu) \dfrac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\lfloor \nu+1} \omega^{\nu+1}, \\[2ex]
FA(x) = \lim\limits_{\omega=\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \left(\int\limits_0^{\omega} \dfrac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\lfloor \nu} \omega^\nu d\omega \right) x^\nu, \\[2ex]
FA(x) = \int\limits_0^{\infty} \left(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} k_\nu \dfrac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\lfloor \nu} (\omega x)^\nu \right) d\omega
\end{cases}
$$

où les seconds membres sont uniformément convergents pour chaque domaine fini situé à l'intérieur de l'étoile principale.

Les résultats que nous venons d'obtenir par la considération de la formule (117) peuvent être résumés dans le théorème suivant:

Théorème 11 b. »Désignons par A une étoile de centre a, par α une quantité positive plus petite que 2 et par $V^{(\alpha)}$ une étoile concentrique à A, inscrite en A et engendrée par une figure cunéiforme ayant l'angle $\alpha\pi$ et tournant autour d'un de ses sommets qui doit être situé au centre a. L'étoile A étant l'étoile principale appartenant aux constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a), \ldots, F^{(\mu)}(a), \ldots$ assujetties à la condition de Cauchy on a les deux systèmes d'égalités.

$$FV^{(\alpha)}(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\underline{|\nu}}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}\right)\frac{E_{\alpha}^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}}\,\omega^{\nu+1},$$

$$FV^{(\alpha)}(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\int\limits_0^{\omega} E_{\alpha}^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^{\nu}d\omega}{(\underline{|\nu})^2}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu},$$

$$FV^{(\alpha)}(x) = \int\limits_0^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{E_{\alpha}^{(\nu+1)}(-\omega)}{(\underline{|\nu})^2}F^{(\nu)}(a)(\omega x)^{\nu}\right)d\omega,$$

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\left(F(a) + \frac{1}{\underline{|1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\underline{|\nu}}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}\right)\frac{E_{\alpha}^{(\nu+1)}(-\omega)}{\underline{|\nu+1}}\,\omega^{\nu+1},$$

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\operatorname*{Lim}_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\int\limits_0^{\omega} E_{\alpha}^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^{\nu}d\omega}{(\underline{|\nu})^2}F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu},$$

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\alpha=0}\int\limits_0^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{E_{\alpha}^{(\nu+1)}(-\omega)}{(\underline{|\nu})^2}F^{(\nu)}(a)(\omega x)^{\nu}\right)d\omega$$

où $E_\alpha(x)$ désigne la fonction

$$E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\lfloor \alpha\nu}$$

et où ω est une variable positive. Le premier système d'égalités a lieu partout à l'intérieur de $V^{(a)}$ et le second partout à l'intérieur de A. Les seconds membres du premier système sont uniformément convergents pour tout domaine à l'intérieur de $V^{(a)}$, les seconds membres du deuxième système sont uniformément convergents pour tout domaine à l'intérieur de A. Si on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre fini ω on aura l'égalité:

$$FV^{(a)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(F(a) + \frac{1}{\lfloor 1} F^{(1)}(a)(x-a) + \dots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\lfloor \nu} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu\right) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{\lfloor \nu+1} \omega^{\nu+1}$$

$$= FV^{(a)}(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^\omega E_\alpha^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^\nu d\omega}{(\lfloor \nu)^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu$$

$$= FV^{(a)}(x) - \int_0^\omega \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(\lfloor \nu)^2} F^{(\nu)}(a)(\omega(x-a))^\nu\right) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^S \frac{F(z)}{z-x} E_\alpha\left(\omega \frac{x-z}{z-a}\right) dz$$

qui a lieu partout à l'intérieur de $V^{(a)}$ si S désigne un contour fermé situé à l'intérieur de $V^{(a)}$ et embrassant la figure génératrice par rapport à la droite (ax).

Si on introduit au lieu de $E_\alpha(x)$ une fonction $E(x)$ telle que $E(\omega x)$ s'approche indéfiniment de zéro quand la variable reelle positive ω augmente au dessus de toute limite tant que x appartient à un domaine fini ne comprenant pas l'axe réel positif, on obtient les formules

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(F(a) + \frac{1}{|\!\underline{1}} F^{(1)}(x)(x-a) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{|\!\underline{\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu} \Big) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\!\underline{\nu+1}} \omega^{\nu+1},$$

$$FA(x) = \operatorname*{Lim}_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} E^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^{\nu} d\omega}{(|\!\underline{\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu},$$

$$FA(x) = \int_0^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\!\underline{\nu})} F^{(\nu)}(a)(\omega(x-a))^{\nu} d\omega$$

où les seconds membres sont uniformément convergents pour tout domaine à l'intérieur de A.

Si on s'arrête dans le passage à l'infini à un nombre fini ω on aura:

$$FA(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(F(a) + \frac{1}{|\!\underline{1}} F^{(1)}(a(x-a) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{|\!\underline{\nu}} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu} \Big) \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{|\!\underline{\nu+1}} \omega^{\nu+1}$$

$$= FA(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int_0^{\omega} E^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^{\nu} d\omega}{(|\!\underline{\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu}$$

$$= FA(x) - \int_1^{\omega} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{E^{(\nu+1)}(-\omega)}{(|\!\underline{\nu})^2} F^{(\nu)}(a)(\omega(x-a))^{\nu} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int^{S} \frac{F(z)}{z-x} E\Big(\omega \frac{x-z}{z-a}\Big) dz$$

où S désigne un contour fermé embrassant la ligne (ax) et situé à l'intérieur de l'étoile A.»

L'expression

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int\limits_0^{\omega} E^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^{\nu}\, d\omega}{(\lfloor \nu)^2} k_\nu x^\nu$$

dans le second membre de l'égalité

$$FA(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\int\limits_0^{\omega} E^{(\nu+1)}(-\omega)\omega^{\nu}\, d\omega}{(\lfloor \nu)^2} k_\nu x^\nu \tag{126}$$

est une fonction entière de la variable x.

L'égalité (126) nous permet par conséquent de compléter ainsi le théorème ***G a.***

G b. »Soit $FA(x)$ une branche fonctionnelle quelconque appartenant aux constantes $k_0, k_1, \ldots, k_\nu, \ldots$ dont A est l'étoile principale. On peut toujours à l'aide des constantes k former une fonction entière de x, $G_\omega(x)$ qui en outre de x et des k dépende d'un paramètre réel et positif ω et qui soit telle que

$$\lim_{\omega=\infty} G_\omega(x) = FA(x).»$$

Il y a, comme je l'ai déjà remarqué à la fin du paragraphe précédent, cette différence entre les formules obtenues alors et celles du présent paragraphe qu'il n'est pas établi que les dernières ont une étoile de convergence.