KONVERGENZPROBLEME IN DER THEORIE DER GAMMAFUNKTION.

VON

ALFRED TAUBER

in WIEN.

Die Untersuchung der von zwei Variabeln x, α abhängigen Funktion

$$\varphi(x, \alpha) = x^{\alpha-1} e^{x} \int_{x}^{\infty} e^{-u} u^{-\alpha} du = \int_{0}^{\infty} e^{-xt} (1+t)^{-\alpha} dt, \quad \Re(x) > 0 \tag{1}$$

führt beinahe unmittelbar, allerdings abgesehen von der etwas umständlich zu behandelnden Konvergenzfrage, für $\varphi(x, \alpha)$ zu einer Reihenentwicklung, bei welcher, im Gegensatze zu anderen[1] weit komplizierteren auf diesem Gebiete, jeder Term die Trennung der beiden Variabeln x, α involviert, und welche bei $\Re(x) > 0$ für alle α unbedingt konvergiert. Es ist dies eine nach Binomialkoeffizienten von $(\alpha - 1)$ fortschreitende Reihe

$$\varphi(x, \alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \binom{\alpha-1}{\nu} \Phi_{\nu}(x), \quad \Re(x) > 0 \tag{2}$$

worin die Funktionen $\Phi_{\nu}(x)$ *linear aus dem Integrallogarithmus zu berechnen sind* u. z. *entweder sukzessive*

$$\Phi_0(x) = \varphi(x, 1) = -e^{x} \operatorname{li}(e^{-x}) \tag{3}$$

$$\Phi_1(x = (x+1)\Phi_0(x) - 1 \tag{3 a}$$

$$\Phi_{\nu+1}(x) = (x + 2\nu + 1)\Phi_{\nu}(x) - \nu^2 \Phi_{\nu-1}(x), \qquad \nu \geqq 1 \tag{3 b}$$

oder auch independent,[2] vgl. Formel (10).

---

[1] Vgl. N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, S. 213—215.

[2] Andere explizite Entwicklungen in der Theorie der Gammafunktion werden im Abschnitt V betrachtet.

Zugleich aber bedeutet die Entwicklung (2) *eine solche nach Kettenbruchresten* von $\varphi(x) = \varphi(x, 1)$, denn aus der bekannten[1] Darstellung von $\varphi(x) = \lim_{\nu \to \infty} \chi_\nu(x)/\psi_\nu(x)$ als Grenzwert von Brüchen mit der für Zähler und Nenner gemeinsamen Rekursion

$$(4) \quad \begin{array}{l|l} \chi_{\nu+1}(x) = (x + 2\nu + 1)\chi_\nu(x) - \nu^2 \chi_{\nu-1}(x) & \chi_0(x) = 0, \ \chi_1(x) = 1 \\ \psi_{\nu+1}(x) = (x + 2\nu + 1)\psi_\nu(x) - \nu^2 \psi_{\nu-1}(x) & \psi_0(x) = 1, \ \psi_1(x) = x + 1 \end{array}$$

geht hervor, dass $\Phi_\nu(x)/\nu!$ mit dem Kettenbruchrest von $\varphi(x)$

$$(4\,a) \quad \frac{\chi_\nu(x)\varphi(x) - \psi_\nu(x)}{\nu!}$$

zusammenfällt. An Betrag wird dieser Rest schliesslich kleiner als jede noch so hohe Potenz von ν^{-1}. Zu dem nun folgenden, *elementar-reihentheoretischen Beweis* des Satzes (2), sowie der Giltigkeit einer auf ähnlichem Prinzip beruhenden Entwicklung von $\Gamma(x)$ wird lediglich die notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung $\Re(x) > 0$ gestellt.

I. Erteilt man dem zweiten Integral in (1) die Form

$$(5) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}\left(1 - \frac{t}{1+t}\right)^{\alpha-1} dt, \qquad t \text{ reell positiv}$$

und entwickelt den Ausdruck $\left(1 - \frac{t}{1+t}\right)^{\alpha-1}$ nach dem Binomialsatz, was freilich zu der *vorläufigen Annahme* $\Re(\alpha) > 1$ zwingt, weil nur dann die Binomialreihe gleichmässig[2] konvergiert, so entsteht aus (5) eine Reihe

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t} \sum_{\nu=0}^\infty (-1)^\nu \binom{\alpha-1}{\nu}\left(\frac{t}{1+t}\right)^\nu dt = \sum_{\nu=0}^\infty (-1)^\nu \binom{\alpha-1}{\nu} \varphi_\nu(x)$$

---

[1] Vgl. N. Nielsen, Theorie des Integrallogarithmus, Leipzig 1906, S. 45, die mit ν in Formel (3) bezeichnete Zahl Null gesetzt.

[2] Damit die Summe der $(n+1)$ ersten Terme von $(1-\vartheta)^{\alpha-1}$ für $\vartheta = 1$, nämlich

$$1 - \binom{\alpha-1}{1} + \binom{\alpha-1}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{\alpha-1}{n} = (-1)^n \binom{\alpha-2}{n}$$

mit wachsendem n beliebig klein wird, muss die obige Bedingung $\Re(\alpha) > 1$ erfüllt sein, weil $\lim_{n\to\infty} \binom{\gamma}{n}$ nur für $\Re(\gamma) > -1$ verschwindet, welch letzteren Satz man auch rein arithmetisch beweisen kann (vgl. Abschnitt IV).

Bei allen hier auftretenden Potenzen ist die Basis positiv und deren Logarithmus reell zu verstehen.

und zwischen ihren Koeffizienten

$$(6) \qquad \varphi_\nu(x) = \int_0^\infty \frac{t^\nu e^{-xt}\,dt}{(1+t)^{\nu+1}}$$

von denen die beiden ersten, $\varphi_0(x)$ und $\varphi_1(x)$, durch

$$(7) \qquad \varphi_0(x) = \varphi(x),\ \varphi_1(x) = (x+1)\,\varphi(x) - 1$$

definiert sind, besteht die lineare Beziehung

$$(7\,\mathrm{a}) \qquad (\nu+1)\,\varphi_{\nu+1}(x) = (x+2\nu+1)\,\varphi_\nu(x) - \nu\,\varphi_{\nu-1}(x), \qquad \nu \geqq 1.$$

Denn zunächst zeigt eine Umformung von $\varphi_1(x)$

$$\varphi_1(x) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\right] e^{-xt}\,dt = \varphi_0(x) + \int_0^\infty e^{-xt}\,d\,\frac{1}{1+t}$$

und die Anwendung der partiellen Integration

$$\varphi_1(x) = \varphi_0(x) + \left\{\frac{e^{-xt}}{1+t}\right\}_{t=0}^{t=\infty} + x\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\,dt}{1+t}$$

die Richtigkeit der zweiten Gleichung (7). Anderseits ist das für $\nu \geqq 0$ gebildete Integral

$$(8) \qquad \int_0^\infty \frac{t^\nu e^{-xt}\,dt}{(1+t)^{\nu+2}} = \int_0^\infty \left[\frac{t^\nu}{(1+t)^{\nu+1}} - \frac{t^{\nu+1}}{(1+t)^{\nu+2}}\right] e^{-xt}\,dt = \varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu+1}(x)$$

wenn man wieder von der partiellen Integration Gebrauch macht

$$\int_0^\infty \frac{t^\nu e^{-xt}}{\nu+1}\,d\,\frac{-1}{(1+t)^{\nu+1}} = \left[\frac{-t^\nu e^{-xt}}{(\nu+1)(1+t)^{\nu+1}}\right]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty \frac{\nu t^{\nu-1} - x t^\nu}{\nu+1}\,\frac{e^{-xt}\,dt}{(1+t)^{\nu+1}}$$

mit Rücksicht auf die eben abgeleitete Gleichung (8), dort $\nu-1$ statt ν geschrieben,

$$(8\,\mathrm{a}) \qquad \int_0^\infty \frac{t^{\nu-1} e^{-xt}\,dt}{(1+t)^{\nu+1}} = \varphi_{\nu-1}(x) - \varphi_\nu(x), \qquad \nu \geqq 1,$$

für $\nu \geqq 1$ auch linear durch die Funktionen $\varphi_{\nu-1}(x)$, $\varphi_\nu(x)$ ausdrückbar:

(8 b) $$\int_0^\infty \frac{t^\nu e^{-xt}\,dt}{(1+t)^{\nu+2}} = \frac{\nu}{\nu+1}\Big[\varphi_{\nu-1}(x) - \varphi_\nu(x)\Big] - \frac{x}{\nu+1}\varphi_\nu(x)$$

und es besagt die Gleichsetzung der rechten Seite von (8) mit der von (8 b) dasselbe wie die nachzuweisende Rekursion (7 a). Die Einführung der Funktionen $\Phi_\nu(x) = \nu!\,\varphi_\nu(x)$ in die letztere liefert aber die Rekursion (3 b), daher *besitzen die* $\Phi_\nu(x)$ *eine mit derjenigen der Funktionen* $\psi_\nu(x)\varphi(x) - \chi_\nu(x)$ *identische Rekursion, ausserdem für* $\nu = 0$ *und* 1 *dieselben Anfangsterme, fallen also, wie behauptet, zusammen.*

Die Kettenbruch-Reste $\varphi_\nu(x)$ besitzen die Eigenschaft, *dass die Reihe* $\sum\limits_0^\infty \varphi_\nu(x) = \frac{1}{x}$ *oder allgemeiner*

(9) $$\sum_{\nu=\varkappa}^\infty \binom{\nu}{\varkappa}\varphi_\nu(x) = \frac{\varkappa!}{x^{\varkappa+1}}$$

konvergiert. Dies resultiert zwar nicht direkt aus der Definition (6), weil $\sum\limits_{\nu=\varkappa}^\infty \binom{\nu}{\varkappa}\left(\frac{t}{1+t}\right)^\nu$ für $t \to \infty$ divergiert, wohl aber durch eine Grenzbetrachtung: Die endliche Summe

$$\sum_{\nu=\varkappa}^{n-1}\binom{\nu}{\varkappa}\varphi_\nu(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}\sum_{\nu=\varkappa}^{n-1}\binom{\nu}{\varkappa}\left(\frac{t}{1+t}\right)^\nu dt$$

lässt sich einfacher darstellen

$$\int_0^\infty e^{-xt}\left[t^\varkappa - \left(\frac{t}{1+t}\right)^n \sum_{\lambda=0}^{\varkappa}\binom{n}{\varkappa-\lambda} t^\lambda\right] dt$$

und man braucht sonach nur das Verschwinden des Minuenden für $n \to \infty$ nachzuweisen. Hiezu zerlegt man unter Wahl eines geeigneten Wertes $T = n^\sigma$, bei positivem σ, jedes der Integrale

$$\int_0^\infty \binom{n}{\varkappa-\lambda}\frac{t^{n+\lambda}e^{-xt}\,dt}{(1+t)^n} = \int_0^T + \int_T^\infty$$

mit der Bedingung für T

$$\binom{n}{\varkappa-\lambda}\frac{T^{n+\lambda}}{(1+T)^n}<\frac{1}{n^{\tau}},\qquad \tau>0 \tag{9 a}$$

welche bewirkt, dass sowohl das erste als auch das zweite Teilintegral für wachsende n klein wird, ersteres mit $n^{-\tau}\int\limits_0^\infty e^{-xt}\,dt$ vergleichbar, letzteres mit

$$\binom{n}{\varkappa-\lambda}\int\limits_T^\infty t^\lambda e^{-xt}dt\sim\frac{1}{x}\binom{n}{\varkappa-\lambda}e^{-xT}T^\lambda.$$

Die Wahl eines positiven σ gemäss (9 a)

$$\binom{n}{\varkappa-\lambda}n^{\lambda\sigma+\tau}<(1+n^{-\sigma})^n$$

ist jedenfalls bei $\tau<1$ möglich, z. B. wenn rechts schon der einzige Summand

$$\binom{n}{\varkappa-\lambda+1}n^{-\sigma(\varkappa-\lambda+1)}$$

der Binomialentwicklung die linke Seite für ein genügend grosses n übersteigt, was dem Exponenten σ die Bedingung

$$n^{\sigma(\varkappa+1)+\tau}<\frac{n-\varkappa+\lambda}{\varkappa-\lambda+1}$$

auferlegt und bei $\sigma<\dfrac{1-\tau}{\varkappa+1}$ zutrifft.

Überdies konvergiert die Reihe (9) absolut, weil sie für ein reell-positives x lauter positive Glieder aufweist und für komplexe x die Ungleichung gilt, vgl. (6)

$$|\varphi_\nu(x)|<\varphi_\nu(p),\qquad p=\Re(x)>0.$$

Ferner lässt sich auch eine independente Darstellung der Kettenbruchreste $\varphi_\nu(x)$ mithilfe von (7 a) verifizieren, es ist

$$\frac{\Phi_\nu(x)}{\nu!}=\varphi_\nu(x)=\varphi(x)\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}\frac{x^\mu}{\mu!}-\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{x^\mu}{\mu!}\sum_{\lambda=0}^{\nu-1-\mu}\frac{1}{\nu-\lambda}\binom{\lambda+\mu}{\lambda} \tag{10}$$

II. *Von der vorläufigen,* nur Beweiszwecken dienenden *Beschränkung* $\Re(\alpha) > 1$ *befreit man sich* nachträglich durch den Schluss von $\alpha + 1$ auf α, welchen die Funktionalgleichung von $\varphi(x, \alpha)$

$$x\varphi(x, \alpha) + \alpha\varphi(x, \alpha + 1) = 1 \tag{11}$$

ermöglicht. Es konvergiert nämlich die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{\gamma}{\nu} \varphi_{\nu}(x), \qquad \Re(x) > 0$$

absolut für jeden reellen oder komplexen Wert von γ, nicht nur für $\Re(\gamma) > -1$, in welchem Falle dies wegen $\lim\limits_{\nu \to \infty} \binom{\gamma}{\nu} = 0$ und der Konvergenz von $\sum\limits_{0}^{\infty} |\varphi_{\nu}(x)|$ evident ist, sondern auch wenn $\Re(\gamma)$ zwischen $(-\varkappa)$ und $(-\varkappa - 1)$ liegt, weil dann, wie aus der Identität

$$\binom{\gamma}{\nu} = \binom{\gamma + \varkappa}{\nu} \frac{\binom{\gamma + \varkappa - \nu}{\varkappa}}{\binom{\gamma + \varkappa}{\varkappa}}, \qquad \gamma + \varkappa \neq 0$$

zu ersehen, $\binom{\gamma}{\nu}$ für grosse ν als obere Grenze den Betrag

$$\left|\binom{\gamma + \varkappa - \nu}{\varkappa}\right| < \binom{\nu - 1 + |\gamma|}{\varkappa} = \sum_{\lambda=0}^{\varkappa} \binom{\nu}{\lambda} \binom{|\gamma| - 1}{\varkappa - \lambda}$$

hat, und $\sum\limits_{\nu=\varkappa}^{\infty} \binom{\nu}{\lambda} |\varphi_{\nu}(x)|$ sich von der konvergenten Reihe $\sum\limits_{\nu=\lambda}^{\infty} \binom{\nu}{\lambda} |\varphi_{\nu}(x)|$ nur um eine endliche Zahl von Termen unterscheidet.

Deshalb darf man, *die Giltigkeit der Entwicklung* (2) *für* $(\alpha + 1)$ *statt* α *schon als bewiesen angenommen,*

$$\varphi(x, \alpha + 1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{\alpha}{\nu} \varphi_{\nu}(x) \tag{11 a}$$

die mit α multiplizierte und durch Einführung der Binomialkoeffizienten von $(\alpha - 1)$ umgeformte rechte Seite

$$\alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} \varphi_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left[(\nu+1) \binom{\alpha-1}{\nu+1} + (2\nu+1) \binom{\alpha-1}{\nu} + \nu \binom{\alpha-1}{\nu-1} \right] \varphi_\nu(x)$$

nach den letzteren ordnen

$$[\varphi_0(x) - \varphi_1(x)] + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\alpha-1}{\nu} [-\nu \varphi_{\nu-1}(x) + (2\nu+1)\varphi_\nu(x) - (\nu+1)\varphi_{\nu+1}(x)].$$

Weil aber der Ausdruck in der eckigen Klammer nach Formel (7 a) gleich $-x\varphi_\nu(x)$ ist, resultiert für das α-fache der rechten Seite von (11 a) der Wert

$$[1 - x\varphi_0(x)] - x \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\alpha-1}{\nu} \varphi_\nu(x) = 1 - x \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\alpha-1}{\nu} \varphi_\nu(x),$$

sodass wegen der Funktionalgleichung (11) die Entwicklung (2) für $\varphi(x, \alpha)$ gilt.

Allerdings kommt eine halbwegs gute Konvergenz der Reihe (2) bei reellen x, α bloss für ziemlich grosse x zustande, wobei α etwa zwischen 1 und 2 gedacht wird. Zur praktischen Verwendung bliebe wohl noch eine geeignete Umformung der Reihe für $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(x, \alpha)}{\alpha - 1}$

$$\varphi_1(x) + \frac{2-\alpha}{2} \varphi_2(x) + \frac{(2-\alpha)(3-\alpha)}{2 \cdot 3} \varphi_3(x) + \ldots, \qquad 1 < \alpha < 2$$

deren Glieder sämtlich positiv sind, zu finden.

III. Als *Verallgemeinerung* des erörterten Problems, einen Zusammenhang zwischen $\varphi(x, \alpha)$ und $\varphi(x, 1) = \varphi(x)$ herzustellen, ist es aufzufassen, wenn die Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung

$$L(x) \frac{dz}{dx} - [M(x) + \beta L'(x)] z = N(x) \tag{12}$$

auf den Fall $\beta = 0$ zurückgeführt werden soll, weil ja $\varphi(x, \alpha)$ resp. $\varphi(x)$ Lösungen von

$$x \frac{\partial \varphi(x, \alpha)}{\partial x} - [x + (\alpha - 1)] \varphi(x, \alpha) + 1 = 0 \tag{13}$$

$$\text{resp. } x\varphi'(x) - x\varphi(x) + 1 = 0$$

sind. Entwickelt man sonach z formal, analog (2) *in eine Reihe nach Binomialkoeffizienten von β*

$$z=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\binom{\beta}{\nu}\frac{\Phi_{\nu}(x)}{\nu!}, \tag{14}$$

so geht die Differentialgleichung durch Substitution dieser Reihe, mit Rücksicht auf die Identität $\beta\binom{\beta}{\nu}=(\nu+1)\binom{\beta}{\nu+1}+\nu\binom{\beta}{\nu}$, über in

$$N(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\binom{\beta}{\nu}\left[L(x)\,\Phi'_{\nu}(x)-M(x)\,\Phi_{\nu}(x)\right]-$$

$$-L'(x)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\left[(\nu+1)\binom{\beta}{\nu+1}+\nu\binom{\beta}{\nu}\right]\Phi_{\nu}(x)$$

und der Vergleich des Faktors jedes einzelnen Binomialkoeffizienten $\binom{\beta}{\nu}$ ergibt für $\nu=0$ und $\nu\geqq 1$

$$N(x)=L(x)\,\Phi'_0(x)-M(x)\,\Phi_0(x) \tag{15}$$

$$0=L(x)\,\Phi'_{\nu}(x)-[M(x)+\nu L'(x)]+\nu^2 L'(x)\,\Phi_{\nu-1}(x). \tag{16}$$

Um nun die Funktionen $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots$ *linear durch* $\Phi_0(x)$ *auszudrücken*, werde in die letzte Gleichung

$$\Phi_{\nu}(x)=A_{\nu}(x)\,\Phi_0(x)-B_{\nu}(x), \qquad \Phi_{\nu-1}(x)=A_{\nu-1}(x)\,\Phi_0(x)-B_{\nu-1}(x) \tag{17}$$

eingesetzt, ebenso der unter Berücksichtigung von (15) berechnete Differentialquotient

$$\Phi'_{\nu}(x)=A_{\nu}(x)\frac{M(x)\,\Phi_0(x)+N(x)}{L(x)}+A'_{\nu}(x)\,\Phi_0(x)-B'_{\nu}(x),$$

dann entstehen durch Nullsetzung sowohl des Koeffizienten von $\Phi_0(x)$ als des von $\Phi_0(x)$ freien Teiles *zwei Differentialrekursionen*

$$\begin{aligned}0&=L(x)\,A'_{\nu}(x)-\nu L'(x)\,A_{\nu}(x)+\nu^2 L'(x)\,A_{\nu-1}(x)\\ 0&=L(x)\,B'_{\nu}(x)-[M(x)+\nu L'(x)]\,B_{\nu}(x)-N(x)\,A_{\nu}(x)+\nu^2 L'(x)\,B_{\nu-1}(x),\end{aligned} \tag{18}$$

aus denen sich die gesuchten Funktionen $A_{\nu}(x), B_{\nu}(x)$, mit den Anfangstermen $A_0(x)=1, B_0(x)=0$ sukzessive bestimmen.

Jedenfalls müssen demnach die $A_{\nu}(x)$ *Polynome von* $L(x)$ *sein*

$$A_0(x) = 1,\ A_1(x) = 1 + c_1 L(x),\ A_2(x) = 2 + 4c_1 L(x) + c_2 L(x)^2, \ldots, \tag{19}$$

während eine explizite Gestalt der Funktionen $B_\nu(x)$ nur bei wenigen speziellen Annahmen für L, M, N existiert.

IV. Ein rein arithmetischer Beweis des oben angewandten Satzes, dass sich der n-te Binomialkoeffizient irgend einer Grösse $\gamma = p + iq$ wenn n ins Unendliche wächst, wie n^{-p-1} verhält (positiv-ganzzahlige γ ausgenommen) ist ganz kurz zu führen: Bringt man das Quadrat von $\left|\binom{\gamma}{n}\right|$

$$\left|\binom{\gamma}{n}\right|^2 = \prod_{\nu=1}^{n} \left|\frac{p+iq-\nu+1}{\nu}\right|^2 = \prod_{\nu=1}^{n}\left[1 - \frac{2p+2}{\nu} + \frac{(p+1)^2+q^2}{\nu^2}\right] \tag{20}$$

nach Multiplikation mit $(n+1)^{2p+2}$ ebenfalls in die Produktform

$$(n+1)^{2p+2}\left|\binom{\gamma}{n}\right|^2 = \prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^a\left(1-\frac{a}{\nu}+\frac{a'}{\nu^2}\right),\quad a = 2p+2,\ a' = (p+1)^2+q^2$$

dann hat das Produktelement den Wert $1 + \frac{e_\nu}{\nu^2}$

$$e_\nu = \nu^2\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^a\left(1-\frac{a}{\nu}\right) - 1\right] + a'\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^a \tag{20 a}$$

sodass e_ν für alle $\nu \geqq 1$ zwischen zwei angebbaren endlichen Werten liegt, daher konvergiert das Produkt $\prod_1^\infty\left(1+\frac{e_\nu}{\nu^2}\right)$ und $(n+1)^{2p+2}\binom{\gamma}{n}^2$ bleibt endlich von Null verschieden.

Jeder der beiden Summanden von e_ν ändert sich einsinnig mit $\nu \geqq 1$, denn ihre Differentialquotienten nach ν haben, wie die durch Differentiation aus (20 a) abzuleitende Gleichung

$$-\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{1-a}}{2\nu}\frac{de_\nu}{d\nu} = \left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{1-a} - 1 - (1-a)\frac{1}{\nu} - \binom{1-a}{2}\frac{1}{\nu^2}\right] + \frac{aa'}{2\nu^3}$$

zeigt, konstantes Vorzeichen, der erste dasjenige von $\left[-\binom{1-a}{3}\right]$, der zweite das von $(-a)$. Ferner ist

$$\lim_{\nu\to\infty} e_\nu = q^2 - (p+1)(p+2).$$

V. Konvergente Entwicklungen nach Binomialkoeffizienten existieren für manche der Funktionen in der Theorie der Eulerschen Integrale, darunter auch für die Gammafunktion selbst, *nur in dem Sinne dass die Reihenfolgen der Grössen* $\binom{x-1}{n}$ *und* $\binom{1-x}{n}$ *beide*[1] *auftreten.*

Betrachtet man nämlich das Integral

$$f(x)=\int_0^\infty u^{x-1}\,e^{-u}\,g(u)\,du,\quad u \text{ reell positiv},\ \Re(x)>0 \tag{21}$$

wo $g(u)$ irgend eine stetige positive Funktion mit einem endlichen Maximum g vorstelle, so darf nach Zerlegung des Integrationsintervalles in die zwei Teile 0 bis r und r bis ∞

$$f(x)=r^x\left[\int_0^1\{1-(1-u)\}^{x-1}e^{-ru}\,g(ru)\,du+\int_1^\infty\left\{1-\left(1-\frac{1}{u}\right)\right\}^{1-x}e^{-ru}g(ru)\,du\right]$$

für jedes x der rechten Halbebene die Binomialentwicklung *nicht bloss im ersten Teilintegral, wie schon oft untersucht*[2], *sondern auch im zweiten stattfinden:*

$$(22)\qquad \begin{aligned} r^{-x}f(x)&=\sum_0^\infty(-1)^n\left[a_n\binom{x-1}{n}+b_n\binom{1-x}{n}\right]\\ a_n&=\int_0^1(1-u)^n\,e^{-ru}\,g(ru)\,du,\quad b_n=\int_1^\infty\left(1-\frac{1}{u}\right)^n e^{-ru}g(ru)\,du\,. \end{aligned}$$

Beweis: Die hier auftretenden positiven Integrale a_n, b_n genügen den Ungleichungen

$$a_n<g\int_0^1(1-u)^n\,du=\frac{g}{n+1} \tag{23}$$

---

[1] Zwar könnte man die beiden durch einander ausdrücken

$$\binom{1-x}{n}=(-1)^n\sum_{\lambda=1}^n\binom{x-1}{\lambda}\binom{n-1}{\lambda-1}$$

aber die Umordnung entweder nach der einen oder anderen würde zu divergenten Reihen führen.

[2] Vgl. N. Nielsen, Theorie der Gammafunktion S. 124 u. 143.

$$b_n < g \int_1^\infty \left(1 - \frac{1}{u}\right)^n e^{-ru}\, du = g e^{-r} \int_0^\infty \frac{t^n e^{-rt}\, dt}{(1+t)^n} \tag{23 a}$$

aus deren erster zunächst die Konvergenz der ersten Teilreihe

$$\sum a_n \binom{x-1}{n} \sim \sum \frac{1}{n^{1+p}}, \qquad x = p + iq$$

folgt. Anderseits stehen die Konstanten

$$c_n = \int_0^\infty \left(\frac{t}{1+t}\right)^n e^{-rt}\, dt \tag{24}$$

mit den früher, vgl (6), behandelten Kettenbruchresten des (mit der Exponentialfunktion multiplizierten) Integrallogarithmus *in direktem Zuzammenhange*, indem sich c_n durch partielle Integration

$$c_n = \frac{1}{r} \int_0^\infty e^{-rt}\, d\left(\frac{t}{1+t}\right)^n = \frac{n}{r} \int_0^\infty \frac{t^{n-1} e^{-rt}\, dt}{(1+t)^{n+1}}, \qquad n \geqq 1$$

umformen und nach (8 a) darstellen lässt

$$c_n = \frac{n}{r}\Big[\varphi_{n-1}(r) - \varphi_n(r)\Big], \qquad n \geqq 1\,. \tag{24 a}$$

Hienach entsprechen den Eigenschaften (7), (9) und (10) der Reste φ_ν *analoge Eigenschaften der* c_n

$$\left\{\begin{aligned} & c_{n+1} = \left(2 + \frac{r}{n}\right) c_n - c_{n-1}, \quad c_0 = \frac{1}{r}, \quad c_1 = \frac{1}{r} - \varphi(r) \\ & \sum_{n=\varkappa}^\infty \binom{n}{\varkappa} c_{n+1} = \frac{(\varkappa+1)!}{r^{\varkappa+1}} \\ & c_n = \frac{1}{r} + n \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{r^{\mu-1}}{\mu!} \sum_{\lambda=0}^{n-1-\mu} \frac{1}{n-\lambda} \binom{\lambda+\mu-1}{\lambda} - \varphi(r) \sum_{\mu=1}^{n} \binom{n}{\mu} \frac{r^{\mu-1}}{(\mu-1)!}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Nun zeigt die Konvergenz der Reihe $\sum \binom{n}{\varkappa} c_{n+1}$ für $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$ dass die positiven Grössen c_n schliesslich mit einer beliebig hohen Potenz von n^{-1} vergleichbar werden und also

$$\sum b_n \left|\binom{1-x}{n}\right| < g e^{-r} \sum c_n \left|\binom{1-x}{n}\right|$$

für jeden endlichen Wert von x konvergiert.

Im einfachsten Falle, wenn sich $f(x)$ auf $\Gamma(x)$, oder $g(u)$ auf 1 reduziert, werden die Koeffizienten a_n, b_n der zweiseitigen Binomialentwicklung (22) zu explizit angebbaren linearen Funktionen von e^{-r} und $e^{-r}\varphi(r)$. Dies geht bezüglich der a_n aus der Elementarformel

$$a_n = \int_0^1 (1-u)^n e^{-ru}\, du = \frac{(-1)^n n!}{r^{n+1}} (\varrho_n - e^{-r}), \qquad \varrho_n = \sum_0^n \frac{(-r)^\lambda}{\lambda!}$$

hervor, bezüglich der $b_n = e^{-r} c_n$ aus der letzten Formel (25), und man erhält *die für alle x der rechten Halbebene giltige Darstellung*

$$r^{-x}\Gamma(x) = \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n!}{r^{n+1}} (\varrho_n - e^{-r}) \binom{x-1}{n} + (-1)^n c_n e^{-r} \binom{1-x}{n} \right]. \tag{26}$$

Ein anderes Beispiel einer Entwicklung nach den Binomialkoeffizienten $\binom{x-1}{n}$ und $\binom{1-x}{n}$ bietet der, mit $\Gamma(x)$ multiplizierte, Grenzwert von

$$\left[\sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\nu^x} - \int_1^m \frac{dt}{t^x} \right], \qquad \Re(x) > 0 \tag{27}$$

für $\mu \to \infty$, weil letzterer in die Form

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} \left(\frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u} \right) du \tag{28}$$

gebracht werden kann. Auch hier konvergiert, nachdem $\frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u}$ das Maximum $g = 1$ aufweist, die zweiseitige Entwicklung des Integrals in (28), wofern x in der rechten Halbebene liegt.

Bei reellem x könnte man auch, ohne die Giltigkeit von (22) für alle $x > 0$ zu zerstören, den willkürlichen positiven Parameter r nachträglich durch irgendeine positive Funktion von x ersetzen, nur ginge dann eben der Charakter der Binomialentwicklung verloren.