LINEARE DIFFERENZENGLEICHUNGEN MIT KOEFFIZIENTEN VON GEMEINSAMER PERIODE.

VON

HEINRICH LÖWIG

IN PRAG.

Vorwort.

Im Dezember 1927 wurde meine Dissertation, welche den Titel »Über periodische Differenzengleichungen» trägt, an der deutschen Universität in Prag approbiert. Ein kurzer Auszug aus dieser Dissertation, welche in Manuskriptform vorgelegt wurde, ist in Nr. 78 (1930) der naturwissenschaftlichen Zeitschrift »Lotos» in Prag erschienen. Die hier vorgelegte Arbeit stellt eine Umarbeitung und Vervollständigung der ersten beiden Abschnitte, nämlich desjenigen Teiles jener Dissertation dar, welcher sich mit den linearen Differenzengleichungen beschäftigt.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Erster Abschnitt. Lösung gewisser homogener linearer Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten durch Funktionen von vorgeschriebener Periode.

§ 1. Die Sigma- und die Zetafunktion.

§ 2. Die homogene lineare Differenzengleichung $f(x+h)=tf(x)$.

§ 3. Die homogene lineare Differenzengleichung $\sum_{l=0}^{n}(-1)^{n-l}\binom{n}{l}t^{n-l}f(x+lh)=0$.

Zweiter Abschnitt. Systeme nicht homogener linearer Differenzengleichungen mit Koeffizienten von gemeinsamer Periode.

§ 4. Die Konvergenz der formal genügenden Entwickelung.
§ 5. Das Verschwinden einer in einer Halbebene holomorphen Lösung des homogenen Gleichungssystems.
§ 6. Partikuläre Lösung eines Systems linearer Differenzengleichungen 1. Ordnung mit Koeffizienten und von den unbekannten Funktionen freien Gliedern, welche die gemeinsame Periode ω besitzen.
§ 7. Zusammenhang mit dem adjungierten System linearer Differenzengleichungen.
§ 8. Die Picardsche Abschätzung.
§ 9. Betrachtung des Falles, dass die von den unbekannten Funktionen freien Glieder nicht periodisch sind.

Dritter Abschnitt. Systeme homogener linearer Differenzengleichungen 1. Ordnung mit Koeffizienten von gemeinsamer Periode.
§ 10. Existenz eines periodischen Fundamentalsystems.
§ 11. Form des Fundamentalsystems, wenn die Verhältnisse der Wurzeln der charakteristischen Gleichung keine singulären Werte besitzen.
§ 12. Zweiter Beweis des Satzes über das Verschwinden einer in einer Halbebene holomorphen Lösung, wenn die Verhältnisse der Wurzeln der charakteristischen Gleichung keine Ausnahmewerte besitzen.

Vierter Abschnitt. Lineare Differenzengleichungen beliebiger Ordnung mit einer unbekannten Funktion und Koeffizienten von gemeinsamer Periode.
§ 13. Zurückführung auf ein System linearer Differenzengleichungen 1. Ordnung.
§ 14. Wortlaut der Sätze des zweiten und dritten Abschnittes im Falle einer einzigen linearen Differenzengleichung n-ter Ordnung mit einer unbekannten Funktion.

Einleitung.

Wir wollen uns mit der Frage beschäftigen, ob ein System linearer Differenzengleichungen von der Form

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

in welcher die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ und $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ eine gemeinsame Periode ω besitzen und die Determinante $|q_{kl}(x)|$ nicht identisch verschwindet, Lösungen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ besitzt, deren sämtliche Funktionen ebenfalls die Periode ω besitzen; in dem Falle, dass die Funktionen $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ alle identisch verschwinden, fragen wir uns insbesondere, ob das dann vorliegende System homogener linearer Differenzengleichungen ein Fundamentalsystem von Lösungen besitzt, dessen sämtliche Funktionen die Periode ω besitzen. In der Folge sollen h und ω immer zwei feste, von Null verschiedene komplexe Zahlen sein, deren Quotient keine reelle Zahl ist. Es wird daher stets $\left|e^{\frac{2\pi i h}{\omega}}\right| \neq 1$ sein. Wir werden die Zahl $e^{\frac{2\pi i h}{\omega}}$ kurz mit λ bezeichnen und werden dann die Fälle $|\lambda| > 1$ und $|\lambda| < 1$ zu unterscheiden haben.

Erster Abschnitt. Lösung gewisser homogener linearer Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten durch Funktionen von vorgeschriebener Periode.

§ 1. **Die Sigma- und die Zetafunktion.** Bezeichnet man, wie es üblich ist, die durch das unendliche Produkt

$$\sigma(x; \omega_1, \omega_2) = x\, \Pi' \left\{ \left(1 - \frac{x}{w}\right) e^{\frac{x}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{w}\right)^2} \right\} \tag{1}$$

($w = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$; Π' Produkt über alle ganzzahligen Wertepaare m_1, m_2 mit Ausnahme des Wertepaares $0, 0$), welches unter der Bedingung, dass $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$ und $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ keine reelle Zahl ist, für jeden Wert von x konvergiert, definierte Funktion von x, ω_1, ω_2 in der auf der linken Seite der Gleichung (1) angeschriebenen Weise, dann hat die Funktion $\sigma(x; \omega_1, \omega_2)$ bekanntlich[1] folgende beiden Eigenschaften als Funktion von x bei festgehaltenen Zahlen ω_1, ω_2 ($\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$, $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ nicht reell):

1.) sie ist in der ganzen Ebene holomorph und hat die Stellen $m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$ ($m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) zu einfachen Nullstellen, ist aber sonst überall von Null verschieden;

2.) es gibt zu jedem Wertepaare ω_1, ω_2 ($\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$, $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ nicht reell) zwei eindeutig bestimmte Zahlen η_1, η_2, welche der Relation $\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = \pm 2\pi i$ — oberes oder unteres Vorzeichen je nach dem, ob das Dreieck $0, \omega_1, \omega_2$ positiven oder negativen Umlaufssinn besitzt — genügen, so dass die Gleichungen

[1] Siehe etwa Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, Springer 1922.

$$\sigma(x+\omega_1;\omega_1,\omega_2) = -e^{\eta_1\left(x+\frac{\omega_1}{2}\right)}\sigma(x;\omega_1,\omega_2);$$

$$\sigma(x+\omega_2;\omega_1,\omega_2) = -e^{\eta_2\left(x+\frac{\omega_2}{2}\right)}\sigma(x;\omega_1,\omega_2) \tag{2}$$

bestehen.

Wir wollen nun die Funktion von x $\sigma(x;h,\omega)$ einfach mit $\sigma(x)$ bezeichnen. Dann ist also $\sigma(x)$ in der ganzen Ebene holomorph, hat die Stellen $m_1h+m_2\omega$ $(m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ zu einfachen Nullstellen und genügt den Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} \sigma(x+h) &= -e^{\eta_1\left(x+\frac{h}{2}\right)}\sigma(x) \\ \sigma(x+\omega) &= -e^{\eta_2\left(x+\frac{\omega}{2}\right)}\sigma(x), \end{aligned} \tag{2}$$

wo jetzt die Zeichen η_1 und η_2 die zu $\omega_1 = h$, $\omega_2 = \omega$ gehörenden Werte bedeuten.

Wir setzen nun weiter in der üblichen Weise

$$\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} = \zeta(x). \tag{3}$$

Dann ist die Funktion $\zeta(x)$ in der ganzen Ebene meromorph, hat die Stellen $m_1h+m_2\omega$ $(m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ zu einfachen Polen mit dem Residuum 1 und sonst keine Pole und genügt den Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} \zeta(x+h) &= \eta_1 + \zeta(x) \\ \zeta(x+\omega) &= \eta_2 + \zeta(x). \end{aligned} \tag{4}$$

§ 2. **Die homogene lineare Differenzengleichung** $f(x+h) = tf(x)$. Mit Hilfe der Funktionen $\sigma(x)$ und $\zeta(x)$ und der Exponentialfunktion kann man zu einem vorgegebenen Zahlenpaar t_1, t_2 (beide von Null verschieden) immer auf mannigfach verschiedene Art eine nicht identisch verschwindende Funktion $f(x)$ konstruieren, welche in der ganzen Ebene meromorph ist und den Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} f(x+h) &= t_1 f(x) \\ f(x+\omega) &= t_2 f(x) \end{aligned} \tag{5}$$

genügt. Eine solche Funktion $f(x)$ muss die Eigenschaft besitzen, dass die Summe der Vielfachheiten der Nullstellen in einem Periodenparallelogramm — d. h. in einem Parallelogramm in der komplexen Zahlenebene, dessen Seiten Richtung und

Länge der komplexen Zahlen h, ω haben — gleich Null ist, wenn man Pole als Nullstellen negativer Vielfachheit ansieht. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die genannten Vielfachheiten, dann muss also

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = 0 \tag{6}$$

sein. Denn ist $f(x)$ eine Funktion von den angegebenen Eigenschaften, dann hat die Funktion $F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ die erwähnten Nullstellen zu einfachen Polen mit den Residuen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ und genügt anderseits den Differenzengleichungen $F(x+h) = F(x)$, $F(x+\omega) = F(x)$. $F(x)$ hat also die beiden keinen reellen Quotienten besitzenden von Null verschiedenen Zahlen h und ω zu Perioden. Eine solche Funktion nennt man eine elliptische Funktion. Nun hat jede elliptische Funktion die Eigenschaft, dass die Summe der Residuen ihrer Pole in einem Periodenparallelogramm gleich Null ist. Dasselbe gilt daher auch von der Funktion $F(x)$; d. h. es besteht die Gleichung (6). Von dieser Bedingung (6) abgesehen kann man die Zahl m (ganz positiv) und die ganzen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ willkürlich vorschreiben. Eine nicht identisch verschwindende meromorphe Funktion $f(x)$, welche den Differenzengleichungen (5) genügt, hat nämlich dann die allgemeine Form

$$f(x) = B\, e^{Cx} [\sigma(x - a_1)]^{\alpha_1} [\sigma(x - a_2)]^{\alpha_2} \cdots [\sigma(x - a_m)]^{\alpha_m}, \tag{7}$$

wo die Konstante B von Null verschieden ist und die Konstanten $C, a_1, a_2, \ldots, a_m$ den Gleichungen

$$e^{Ch - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m)\eta_1} = t_1, \quad e^{C\omega - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m)\eta_2} = t_2 \tag{8}$$

genügen.

Man überzeugt sich zunächst mit Hilfe der Gleichungen (2) leicht, dass unter den Bedingungen (6) und (8) die durch (7) definierte Funktion $f(x)$ wirklich in der ganzen Ebene meromorph ist und den Differenzengleichungen (5) genügt. Den Bedingungen (6) und (8) kann man aber, wenn die Multiplikatoren t_1 und t_2 gegeben sind, auf mannigfache Art genügen, weil die Determinante $\begin{vmatrix} \eta_1 & h \\ \eta_2 & \omega \end{vmatrix}$ einen von Null verschiedenen Wert (nämlich $\pm 2\pi i$) hat. Umgekehrt muss jede meromorphe Funktion $f(x)$, welche den Gleichungen (5) genügt, in der Form (7) enthalten sein.

Sind nämlich wieder die Vielfachheiten ihrer Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ in einem Periodenparallelogramm $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, so muss zunächst, wie wir schon oben bewiesen haben, die Gleichung $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = 0$ (6) bestehen. Anderseits ist die Funktion $\alpha_1 \zeta(x - a_1) + \alpha_2 \zeta(x - a_2) + \cdots + \alpha_m \zeta(x - a_m)$ ebenfalls meromorph, besitzt dieselben Pole wie $F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ und hat, wie aus den Gleichungen (4) folgt, ebenfalls die Zahlen h und ω zu Perioden. Also ist die Differenz $\frac{f'(x)}{f(x)} - [\alpha_1 \zeta(x - a_1) + \alpha_2 \zeta(x - a_2) + \cdots + \alpha_m \zeta(x - a_m)]$ eine überall holomorphe Funktion, welche die beiden Perioden h und ω besitzt. Eine solche Funktion muss aber in der ganzen Ebene beschränkt sein und sich deshalb auf eine Konstante reduzieren. Es folgt also das Bestehen einer Gleichung von der Form

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = C + \alpha_1 \zeta(x - a_1) + \alpha_2 \zeta(x - a_2) + \cdots + \alpha_m \zeta(x - a_m), \tag{9}$$

wo C eine Konstante ist. Aus Gleichung (9) folgt aber durch Integration unter Berücksichtigung der Definition (3) die Gleichung (7). Durch Einsetzen der rechten Seite der Gleichung (7) in die Gleichungen (5) und Berücksichtigung der Beziehungen (2) erhält man dann die Gleichungen (8). Wir betrachten nun insbesondere den Fall, dass $t_2 = 1$ ist. Für diesen Fall können wir unser Resultat aussprechen in dem

Satz 1. *Wenn t eine beliebig vorgegebene, von Null verschiedene komplexe Zahl ist, dann kann man stets in mannigfach verschiedener Weise eine in der ganzen Ebene meromorphe, nicht identisch verschwindende Funktion $f(x)$ angeben, welche der Differenzengleichung*

$$f(x + h) = t f(x) \tag{10}$$

genügt und ω zur Periode hat.

Wir legen uns nun ausserdem die für das folgende wichtige Frage vor, wann eine Funktion, welche der Differenzengleichung

$$f(x + h) = t f(x) \tag{10}$$

genügt und ω zur Periode hat, holomorph sein kann. Aus dem vorhergehenden (s. Gl. (7)) geht hervor, dass sie dann einfach die Form Be^{Cx} haben muss. Ist nun $B \neq 0$, dann folgt aus der Periodizität zunächst $C = \frac{2\pi i \nu}{\omega}$, wo ν eine ganze Zahl ist. Daraus aber, dass die Funktion der Differenzengleichung (10) genügen soll, folgt $t = e^{\frac{2\pi i h \nu}{\omega}}$. Ist also t nicht von der Form $e^{\frac{2\pi i h \nu}{\omega}} = \lambda^\nu$, so muss $B = 0$ sein. Wir haben hiemit den

Satz 2. *Wenn eine Funktion $f(x)$ der Differenzengleichung $f(x+h) = tf(x)$* (10), *in welcher t nicht gerade eine Zahl von der Form λ^ν (ν eine ganze Zahl) ist, genügt, die Periode ω besitzt und in der ganzen Ebene holomorph ist, dann verschwindet sie identisch.*

§ 3. Die homogene lineare Differenzengleichung

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^{n-l} \binom{n}{l} t^{n-l} f(x + lh) = 0.$$

Wir wollen für die hier anzustellende Betrachtung die Anzahl m der voneinander verschiedenen Nullstellen der Funktion $f(x)$ und die Vielfachheiten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ festhalten und die noch zur Verfügung stehenden Grössen $B, C, a_1, a_2, \ldots, a_m$ derart als in einem einfach zusammenhängenden, den Nullpunkt nicht enthaltenden Bereiche $\mathfrak{B}$ reguläre Funktionen von t definieren, dass die Gleichungen

$$e^{Ch - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m)\eta_1} = t, \quad e^{C\omega - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m)\eta_2} = 1 \tag{8*}$$

erfüllt sind und B überall von Null verschieden ist. Das ist auf mannigfache Weise möglich und man kann auch erreichen, dass im Innern von $\mathfrak{B}$ ein vorgegebener, von Null verschiedener Wert von t enthalten ist. — Man könnte z. B. in dem Falle, dass $\eta_1\omega - \eta_2 h = +2\pi i$ und daher $|\lambda| > 1$ ist, setzen:

$$m = 2, \ \alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = -1, \ a_1 = 0, \ a_2 = \frac{\omega}{2\pi i}\log t, \ C = -\frac{\eta_2}{2\pi i}\log t, \ B = 1;$$

dabei ist an einer beliebigen, von Null verschiedenen Stelle irgend einer der möglichen Werte des Logarithmus anzunehmen und dann $\log t$ in einem einfach zusammenhängenden Bereiche, welcher diese Stelle, nicht aber den Nullpunkt enthält, durch stetige Fortsetzung aus dem gewählten Anfangswerte als eindeutige Funktion von t zu definieren. — Wir haben so eine gewisse Funktion von x und t definiert; wir wollen diese Funktion $\varphi(t, x)$ nennen. — In unserm Beispiele ist

$$\varphi(t, x) = \frac{\sigma(x)}{\sigma\left(x - \frac{\omega}{2\pi i}\log t\right)} e^{-\frac{\eta_2 x}{2\pi i}\log t}.$$

Diese Funktion genügt also den Differenzengleichungen

$$\varphi(t, x+h) = t\,\varphi(t, x) \tag{11}$$

und

$$\varphi(t, x+\omega) = \varphi(t, x). \tag{12}$$

Nun seien $\varphi_k(t, x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ die partiellen Ableitungen der Funktion $\varphi(t, x)$ in Bezug auf die Variable t:

$$\varphi_k(t, x) = \frac{\partial^k [\varphi(t, x)]}{\partial t^k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

Man erkennt zunächst, dass die Funktionen $\varphi_k(t, x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ bei festgehaltenem t in Bezug auf x ebenso wie $\varphi(t, x)$ überall meromorphe Funktionen sind. Sind nämlich in der Gleichung

$$\varphi(t, x) = B\,e^{Cx}\,[\sigma(x - a_1)]^{\alpha_1}\,[\sigma(x - a_2)]^{\alpha_2} \ldots [\sigma(x - a_m)]^{\alpha_m}$$

$B, C, a_1, a_2, \ldots, a_m$ die früher definierten Funktionen von t, welche den Gleichungen (8*) genügen, so ist

$$\varphi_1(t, x) = \left[\frac{1}{B}\frac{dB}{dt} + x\frac{dC}{dt} - \alpha_1 \frac{da_1}{dt}\,\zeta(x - a_1) - \right.$$
$$\left. - \alpha_2 \frac{da_2}{dt}\,\zeta(x - a_2) - \cdots - \alpha_m \frac{da_m}{dt}\,\zeta(x - a_m)\right] \varphi(t, x),$$

woraus hervorgeht, dass auch $\varphi_1(t, x)$ in Bezug auf x meromorph ist. Ebenso kann man weiter schliessen.

In unserm Beispiele ist

$$\varphi_1(t, x) = \frac{\omega\,\zeta\left(x - \frac{\omega}{2\pi i}\log t\right) - \eta_2 x}{2\pi i t}\,\varphi(t, x).$$

Weiter folgt aus Gl. (12) durch k-malige Differentiation:

$$\varphi_k(t, x+\omega) = \varphi_k(t, x). \tag{14}$$

D. h. $\varphi_k(t, x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ besitzt ebenso wie $\varphi(t, x)$ in Bezug auf x die Periode ω.

Dagegen erhält man durch Differentiation der Gleichung (11)

$$\varphi_1(t, x+h) = t\,\varphi_1(t, x) + \varphi(t, x), \quad \varphi_2(t, x+h) = t\,\varphi_2(t, x) + 2\,\varphi_1(t, x)$$

allgemein

$$\varphi_k(t, x+h) = t\,\varphi_k(t, x) + k\,\varphi_{k-1}(t, x) \tag{15}$$

oder

$$\varphi_k(t, x+h) - t\,\varphi_k(t, x) = k\,\varphi_{k-1}(t, x). \tag{15 a}$$

Übt man die in der Gleichung (15 a) auf der linken Seite an $\varphi_k(t, x)$ vorgenommene Differenzenoperation nochmals auf beiden Seiten der Gleichung aus, so folgt

$$\varphi_k(t, x+2h) - 2\,t\,\varphi_k(t, x+h) + t^2\,\varphi_k(t, x) =$$
$$= k\,[\varphi_{k-1}(t, x+h) - t\,\varphi_{k-1}(t, x)] = k\,(k-1)\,\varphi_{k-2}(t, x).$$

Allgemein findet man

$$\sum_{\alpha=0}^{l} (-1)^{l-\alpha} \binom{l}{\alpha} t^{l-\alpha}\,\varphi_k(x + \alpha h) = k\,(k-1)\cdots(k-l+1)\,\varphi_{k-l}(t, x) \quad (l < k), \tag{16}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{k} (-1)^{k-\alpha} \binom{k}{\alpha} t^{k-\alpha}\,\varphi_k(x + \alpha h) = k!\,\varphi(t, x), \tag{17}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{l} (-1)^{l-\alpha} \binom{l}{\alpha} t^{l-\alpha}\,\varphi_k(x + \alpha h) = 0 \quad (l > k). \tag{18}$$

Anderseits folgt aus Gleichung (15)

$$\varphi_k(t, x+2h) = t^2\,\varphi_k(t, x) + 2\,k\,t\,\varphi_{k-1}(t, x) + k\,(k-1)\,\varphi_{k-2}(t, x)$$

allgemein

$$\varphi_k(t, x+l\,h) = \sum_{\alpha=0}^{l} \binom{l}{\alpha} t^{l-\alpha}\,k\,(k-1)\cdots(k-\alpha+1)\,\varphi_{k-\alpha}(t, x). \tag{19}$$

Hier ist unter $\varphi_{k-\alpha}(t, x)$ Null zu verstehen, wenn $\alpha > k$ wird.

Die Gleichung (18) sagt aus, dass die Funktionen $\varphi_k(t, x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1;\ n$ irgend eine positive ganze Zahl) der homogenen linearen Differenzengleichung n-ter Ordnung

$$\sum_{\alpha=0}^{n} (-1)^{n-\alpha} \binom{n}{\alpha} t^{n-\alpha} f(x + \alpha h) = 0 \tag{20}$$

genügen. Ferner erkennt man daran, dass die Differenzendeterminante

$$|\varphi_k(t, x + lh)| = \left| \sum_{\alpha=0}^{l} \binom{l}{\alpha} t^{l-\alpha} k(k-1)\cdots(k-\alpha+1)\,\varphi_{k-\alpha}(t, x) \right| =$$

$$= |k(k-1)\cdots(k-l+1)\,\varphi_{k-l}(t, x)| = 1!\,2!\ldots(n-1)!\,[\varphi(t, x)]^n$$

von Null verschieden ist, dass diese n Funktionen sogar ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen linearen Differenzengleichung (20) bilden. — Wir haben damit den

Satz 3. *Wenn t eine beliebig vorgegebene, von Null verschiedene komplexe Zahl ist, dann kann man stets auf mannigfach verschiedene Weise eine Folge nicht identisch verschwindender, meromorpher Funktionen $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$ angeben, welche den Differenzengleichungen*

$$f_0(x+h) = t f_0(x);\; f_k(x+h) = t f_k(x) + k f_{k-1}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{21}$$

genügen und die Periode ω besitzen. Ist dann n irgend eine positive ganze Zahl, dann bilden die Funktionen $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ eine Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen linearen Differenzengleichung n-ter Ordnung

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^{n-l} \binom{n}{l} t^{n-l} f(x + lh) = 0. \tag{20}$$

Zweiter Abschnitt. Systeme nicht homogener, linearer Differenzengleichungen 1. Ordnung mit Koeffizienten von gemeinsamer Periode.

§ 4. **Die Konvergenz der formal genügenden Entwicklung.** Wir betrachten ein System linearer Differenzengleichungen 1. Ordnung in den Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ von der Form

$$f_k(x+h) = \sum_{l=0}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n); \tag{22}$$

die in diesem System vorkommenden Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ und $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sollen die Periode ω besitzen; die Determinante $|q_{kl}(x)|$ soll nicht identisch verschwinden. — Wenn eine Funktion $F(x)$ die Periode ω besitzt und in einem von zwei zu ω parallelen Geraden begrenzten Streifen regulär ist, dann kann man $F(x)$ in diesem Streifen als Laurentsche Reihe in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ (»Fouriersche

Reihe») darstellen. Über die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ und $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ wollen wir jedoch engere Voraussetzungen machen.

Wir wollen unter $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ in dieser Abhandlung stets Funktionen von x verstehen, welche sich in einer gewissen, durch eine zu ω parallele Gerade begrenzten Halbebene als gewöhnliche[1] Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ darstellen. Wir wollen schreiben

$$q_{kl}(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} q_{kl\alpha}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Dabei soll die Determinante $|q_{kl0}|$ von Null verschieden sein. Wir wollen ausserdem immer unter R eine positive reelle Zahl von der Eigenschaft verstehen, dass für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R$ die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ regulär sind und daher die Potenzreihen (23) konvergieren, und ebenso unter r eine der Ungleichung $r \leqq R$ genügende positive reelle Zahl von der Eigenschaft, dass für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ auch die Determinante $|q_{kl}(x)|$ von Null verschieden ist. — Schliesslich möge noch folgende Bezeichnungsweise verwendet werden. $K(t)$ sei der Wert der Determinante $|q_{kl0} - \delta_{kl} t|$ $(\delta_{kl} = 0$, wenn $k \neq l$; $\delta_{kk} = 1)$ und $Q_{kl}(t)$ das algebraische Komplement von $q_{kl0} - \delta_{kl} t$ in dieser Determinante. Die algebraische Gleichung n-ten Grades in t

$$K(t) = 0 \tag{24}$$

heisse die *charakteristische Gleichung* des Systems linearer Differenzengleichungen (22).

Bezüglich der Funktionen $B_k(x)$ wollen wir nun in diesem Paragraphen folgende Voraussetzungen machen. Es sei ϱ eine positive reelle Zahl, welche im Falle $|\lambda| > 1$ $\left(\lambda = e^{\frac{2\pi i h}{\omega}}\right)$ der Ungleichung $\varrho \leqq R$, im Falle $|\lambda| < 1$ der Ungleichung $\varrho \leqq r$ genügt. Nun sollen die Funktionen $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$ definierten Halbebene regulär sein und die Periode ω besitzen. In den Laurentschen Reihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$, welche dann in dieser Halbebene

[1] Gleichwertig mit dieser Voraussetzung wäre die Annahme, dass sich die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ als gewöhnliche Potenzreihen in $e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}$ darstellen; denn $-\omega$ ist ebenso gut wie ω Periode der Funktionen $q_{kl}(x)$.

die Funktionen $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ darstellen, sollen höchstens endlich viele Glieder mit Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ mit negativem Exponenten vorkommen, so dass für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$ Gleichungen von der Form

$$B_k(x) = \sum_{\alpha=\mu}^{\infty} B_{k\alpha}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{25}$$

bestehen, wo μ eine ganze Zahl ist.

Unter diesen Voraussetzungen wollen wir nun versuchen, dem System (22) durch folgenden Ansatz zu genügen:

$$f_k(x) = \sum_{\alpha=\mu}^{\infty} a_{k\alpha}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{26}$$

Soll es eine positive reelle Zahl r_1 (etwa $r_1 < r$) geben, so dass die auf den rechten Seiten der Gl. (26) stehenden Reihen für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < r_1$ konvergieren und die dann durch diese Gleichungen dargestellten Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dem System linearer Differenzengleichungen (22) genügen, welches dann einen Sinn hätte, wenn sowohl $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < r_1$ als auch $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \cdot |\lambda| < r_1$ ist, dann müssen jedenfalls die Gleichungen

$$a_{k\alpha}\lambda^{\alpha} = \sum_{\beta=\mu}^{\alpha} \sum_{l=1}^{n} q_{kl\,\alpha-\beta}\, a_{l\beta} + B_{k\alpha} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = \mu,\ \mu + 1,\ \mu + 2, \ldots) \tag{27}$$

oder

$$\sum_{l=1}^{n} (q_{kl0} - \delta_{kl}\lambda^{\alpha})\, a_{l\alpha} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{\beta=\mu}^{\alpha-1} q_{kl\,\alpha-\beta}\, a_{l\beta} + B_{k\alpha} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = \mu,\ \mu + 1,\ \mu + 2, \ldots) \tag{27 a}$$

bestehen. Aus (27 a) folgt, wenn $K(\lambda^{\alpha}) \neq 0$ ist,

$$a_{k\alpha} = -\sum_{m=1}^{n} \frac{Q_{mk}(\lambda^{\alpha})}{K(\lambda^{\alpha})} \sum_{l=1}^{n} \sum_{\beta=\mu}^{\alpha-1} q_{ml,\,\alpha-\beta}\, a_{l\beta} - \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_{mk}(\lambda^{\alpha})}{K(\lambda^{\alpha})} B_{m\alpha}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = \mu,\ \mu + 1,\ \mu + 2, \ldots). \tag{28}$$

Sind daher die Grössen $a_{l\mu}, a_{l\mu+1}, \ldots, a_{l\alpha-1}$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ gegeben, so sind durch (28) die Grössen $a_{k\alpha}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ bestimmt. Ist daher überhaupt für ganzzahliges $\alpha \geqq \mu$ $K(\lambda^\alpha) \neq 0$, so sind *alle* Koeffizienten $a_{k\alpha}$ $(k=1, 2, \ldots, n;\ \alpha=\mu, \mu+1, \mu+2, \ldots)$ durch (27) eindeutig bestimmt.[1] Aber auch im entgegengesetzten Falle kann es vorkommen, dass es Wertesysteme $a_{k\alpha}$ gibt, welche die Gleichungen (27) befriedigen. Wir wollen diesen Fall nicht ausschliessen und nehmen nun also an, es liege ein Wertesystem $a_{k\alpha}$ $(k=1, 2, \ldots, n;\ \alpha=\mu, \mu+1, \mu+2, \ldots)$ vor, welches den Gleichungen (27) genügt. Wir wollen nun beweisen, dass dann die auf den rechten Seiten der Gleichungen (26) stehenden Reihen, wenn $|\lambda| > 1$ ist, für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho|\lambda|$, und wenn $|\lambda| < 1$ ist, für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$ konvergieren, und die somit durch die Gleichungen (26) dargestellten Funktionen für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho|\lambda|$ bzw. $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$ regulär sind.

Es sei Q der grösste absolute Wert, den die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$, und M der grösste absolute Wert, den die Funktionen $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = \varrho$ annehmen. Dann bestehen die Ungleichungen

$$|q_{kl\alpha}| \leqq \frac{Q}{\varrho^\alpha} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 0, 1, 2, \ldots) \tag{29}$$

und

$$|B_{k\alpha}| \leqq \frac{M}{\varrho^\alpha} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha=\mu, \mu+1, \mu+2, \ldots). \tag{30}$$

Wir können weiter die Feststellung machen, dass $\lim\limits_{\alpha=\infty} \sum\limits_{m=1}^{n} \left|\frac{Q_{mk}(\lambda^\alpha)}{K(\lambda^\alpha)}\right|$ immer vorhanden ist. Ist nämlich $|\lambda| > 1$, so ist $\lim\limits_{\alpha=\infty} \sum\limits_{m=1}^{n} \left|\frac{Q_{mk}(\lambda^\alpha)}{K(\lambda^\alpha)}\right| = 0$, weil $K(t)$ ein Polynom n-ten Grades, die $Q_{mk}(t)$ aber Polynome höchstens $(n-1)$-ten Grades in t sind; ist aber $|\lambda| < 1$, dann ist

$$\lim_{\alpha=\infty} \sum_{m=1}^{n} \left|\frac{Q_{mk}(\lambda^\alpha)}{K(\lambda^\alpha)}\right| = \sum_{m=1}^{n} \left|\frac{Q_{mk}(0)}{K(0)}\right| \text{ und } K(0) = |q_{kl0}|$$

[1] Hätten wir die Voraussetzung gemacht, dass sich die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ und $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in einem von zwei zu ω parallelen Geraden begrenzten Streifen als allgemeine Laurentsche Reihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ darstellen, dann wäre die Berechnung der Koeffizienten $a_{k\alpha}$ weit weniger einfach; sie würde nämlich das Operieren mit unendlichen Determinanten erfordern.

wurde als von Null verschieden vorausgesetzt. Es sei nun α_0 eine positive ganze Zahl, welche so gross ist, dass für jedes $\alpha > \alpha_0$ $K(\lambda^\alpha) \neq 0$ ist; ein solches α_0 muss es offenbar sowohl geben, wenn $|\lambda| > 1$, als auch wenn $|\lambda| < 1$ ist. Es gibt dann eine positive reelle Zahl Γ von der Beschaffenheit, dass für

$$k = 1, 2, \ldots, n, \quad \alpha > \alpha_0 \quad \sum_{m=1}^{n} \left| \frac{Q_{mk}(\lambda^\alpha)}{K(\lambda^\alpha)} \right| < \Gamma$$

ist. Weiter sei r_1 eine positive reelle Zahl, welche der Ungleichung $r_1 < \frac{\varrho}{2nQ\Gamma + 1}$ genügt. Schliesslich nehme man eine positive ganze Zahl α, welche der Ungleichung $\alpha > \alpha_0$ genügt, nach Belieben an und bezeichne mit A eine positive reelle Zahl, welche grösser ist als jede der Zahlen

$$2M\Gamma, \ |a_{k\mu}| r_1^\mu, \ |a_{k\mu+1}| r_1^{\mu+1}, \ldots, \ |a_{k\alpha-1}| r_1^{\alpha-1} \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann ist nicht nur

$$|a_{k\mu}| < \frac{A}{r_1^\mu}, \ |a_{k\mu+1}| < \frac{A}{r_1^{\mu+1}}, \ldots, \ |a_{k\alpha-1}| < \frac{A}{r_1^{\alpha-1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

sondern auch nach (28), (29) und (30) für $k = 1, 2, \ldots, n$

$$|a_{k\alpha}| \leqq \left(n\,Q\,A \sum_{\beta=\mu}^{\alpha-1} \frac{1}{\varrho^{\alpha-\beta} r_1^\beta} + \frac{M}{\varrho^\alpha}\right) \sum_{m=1}^{n} \left| \frac{Q_{mk}(\lambda^\alpha)}{K(\lambda^\alpha)} \right| <$$

$$< \left[\frac{n\,Q\,A\,r_1}{r_1^\alpha(\varrho - r_1)} + \frac{M}{r_1^\alpha}\right] \Gamma < \frac{A}{r_1^\alpha}\left(\frac{1}{2\Gamma} + \frac{1}{2\Gamma}\right)\Gamma = \frac{A}{r_1^\alpha}.$$

Durch vollständige Induktion findet man also, dass die Ungleichung

$$|a_{k\alpha}| \leqq \frac{A}{r_1^\alpha} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für jedes ganzzahlige $\alpha \geqq \mu$ gilt. Daher ist die auf der rechten Seite der Gl. (26) stehende Reihe $\sum_{\alpha=\mu}^{\infty} a_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < r_1$ konvergent. Um nun den behaupteten Umfang der Konvergenz zu beweisen, müssen wir die Fälle $|\lambda| > 1$ und $|\lambda| < 1$ unterscheiden.

Es sei zunächst $|\lambda| > 1$. Wir verstehen dann unter ν eine positive ganze

Zahl von der Eigenschaft, dass $\frac{\varrho}{|\lambda|^\nu} < r_1$ ist. Es seien hierauf $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ die durch (26) definierten Funktionen von x; diese sind dann jedenfalls für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \frac{\varrho}{|\lambda|^\nu}$ regulär und ihre Entwicklungen nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ konvergent. Also sind die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$, $f_k(x)$ und $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ alle für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \frac{\varrho}{|\lambda|^\nu}$ regulär und ihre Enwicklungen nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ konvergent. Dasselbe muss daher auch von jedem der Ausdrücke $\sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ gelten. Der Koeffizient der α-ten Potenz von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ in der Entwicklung der Funktion $\sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x)$ lautet aber wegen (27) einfach $a_{k\alpha}\lambda^\alpha$. Also ist auch die Reihe

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty} a_{k\alpha}\lambda^\alpha e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \frac{\varrho}{|\lambda|^\nu}$ konvergent und die durch sie dargestellte Funktion ist für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \frac{\varrho}{|\lambda|^\nu}$ regulär. Das besagt aber mit andern Worten: die Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty} a_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sind für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \frac{\varrho}{|\lambda|^{\nu-1}}$ konvergent und die durch sie dargestellten Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \frac{\varrho}{|\lambda|^{\nu-1}}$ regulär.

Nun ersetze man in dem vorangegangenen Schlusse die positive ganze Zahl ν durch $\nu - 1$. Dann folgt, dass die Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sogar für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \frac{\varrho}{|\lambda|^{\nu-2}}$ regulär und ihre Entwicklungen nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ konvergent sind. Wiederholt man diese Schlussweise genügend oft, dann erkennt man schliesslich die Richtigkeit der Behauptung, dass die Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty} a_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho|\lambda|$ konvergent und die Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho|\lambda|$ regulär sind; denn der obige Schluss von ν auf $\nu - 1$ ist auch noch im Falle $\nu = 0$ möglich.

Es sei zweitens $|\lambda| < 1$. Wir denken uns in diesem Falle das Gleichungssystem

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

nach den ursprünglichen Funktionen $f_l(x)$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ aufgelöst; es erhält dann die Form

$$f_l(x) = \sum_{k=1}^{n} q^*_{kl}(x) f_k(x+h) + B^*_l(x) \qquad (l = 1, 2, \ldots, n). \tag{31}$$

Da die Determinante $|q_{kl}(x)|$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ von Null verschieden ist, und im Falle $|\lambda| < 1$ $\varrho \leqq r$ vorausgesetzt wurde, ergeben sich folgende Eigenschaften der in (31) auftretende Funktionen $q^*_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ und $B^*_l(x)$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$. Die Funktionen $q^*_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ lassen sich in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ definierten Halbebene als Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ ohne Glieder mit negativen Exponenten darstellen und sind in dieser Halbebene regulär; ebenso lassen sich die Funktionen $B^*_l(x)$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$ definierten Halbebene als Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ darstellen, welche mit keiner niedrigeren als der μ-ten Potenz beginnen, und sind in dieser letzteren Halbebene regulär. Man fasse nun (31) als ein System linearer Differenzengleichungen in den Funktionen $f_l(x+h)$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ auf; an Stelle der Zahlen h und λ sind $-h$ und λ^{-1}, dessen absoluter Betrag jetzt wieder die Einheit übertrifft, getreten.

Nun haben wir Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$

$$f_l(x+h) = \sum_{\alpha=\mu}^{\infty} a_{l\alpha} \lambda^{\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n) \tag{32}$$

gefunden, welche für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < \frac{r_1}{|\lambda|}$ konvergieren und Funktionen $f_l(x+h)$ $(l =$

$= 1, 2, \ldots, n)$ darstellen, welche dem System linearer Differenzengleichungen (31) genügen. Wenden wir nun den vorhin im Falle $|\lambda| > 1$ an dem System linearer Differenzengleichungen (22) ausgeführten Schluss auf das System (31) (jetzt ist $|\lambda^{-1}| > 1$) an, dann folgt: die auf der rechten Seite der Gl. (32) stehenden Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ $\sum_{\alpha=\mu}^{\infty} a_{l\alpha} \lambda^{\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ sind nicht nur für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < \frac{r_1}{|\lambda|}$, sondern sogar für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho |\lambda^{-1}| = \frac{\varrho}{|\lambda|}$ konvergent und die dargestellten Funktionen $f_l(x+h)$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ sind für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \frac{\varrho}{|\lambda|}$ regulär. Das besagt aber mit andern Worten: die Potenzreihen $\sum_{\alpha=\mu}^{\infty} a_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$ konvergent und die durch sie dargestellten Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$ regulär, wie behauptet wurde.

Wir haben hiemit den

Satz 4. *Es sei ϱ eine positive reelle Zahl, welche im Falle $|\lambda| > 1$ der Ungleichung $\varrho \leqq R$, im Falle $|\lambda| < 1$ der Ungleichung $\varrho \leqq r$ genügt. Die Funktionen $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ seien hierauf in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$ definierten Halbebene regulär und besitzen die Periode ω. In den Laurentschen Reihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$, welche daher in dieser Halbebene die genannten Funktionen darstellen, mögen höchstens endlich viele Glieder mit Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ mit negativem Exponenten vorkommen.*[1] *Es bestehen also für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$ konvergente Entwicklungen von der Gestalt*

$$B_k(x) = \sum_{\alpha=\mu}^{\infty} B_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{25}$$

Gibt es dann ein System von Zahlen $a_{k\alpha}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = \mu, \mu + 1, \ldots)$ welche die Gleichungen

$$a_{k\alpha} \lambda^{\alpha} = \sum_{\beta=\mu}^{\alpha} \sum_{l=1}^{n} q_{kl\,\alpha-\beta}\, a_{l\beta} + B_{k\alpha} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = \mu,\ \mu + 1,\ \mu + 2, \ldots) \tag{27}$$

[1] Die Eigenschaften der Koeffizienten $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ und die Bedeutung der Zeichen r und R haben wir ja ein- für allemal festgesetzt.

befriedigen, dann konvergieren die auf den rechten Seiten der Gleichungen

$$f_k(x) = \sum_{\alpha=\mu}^{\infty} a_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{26}$$

stehenden Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ *für* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho|\lambda|$, *wenn* $|\lambda| > 1$ *ist, und für* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$, *wenn* $|\lambda| < 1$ *ist, und stellen Funktionen* $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *dar, welche für* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho|\lambda|$ *bzw. für* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$ *regulär sind, die Periode* ω *besitzen und dem System linearer Differenzengleichungen*

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

genügen.[1]

Als Beispiel wollen wir die homogene lineare Differenzengleichung 1. Ordnung $f(x+h) = \left(1 - e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right) f(x)$ betrachten. Die Rekursionsformeln (27) für die Koeffizienten der Potenzreihe $f(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}$ lauten in diesem Falle einfach $a_0 = a_0$, $a_\alpha \lambda^\alpha = - a_{\alpha-1} + a_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$. Man kann ihnen genügen, indem man setzt:

$$a_0 = 1, \; a_1 = \frac{1}{1-\lambda}, \; a_2 = \frac{1}{(1-\lambda)(1-\lambda^2)}, \ldots, \; a_\alpha = \frac{1}{(1-\lambda)\ldots(1-\lambda^\alpha)}, \ldots$$

Es wird dann

$$f(x) = 1 + \frac{e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}}{1-\lambda} + \frac{e^{\frac{4\pi i x}{\omega}}}{(1-\lambda)(1-\lambda^2)} + \frac{e^{\frac{6\pi i x}{\omega}}}{(1-\lambda)(1-\lambda^2)(1-\lambda^3)} + \cdots$$

Die hier rechts stehende Potenzreihe in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ ist, wie man mit Hilfe des Quotientenkriteriums erkennt, im Falle $|\lambda| > 1$ beständig, im Falle $|\lambda| < 1$ dagegen nur für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < 1$ konvergent. — Derselbe Umfang der Konvergenz würde

---

[1] Ist das Verhalten der Koeffizienten $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ und $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ausserhalb des Konvergenzbereiches ihrer Entwicklungen nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ bekannt, dann kann man daraus unter Umständen auch auf das entsprechende Verhalten der Lösungen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ schliessen. Ähnliches wird auch bei späteren Sätzen zu bemerken sein. In § 9 wird eine solche Betrachtung auch durchgeführt werden.

sich auch aus Satz 4 ergeben; man beachte, dass die Funktion $q(x) = 1 - e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ für $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} = 1$ verschwindet.

§ 5. **Das Verschwinden einer in einer Halbebene holomorphen Lösung des homogenen Gleichungssystems.** Es handelt sich in diesem Paragraphen um den Beweis folgendes Satzes, der eine Verallgemeinerung des Satzes 2 darstellt:

Satz 5. *Es sei keine der n Wurzeln der charakteristischen Gleichung* $K(t) = 0$ (24) *von der Form* λ^α, *wo* α *eine ganze Zahl ist. Gibt es dann im Falle, dass* $|\lambda| > 1$ *ist, ein System von Funktionen* $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *welche in der durch die Ungleichung* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$, *im Falle, dass* $|\lambda| < 1$ *ist, ein System von Funktionen* $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *welche in der durch die Ungleichung* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ *definierten Halbebene regulär sind,* ω *zur Periode haben und dem System homogener linearer Differenzengleichungen*

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{33}$$

genügen, dann muss identisch für $k = 1, 2, \ldots, n$ $\quad f_k(x) = 0$ *sein.*

Wir betrachten zuerst den Fall $n = 1$. — Es sei also die Funktion $q(x)$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R$ regulär und für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ auch von Null verschieden und besitze die Periode ω. $q(x)$ sei ferner von der Beschaffenheit, dass eine für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R$ konvergente Reihenentwicklung von der Gestalt

$$q(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} q_\alpha e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \tag{23*}$$

besteht, wo das Anfangsglied q_0 sowohl von Null als auch von jeder Potenz von $\lambda = e^{\frac{2\pi i h}{\omega}}$ mit ganzzahligem Exponenten verschieden ist. Es gibt dann im Falle $|\lambda| > 1$ eine und nur eine Funktion $\Phi(x)$, welche für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$, im Falle $|\lambda| < 1$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ regulär ist, daselbst in der Form

$$\Phi(x) = 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \tag{35*}$$

dargestellt werden kann und der Differenzengleichung

$$q_0\, \Phi(x+h) = q(x)\, \Phi(x) \tag{36*}$$

genügt. Die Koeffizienten a_α ($\alpha = 1, 2, \ldots$) sind nämlich durch die Rekursionsformeln

$$a_\alpha \lambda^\alpha q_0 = q_\alpha + \sum_{\beta=1}^{\alpha} q_{\alpha-\beta}\, a_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots)$$

eindeutig bestimmt und die Potenzreihe $1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}$ ist nach Satz 4 für

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R\,|\lambda| \text{ bzw. } \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$$

konvergent und die durch sie dargestellte Funktion $\Phi(x)$ ist daselbst regulär. Nun sei $f(x)$ eine Funktion, welche für

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R\,|\lambda| \text{ bzw. } \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$$

regulär ist, ω zur Periode hat und der Differenzengleichung

$$f(x+h) = q(x) f(x) \tag{33*}$$

genügt. Dann ist $\frac{f(x+h)}{\Phi(x+h)} = q_0 \frac{f(x)}{\Phi(x)}$. Mit Hilfe der Gleichungen (35*) und (36*) kann man aber leicht feststellen, dass $\Phi(x)$ im Falle $|\lambda| > 1$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r\,|\lambda|$ und im Falle $|\lambda| < 1$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ von Null verschieden ist. Daher ist die Funktion $F(x) = \frac{f(x)}{\Phi(x)}$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r\,|\lambda|$ bzw. für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ regulär und periodisch mit der Periode ω. Weil diese Funktion aber der Differenzengleichung $F(x+h) = q_0 F(x)$ genügt, muss sie überhaupt in der ganzen Ebene regulär sein. Die in dieser Differenzengleichung vorkommende Konstante q_0 ist nun aber nach Voraussetzung keine Potenz von λ mit ganzzahlige Exponenten; daher folgt nach Satz 2, dass $F(x)$ identisch verschwindet. Nun folgt aus dem identischen Bestehen der Gleichung $F(x) = \frac{f(x)}{\Phi(x)} = 0$, dass auch identisch $f(x) = 0$ ist. — Hiemit ist Satz 5 für den Fall $n = 1$ bewiesen.

Wir behandeln zweitens den Fall, dass $n > 1$ ist. — Es sei t_n eine Wurzel der charakteristischen Gleichung (24) von der Beschaffenheit, dass keine der Zahlen $t_n \lambda, t_n \lambda^2, \ldots$ Wurzel dieser Gleichung ist. Offenbar muss es immer mindstens eine Wurzel der Gl. (24) von dieser Beschaffenheit geben. Es ist dann möglich, ein System von Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ anzugeben, welche den Gleichungen

$$t_n c_k = \sum_{l=1}^{n} q_{kl0} c_l \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{34}$$

genügen und nicht alle gleich Null sind. Wir halten ein solches System $c_1, c_2, \ldots, c_n$ fest und nehmen etwa an, es sei $c_n \neq 0$. Es gibt dann weiter im Falle, dass $|\lambda| > 1$ ist, ein und nur ein System von Funktionen $\Phi_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), welche für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$, und in dem Falle, dass $|\lambda| < 1$ ist, für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ regulär sind, daselbst in der Form

$$\Phi_k(x) = c_k + \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{35}$$

dargestellt werden können und dem System homogener linearer Differenzengleichungen

$$t_n \Phi_k(x + h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) \Phi_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{36}$$

genügen. Die Koeffizienten $a_{k\alpha}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha = 1, 2, \ldots$) sind nämlich durch die Rekursionsformeln

$$a_{k\alpha} t_n \lambda^\alpha = \sum_{l=1}^{n} q_{kl0} a_{l\alpha} + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \sum_{l=1}^{n} q_{kl\alpha-\beta} a_{l\beta} + \sum_{l=1}^{n} q_{kl\alpha} c_l \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots)$$

eindeutig bestimmt, weil die Ausdrücke $K(t_n \lambda^\alpha)$ für $\alpha = 1, 2, \ldots$ von Null verschieden sein sollen, und die auf der rechten Seite der Gl. (35) stehenden Reihen sind dann nach Satz 4 für

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda| \text{ bzw. für } \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$$

konvergent und die durch sie dargestellten Funktionen sind daselbst regulär. Es seien nun $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) Funktionen von x, welche für

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda| \text{ bzw. für } \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$$

regulär sind, ω zur Periode haben und dem System homogener linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{33}$$

genügen. Wir setzen dann

$$g_k(x) = f_k(x)\,\Phi_n(x) - f_n(x)\,\Phi_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{37}$$

Infolgedessen ist

$$f_k(x) = \frac{g_k(x) + f_n(x)\,\Phi_k(x)}{\Phi_n(x)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{38}$$

Die Gleichungen (38) haben einen Sinn, weil der Anfangskoeffizient c_n in der Entwicklung der Funktion $\Phi_n(x)$ nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ von Null verschieden sein soll, also $\Phi_n(x)$ sicher nicht identisch verschwindet. Aus (37) folgt

$$g_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x)\,\Phi_n(x+h) - \sum_{l=1}^{n} q_{nl}(x) f_l(x)\,\Phi_k(x+h)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

oder wegen (38)

$$g_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{kl}(x)\,\Phi_n(x+h) - q_{nl}(x)\,\Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)}\, g_l(x) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{n} \frac{q_{kl}(x)\,\Phi_n(x+h) - q_{nl}(x)\,\Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)}\, f_n(x)\,\Phi_l(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Hier verschwindet aber das zweite Glied der rechten Seite wegen des Bestehens der Gleichungen (36) und wir erhalten

$$g_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{kl}(x)\,\Phi_n(x+h) - q_{nl}(x)\,\Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)}\, g_l(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{39}$$

Das System homogener linearer Differenzengleichungen (39), dem also die Funktionen $g_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ genügen, wollen wir etwas näher betrachten. Es sei r_1 eine der Ungleichung $r_1 \leqq r$ genügende positive reelle Zahl von der Beschaffenheit, dass im Falle $|\lambda| > 1$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1 |\lambda|$ und im Falle $|\lambda| < 1$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1$ $\Phi_n(x) \neq 0$ ist. Dann sind die Koeffizienten des Systems (39) in beiden Fällen für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1$ regulär und lassen sich daselbst als gewöhnliche Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ darstellen; die konstanten Glieder, mit denen diese Potenzreihen beginnen, lauten $\frac{q_{kl0}\, c_n - q_{nl0}\, c_k}{c_n}$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n-1)$. Nun verifiziert man mit Hilfe der Gl. (34) leicht die Gleichung

$$|q_{kl0} - \delta_{kl}\, t| = (t_n - t) \left| \frac{q_{kl0}\, c_n - q_{nl0}\, c_k}{c_n} - \delta_{kl}\, t \right|. \tag{40}$$

Gl. (40) besagt, dass die charakteristische Gleichung des Systems (39) dieselben Wurzeln besitzt wie die charakteristische Gleichung $K(t) = 0$ (24) des Systems (33) bis auf t_n, das mit einer um 1 geringeren Vielfachheit auftritt. Setzt man ferner in (40) $t = 0$, so erkennt man, dass die Determinante der Anfangskoeffizienten $\frac{q_{kl0}\, c_n - q_{nl0}\, c_k}{c_n}$ der Entwicklungen der Koeffizienten des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (39) nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ von Null verschieden ist. Endlich kann man auch einen einfachen Ausdruck für die Determinante

$$\left| \frac{q_{kl}(x)\, \Phi_n(x+h) - q_{nl}(x)\, \Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)} \right|$$

gewinnen. Es ist wegen (36)

$$\begin{vmatrix} q_{kl}(x) & q_{kn}(x) \\ q_{nl}(x) & q_{nn}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{kl}(x) & \frac{t_n\, \Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)} - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{kl}(x)\, \Phi_l(x)}{\Phi_n(x)} \\ q_{nl}(x) & \frac{t_n\, \Phi_n(x+h)}{\Phi_n(x)} - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{nl}(x)\, \Phi_l(x)}{\Phi_n(x)} \end{vmatrix} =$$

$$= t_n \begin{vmatrix} q_{kl}(x) & \frac{\Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)} \\ q_{nl}(x) & \frac{\Phi_n(x+h)}{\Phi_n(x)} \end{vmatrix} = t_n \left[\frac{\Phi_n(x)}{\Phi_n(x+h)} \right]^{n-2} \left| \frac{q_{kl}(x)\, \Phi_n(x+h) - q_{nl}(x)\, \Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)} \right|.$$

Daher ergibt sich

$$\left|\frac{q_{kl}(x)\,\Phi_n(x+h)-q_{nl}(x)\,\Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)}\right|=\frac{1}{t_n}\left[\frac{\Phi_n(x+h)}{\Phi_n(x)}\right]^{n-2}\left|q_{kl}(x)\right|. \tag{41}$$

Aus (41) (es ist ja $n \geqq 2$ vorausgesetzt) folgt, dass die Determinante der Koeffizienten des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (39) jedenfalls für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1$ von Null verschieden ist.

Das System (39) erfüllt also alle Voraussetzungen, die beim Ausspruche des Satzes 5 bezüglich des ursprünglichen System (33) gemacht wurden; die positiven reellen Zahlen R und r (die ja auch einander gleich sein können) sind durch r_1 zu ersetzen. Nun kennen wir (s. Gl. 37) Funktionen $g_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$, welche für

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R\,|\lambda| \text{ bzw. } \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r,$$

daher erst recht für

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1\,|\lambda| \text{ bzw. } \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1$$

regulär sind, die Periode ω besitzen und dem System homogener linearer Differenzengleichungen (39) genügen. Wenn wir jetzt annehmen, dass Satz 5 für Systeme von weniger als n linearen Differenzengleichungen schon bewiesen ist, dann folgt das identische Bestehen der Gleichungen $g_k(x)=0$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$. Vermöge (38) folgt dann weiter

$$f_n(x+h)=\sum_{l=1}^{n} q_{nl}(x) f_l(x)=\sum_{l=1}^{n-1}\frac{q_{nl}(x)\,g_l(x)}{\Phi_n(x)}+$$
$$+\sum_{l=1}^{n-1}\frac{q_{nl}(x) f_n(x)\,\Phi_l(x)}{\Phi_n(x)}+q_{nn}(x) f_n(x)=\frac{f_n(x)}{\Phi_n(x)}\sum_{l=1}^{n} q_{nl}(x)\,\Phi_l(x)$$

oder schliesslich

$$f_n(x+h)=t_n\,\frac{\Phi_n(x+h)}{\Phi_n(x)}\,f_n(x).$$

Die Funktion $\dfrac{f_n(x)}{\Phi_n(x)}$ ist also in der durch die Ungleichung

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1\,|\lambda| \text{ bzw. } \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1$$

definierten Halbebene regulär, besitzt die Periode ω und multipliziert sich bei Zunahme des Arguments um h mit der Zahl t_n, welche keine Potenz von λ mit ganzzahligem Exponenten ist. Nun folgt entsprechend wie früher im Falle $n = 1$ für $\frac{f(x)}{\Phi(x)}$, dass $\frac{f_n(x)}{\Phi_n(x)}$ überhaupt in der ganzen Ebene holomorph ist und daher wegen der eben festgestellten Eigenschaften nach Satz 2 identisch verschwindet. Also ist auch identisch $f_n(x) = 0$. Aus den Gleichungen

$$f_k(x) = \frac{g_k(x) + f_n(x)\,\Phi_k(x)}{\Phi_n(x)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (38)$$

folgt dann auch $f_k(x) = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Wenn also Satz 5 für $n-1$ gilt, dann gilt er auch für n; nun gilt er für $n = 1$: also gilt er allgemein.

Anmerkung. Man kann verhältnismässig leicht beweisen, dass unter den Voraussetzungen des Satzes 5 das einzige System von Funktionen $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), welche für

$$\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq R|\lambda| \text{ bzw. } \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r$$

in der Form

$$f_k(x) = \sum_{\alpha=\mu}^{\infty} a_{k\alpha}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}$$

dargestellt werden können, und den Differenzengleichungen (33) genügen, das System $f_k(x) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) ist. Man braucht nämlich nur in den Gl. (27 a) des vorigen Paragraphen $B_{k\alpha} = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha = \mu, \mu + 1, \ldots$) zu setzen und die Vorraussetzung $K(\lambda^\alpha) \neq 0$ zu berücksichtigen, um zu erkennen, dass daraus (s. Gl. 28) $a_{k\alpha} = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha = \mu, \mu + 1, \ldots$) folgt. Nun muss aber auch berücksichtigt werden, dass mindestens eine der Funktionen $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) für

$$\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq R|\lambda| \text{ bzw. } \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r$$

sich in der Form

$$f_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} a_{k\alpha}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}$$

darstellen könnte, wo die rechts stehende Reihe nach der Seite der Potenzen von

$e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ mit negativen Exponenten nicht abbricht. Aus diesem Grunde wurde beim Beweise der hier gegangene Weg eingeschlagen.

§ 6. **Partikuläre Lösung eines Systems linearer Differenzengleichungen 1. Ordnung mit Koeffizienten und von den unbekannten Funktionen freien Gliedern, welche die gemeinsame Periode ω besitzen.** Es sei wieder wie im vorigen Paragraphen keine Potenz von λ mit ganzzahligem Exponenten Wurzel der charakteristischen Gleichung. Weiter sollen jetzt ϱ_1 und ϱ_2 positive reelle Zahlen sein, welche im Falle $|\lambda| > 1$ den Ungleichungen $\varrho_1 \leqq r$, $\varrho_2 \leqq R$, $\varrho_1 < \varrho_2$ und im Falle $|\lambda| < 1$ den Ungleichungen $\varrho_1 \leqq r$, $\varrho_2 \leqq r$, $\varrho_1 < \varrho_2$ genügen; hierauf seien n Funktionen $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ gegeben, welche in dem durch die Ungleichung $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ definierten Streifen regulär sind und die Periode ω besitzen. Diese Funktionen werden sich dann in dem genannten Streifen als Laurentsche Reihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ darstellen; es werden also für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ Gleichungen von der Form

$$B_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} B_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{42}$$

bestehen.

Wir suchen dann im Falle $|\lambda| > 1$ eine Lösung des Systems linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

deren sämtliche Funktionen in dem durch die Ungleichung

$$\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$$

und im Falle $|\lambda| < 1$ in dem durch die Ungleichung

$$\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$$

definierten Streifen regulär sind und die Periode ω besitzen.

Zunächst steht fest, dass es *nur eine* Lösung von dieser Beschaffenheit geben kann. — Es seien $f_k^{(1)}(x)$ und $f_k^{(2)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ zwei Lösungssysteme, welche den genannten Forderungen entsprechen. Dann sind die Funktionen $f_k(x) = f_k^{(1)}(x) - f_k^{(2)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in dem durch die Ungleichung

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda| \text{ bzw. } \varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$$

definierten Streifen regulär, besitzen die Periode ω und genügen dem System homogener linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{33}$$

Daraus kann man leicht schliessen, dass die Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sogar für

$$\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq R |\lambda| \text{ bzw. } \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r$$

regulär sind, die Periode ω besitzen und dem System linearer Differenzengleichungen (33) genügen. Aus diesen Eigenschaften der Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ und der gemachten Voraussetzung über die Wurzeln der charakteristischen Gleichung folgt aber nach Satz 5, dass die Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2. \ldots, n)$ identisch verschwinden. Aus $f_k(x) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ folgt aber $f_k^{(1)}(x) = f_k^{(2)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; d. h. die beiden angenommenen Lösungen des Systems (22) sind identisch.

Es sei nun zunächst $B_m(x) = e^{\frac{2\pi i \gamma x}{\omega}}$ (m eine bestimmte der Zahlen $1, 2, \ldots, n$; γ eine beliebige, aber feste ganze Zahl) und $B_k(x) = 0$ für $k \neq m$. In diesem Falle kann man eine und daher auch die einzige Lösung des Systems linearer Differenzengleichungen (22), deren sämtliche Funktionen für

$$\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq R |\lambda| \text{ bzw. } \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r$$

(es ist ja jetzt $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = R$ bzw. $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = r$) regulär sind und die Periode ω besitzen, leicht angeben. Nennen wir nämlich die gesuchten Funktionen dieser Lösung $f_{km\gamma}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, — diese sollen also den Gleichungen

$$f_{km\gamma}(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_{lm\gamma}(x) + \delta_{km} e^{\frac{2\pi i \gamma x}{\omega}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{43}$$

genügen — und machen den Ansatz

$$f_{km\gamma}(x) = \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} b_{km\alpha\gamma}\, e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{44}$$

so sind dadurch die Koeffizienten $b_{km\alpha\gamma}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = \gamma, \gamma + 1, \ldots)$ eindeutig bestimmt. Man erhält sie nämlich aus der Rekursionsformel

$$b_{km\alpha\gamma}\,\lambda^{\alpha} = \sum_{\beta=\gamma}^{\alpha} \sum_{l=1}^{n} b_{lm\beta\gamma}\, q_{kl\,\alpha-\beta} + \delta_{km}\,\delta_{\alpha\gamma} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = \gamma,\ \gamma + 1, \ldots) \tag{45}$$

oder

$$\sum_{l=1}^{n} (q_{kl0} - \delta_{kl}\,\lambda^{\alpha})\, b_{lm\alpha\gamma} + \sum_{\beta=\gamma}^{\alpha-1} \sum_{l=1}^{n} b_{lm\beta\gamma}\, q_{kl\,\alpha-\beta} + \delta_{km}\,\delta_{\alpha\gamma} = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = \gamma,\ \gamma + 1, \ldots). \tag{45 a}$$

(45 a) besagt zunächst im Falle $\alpha = \gamma$

$$\sum_{l=1}^{n} (q_{kl0} - \delta_{kl}\,\lambda^{\gamma})\, b_{lm\gamma\gamma} + \delta_{km} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Daraus folgt

$$b_{km\gamma\gamma} = -\frac{Q_{mk}(\lambda^{\gamma})}{K(\lambda^{\gamma})} \quad (k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \gamma \text{ ganzzahlig}). \tag{46}$$

Aus (45 a) folgt dann weiter allgemein

$$b_{km\alpha\gamma} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{Q_{jk}(\lambda^{\alpha})}{K(\lambda^{\alpha})} \sum_{\beta=\gamma}^{\alpha-1} \sum_{l=1}^{n} b_{lm\beta\gamma}\, q_{jl\,\alpha-\beta} - \delta_{\alpha\gamma} \frac{Q_{mk}(\lambda^{\alpha})}{K(\lambda^{\alpha})}$$

$$(k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \geqq \gamma)$$

oder wegen (46)

$$b_{km\alpha\gamma} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta=\gamma}^{\alpha-1} \sum_{l=1}^{n} b_{kj\alpha\alpha}\, b_{lm\beta\gamma}\, q_{jl\,\alpha-\beta} + \delta_{\alpha\gamma}\, b_{km\alpha\alpha}$$

$$(k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \geqq \gamma). \tag{47}$$

Gl. (47) zeigt, dass die Zahlen $b_{km\alpha\gamma}$ $(k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \geqq \gamma)$ in der Tat aus den Gleichungen (45) in eindeutiger Weise folgen. Aus Satz 4 folgt dann, dass die auf der rechten Seite der Gleichung (44) stehenden Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ für

$$\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq R\,|\lambda| \text{ bzw. für } \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r$$

konvergieren und die Gleichungen (43) wirklich auf die geforderte Art befriedigt werden.

Nun existiere zweitens eine positive reelle Zahl ϱ, welche im Falle $|\lambda| > 1$ der Ungleichung $\varrho \leqq R$ und im Falle $|\lambda| < 1$ der Ungleichung $\varrho \leqq r$ genügt und so beschaffen ist, dass die Funktionen $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in der durch die Ungleichung $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho$ definierten Halbebene regulär sind und die Periode ω besitzen; in den Laurentschen Reihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$, welche daher in dieser Halbebene die genannten Funktionen darstellen, mögen ausserdem höchstens endlich viele Glieder mit Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ mit negativem Exponenten vorkommen, so dass für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho$ konvergente Entwicklungen von der Gestalt

$$B_k(x) = \sum_{\alpha=\mu}^{\infty} B_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{25}$$

bestehen. Dann gibt es offenbar ein und nur ein System von Zahlen $a_{k\alpha}$ $(k = = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = \mu,\ \mu + 1,\ \mu + 2, \ldots)$ welche die Gleichungen

$$a_{k\alpha} \lambda^{\alpha} = \sum_{\beta=\mu}^{\alpha} \sum_{l=1}^{n} q_{kl\,\alpha-\beta}\, a_{l\beta} + B_{k\alpha} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = \mu,\ \mu + 1,\ \mu + 2, \ldots) \tag{27}$$

befriedigen, und nach Satz 4 sind dann die auf der rechten Seite der Gleichung

$$f_k(x) = \sum_{\alpha=\mu}^{\infty} a_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{26}$$

stehenden Reihen für

$$\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho |\lambda| \text{ bzw. } \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho$$

konvergent. Nun ist aber offenbar

$$a_{k\alpha} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma} B_{m\gamma}.$$

Daher folgt: wenn die Potenzreihen

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty} B_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{für } \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho$$

konvergieren und die durch sie dargestellten Funktionen auch noch für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = \varrho$ regulär sind ($\varrho \leqq R$ bzw. $\varrho \leqq r$), dann ist die Summe

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma} B_{m\gamma} \qquad \text{für } \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho |\lambda|$$

konvergent, wenn $|\lambda| > 1$ ist, und für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$ konvergent, wenn $|\lambda| < 1$ ist. Nun setzen wir insbesondere $B_{m\gamma} = w^{-\gamma}$ ($\gamma = \mu, \mu + 1, \mu + 2, \ldots$) und $B_{k\gamma} = 0$, für $k \neq m$, wo w eine von Null verschiedene Konstante ist. Dann folgt: die Summe

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty} z^{\alpha} \sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma} w^{-\gamma}$$

ist in dem Falle, dass $|\lambda| > 1$ ist, konvergent, wenn die Ungleichungen $|z| \leqq R|\lambda|$, $|z| < |w||\lambda|$, und im Falle $|\lambda| < 1$, wenn die Ungleichungen $|z| \leqq r$, $|z| < |w|$ erfüllt sind. Wir wollen nun beweisen, dass diese Konvergenz auch bestehen bleibt, wenn man die Zahlen $b_{km\alpha\gamma}$ durch ihren absoluten Betrag ersetzt, und dass daher die Konvergenz in einem abgeschlossenen Teile des durch die Ungleichungen $|z| \leqq R|\lambda|$, $|z| < |w| \cdot |\lambda|$ bzw. $|z| \leqq r$, $|z| < |w|$ definierten Bereiches in den komplexen Variabeln z und w auch eine gleichmässige ist.

Wir stellen zunächst fest, dass die Zahlen $b_{km\gamma\gamma}$ beschränkt sind. Es ist nämlich in dem Falle, dass $|\lambda| > 1$ ist, nach Gl. (46) $\lim\limits_{\gamma=-\infty} b_{km\gamma\gamma} = -\frac{Q_{mk}(0)}{K(0)}$ und $\lim\limits_{\gamma=+\infty} b_{km\gamma\gamma} = 0$; ist aber $|\lambda| < 1$, dann ist umgekehrt $\lim\limits_{\gamma=-\infty} b_{km\gamma\gamma} = 0$ und $\lim\limits_{\gamma=+\infty} b_{km\gamma\gamma} = -\frac{Q_{mk}(0)}{K(0)}$. Es sei demnach B eine positive reelle Zahl von der Beschaffenheit, dass für $k, m = 1, 2, \ldots, n$; $\gamma = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ $|b_{km\gamma\gamma}| < B$ ist.

Zur Durchführung des angekündigten Beweises haben wir hierauf nur notwendig, die Schritte des in § 4 durchgeführten Beweises des Satzes 4 zu wiederholen und zu vervollständigen. Es sei diesmal Q der grösste absolute Wert, den die Funktionen $q_{kl}(x)$ ($k, l = 1, 2, \ldots, n$) für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = r$ annehmen; dann bestehen die Ungleichungen $|q_{kl\alpha}| \leqq \frac{Q}{r^{\alpha}}$ ($k, l = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$). Weiter sei r_1 eine positive reelle Zahl, welche der Ungleichung $r_1 < \frac{r}{2n^2 BQ + 1}$ genügt und α

eine ganze Zahl, welche den Ungleichungen $\alpha > 0$ und $\alpha > \mu$ genügt. Schliesslich sei A eine positive reelle Zahl, welche grösser ist als $2B$ und grösser als der grösste absolute Wert, den die rationalen Funktionen von w

$$r_1^{\mu} \cdot b_{km\mu\mu}\, w^{-\mu},\ r_1^{\mu+1}\left[b_{km\,\mu+1\,\mu}\, w^{-\mu} + b_{km\,\mu+1\,\mu+1}\, w^{-(\mu+1)}\right], \ldots, r_1^{\alpha-1} \sum_{\gamma=\mu}^{\alpha-1} b_{km\,\alpha-1\,\gamma}\, w^{-\gamma}$$
$$(k, m = 1, 2, \ldots, n)$$

für $|w| = r_1$ annehmen. Dann ist also für $|w| = r_1$, $k, m = 1, 2, \ldots, n$

$$|b_{km\mu\mu}\, w^{-\mu}| < \frac{A}{r_1^{\mu}},\ |b_{km\,\mu+1\,\mu}\, w^{-\mu} + b_{km\,\mu+1\,\mu+1}\, w^{-(\mu+1)}| < \frac{A}{r_1^{\mu+1}}, \ldots,$$
$$\left|\sum_{\gamma=\mu}^{\alpha-1} b_{km\,\alpha-1\,\gamma}\, w^{-\gamma}\right| < \frac{A}{r_1^{\alpha-1}}.$$

Nun folgt aber aus (47)

$$\sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, w^{-\gamma} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{\beta=\mu}^{\alpha-1} b_{kj\alpha\alpha}\, q_{jl\,\alpha-\beta} \sum_{\gamma=\mu}^{\beta} b_{lm\beta\gamma}\, w^{-\gamma} + b_{km\alpha\alpha}\, w^{-\alpha}$$
$$(k, m = 1, 2, \ldots, n).$$

Infolgedessen ist für $|w| = r_1$, $k, m = 1, 2, \ldots, n$

$$\left|\sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, w^{-\gamma}\right| < n^2 B Q \sum_{\beta=\mu}^{\alpha-1} \frac{A}{r^{\alpha-\beta}\, r_1^{\beta}} + \frac{B}{r_1^{\alpha}} < \frac{A}{r_1^{\alpha}}\left(\frac{n^2 B Q r_1}{r - r_1} + \frac{B}{A}\right) < \frac{A}{r_1^{\alpha}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{A}{r_1^{\alpha}}.$$

Die Ungleichung

$$\left|\sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, w^{-\gamma}\right| < \frac{A}{r_1^{\alpha}} \quad (|w| = r_1,\ k, m = 1, 2, \ldots, n)$$

gilt also für jedes $\alpha \geqq \mu$. Nach der Cauchyschen Abschätzungsformel ist daher für $k, m = 1, 2, \ldots, n$; $\mu \leqq \gamma \leqq \alpha$

$$|b_{km\alpha\gamma}| < \frac{\dfrac{A}{r_1^{\alpha}}}{r_1^{-\gamma}}$$

oder

$$|b_{km\alpha\gamma}| < \frac{A}{r_1^{\alpha-\gamma}} \tag{48}$$
$$(k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \mu \leqq \gamma \leqq \alpha).$$

Aus der Ungleichung (48) folgt, dass die Doppelsumme

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty} \sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma} z^{\alpha} w^{-\gamma}$$

in einem abgeschlossenen Teil des durch die Ungleichungen $|z| < |w|$, $|z| < r_1$ definierten Bereiches in den komplexen Variabeln z und w absolut und gleichmässig konvergiert. Diese Summe stellt daher eine für $|z| < |w|$, $0 < |z| < r_1$ reguläre analytische Funktion von z und w dar. Wir setzen nun

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty} \sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma} e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\alpha x - \gamma y)} = \sum_{\gamma=\mu}^{\infty} f_{km\gamma}(x) e^{-\frac{2\pi i \gamma y}{\omega}} = F_{km\mu}(x, y). \tag{49}$$

Hierauf betrachten wir zunächst den Fall $|\lambda| > 1$ und verstehen unter ν eine positive ganze Zahl von der Beschaffenheit, dass $\frac{R}{|\lambda|^{\nu}} < r_1$ ist. Dann sind jedenfalls die auf den rechten Seiten der Gleichungen

$$F_{km\mu}(x, y) = \sum_{\alpha=\mu}^{\infty} \sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma} e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\alpha x - \gamma y)} \qquad (k, m = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$q_{kl}(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} q_{kl\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

stehenden Summen und die Reihe

$$\sum_{\gamma=\mu}^{\infty} e^{\frac{2\pi i \gamma}{\omega}(x-y)}$$

absolut konvergent, wenn die Ungleichungen

$$\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| < \left| e^{\frac{2\pi i y}{\omega}} \right|, \quad \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \frac{R}{|\lambda|^{\nu}}$$

erfüllt sind. Unter dieser Bedingung kann man daher in das Produkt $q_{kl}(x) F_{lm\mu}(x, y)$ die obigen unendlichen Summen einsetzen, nach dem Reihenmultiplikationssatz ausmultiplizieren und sodann den Reihenausdruck

$$\sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) F_{lm\mu}(x, y) + \delta_{km} \sum_{\gamma=\mu}^{\infty} e^{\frac{2\pi i \gamma}{\omega}(x-y)}$$

nach Belieben umordnen. Durch solche Umordnung kann aber dieser Reihenausdruck, wie man sich leicht überzeugt, auch die Gestalt

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty}\sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\alpha x-\gamma y)}\left(\sum_{\beta=\gamma}^{\alpha}\sum_{l=1}^{n} b_{lm\beta\gamma}\, q_{kl\alpha-\beta}+\delta_{km}\,\delta_{\alpha\gamma}\right)$$

erhalten. In dieser Gestalt ist er also wieder für

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right|<\left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right|,\ \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right|\leqq\frac{R}{|\lambda|^{\nu}}$$

absolut konvergent. Benützt man aber Gl. (45), dann erkennt man, dass die Doppelsumme

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty}\sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\,\lambda^{\alpha} z^{\alpha} w^{-\gamma} \qquad \text{für } |z|<|w|,\ |z|\leqq\frac{R}{|\lambda|^{\nu}}$$

absolut konvergent ist. Mit andern Worten: die Doppelsumme

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty}\sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, z^{\alpha} w^{-\gamma}$$

ist sogar absolut konvergent, wenn nur die Ungleichungen $|z|<|w|\cdot|\lambda|$, $|z|\leqq\frac{R}{|\lambda|^{\nu-1}}$ erfüllt sind.

Diese absolute Konvergenz gilt also jedenfalls für $|z|<|w|$, $|z|\leqq\frac{R}{|\lambda|^{\nu-1}}$. Geht man von dieser letzteren Tatsache aus, und wiederholt den eben durchgeführten Schluss noch einmal, so folgt, dass die Summe

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty}\sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, z^{\alpha} w^{-\gamma}$$

auch absolut konvergiert, wenn nur die Ungleichungen

$$|z|<|w|\cdot|\lambda|,\ |z|\leqq\frac{R}{|\lambda|^{\nu-2}}$$

erfüllt sind. Indem man so fortfährt, erkennt man schliesslich, dass die Summe

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty}\sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, z^{\alpha}\, w^{-\gamma}$$

für $|z| < |w| \cdot |\lambda|$, $|z| \leqq R|\lambda|$ absolut konvergiert; daraus folgt leicht, dass sie in einem abgeschlossenen Teil des durch diese Ungleichungen definierten Bereiches in den Variabeln z und w auch gleichmässig konvergiert.

Im Falle $|\lambda| < 1$ muss man die Gleichungen

$$F_{km\mu}(x+h, y) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\, F_{lm\mu}(x, y) + \delta_{km} \sum_{\gamma=\mu}^{\infty} e^{\frac{2\pi i \gamma}{\omega}(x-y)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{50}$$

welche zunächst für

$$\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| < \left| e^{\frac{2\pi i y}{\omega}} \right|, \quad \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| < r_1$$

gelten, nach den ungeänderten Funktionen $F_{lm\mu}(x, y)$ aufgelöst denken und erkennt dann auf dieselbe Weise wie oben, dass die Reihe

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty}\sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, \lambda^{\alpha}\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\alpha x - \gamma y)},$$

deren absolute Konvergenz zunächst nur für

$$\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| < \frac{\left| e^{\frac{2\pi i y}{\omega}} \right|}{|\lambda|}, \quad \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| < \frac{r_1}{|\lambda|}$$

feststand, sogar für

$$\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| < \frac{\left| e^{\frac{2\pi i y}{\omega}} \right|}{|\lambda|}, \quad \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \frac{r}{|\lambda|}$$

absolut konvergiert. D. h. die Doppelreihe

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty}\sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, z^{\alpha}\, w^{-\gamma} \text{ ist für } |z| < |w|, \ |z| \leqq r$$

absolut und daher in einem abgeschlossenen Teil des durch diese Ungleichungen definierten Bereiches in den Variabeln z und w auch gleichmässig konvergent.

Wir haben hiemit den

Satz 6. *Die Doppelreihe*

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty} \sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma} z^{\alpha} w^{-\gamma}$$

(μ eine beliebige ganze Zahl) *ist im Falle* $|\lambda| > 1$ *für* $|z| < |w| \cdot |\lambda|$, $|z| \leqq R|\lambda|$ *und im Falle* $|\lambda| < 1$ *für* $|z| < |w|$, $|z| \leqq r$ *absolut und in einem abgeschlossenen Teile des durch diese Ungleichungen gegebenen Bereiches in den Variabeln z und w auch gleichmässig konvergent.*

Wir gehen nun auf die Rekursionsformeln (45) für die Zahlen $b_{km\alpha\gamma}$ zurück und schreiben diese folgendermassen:

$$\sum_{\beta=\gamma}^{\alpha} \sum_{l=1}^{n} (q_{kl\,\alpha-\beta} - \delta_{kl}\,\delta_{\alpha\beta}\,\lambda^{\alpha})\, b_{lm\beta\gamma} + \delta_{km}\,\delta_{\alpha\gamma} = 0 \qquad (k, m = 1, 2, \ldots, n; \quad \alpha \geqq \gamma).$$

Versteht man unter den Zeichen $q_{kl\alpha}$ und $b_{km\alpha\gamma}$ Null, wenn $\alpha < 0$ bzw. $\alpha < \gamma$ ist, und unter γ_0 und α_0 zwei ganze Zahlen, welche die Ungleichung $\alpha_0 > \gamma_0$ erfüllen, dann kann man für $\alpha, \gamma = \gamma_0, \gamma_0 + 1, \ldots, \alpha_0 - 1, \alpha_0$; $k, m = 1, 2, \ldots, n$ die obigen Gleichungen auch so schreiben:

$$\sum_{\beta=\gamma_0}^{\alpha_0} \sum_{l=1}^{n} (q_{kl\,\alpha-\beta} - \delta_{kl}\,\delta_{\alpha\beta}\,\lambda^{\alpha})\, b_{lm\beta\gamma} + \delta_{km}\,\delta_{\alpha\gamma} = 0.$$

Das heisst aber: die Matrix $\{q_{km\alpha-\gamma} - \delta_{km}\,\delta_{\alpha\gamma}\,\lambda^{\alpha}\}$ gibt, mit der Matrix $\{-b_{km\alpha\gamma}\}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha = \gamma_0, \gamma_0 + 1, \ldots, \alpha_0$ von Zeile zu Zeile, $m = 1, 2, \ldots, n$, $\gamma = \gamma_0, \gamma_0 + 1, \ldots, \alpha_0$ von Spalte zu Spalte) in dieser Reihenfolge multipliziert, die Einheitsmatrix. Also muss auch das Produkt dieser beiden Matrizen in der umgekehrten Reihenfolge gleich der Einheitsmatrix sein. Das besagt aber:

$$\sum_{\beta=\gamma_0}^{\alpha_0} \sum_{l=1}^{n} (q_{lm\,\beta-\gamma} - \delta_{lm}\,\delta_{\beta\gamma}\,\lambda^{\beta})\, b_{kl\alpha\beta} + \delta_{km}\,\delta_{\alpha\gamma} = 0$$
$$(k, m = 1, 2, \ldots, n; \ \alpha, \gamma = \gamma_0, \gamma_0 + 1, \ldots, \alpha_0).$$

Lässt man jetzt wieder die verschwindenden Glieder weg, so folgt

$$\sum_{\beta=\gamma}^{\alpha} \sum_{l=1}^{n} (q_{lm\,\beta-\gamma} - \delta_{lm}\,\delta_{\beta\gamma}\,\lambda^{\beta})\, b_{kl\alpha\beta} + \delta_{km}\,\delta_{\alpha\gamma} = 0 \qquad (k, m = 1, 2, \ldots, n).$$

In dieser Gleichung sind jetzt die ganzen Zahlen α und γ nurmehr der Beschränkung $\alpha \geqq \gamma$ unterworfen. Um nämlich die Giltigkeit der Gleichung für ein bestimmtes Wertepaar $\alpha = \bar{\alpha}$, $\gamma = \bar{\gamma}$ $(\bar{\alpha} \geqq \bar{\gamma})$ einzusehen, braucht man nur in der vorangegangenen Überlegung $\alpha_0 > \bar{\alpha}$ und $\gamma_0 < \bar{\gamma}$ anzunehmen. Wir schreiben nun die gewonnene Gleichung wieder in derselben Form wie Gl. (45):

$$b_{km\alpha\gamma}\lambda^{\gamma} = \sum_{\beta=\gamma}^{\alpha}\sum_{l=1}^{n} q_{lm\,\beta-\gamma}\, b_{kl\alpha\beta} + \delta_{km}\,\delta_{\alpha\gamma} \qquad (k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \geqq \gamma). \quad (51)$$

Setzt man jetzt

$$b_{km\alpha\gamma} = b^{*}_{mk,-\gamma,-\alpha}, \quad -h = h^{*}, \quad e^{\frac{2\pi i h^{*}}{\omega}} = \frac{1}{\lambda} = \lambda^{*}, \quad q_{kl}(x) = q^{*}_{lk}(x), \quad q_{kl\alpha} = q^{*}_{lk\alpha}$$

so ergibt (51)

$$b^{*}_{mk,-\gamma,-\alpha}\lambda^{*-\gamma} = \sum_{\beta=\gamma}^{\alpha}\sum_{l=1}^{n} q^{*}_{ml\,\beta-\gamma}\, b^{*}_{lk,-\beta,-\alpha} + \delta_{km}\,\delta_{\alpha\gamma} \qquad (k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \geqq \gamma)$$

oder

$$b^{*}_{km\alpha\gamma}\lambda^{*\alpha} = \sum_{\beta=\gamma}^{\alpha}\sum_{l=1}^{n} q^{*}_{kl\,\alpha-\beta}\, b^{*}_{lm\beta\gamma} + \delta_{km}\,\delta_{\alpha\gamma} \qquad (k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \geqq \gamma). \quad (51\text{ a})$$

Die Gl. (51 a) sagen aus, dass die Grössen $b^{*}_{km\alpha\gamma}$ bei dem System homogener linearer Differenzengleichungen

$$g_k(y + h^{*}) = \sum_{l=1}^{n} q^{*}_{kl}(y)\, g_l(y) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

oder

$$g_k(y - h) = \sum_{l=1}^{n} q_{lk}(y)\, g_l(y) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (52)$$

dieselbe Rolle spielen wie die Grössen $b_{km\alpha\gamma}$ bei dem zu (22) gehörigen System homogener linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x + h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\, f_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (33)$$

(52) ist das zu (33) adjungierte System homogener linearer Differenzengleichungen. Dieses adjungierte System erfüllt aber die Forderungen, die zu Beginn dieses Paragraphen an das ursprüngliche System gestellt wurden, ebenso. Es ist nämlich $|q^{*}_{kl0}| = |q_{kl0}|$, $|q^{*}_{kl}(x)| = |q_{kl}(x)|$ und $|q^{*}_{kl0} - \delta_{kl}t| = |q_{kl0} - \delta_{kl}t|$, so

dass auch die Wurzeln der charakteristischen Gleichung dieselben sind. Es gelten daher alle an dem ursprünglichen System ausgeführten Schlüsse auch für das adjungierte System (52). Insbesondere gilt der Satz 6 entsprechende Satz: die Doppelsumme

$$\sum_{\alpha=\mu}^{\infty} \sum_{\gamma=\mu}^{\alpha} b^{*}_{km\alpha\gamma} z^{\alpha} w^{-\gamma}$$

(μ eine beliebige ganze Zahl) ist in dem Falle, dass $|\lambda^*| > 1$ ist, für $|z| < |w||\lambda^*|$, $|z| \leqq R|\lambda^*|$, und wenn $|\lambda^*| < 1$ ist, für $|z| < |w|$, $|z| \leqq r$ absolut und in einem abgeschlossenen Teile des durch diese Ungleichungen definierten Bereiches in den Variabeln z und w auch gleichmässig konvergent. Ersetzen wir hier die Grössen $b^{*}_{mk,-\gamma,-\alpha}$ und λ^* wieder durch ihre Werte $b_{km\alpha\gamma}$ und λ^{-1}, so geht dieser Satz über in den

Satz 7. *Die Doppelreihe*

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{\mu} \sum_{\alpha=\gamma}^{\mu} b_{km\alpha\gamma} z^{\alpha} w^{-\gamma}$$

(μ eine beliebige ganze Zahl) *ist im Falle* $|\lambda| > 1$ *für* $|w| < |z|$, $|w| \leqq r$ *und im Falle* $|\lambda| < 1$ *für* $|w| \cdot |\lambda| < |z|$, $|w| \cdot |\lambda| \leqq R$ *absolut und in einem abgeschlossenen Teile des durch diese Ungleichungen gegebenen Bereiches in den Variabeln* z *und* w *auch gleichmässig konvergent.*

Nun kehren wir zu dem allgemeinen Falle des Systems linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad (22)$$

zurück, in welchen die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ den zu Beginn dieses Paragraphen ausgesprochenen Vorausetzungen genügen und die Funktionen $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in dem durch die Ungleichung $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ $(\varrho_1 < \varrho_2 \leqq R, \varrho_1 \leqq r$ bzw. $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq r)$ definierten Streifen regulär sind und daselbst durch Laurentsche Reihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ dargestellt werden:

$$B_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} B_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \quad (42)$$

Wir behaupten nun: jede der Summen

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} B_{m\gamma}\, b_{km\alpha\gamma} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \text{ beliebig ganzzahlig})$$

ist absolut konvergent, und wenn man die Bezeichnung

$$a_{k\alpha} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} B_{m\gamma}\, b_{km\alpha\gamma} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \text{ beliebig ganzzahlig})$$

einführt, dann konvergieren die Laurentschen Reihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} a_{k\alpha}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \text{ für } \varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 \,|\lambda|$$

bzw. im Falle, dass $|\lambda| < 1$ ist, für $\varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$.

Da die Doppelsumme

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{\mu} \sum_{\alpha=\gamma}^{\mu} b_{km\alpha\gamma}\, z^{\alpha}\, w^{-\gamma}$$

für $|w| \leqq r$, $|w| < |z|$ bzw. für $|w| \cdot |\lambda| \leqq R$, $|w| \cdot |\lambda| < |z|$ absolut konvergiert, so gilt dasselbe auch von den Teilsummen

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, z^{\alpha}\, w^{-\gamma}$$

für $\alpha \leqq \mu$. Da aber in diesen Teilsummen z^{α} gemeinsamer Faktor ist, so kann deren Konvergenzverhalten von z nicht mehr abhängen; anderseits kann die ganze Zahl μ beliebig gross gemacht werden. Daher ergibt sich: Jede der Potenzreihen in w

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, w^{-\gamma}$$

ist in dem Falle, dass $|\lambda| > 1$ ist, für $|w| \leqq r$, und in dem Falle, dass $|\lambda| < 1$ ist, für $|w| \leqq \dfrac{R}{|\lambda|}$ absolut und gleichmässig konvergent.

Setzt man

$$g_{mk\alpha}(y) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, e^{-\frac{2\pi i \gamma y}{\omega}} \qquad (k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \text{ beliebig ganzzahlig})$$

so sind demnach die so definierten Funktionen $g_{mk\alpha}(y)$ $(k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha$ ganz) von y in der durch die Unglechung $\left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| \leqq r$ bzw. in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| \leqq \frac{R}{|\lambda|}$ definierten Halbebene regulär und besitzen die Periode ω; aus den Gleichungen (51) folgt weiter das Bestehen der Differenzengleichungen

$$g_{km\alpha}(y-h) = \sum_{l=1}^{n} q_{lk}(y)\, g_{lm\alpha}(y) + \delta_{km}\, e^{-\frac{2\pi i \alpha y}{\omega}}$$

$$(k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \text{ beliebig ganzzahlig}).$$

Infolge der eben festgestellten Konvergenz der Reihen

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, w^{-\gamma}$$

konvergieren auch die Potenzreihen in w

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma}\, w^{-\gamma}$$

$(\alpha \geqq 0)$ in demselben Umfange. Wir verstehen nun in der Gleichung

$$b_{km\alpha\gamma} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta=\gamma}^{\alpha-1} \sum_{l=1}^{n} b_{kj\alpha\alpha}\, b_{lm\beta\gamma}\, q_{jl\,\alpha-\beta} + \delta_{\alpha\gamma}\, b_{km\alpha\alpha} \tag{47}$$

unter α eine nicht negative ganze Zahl. Dann ist

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma}\, w^{-\gamma} = \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} w^{-\gamma} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta=\gamma}^{\alpha-1} \sum_{l=1}^{n} b_{kj\alpha\alpha}\, b_{lm\beta\gamma}\, q_{jl\,\alpha-\beta}$$

oder

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma}\, w^{-\gamma} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta=-\infty}^{-1} \sum_{l=1}^{n} b_{kj\alpha\alpha}\, q_{jl\,\alpha-\beta} \sum_{\gamma=-\infty}^{\beta} b_{lm\beta\gamma}\, w^{-\gamma} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \sum_{l=1}^{n} b_{kj\alpha\alpha}\, q_{jl\,\alpha-\beta} \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{lm\beta\gamma}\, w^{-\gamma}. \tag{53}$$

Die hier vorgenommene Vertauschung der Summationen ist gestattet, weil

$$\sum_{\beta=-\infty}^{-1} \sum_{\gamma=-\infty}^{\beta} q_{jl\,\alpha-\beta}\, b_{lm\beta\gamma}\, w^{-\gamma}$$

für $|w| \leqq r$ bzw. für $|w| \leqq \frac{R}{|\lambda|}$ absolut konvergent ist. Weil nämlich die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ auch noch für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = R$ regulär sind, gibt es eine positive reelle Zahl $\bar{R}$, welche der Ungleichung $\bar{R} > R$ genügt und so beschaffen ist, dass die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ auch noch für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{R}$ regulär sind; es gibt dann auch eine positive reelle Zahl $\bar{Q}$ von der Beschaffenheit, dass für $k, l = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ $|q_{kl\alpha}| < \frac{\bar{Q}}{\bar{R}^{\alpha}}$ ist. Die Glieder der Doppelreihe

$$\sum_{\beta=-\infty}^{-1} \sum_{\gamma=-\infty}^{\beta} q_{jl\,\alpha-\beta}\, b_{lm\beta\gamma}\, w^{-\gamma}$$

sind daher absolut genommen kleiner als die Glieder der Doppelreihe

$$\sum_{\beta=-\infty}^{-1} \sum_{\gamma=-\infty}^{\beta} \frac{\bar{Q}}{\bar{R}^{\alpha}}\, b_{lm\beta\gamma}\, \bar{R}^{\beta}\, |w^{-\gamma}|.$$

Diese Doppelreihe ist aber nach Satz 7 wegen der Ungleichung $\bar{R} > R$ für $|w| \leqq r$ bzw. für $|w| \leqq \frac{R}{|\lambda|}$ absolut konvergent.

Wir nehmen jetzt an, es sei $|\lambda| > 1$. Die Zeichen $\bar{R}$ und $\bar{Q}$ sollen in der folgenden Betrachtung weiter die eben erklärte Bedeutung haben; ausserdem mögen $\bar{r}$ und r_1 positive reelle Zahlen sein, welche der Ungleichung $r < \bar{r} < r_1 < \bar{R}$ genügen; $\bar{r}$ sei ferner so beschaffen, dass für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{r}$ immer noch $|q_{kl}(x)| \neq 0$ ist, so dass im Wortlaute des Satzes 7 die Zahl r auch durch die Zahl $\bar{r}$ ersetzt werden kann. Es sei nun die positive reelle Zahl A grösser als der grösste absolute Wert, den die Funktionen

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{-1} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, z^{\alpha}\, w^{-\gamma} \qquad (k, m = 1, 2, \ldots, n)$$

für $|z| = r_1$, $|w| = \bar{r}$ annehmen. Dann ist für $|w| = \bar{r}$, $\alpha < 0$

$$\left| \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma} w^{-\gamma} \right| < \frac{A}{r_1^{\alpha}} \qquad (k, m = 1, 2, \ldots, n).$$

Da ferner $|\lambda| > 1$ sein soll, ist

$$\lim_{\alpha=+\infty} \left[\frac{n \bar{Q} r_1}{\bar{R} - r_1} \sum_{j=1}^{n} |b_{kj\alpha\alpha}| \right] = \lim_{\alpha=+\infty} \left[\frac{n \bar{Q} r_1}{\bar{R} - r_1} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{Q_{jk}(\lambda^{\alpha})}{K(\lambda^{\alpha})} \right| \right] = 0.$$

Es ist daher möglich, eine positive ganze Zahl α_0 so anzugeben, dass für

$$\alpha > \alpha_0, \; k = 1, 2, \ldots, n \qquad \frac{n \bar{Q} r_1}{\bar{R} - r_1} \sum_{j=1}^{n} |b_{kj\alpha\alpha}| < 1$$

ist. Wir verstehen hierauf unter α eine ganze Zahl, welche der Ungleichung $\alpha > \alpha_0$ genügt, und weiter unter $\bar{A}$ eine positive reelle Zahl, welche grösser als A ist und grösser als der grösste absolute Wert, den die Funktionen von w

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km0\gamma} w^{-\gamma}, \; r_1 \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km1\gamma} w^{-\gamma}, \; r_1^2 \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km2\gamma} w^{-\gamma}, \ldots, r_1^{\alpha-1} \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km,\alpha-1,\gamma} w^{-\gamma}$$
$$(k, m = 1, 2, \ldots, n)$$

für $|w| = \bar{r}$ annehmen. Dann ist für $|w| = \bar{r}$ nicht nur

$$\left| \sum_{\gamma=-\infty}^{\beta} b_{km\beta\gamma} w^{-\gamma} \right| < \frac{\bar{A}}{r_1^{\beta}} \qquad (\beta < 0, \; k, m = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$\left| \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\beta\gamma} w^{-\gamma} \right| < \frac{\bar{A}}{r_1^{\beta}} \qquad (\beta = 0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1; \; k, m = 1, 2, \ldots, n),$$

sondern auch nach (53)

$$\left| \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma} w^{-\gamma} \right| < \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta=-\infty}^{\alpha-1} \sum_{l=1}^{n} |b_{kj\alpha\alpha}| \frac{\bar{Q} \bar{A}}{\bar{R}^{\alpha-\beta} r_1^{\beta}} = \frac{\bar{A}}{r_1^{\alpha}} \frac{n \bar{Q} r_1}{\bar{R} - r_1} \sum_{j=1}^{n} |b_{kj\alpha\alpha}| < \frac{\bar{A}}{r_1^{\alpha}}$$
$$(k, m = 1, 2, \ldots, n).$$

Da man diesen Schluss beliebig oft wiederholen kann, gilt die Ungleichung

$\left|\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma}\, w^{-\gamma}\right| < \frac{\bar{A}}{r_1^\alpha}$ überhaupt für $\alpha \geqq 0$, $k, m = 1, 2, \ldots, n$, $|w| = \bar{r}$. Aus dem Bestehen der Ungleichung $\left|\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma}\, w^{-\gamma}\right| < \frac{\bar{A}}{r_1^\alpha}$ für $\alpha \geqq 0$, $k, m = 1, 2, \ldots, n$, $|w| = \bar{r}$ kann man aber leicht schliessen, dass die Doppelpotenzreihe in z und w $\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma}\, z^\alpha w^{-\gamma}$ für $|z| < r_1$, $|w| \leqq \bar{r}$ absolut konvergent ist.

Also sind die Doppelreihen

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{-1}\sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, z^\alpha w^{-\gamma} \text{ und } \sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma}\, z^\alpha w^{-\gamma}$$

beide absolut konvergent, wenn die Ungleichungen $|w| < \bar{r}$, $|w| < |z| < r_1$ erfüllt sind; die positive reelle, der Ungleichung $\bar{r} > r$ genügende Zahl $\bar{r}$ haben wir ja so gewählt, dass im Wortlaute des Satzes 7 die Zahl r auch durch die Zahl $\bar{r}$ ersetzt werden kann. Nennen wir daher die Funktion von x und y

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{-1}\sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\alpha x - \gamma y)} + \sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma}\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\alpha x - \gamma y)} \qquad F_{km}(x, y),$$

so ist $F_{km}(x, y)$ für

$$\left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| < \bar{r}, \quad \left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < r_1$$

regulär und besitzt in Bezug auf beide Argumente die Periode ω. Nun kann man aber auch schreiben

$$F_{km}(x, y) = \sum_{\gamma=-\infty}^{-1}\sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} b_{km\alpha\gamma}\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\alpha x - \gamma y)} = \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} e^{-\frac{2\pi i \gamma y}{\omega}} f_{km\gamma}(x).$$

Daher ist (s. Gl. 43)

$$F_{km}(x+h, y) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\, F_{lm}(x, y) + \delta_{km} \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} e^{\frac{2\pi i \gamma (x-y)}{\omega}}.$$

Die hier im zweiten Gliede der rechten Seite stehende Reihe ist aber konvergent, wenn $\left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right|$ ist. Daher folgt aus der eben angeschriebenen Gleichung, dass auch die Doppelsumme $\sum\limits_{\gamma=-\infty}^{-1}\sum\limits_{\alpha=\gamma}^{\infty} b_{km\alpha\gamma}\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}[\alpha(x+h)-\gamma y]}$ oder

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{-1}\sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}[\alpha(x+h)-\gamma y]} + \sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma}\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}[\alpha(x+h)-\gamma y]},$$

welche die Funktion $F_{km}(x+h, y)$ darstellt, für

$$\left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| < \bar{r},\quad \left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < r_1$$

absolut konvergent ist, oder dass mit andern Worten die Doppelsumme

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{-1}\sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma}\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\alpha x-\gamma y)} + \sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma}\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\alpha x-\gamma y)},$$

welche die Funktion $F_{km}(x, y)$ darstellt, auch in dem durch die Ungleichungen

$$\left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| < \bar{r},\quad \left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| \cdot |\lambda| < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < r_1|\lambda|$$

definierten Bereiche in den Variabeln x und y absolut konvergiert. Das letztere gilt daher insbesondere auch von der Teilsumme $\sum\limits_{\alpha=0}^{\infty}\sum\limits_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma}\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\alpha x-\gamma y)}$. Hieraus folgt aber vermöge einer einfachen Eigenschaft der Potenzreihen, dass die Doppelsumme $\sum\limits_{\alpha=0}^{\infty}\sum\limits_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma}\, e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\alpha x-\gamma y)}$ sogar für $\left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| < \bar{r}$, $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < r_1|\lambda|$ absolut konvergiert. Diese letztere Aussage ist aber gleichwertig mit der Aussage, dass die Doppelsumme $\sum\limits_{\alpha=0}^{\infty}\sum\limits_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma}\, z^{\alpha} w^{-\gamma}$ für $|w| < \bar{r}$, $|z| < r_1|\lambda|$ absolut konvergent ist. Wiederholt man nun den soeben durchgeführten Schluss genügend oft, dann erkennt man, dass die Doppelsumme $\sum\limits_{\alpha=0}^{\infty}\sum\limits_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma}\, z^{\alpha} w^{-\gamma}$ absolut konvergent ist, wenn die Ungleichungen $|w| < \bar{r}$, $|z| \leqq R|\lambda|$ erfüllt sind. Insbesondere ist also die Doppelsumme $\sum\limits_{\alpha=0}^{\infty}\sum\limits_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma}\, z^{\alpha} w^{-\gamma}$ für $|w| \leqq r$, $|z| \leqq R|\lambda|$ absolut und gleichmässig konvergent.

Diese Aussage gilt, wenn $|\lambda| > 1$ ist; ist aber $|\lambda| < 1$, so gilt die entsprechende Aussage für das zu dem ursprünglichen System linearer Differenzengleichungen adjungierte System. Diese Aussage lautet aber: die Doppelreihe in z und w $\sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b^*_{km\alpha\gamma} z^\alpha w^{-\gamma}$ ist für $|w| \leqq r$, $|z| \leqq R|\lambda^*|$ absolut und gleichmässig konvergent. Benützt man jetzt wieder die Gleichungen $b^*_{km\alpha\gamma} = b_{mk,-\gamma,-\alpha}$, $\lambda^* = \frac{1}{\lambda}$ und vertauscht z mit w, so folgt: die Doppelpotenzreihe in z und w $\sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{0} b_{km\alpha\gamma} z^\alpha w^{-\gamma}$ ist für $|w| \leqq \frac{R}{|\lambda|}$, $|z| \leqq r$ absolut und gleichmässig konvergent. Man hätte ebenso gut dasselbe von $\sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma} z^\alpha w^{-\gamma}$ beweisen können. Wir haben daher den

Satz 8. *Die Doppelpotenzreihe in z und w*

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} b_{km\alpha\gamma} z^\alpha w^{-\gamma} \qquad (k, m = 1, 2, \ldots, n)$$

ist in dem Falle, dass $|\lambda| > 1$ ist, für $|w| \leqq r$, $|z| \leqq R|\lambda|$, und wenn $|\lambda| < 1$ ist, für $|w| \leqq \frac{R}{|\lambda|}$, $|z| \leqq r$ absolut und gleichmässig konvergent.

Nun lässt sich der Beweis der behaupteten Konvergenz der auf den rechten Seiten der Gleichungen

$$a_{k\alpha} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} B_{m\gamma} b_{km\alpha\gamma} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \text{ ganz})$$

und

$$f_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} a_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

stehenden Reihen in wenigen Worten führen. Da nämlich die Laurentschen Reihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} B_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

in dem durch die Ungleichung $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ definierten Streifen konvergieren und die durch sie dargestellten Funktionen daselbst regulär sind, so gibt es eine positive reelle Zahl M, so dass die Ungleichungen

$$|B_{k\alpha}| \leqq \frac{M}{\varrho_1^\alpha} \text{ für } \alpha < 0 \text{ und } |B_{k\alpha}| \leqq \frac{M}{\varrho_2^\alpha} \text{ für } \alpha \geqq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten. Also sind die Glieder der dreifachen Summe

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}} B_{m\gamma} b_{km\alpha\gamma} =$$

$$= \left(\sum_{\alpha=-\infty}^{-1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \right) e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}} B_{m\gamma} b_{km\alpha\gamma}$$

absolut genommen kleiner als die Glieder der Summe

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{-1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} M |b_{km\alpha\gamma}| \left| e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}} \right| \varrho_1^{-\gamma} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{-1} M |b_{km\alpha\gamma}| \left| e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}} \right| \varrho_1^{-\gamma} +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=0}^{\alpha} M |b_{km\alpha\gamma}| \cdot \left| e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}} \right| \varrho_2^{-\gamma}.$$

Es sei nun zunächst $|\lambda| > 1$. Da in diesem Falle das Bestehen der Ungleichungen $\varrho_1 \leqq r$ und $\varrho_2 \leqq R$ vorausgesetzt wurde, konvergiert der erste Summand dieser Majorante nach Satz 7 für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| > \varrho_1$, der zweite Summand nach Satz 8 für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq R|\lambda|$ und der dritte Summand nach Satz 6 für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| < \varrho_2 |\lambda|$. Die aufgestellte Majorante konvergiert also für $\varrho_1 < \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| < \varrho_2 |\lambda|$. Daher konvergiert auch

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}} B_{m\gamma} b_{km\alpha\gamma}$$

in diesem Umfange. Nun haben wir angenommen, dass die Funktionen $B_k(x)$ auch für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| = \varrho_1$ und für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| = \varrho_2$ und die Funktionen $q_{kl}(x)$ auch für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| = R$ noch regulär sein sollen. Man könnte daher die Zahl ϱ_1 auch durch eine kleinere Zahl ϱ_1^*, die Zahlen ϱ_2 und R auch durch grössere Zahlen ϱ_2^* und R^* so ersetzen, dass immer noch die Ungleichungen $\varrho_1^* < \varrho_2^* \leqq R^*$, $\varrho_1^* \leqq r$ bestehen, die Funktionen $B_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ immer noch für $\varrho_1^* \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2^*$ und die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l=1, 2, \ldots, n)$ immer noch für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R^*$ regulär sind und die Summen

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} B_{m\gamma}\, b_{km\alpha\gamma} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

auch noch für $\varrho_1^* < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < \varrho_2^* |\lambda|$ absolut konvergieren. Daher ist die Summe

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} B_{m\gamma}\, b_{km\alpha\gamma} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

sogar für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$ absolut und gleichmässig konvergent.

Nun sei zweitens $|\lambda| < 1$. Dann konvergiert der erste Summand unserer Majorante nach Satz 7 für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| > \varrho_1 |\lambda|$, der zweite Summand nach Satz 8 für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ und der dritte Summand nach Satz 6 für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < \varrho_2$. Daraus folgt aber nach einer ähnlichen Überlegung wie im Falle $|\lambda| > 1$, dass unsere Summe

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} B_{m\gamma}\, b_{km\alpha\gamma} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

für $\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ absolut und gleichmässig konvergiert.

Setzt man nun

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} B_{m\gamma}\, b_{km\alpha\gamma} = f_k(x) \quad (k=1, 2, \ldots, n), \quad (54)$$

dann sind die so definierten Funktionen $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ von x für

$$\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda| \text{ bzw. für } \varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$$

regulär und besitzen die Periode ω. Die Gleichungen (54) liefern auch die Laurentsche Entwicklung der Funktionen $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$; setzt man nämlich

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} B_{m\gamma} b_{km\alpha\gamma} = a_{k\alpha} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \text{ ganz}), \quad (55)$$

dann ist

$$f_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} a_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (56)$$

und die auf den rechten Seiten der Gleichungen (56) stehenden Laurentschen Reihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ konvergieren für

$$\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda| \text{ bzw. für } \varrho_1 |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2.$$

Die Gleichungen (54) lehren, dass man auch schreiben kann:

$$f_k(x) = \sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} B_{m\gamma} f_{km\gamma}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (57)$$

Die hier rechts stehenden Summen sind wieder in demselben Umfange absolut und gleichmässig konvergent. — Die durch (54) definierten Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ genügen schliesslich auch dem System linearer Differenzengleichungen (22); denn aus (43) und (57) folgt

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + \sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty} B_{m\gamma} e^{\frac{2\pi i \gamma x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

oder

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (22)$$

wie behauptet wurde.

Wir haben zu Beginn dieses Paragraphen vorausgesetzt, dass keine Zahl von der Form λ^α (α ganzzahlig) Wurzel der charakteristischen Gleichung $K(t) = 0$ (24) ist. Die Existenz einer partikulären Lösung des Systems linearer Differenzengleichungen (22), deren sämtliche Funktionen die Periode ω besitzen, ist aber auch klar, wenn eine oder mehrere Zahlen von der Form λ^α (α ganzzahlig) Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind, aber sonst alle anderen gemachten Voraussetzungen erfüllt sind. Wir setzen in diesem Falle

$$f_k(x) = \varphi(x) \bar{f}_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n); \qquad (58)$$

hier soll $\varphi(x)$ eine in der ganzen Ebene meromorphe Funktion von x sein, welche der Differenzengleichung $\varphi(x+h) = \varepsilon\,\varphi(x)$ genügt und die Periode ω besitzt. Eine solche Funktion $\varphi(x)$ kann man nach Satz 1 auf mannigfach verschiedene Weise angeben. Die von Null verschiedene Zahl ε soll so beschaffen sein, dass die Wurzeln $t_1, t_2, \ldots, t_n$ der charakteristischen Gleichung $K(t) = 0$ (24) durch Division durch ε in Zahlen $\frac{t_1}{\varepsilon}, \frac{t_2}{\varepsilon}, \ldots, \frac{t_n}{\varepsilon}$ übergehen, von denen keine von der Form λ^α (α ganzzahlig) ist. Das System (22) geht dann durch die Transformation (58) über in

$$\varepsilon \bar{f}_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\bar{f}_l(x) + \frac{B_k(x)}{\varphi(x)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{59}$$

Nun verstehen wir unter $\bar{\varrho}_1$, $\bar{\varrho}_2$ positive reelle Zahlen, welche den Ungleichungen $\varrho_1 \leqq \bar{\varrho}_1 < \bar{\varrho}_2 \leqq \varrho_2$, $\bar{\varrho}_1 \leqq r$ genügen und so beschaffen sind, dass für $\bar{\varrho}_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{\varrho}_2$ $\varphi(x) \neq 0$ ist.[1] Dann ist nach unseren früheren Entwicklungen eindeutig ein System von Funktionen $\bar{f}_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ bestimmt, welche im Falle $|\lambda| > 1$ für $\bar{\varrho}_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{\varrho}_2 |\lambda|$ und im Falle $|\lambda| < 1$ für $\bar{\varrho}_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{\varrho}_2$ regulär sind, die Periode ω besitzen und dem System linearer Differenzengleichungen (59) genügen. Die Gleichungen

$$f_k(x) = \varphi(x)\bar{f}_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{58}$$

liefern hierauf ein System von Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, welche in dem durch die Ungleichung $\bar{\varrho}_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{\varrho}_2 |\lambda|$ bzw. in dem durch die Ungleichung $\bar{\varrho}_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \bar{\varrho}_2$ definierten Bereiche meromorph sind, die Periode ω besitzen und dem System linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

---

[1] Wenn $\varrho_1 = r$ ist, was wir im Falle $|\lambda| > 1$ ja zulassen, dann folgt aus den Ungleichungen $\varrho_1 \leqq \bar{\varrho}_1 < \bar{\varrho}_2 \leqq \varrho_2$, $\bar{\varrho}_1 \leqq r$ die Gleichung $\bar{\varrho}_1 = r$. Man muss daher in diesem Falle an die Funktion $\varphi(x)$ noch die leicht zu erfüllende Anforderung stellen, dass sie auf der durch die Gleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = r$ definierten Geraden nicht verschwinden soll.

genügen. Aus dem Bestehen der Differenzengleichungen (22) folgt dann, dass die Funktionen $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ so analytisch fortgesetzt werden können, dass sie sogar für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$ bzw. für $\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ meromorph sind, die Periode ω besitzen und dem System linearer Differenzengleichungen (22) genügen.

Dieselbe Überlegung hätte man auch in dem Falle anstellen können, dass keine Wurzel der charakteristischen Gleichung die Form λ^α besitzt, wo α eine ganze Zahl bedeutet.

Wir können nunmehr folgenden Satz aussprechen:

Satz 9. *Es seien ϱ_1 und ϱ_2 positive reelle Zahlen, welche im Falle $|\lambda| > 1$ den Ungleichungen $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq R$, $\varrho_1 \leqq r$ und im Falle $|\lambda| < 1$ der Ungleichung $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq r$ genügen. Hierauf seien $B_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ Funktionen von x, welche für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ regulär sind und die Periode ω besitzen, so dass für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ konvergente Reihenentwicklungen von der Gestalt*

$$B_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} B_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{42}$$

bestehen. Dann kann man stets in mannigfach verschiedener Weise ein System von Funktionen $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ angeben, welche in dem Falle, dass $|\lambda| > 1$ ist, in dem durch die Ungleichung $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$ und in dem Falle, dass $|\lambda| < 1$ ist, in dem durch die Ungleichung $\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ definierten Streifen in der Ebene der komplexen Variabeln x meromorph sind, die Periode ω besitzen und dem System linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x) \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

genügen. Wenn insbesondere keine Zahl von der Form λ^α, wo das Zeichen α eine ganze Zahl bedeutet, Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$K(t) = 0 \tag{24}$$

ist, dann gibt es ein und nur ein System von Funktionen $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, *welche in dem genannten Streifen holomorph sind, die Periode ω besitzen und dem System linearer Differenzengleichungen* (22) *genügen. Durch die Gleichungen*

$$b_{km\alpha\gamma}\lambda^\alpha = \sum_{\beta=\gamma}^{\alpha}\sum_{l=1}^{n} b_{lm\beta\gamma}\, q_{kl\alpha-\beta} + \delta_{km}\,\delta_{\alpha\gamma} \qquad (k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \geqq \gamma) \tag{45}$$

ist nämlich in diesem Falle ein System von Zahlen $b_{km\alpha\gamma}$ $(k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha \geqq \gamma)$ *eindeutig bestimmt. Die Gleichungen*

$$f_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty}\ \sum_{m=1}^{n}\ \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}}\, b_{km\alpha\gamma} B_{m\gamma} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{54}$$

definieren dann jene Lösung des Systems (22)*; die rechts stehenden Summen sind nämlich, wenn* $|\lambda| > 1$ *ist, für* $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2|\lambda|$, *und wenn* $|\lambda| < 1$ *ist, für* $\varrho_1|\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ *absolut und gleichmässig konvergent.*

Die Gleichungen (54) *liefern in dem durch die Ungleichung*

$$\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2|\lambda| \ \text{ bzw. }\ \varrho_1|\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$$

definierten Streifen auch die Laurentsche Entwicklung der Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *nach Potenzen von* $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$:

$$f_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} a_{k\alpha}\, e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{56}$$

wo

$$a_{k\alpha} = \sum_{m=1}^{n}\ \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma} B_{m\gamma} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \text{ganz}) \tag{55}$$

ist. Sie lehren auch, dass man in diesem Streifen die Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *mittels der Gleichungen*

$$f_k(x) = \sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty}\ \sum_{m=1}^{n} B_{m\gamma} f_{km\gamma}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{57}$$

aus denjenigen Funktionen $f_{km\gamma}(x)$ $(k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \gamma$ *ganzzahlig*) *zusammensetzen kann, welche für* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$ *bzw. für* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ *regulär sind, die Periode* ω

besitzen und den Differenzengleichungen

$$f_{km\gamma}(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_{lm\gamma}(x) + \delta_{km} e^{\frac{2\pi i \gamma x}{\omega}} \tag{43}$$

$$(k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \gamma \textit{ beliebig ganzzahlig})$$

genügen.

§ 7. **Zusammenhang mit dem adjungierten System linearer Differenzengleichungen.** Es sei wieder keine Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$K(t) = 0 \tag{24}$$

von der Form λ^{α} (α eine ganze Zahl); wir haben in diesem Falle gesehen, dass das System der Zahlen $b_{km\alpha\gamma}$ ($k, m = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha \geqq \gamma$), welche zu dem System homogener linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{33}$$

gehören, bis auf die Anordnung identisch ist mit dem entsprechenden System von Zahlen $b^{*}_{km\alpha\gamma}$ ($k, m = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha \geqq \gamma$), welche zu dem zu (33) adjungierten System homogener linearer Differenzengleichungen

$$g_k(y-h) = \sum_{l=1}^{n} q_{lk}(y) g_l(y) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{52}$$

gehören. Es ist nämlich $b^{*}_{km\alpha\gamma} = b_{mk,-\gamma,-\alpha}$ ($k, m = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha \geqq \gamma$). Auf Grund dessen und auf Grund des Satzes 9 ist die Richtigkeit der folgenden Behauptungen ohne weiteres einzusehen.

Die positiven reellen Zahlen ϱ_1 und ϱ_2 mögen im Falle $|\lambda| > 1$ der Ungleichung $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq r$ und im Falle $|\lambda| < 1$ den Ungleichungen $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq R$, $\varrho_1 \leqq r$ genügen. Hierauf seien $\Pi_k(y)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) Funktionen von y, welche für $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i y}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ regulär sind und die Periode ω besitzen, so dass für $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i y}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ konvergente Reihenentwicklungen von der Gestalt

$$\Pi_k(y) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \Pi_{k\alpha} e^{-\frac{2\pi i \alpha y}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{60}$$

bestehen. Dann gibt es, wenn $|\lambda| > 1$ ist, ein und nur ein System von Funktionen $g_k(y)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, welche für $\frac{\varrho_1}{|\lambda|} \leqq \left| e^{\frac{2\pi i y}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$, und wenn $|\lambda| < 1$ ist, ein und nur ein System von Funktionen $g_k(y)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, welche für $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i y}{\omega}} \right| \leqq \frac{\varrho_2}{|\lambda|}$ regulär sind, die Periode ω besitzen und dem System linearer Differenzengleichungen

$$g_k(y-h) = \sum_{l=1}^{n} q_{lk}(y)\, g_l(y) + \Pi_k(y) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{61}$$

genügen. Dieses System von Funktionen $g_k(y)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ist nämlich durch die Gleichungen

$$g_k(y) = \sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i \gamma y}{\omega}}\, b_{mk\alpha\gamma}\, \Pi_{m\alpha} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{62}$$

definiert. Die auf den rechten Seiten der Gleichungen (62) stehenden Summen sind nämlich in dem durch die Ungleichung $\frac{\varrho_1}{|\lambda|} \leqq \left| e^{\frac{2\pi i y}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ bzw. in dem durch die Ungleichung $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i y}{\omega}} \right| \leqq \frac{\varrho_2}{|\lambda|}$ definierten Streifen absolut und gleichmässig konvergent.

Die Gleichungen (62) liefern in dem genannten Streifen auch die Laurentsche Entwicklung der Funktionen $g_k(y)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}$. Setzt man nämlich

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} b_{mk\alpha\gamma}\, \Pi_{m\alpha} = \pi_{k\gamma} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \gamma \text{ ganzzahlig}), \tag{63}$$

dann ist

$$g_k(y) = \sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty} \pi_{k\gamma}\, e^{-\frac{2\pi i \gamma y}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{64}$$

Die Gleichungen (62) lehren ferner, dass man die Funktionen $g_k(y)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ mittels der Gleichungen

$$g_k(y) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \Pi_{m\alpha}\, g_{km\alpha}(y) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{65}$$

aus denjenigen Funktionen $g_{km\alpha}(y)$ $(k, m = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha$ ganz$)$ zusammensetzen kann, welche für $\left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| \leqq r$ bzw. für $\left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| \leqq \frac{R}{|\lambda|}$ regulär sind, die Periode ω besitzen und den Differenzengleichungen

$$g_{k m \alpha}(y-h) = \sum_{l=1}^{n} q_{l k}(y)\, g_{l m \alpha}(y) + \delta_{k m}\, e^{-\frac{2\pi i \alpha y}{\omega}}$$

$$(k, m = 1, 2, \ldots, n; \ \alpha \text{ beliebig ganzzahlig})$$

genügen.

§ 8. **Die Picardsche Abschätzung.** **Satz 10.** *Es sei $K(\lambda^\alpha)$ für jedes ganzzahlige α von Null verschieden. Wenn dann ϱ_1 und ϱ_2 zwei feste, den Ungleichungen $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq R$, $\varrho_1 \leqq r$ im Falle $|\lambda| > 1$ und $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq r$ im Falle $|\lambda| < 1$ genügende positive reelle Zahlen sind, dann ist es möglich, eine positive reelle Zahl $\varkappa$ von der Beschaffenheit anzugeben, dass bei jedem System von Funktionen $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, welche für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ regulär sind und die Periode ω besitzen, die zugehörigen Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, welche (s. Satz 9) in dem Falle, dass $|\lambda| > 1$ ist, dadurch definiert sind, dass sie für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$, und in dem Falle, dass $|\lambda| < 1$ ist, dadurch, dass sie für $\varrho_2 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ regulär sind, die Periode ω besitzen und dem System linearer Differenzengleichungen*

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{k l}(x) f_l(x) + B_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

genügen, für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2 |\lambda|$ bzw. für $\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ die Ungleichungen

$$|f_k(x)| \leqq \varkappa\, M[B_l(x)] \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{66}$$

erfüllen, wo $M[B_l(x)]$ den grössten absoluten Wert bedeutet, den die Funktionen $B_l(x)$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ annehmen.[1]

Beim Beweise müssen wir die Fälle $|\lambda| > 1$ und $|\lambda| < 1$ getrennt behandeln.

[1] Dieser Satz wurde von Emil Picard in der Abhandlung »Sur une classe des transcendantes nouvelles» (Acta mathematica 18, p. 133—154) für den Fall konstanter Koeffizienten $q_{k l}(x)$ ausgesprochen; Picard beschränkt sich ausserdem auf den Fall $n = 1$, weil man bei konstanten Koeffizienten auf diesen den Fall $n > 1$ im allgemeinen zurückführen kann.

Es sei also zunächst $|\lambda| > 1$. Ist M der grösste absolute Wert, den die Funktionen $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in dem durch die Ungleichung $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ definierten Streifen annehmen und lautet die Laurentsche Entwicklung dieser Funktionen nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ in dem genannten Streifen

$$B_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} B_{k\alpha}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{42}$$

dann ist für $k = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha \geqq 0$ $\quad |B_{k\alpha}| \leqq \frac{M}{\varrho_2^\alpha}$ und für $\alpha < 0$ sogar $|B_{k\alpha}| \leqq \frac{M}{\varrho_1^\alpha}$. Nun ist ja

$$f_k(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}\, b_{km\alpha\gamma}\, B_{m\gamma} = \sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} b_{km\alpha\gamma}\, B_{m\gamma}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Daher ist für

$$\varrho_1 < \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| < \varrho_2 |\lambda|$$

$$|f_k(x)| \leqq M \left(\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}| \cdot \left| e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \right| \varrho_1^{-\gamma} + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}| \cdot \left| e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \right| \varrho_2^{-\gamma} \right)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Der Reihenausdruck in der Klammer ist wirklich für $\varrho_1 < \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| < \varrho_2 |\lambda|$ konvergent. Für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| = \varrho_2$ ist insbesondere

$$|f_k(x)| \leqq M \left(\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}|\, \varrho_2^\alpha \varrho_1^{-\gamma} + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}|\, \varrho_2^{\alpha-\gamma} \right) \leqq M F_1$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

wenn man unter F_1 die grösste der nicht negativen reellen Zahlen

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}|\, \varrho_2^\alpha \varrho_1^{-\gamma} + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}|\, \varrho_2^{\alpha-\gamma} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

versteht. Nun bestehen die Gleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Ist daher Q der grösste absolute Wert, den die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = \varrho_2$ annehmen, dann ist für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = \varrho_2$

$$|f_k(x+h)| \leqq n M Q F_1 + M = (n Q F_1 + 1) M \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

oder

$$|f_k(x)| \leqq (n Q F_1 + 1) M \text{ für } \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = \varrho_2 |\lambda|, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Zweitens folgt aus der obigen, für $\varrho_1 < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < \varrho_2 |\lambda|$ giltigen Ungleichung für die Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, dass für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = \varrho_1 |\lambda|$ die Ungleichung

$$|f_k(x)| \leqq M \left[\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}| (\varrho_1 |\lambda|)^\alpha \varrho_1^{-\gamma} + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}| (\varrho_1 |\lambda|)^\alpha \varrho_2^{-\gamma} \right]$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

besteht. Bezeichnet man mit F die grösste der nicht negativen reellen Zahlen

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}| (\varrho_1 |\lambda|)^\alpha \varrho_1^{-\gamma} + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}| (\varrho_1 |\lambda|)^\alpha \varrho_2^{-\gamma} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

dann ist also für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = \varrho_1 |\lambda|$

$$|f_k(x)| \leqq F M \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Nun sei $\{\bar{q}_{kl}(x)\} = \{q_{kl}(x)\}^{-1}$; dann folgt aus (22):

$$f_k(x) = \sum_{l=1}^{n} \bar{q}_{kl}(x) f_l(x+h) - \sum_{l=1}^{n} \bar{q}_{kl}(x) B_l(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{22*}$$

Weil aber die Determinante $|q_{kl}(x)|$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ von Null verschieden ist, sind die Funktionen $\bar{q}_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ und daher wegen der Ungleichung $\varrho_1 \leqq r$ insbesondere für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_1$ regulär. Es sei daher Q_1 der grösste absolute Wert, den die Funktionen $\bar{q}_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = \varrho_1$ annehmen. Dann folgt aus (22*) für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = \varrho_1$

$$|f_k(x)| \leqq n\,Q_1 F M + n\,Q_1 M = n\,Q_1(1 + F)M \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Wir sehen also, dass für

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = \varrho_1, \quad \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = \varrho_1|\lambda|, \quad \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = \varrho_2, \quad \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = \varrho_2|\lambda|$$

der Reihe nach die Ungleichungen

$$|f_k(x)| \leqq n\,Q_1(1 + F)M, \quad |f_k(x)| \leqq FM, \quad |f_k(x)| \leqq F_1 M, \quad |f_k(x)| \leqq (n\,Q F_1 + 1)M$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen. Daraus folgt, dass überhaupt in dem durch die Ungleichung $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2|\lambda|$ definierten Streifen der absolute Betrag keiner der Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ grösser werden kann als die grösste der Zahlen $n\,Q_1(F + 1)M$, FM, $F_1 M$, $(n\,Q F_1 + 1)M$, ja nicht einmal grösser als die grössere der beiden Zahlen $n\,Q_1(F + 1)M$ und $(n\,Q F_1 + 1)M$. Versteht man daher unter $\varkappa$ die grössere der beiden Zahlen $n\,Q_1(F + 1)$ und $n\,Q F_1 + 1$, dann ist für

$$\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2|\lambda|, \; k = 1, 2, \ldots, n \qquad |f_k(x)| \leqq \varkappa M,$$

wie auch die Funktionen $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, welche für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ regulär sind und die Periode ω besitzen, im übrigen gewählt sein mögen. Die Existenz einer positiven reellen Zahl $\varkappa$ von der in Satz 10 verlangten Beschaffenheit ist also bewiesen.

Ähnlich hat man vorzugehen, wenn $|\lambda| < 1$ ist. Es ist in diesem Falle für $\varrho_1|\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$

$$f_k(x) = \sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} b_{km\alpha\gamma} B_{m\gamma} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad (54)$$

daher für $\varrho_1|\lambda| < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < \varrho_2$

$$|f_k(x)| \leqq M \left(\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}| \cdot \left| e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \right| \varrho_1^{-\gamma} + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}| \cdot \left| e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \right| \varrho_2^{-\gamma} \right)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Also ist für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| = \varrho_2 |\lambda|$, $k = 1, 2, \ldots, n$

$$|f_k(x)| \leqq M \left[\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}| (\varrho_2 |\lambda|)^\alpha \varrho_1^{-\gamma} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}| (\varrho_2 |\lambda|)^\alpha \varrho_2^{-\gamma} \right] \leqq MF,$$

wenn man unter F die grösste der nicht negativen reellen Zahlen

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{-1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}| (\varrho_2 |\lambda|)^\alpha \varrho_1^{-\gamma} + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}| (\varrho_2 |\lambda|)^\alpha \varrho_2^{-\gamma} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

versteht. Ebenso ist für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| = \varrho_1$

$$|f_k(x)| \leqq MF_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

wo F_1 die grösste der nicht negativen reellen Zahlen

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}| \varrho_1^{\alpha-\gamma} + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} |b_{km\alpha\gamma}| \varrho_1^\alpha \varrho_2^{-\gamma} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Ist jetzt Q_1 der grösste absolute Wert, den die Funktionen $\bar{q}_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| = \varrho_2$ und Q der grösste absolute Wert, den die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| = \varrho_1$ annehmen, dann folgt aus (22*) und aus der ersten Ungleichung für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| = \varrho_2$

$$|f_k(x)| \leqq n\, Q_1 FM + n\, Q_1 M = n Q_1 (F + 1) M \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

entsprechend folgt aus (22) und aus der zweiten Ungleichung für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| = \varrho_1$

$$|f_k(x + h)| \leqq n\, Q F_1 M + M = (n\, Q F_1 + 1) M \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

oder

$$|f_k(x)| \leqq (n\, Q F_1 + 1) M \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = \varrho_1 |\lambda|$. Bezeichnet man jetzt wieder die grössere der beiden Zahlen $n Q F_1 + 1$ und $n Q_1 (F+1)$ mit $\varkappa$, dann ist für $\varrho_1 |\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$, $k = 1, 2, \ldots, n$

$$|f_k(x)| \leqq \varkappa M.$$

Die Bildungsweise der positiven reellen Zahl $\varkappa$ ist auch jetzt davon unabhängig, welche für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\omega i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ holomorphen Funktionen von der Periode ω $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in (22) speziell auftreten.

§ 9. **Betrachtung des Falles, dass die von den unbekannten Funktionen freien Glieder nicht periodisch sind.** Man kann sich die Frage stellen, ob die Ergebnisse des § 6 nicht auch aufrecht bleiben, wenn zwar die Koeffizienten $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ den in § 4 ausgesprochenen Voraussetzungen genügen, aber die Funktionen $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ nicht die Periode ω besitzen. Wir wollen wieder die Voraussetzung machen, dass der Ausdruck $K(\lambda^\alpha)$ für ganzzahliges α von Null verschieden ist, und ausserdem nur annehmen, dass die Funktionen $B_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in der Umgebung einer Strecke, welche in Richtung und Länge mit der komplexen Zahl ω übereinstimmt und in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ definierten Halbebene liegt, regulär sind. Wir denken uns hierauf längs der Geraden, welche jene Strecke enthält, eine Funktion von x durch die Festsetzung erklärt, dass sie im Innern der genannten Strecke mit $B_k(x)$ (k eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$), an dem einen ihrer Endpunkte mit dem arithmetischen Mittel der Werte der Funktion $B_k(x)$ an den beiden Endpunkten übereinstimmen und im übrigen die Periode ω besitzen soll. Setzt man dann

$$B_{k\alpha} = \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x_0+\omega} B_k(x) e^{-\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} dx \qquad (\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

wo x_0 und $x_0 + \omega$ die Endpunkte unserer Strecke sind und das Integralzeichen eine Integration längs dieser Strecke bedeutet, dann ist die Reihe $\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} B_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}$ in jedem zu x_0 mod ω inkongruenten Punkte der unsere Strecke enthaltenden Geraden konvergent (auf einer in dieser Geraden liegenden Strecke, welche weder im Innern noch in einem Endpunkte einen mod ω zu x_0 kongruenten Punkt enthält, sogar gleichmässig konvergent) und stellt die oben erklärte Funktion von x dar; die Reihe

$$B_{k0} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(B_{k\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} + B_{k,-\alpha} e^{-\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \right) = B_{k0} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left[(B_{k\alpha} + B_{k,-\alpha}) \cos \frac{2\pi\alpha x}{\omega} + i (B_{k\alpha} - B_{k,-\alpha}) \sin \frac{2\pi\alpha x}{\omega} \right]$$

(trigonometrische Reihe) ist auch in den mod ω zu x_0 kongruenten Punkten konvergent und stellt diese Funktion dar.

Wir fragen uns nun: welche Bedeutung haben die entsprechend Satz 9 gebildeten Reihen

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} b_{km\alpha\gamma} B_{m\gamma} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

und wenn diese Reihen Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ von x darstellen, inwieweit kann man dann sagen, dass diese Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ dem System linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (22)$$

genügen?

Wir beschränken uns auf die Betrachtung der einfachen Differenzengleichung erster Ordnung mit einer unbekannten Funktion

$$f(x+h) - f(x) = x.$$

Wir definieren daher längs derjenigen durch den Nullpunkt gehenden Geraden, welche die Richtung ω besitzt, eine Funktion von x dadurch, das wir festsetzen, sie solle im Innern der die Punkte $-\frac{\omega}{2}$ und $+\frac{\omega}{2}$ verbindenden Strecke mit x übereinstimmen, für $x = \frac{\omega}{2}$ verschwinden und die Periode ω besitzen. Diese Funktion wird in den zu $\frac{\omega}{2}$ mod ω inkongruenten Punkten der Geraden, auf welcher sie definiert ist, durch die Laurentsche Reihe in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$

$$\frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}}-\frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}e^{-\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}}$$

dargestellt; in der Form

$$\frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}\left(e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}}-e^{-\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}}\right)=\frac{\omega}{\pi}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}\sin\frac{2\pi\alpha x}{\omega}$$

stellt diese Reihe die genannte Funktion auch noch für $x\equiv\frac{\omega}{2}\pmod{\omega}$ dar. Die Wurzel der charakterististischen Gleichung

$$t-1=0$$

unserer linearen Differenzengleichung hat den Ausnahmewert $1=\lambda^0$; diese Differenzengleichung ist also gar nicht von der oben betrachteten Beschaffenheit. Das Wesen der Sache kann aber trotzdem an diesem Beispiele erläutert werden; man kann nämlich eine Laurentsche Reihe in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ angeben, welche der Differenzengleichung

$$f(x+h)-f(x)=\frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}}-\frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}e^{-\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}}$$

formal genügt, indem man setzt

$$f(x)=\frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}\,\frac{e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}}}{\lambda^{\alpha}-1}-\frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}\,\frac{e^{-\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}}}{\lambda^{-\alpha}-1}.$$

Wir haben nun zu untersuchen, in welchem Umfange die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Laurentsche Reihe in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ konvergiert und inwieweit man gegebenenfalls von der durch diese Reihe dargestellten Funktion $f(x)$ sagen kann, dass sie der Differenzengleichung

$$f(x+h)-f(x)=x$$

genügt.

Wir denken uns die komplexe Zahlenebene durch zwei Halbstrahlen, welche von den Punkten $-\frac{\omega}{2}$ und $+\frac{\omega}{2}$ ausgehen, längs der die beiden Punkte verbindenden Geraden ins Unendliche verlaufen und die Strecke zwischen den beiden Punkten freilassen, aufgeschnitten. In der so aufgeschnittenen Ebene sind

$$\frac{\omega}{2\pi i}\log\left(1+e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right) \text{ und } -\frac{\omega}{2\pi i}\log\left(1+e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$$

eindeutige Funktionen von x; man hat nur notwendig, an e i n e r Stelle $x = x_0$ der aufgeschnittenen Ebene über den Wert sowohl von $\log\left(1+e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$ als auch von $\log\left(1+e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$ eine der möglichen Festsetzungen zu treffen. Wir wollen festsetzen, dass sowohl $\log\left(1+e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$ als auch $\log\left(1+e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$ für $x=0$ den reellen Logarithmus von 2 bedeuten soll.

Dann ist die Funktion $\frac{\omega}{2\pi i}\log\left(1+e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < 1$ definierten Halbebene regulär und besitzt die Periode ω; ihre Entwicklung nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ lautet in dieser Halbebene:

$$\frac{\omega}{2\pi i}\log\left(1+e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right) = \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}.$$

Nun genügt die Potenzreihe in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$

$$f_1(x) = \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}\,\frac{e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}}{\lambda^{\alpha}-1}$$

formal der Differenzengleichung

$$f_1(x+h) - f_1(x) = \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}.$$

Wir wollen nun annehmen, dass $|\lambda| = \left|e^{\frac{2\pi i h}{\omega}}\right| > 1$ ist. Andernfalls könnte man ja $-\omega$ durch ω ersetzen. Dann folgt aus Satz 4 (oder auch einfach aus dem Quotientenkriterium), dass die Reihe, deren eventuelle Summe wir $f_1(x)$ genannt haben, für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < |\lambda|$ konvergiert und daselbst eine Funktion $f_1(x)$ darstellt, welche die Periode ω besitzt und der Differenzengleichung

$$f_1(x+h) - f_1(x) = \frac{\omega}{2\pi i} \log\left(1 + e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$$

genügt. Es besteht sogar noch eine bedingte Konvergenz der genannten Reihe für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = |\lambda|$ mit Ausnahme der Stellen, welche zu $\frac{\omega}{2} + h \mod \omega$ kongruent sind. Das folgt daraus, dass die obige Reihe für $\frac{\omega}{2\pi i} \log\left(1 + e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$ auch noch für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = 1$ mit Ausnahme der Stellen $x \equiv \frac{\omega}{2} \pmod{\omega}$ bedingt konvergent ist, und aus dem Bestehen der Differenzengleichung

$$f_1(x+h) - f_1(x) = \frac{\omega}{2\pi i} \log\left(1 + e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right).$$

Wir betrachten nun auch die analytische Fortsetzung der Funktion $f_1(x)$. Die Funktion $\frac{\omega}{2\pi i} \log\left(1 + e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$ hat erstens die Eigenschaft, bei Umkreisung einer zu $\frac{\omega}{2} \mod \omega$ kongruenten Stelle sich um ω zu vermehren und zweitens in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| > 1$ definierten Halbebene bei der Vermehrung des Arguments um ω ebenfalls um ω zuzunehmen. Daraus und aus dem Bestehen der Differenzengleichung

$$f_1(x+h) - f_1(x) = \frac{\omega}{2\pi i} \log\left(1 + e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$$

kann man folgende Eigenschaften der Funktion $f_1(x)$ ableiten. Die Funktion $f_1(x)$ hat die zu

$$\frac{\omega}{2} + h, \quad \frac{\omega}{2} + 2h, \quad \frac{\omega}{2} + 3h, \ldots$$

mod ω kongruenten Stellen zu Verzweigungspunkten und vermehrt sich bei Umkreisung einer dieser Stellen um ω. Legt man von den Punkten $\pm \frac{\omega}{2} + \nu h$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ geradlinige, zu ω parallel verlaufende Verzweigungsschnitte, welche die Strecke zwischen $-\frac{\omega}{2} + \nu h$ und $+\frac{\omega}{2} + \nu h$ frei lassen, dann ist die Funktion $f_1(x)$ in der so aufgeschnittenen Ebene eindeutig. (Erst nach dieser eindeutigen Festlegung der Funktion $f_1(x)$ hat es einen bestimmten Sinn, zu sagen, dass diese Funktion überall der Differenzengleichung

$$f_1(x+h) - f_1(x) = \frac{\omega}{2\pi i} \log\left(1 + e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$$

genügt.) Während aber die Funktion $f_1(x)$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < |\lambda|$ die Periode ω besitzt, vermehrt sich $f_1(x)$ in den durch die Ungleichungen

$$|\lambda| < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < |\lambda^2|,\ |\lambda^2| < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < |\lambda^3|,\ |\lambda^3| < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < |\lambda^4|, \ldots$$

definierten Streifen bei Zunahme des Arguments um ω um die Zahlen $\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots$ Es bedeutet keinen Widerspruch, dass die Relation $f_1(x+\omega) - f_1(x) = 0$ nicht erhalten bleibt; denn bei der hier durchgeführten Aufschneidung der Ebene hängen die Funktionsteile von $f_1(x+\omega) - f_1(x)$ in den Gebieten

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < |\lambda|,\ |\lambda| < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < |\lambda^2|,\ |\lambda^2| < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < |\lambda^3|,\ |\lambda^3| < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < |\lambda^4|, \ldots$$

gar nicht zusammen.

Wir führen dieselben Schlüsse bezüglich der Funktion

$$-\frac{\omega}{2\pi i} \log\left(1 + e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$$

durch. Bei der anfangs getroffenen Festsetzung ist $-\frac{\omega}{2\pi i} \log\left(1 + e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| > 1$ definierten Halbebene regulär und besitzt die Periode ω; ihre Entwicklung nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ lautet daselbst:

$$-\frac{\omega}{2\pi i} \log\left(1 + e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right) = -\frac{\omega}{2\pi i} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha} e^{-\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}.$$

Nun genügt die Potenzreihe in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$

$$f_2(x) = -\frac{\omega}{2\pi i} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha} \frac{e^{-\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}}{\lambda^{-\alpha} - 1}$$

formal der Differenzengleichung

$$f_2(x+h)-f_2(x)=-\frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}e^{-\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}}.$$

Nach Satz 4 (es ist statt ω die Zahl $-\omega$ und statt λ die Zahl λ^{-1} zu setzen) konvergiert daher diese Reihe, deren eventuelle Summe wir $f_2(x)$ genannt haben, für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| > 1$ und stellt daselbst eine Funktion $f_2(x)$ dar, welche die Periode ω besitzt und der Differenzengleichung

$$f_2(x+h)-f_2(x)=-\frac{\omega}{2\pi i}\log\left(1+e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$$

genügt; für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = 1$ mit Ausnahme der Stellen $x\equiv\frac{\omega}{2}$ (mod ω) besteht auch noch eine bedingte Konvergenz dieser Reihe.

Nun hat die Funktion $-\frac{\omega}{2\pi i}\log\left(1+e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$ erstens die Eigenschaft, bei Umkreisung einer zu $\frac{\omega}{2}$ mod ω kongruenten Stelle sich um $-\omega$ zu vermehren, und zweitens in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < 1$ definierten Halbebene die Eigenschaft, bei Zunahme des Arguments um ω sich um ω zu vermehren. Daraus und aus dem Bestehen der Differenzengleichung

$$f_2(x+h)-f_2(x)=-\frac{\omega}{2\pi i}\log\left(1+e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$$

folgen nachstehende Eigenschaften der Funktion $f_2(x)$. $f_2(x)$ hat die zu

$$\frac{\omega}{2},\ \frac{\omega}{2}-h,\ \frac{\omega}{2}-2h,\ldots$$

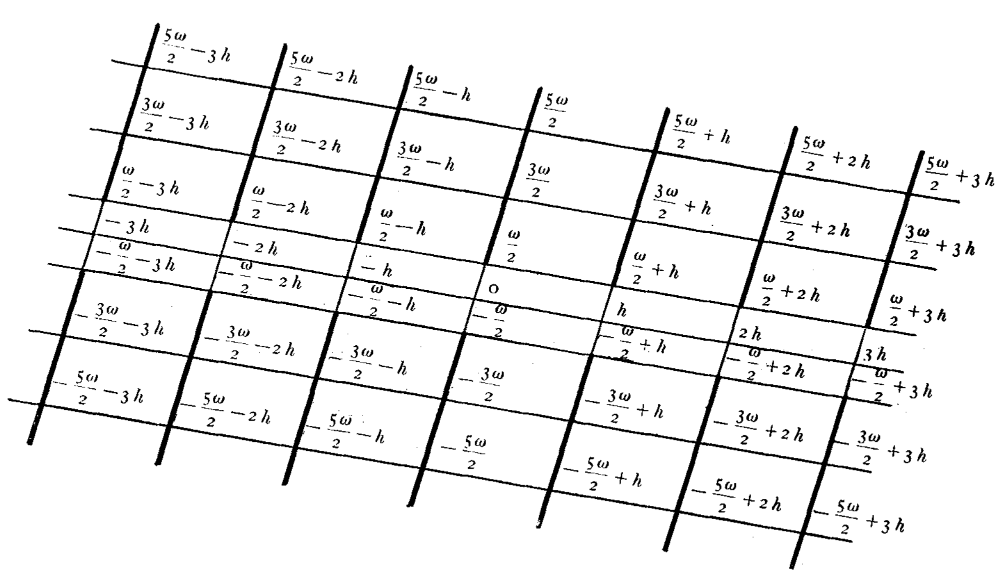
mod ω kongruenten Stellen zu Verzweigungspunkten und vermehrt sich bei Umlaufung einer dieser Stellen um ω. Legt man von den Punkten $\pm\frac{\omega}{2}+\nu h$ ($\nu = 0, -1, -2, \ldots$) geradlinige, zu ω parallel verlaufende Verzweigungsschnitte, welche die Strecken zwischen $-\frac{\omega}{2}+\nu h$ und $+\frac{\omega}{2}+\nu h$ frei lassen, dann ist die

Funktion $f_2(x)$ in der so aufgeschnittenen Ebene eindeutig. Während sie für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| > 1$ die Periode ω besitzt, vermehrt sie sich in den durch die Ungleichungen

$$|\lambda^{-1}| < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < 1, \quad |\lambda^{-2}| < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < |\lambda^{-1}|, \quad |\lambda^{-3}| < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < |\lambda^{-2}|, \ldots$$

definierten Streifen bei Zunahme des Arguments um ω um die Zahlen $-\omega$, -2ω, $-3\omega, \ldots$

Nun betrachten wir endlich die Funktion $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Aus den eben auseinandergesetzten Eigenschaften der Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ folgen die Eigenschaften der Funktion $f(x)$. $f(x)$ hat alle Stellen $\frac{\omega}{2} + \nu h + \mu\omega$ (ν, μ beliebige ganze Zahlen) zu Verzweigungspunkten und vermehrt sich bei Umlaufung eines dieser Verzweigungspunkte um ω. Legt man von den Punkten $\pm\frac{\omega}{2} + \nu h$ geradlinige, zu ω parallele Verzweigungsschnitte, welche die Strecken zwischen $-\frac{\omega}{2} + \nu h$ und $+\frac{\omega}{2} + \nu h$ frei lassen (s. Figur), dann ist die Funktion $f(x)$ in der so aufgeschnittenen Ebene eindeutig. Sie hat in dem durch die Ungleichung $|\lambda^{\nu}| < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < |\lambda^{\nu+1}|$ (ν eine ganze Zahl) definierten Streifen die Eigenschaft, sich bei Zunahme des Arguments um ω um die Zahl $\nu\omega$ zu vermehren.



Funktion	Zu-	
	bei Umkreisung	
	$\frac{\omega}{2} - 2h + \mu\omega$	$\frac{\omega}{2} - h + \mu\omega$
$\frac{\omega}{2\pi i} \log\left(1 + e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$	0	0
$-\frac{\omega}{2\pi i} \log\left(1 + e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$	0	0
x	0	0
$f_1(x)$	0	0
$f_2(x)$	ω	ω
$f(x)$	ω	ω

Funktion	Zu-	
	bei Zunahme des Arguments	
	$\lvert\lambda^{-3}\rvert < \left\lvert e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right\rvert < \lvert\lambda^{-2}\rvert$	$\lvert\lambda^{-2}\rvert < \left\lvert e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right\rvert < \lvert\lambda^{-1}\rvert$
	definierten Streifen, wenn die Ebene	
$\frac{\omega}{2\pi i} \log\left(1 + e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$	0	0
$-\frac{\omega}{2\pi i} \log\left(1 + e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right)$	ω	ω
x	ω	ω
$f_1(x)$	0	0
$f_2(x)$	-3ω	-2ω
$f(x)$	-3ω	-2ω

wachs der

des Verzweigungspunktes

$\frac{\omega}{2}+\mu\omega$	$\frac{\omega}{2}+h+\mu\omega$	$\frac{\omega}{2}+2h+\mu\omega$	$\frac{\omega}{2}+3h+\mu\omega$
ω	0	0	0
$-\omega$	0	0	0
0	0	0	0
0	ω	ω	ω
ω	0	0	0
ω	ω	ω	ω

wachs der

um ω in dem durch die Ungleichung

$\lvert\lambda^{-1}\rvert < \left\lvert e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right\rvert < 1$	$1 < \left\lvert e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right\rvert < \lvert\lambda\rvert$	$\lvert\lambda\rvert < \left\lvert e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right\rvert < \lvert\lambda^2\rvert$	$\lvert\lambda^2\rvert < \left\lvert e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right\rvert < \lvert\lambda^3\rvert$

in der im Text angegebenen Weise aufgeschnitten wird.

0	ω	ω	ω
ω	0	0	0
ω	ω	ω	ω
0	0	ω	2ω
$-\omega$	0	0	0
$-\omega$	0	ω	2ω

In dem durch die Ungleichung $1 < \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| < |\lambda|$ definierten Streifen, in welchem die Funktion $f(x)$ somit die Periode ω besitzt, wird diese durch die Entwicklung nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$

$$f(x) = \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}\frac{e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}}{\lambda^{\alpha}-1} - \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}\frac{e^{-\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}}{\lambda^{-\alpha}-1}$$

dargestellt. Anderseits ist bei unseren Festsetzungen

$$\frac{\omega}{2\pi i}\log\left(1+e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right) - \frac{\omega}{2\pi i}\log\left(1+e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right) = x.$$

Daraus folgt, dass die Laurentsche Reihe in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$

$$f(x) = \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}\frac{e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}}{\lambda^{\alpha}-1} - \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}\frac{e^{-\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}}{\lambda^{-\alpha}-1},$$

welche wir zu Beginn dieser Betrachtung dadurch erhalten haben, dass wir verlangt haben, es möge die Differenzengleichung

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} - \frac{\omega}{2\pi i}\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha}e^{-\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}$$

formal befriedigt werden, eine Funktion $f(x)$ darstellt, welche derart eindeutig in der ganzen Ebene festgelegt werden kann, dass sie überall der Differenzengleichung $f(x+h) - f(x) = x$ genügt. Diese Entwicklung der Funktion $f(x)$ nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ ist auch noch für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = 1$ und für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = |\lambda|$ mit Ausnahme der zu $\frac{\omega}{2}$ bzw. $\frac{\omega}{2} + h \bmod \omega$ kongruenten Stellen bedingt konvergent. Dass jedoch die Differenz der Summen der Reihen, welche somit die Funktionen $f(x+h)$ und $f(x)$ auch noch für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = 1$ (mit Ausnahme der zu $\frac{\omega}{2} \bmod \omega$ kongruenten Stellen) darstellen, nur dann mit x übereinstimmt, wenn x auf der die Punkte $-\frac{\omega}{2}$ und $+\frac{\omega}{2}$ verbindenden Strecke liegt, kommt daher, dass andernfalls diese beiden Reihen die Werte der Funktionen $f(x+h)$ und $f(x)$ auf verschiedenen Seiten des Verzweigungsschnittes liefern.

Die beiden Tabellen S. 166—167 geben eine Übersicht über das Verhalten der Funktionen

$$\frac{\omega}{2\pi i}\log\left(1+e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right),\quad -\frac{\omega}{2\pi i}\log\left(1+e^{-\frac{2\pi i x}{\omega}}\right),\quad x,\ f_1(x),\ f_2(x),\ f(x).$$

Dritter Abschnitt. Systeme homogener linearer Differenzengleichungen 1. Ordnung mit Koeffizienten von gemeinsamer Periode.

§ 10. **Existenz eines periodischen Fundamentalsystems.** **Satz 11.** *Es gibt in dem Falle, dass* $|\lambda| > 1$ *ist, stets ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems homogener linearer Differenzengleichungen 1. Ordnung*

$$f_k(x+h)=\sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) \qquad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{33}$$

dessen sämtliche Funktionen in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$, *und in dem Falle, dass* $|\lambda| < 1$ *ist, stets ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems* (33), *dessen sämtliche Funktionen in der durch die Ungleichung* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ *definierten Halbebene meromorph sind und die Periode* ω *besitzen.*

Man sagt, dass n Lösungssysteme $f_{k1}(x), f_{k2}(x), \ldots, f_{kn}(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ eines Systems homogener linearer Differenzengleichungen von der Form

$$f_k(x+h)=\sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) \qquad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{33}$$

wo die Determinante $|q_{kl}(x)|$ nicht identisch verschwindet, $\left(\text{es bestehen also die Gleichungen } f_{ks}(x+h)=\sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_{ls}(x) \text{ für } k, s=1, 2, \ldots, n\right)$ ein Fundamentalsystem bilden, wenn kein System von Relationen von der Form

$$\sum_{s=1}^{n} \Omega_s(x) f_{ks}(x)=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

mit Funktionen $\Omega_s(x)$ $(s=1, 2, \ldots, n)$ besteht, welche die Periode h besitzen und nicht alle identisch verschwinden.

Dafür, dass das System von Lösungssystemen $f_{ks}(x)$ $(k, s=1, 2, \ldots, n)$ des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (33) ein Fundamentalsystem bilde, ist notwendig und hinreichend, dass die Determinante $|f_{ks}(x)|$ nicht identisch verschwindet.[1]

Man kann daher auch sagen: die Lösungssysteme $f_{ks}(x)$ $(k, s=1, 2, \ldots, n)$ des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (33) bilden dann und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn es keine Funktionen $W_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ gibt, die nicht sämtliche verschwinden, so dass identisch

$$\sum_{k=1}^{n} W_k(x) f_{ks}(x) = 0 \qquad (s=1, 2, \ldots, n)$$

ist.

Bilden die Lösungssysteme $f_{ks}(x)$ $(k, s=1, 2, \ldots, n)$ des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (33) ein Fundamentalsystem, dann ist jede (analytische) Lösung des Systems (33) auf eine und nur eine Weise in der Form

$$f_k(x) = \sum_{s=1}^{n} \Omega_s(x) f_{ks}(x) \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{67}$$

darstellbar, wo $\Omega_s(x)$ $(s=1, 2, \ldots, n)$ Funktionen von der Periode h sind. Ist ferner $f_{k0}(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ eine partikuläre Lösung des Systems nicht homogener linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) + B_k(x) \qquad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

dann ist jede Lösung dieses Systems auf eine und nur eine Weise in der Form

$$f_k(x) = f_{k0}(x) + \sum_{s=1}^{n} \Omega_s(x) f_{ks}(x) \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

darstellbar, wo wiederum $\Omega_s(x)$ $(s=1, 2, \ldots, n)$ Funktionen von der Periode h sind.

---

[1] Diese Forderung, die Determinante $|f_{ks}(x)|$ solle nicht identisch verschwinden, genügt, wenn man sich auf analytische Lösungen beschränkt. Lässt man hingegen auch nicht analytische Lösungen zu, dann muss man auch noch über das Auftreten von singulären Stellen der Funktionen $f_{ks}(x)$ $(k, s=1, 2, \ldots, n)$ und Nullstellen der Determinante $|f_{ks}(x)|$ einschränkende Bedingungen hinzufügen.

Bei dem folgenden Beweise des Satzes 11 wiederholen sich eigentlich alle Schritte, die schon in § 5 beim Beweise des Satzes 5 ausgeführt wurden. Es sei t_n eine Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$K(t) = 0 \tag{24}$$

von der Beschaffenheit, dass $K(t_n \lambda^\alpha)$ für ganzzahliges $\alpha > 0$ von Null verschieden ist. Es muss mindestens eine Wurzel der charakteristischen Gleichung von dieser Eigenschaft geben. Es ist dann möglich, ein System von Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ anzugeben, welche den Gleichungen

$$t_n c_k = \sum_{l=1}^{n} q_{kl0}\, c_l \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{34}$$

genügen und nicht alle gleich Null sind. Wir halten ein solches System $c_1, c_2, \ldots, c_n$ fest und nehmen etwa an, es sei $c_n \neq 0$. Es gibt dann weiter im Falle dass $|\lambda| > 1$ ist, ein und nur ein System von Funktionen $\Phi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, welche für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$, und in dem Falle, dass $|\lambda| < 1$ ist, für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ regulär sind, daselbst in der Form

$$\Phi_k(k) = c_k + \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{k\alpha}\, e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{35}$$

dargestellt werden können und dem System homogener linearer Differenzengleichungen

$$t_n \Phi_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\, \Phi_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{36}$$

genügen. (Bezüglich des Beweises s. § 5.)

Nun sei $\varphi(x)$ eine in der ganzen Ebene meromorphe, nicht identisch verschwindende Funktion, welche der Differenzengleichung $\varphi(x+h) = t_n \varphi(x)$ genügt und die Periode ω besitzt. Eine solche Funktion kann man nach Satz 1 in mannigfach verschiedener Weise angeben. Dann stellt, wie aus Gl. (36) folgt,

$$f_{kn}(x) = \varphi(x)\, \Phi_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{68}$$

eine partikuläre Lösung des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (33) dar, deren sämtliche Funktionen in der durch die Ungleichung

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R\,|\lambda| \text{ bzw. } \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$$

definierten Halbebene meromorph sind und die Periode ω besitzen.

Ist nun $n = 1$, so ist damit Satz 11 bewiesen. Es sei daher von jetzt an $n > 1$. Wir nehmen dann an, dass Satz 11 für $(n-1)$-gliederige Systeme von der Form (33) schon bewiesen sei.

Wir betrachten das $(n-1)$-gliedrige System homogener linearer Differenzengleichungen erster Ordnung

$$g_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{kl}(x)\,\Phi_n(x+h) - q_{nl}(x)\,\Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)}\, g_l(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{39}$$

r_1 sei eine der Ungleichung $r_1 \leqq r$ genügende, positive reelle Zahl von der Eigenschaft, dass für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1|\lambda|$ bzw. für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1$ $\Phi_n(x) \neq 0$ ist; eine solche positive reelle Zahl r_1 muss existieren, weil die Entwicklung der Funktion $\Phi_n(x)$ nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ mit der als von Null verschieden vorausgesetzten Zahl c_n beginnt. Dann sind die Koeffizienten des Systems (39) für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1$ regulär und in gewöhnliche Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ entwickelbar. Die Anfangsglieder dieser Potenzreihen lauten $q_{kl0} - \frac{c_k}{c_n} q_{nl0}$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n-1)$; deren Determinante ist, wie wir schon in § 5 erkannt haben, von Null verschieden. Anderseits ist

$$\left|\frac{q_{kl}(x)\,\Phi_n(x+h) - q_{nl}(x)\,\Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)}\right| = \frac{1}{t_n}\left[\frac{\Phi_n(x+h)}{\Phi_n(x)}\right]^{n-2} |q_{kl}(x)|.$$

Also ist die Determinante der Koeffizienten des Systems (39) für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1$ von Null verschieden. Das System der Koeffizienten

$$\frac{q_{kl}(x)\,\Phi_n(x+h) - q_{nl}(x)\,\Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n-1)$$

des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (39) genügt also Voraussetzungen, welche genau denjenigen Voraussetzungen entsprechen, denen das System $q_{kl}(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ der Koeffizienten des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (33) genügt; die positiven reellen Zahlen R und r sind durch r_1 zu ersetzen. Daher kann man auf das System (39) den Satz 11 anwenden, welchen wir ja jetzt für $(n-1)$-gliedrige Systeme homogener linearer Differenzengleichungen als bewiesen ansehen.

Es sei daher $g_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n-1)$ ein Fundamentalsystem von Lösungssystemen des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (39); sämtliche Funktionen $g_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n-1)$ mögen für

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1 |\lambda| \text{ bzw. für } \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1$$

meromorph sein und die Periode ω besitzen. Es bestehen also die Gleichungen

$$g_{ks}(x+h) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{kl}(x)\,\Phi_n(x+h) - q_{nl}(x)\,\Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)}\, g_{ls}(x)$$
$$(k, s = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{39 a}$$

Man verkleinere nun nötigenfalls die positive reelle Zahl r_1 so, dass auf der Geraden $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| = r_1$ keine Pole der Funktionen $g_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n-1)$ liegen. Hierauf sei weiter ϱ eine der Ungleichung $\varrho < r_1$ genügende positive reelle Zahl von der Beschaffenheit, dass auch für $\varrho \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1$ die Funktionen $g_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n-1)$ keine Pole besitzen.

Ist dann s eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$, dann kann man nach Satz 9, wenn $|\lambda| > 1$ ist, eine Funktion $f_{ns}(x)$ angeben, welche in dem durch die Ungleichung $\varrho \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1 |\lambda|$, und wenn $|\lambda| < 1$ ist, eine Funktion $f_{ns}(x)$, welche in dem durch die Ungleichung $\varrho|\lambda| \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r_1$ definierten Streifen meromorph, wenn $t_n \neq \lambda^\alpha$ (α ganzzahlig) ist, sogar eine Funktion $f_{ns}(x)$, welche in diesem Streifen holomorph ist, die Periode ω besitzt und der linearen Differenzengleichung erster Ordnung

$$f_{ns}(x+h) = \frac{t_n\,\Phi_n(x+h)}{\Phi_n(x)} f_{ns}(x) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{nl}(x)\, g_{ls}(x)}{\Phi_n(x)} \tag{69}$$

genügt. Es sind nämlich die Ausdrücke

$$\sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{nl}(x)\, g_{ls}(x)}{\Phi_n(x)} \quad (s = 1, 2, \ldots, n-1)$$

für $\varrho \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r_1$ regulär und die Funktion $\dfrac{t_n \Phi_n(x+h)}{\Phi_n(x)}$ für $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r_1$ regulär und von Null verschieden. Es seien also $f_{ns}(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$ Funktionen von x, welche für

$$\varrho \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r_1 |\lambda| \text{ bzw. für } \varrho |\lambda| \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r_1$$

meromorph sind, die Periode ω besitzen und den Differenzengleichungen

$$f_{ns}(x+h) = \frac{t_n \Phi_n(x+h)}{\Phi_n(x)} f_{ns}(x) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{nl}(x)\, g_{ls}(x)}{\Phi_n(x)} \quad (s = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{69}$$

genügen. Da nun die Koeffizienten

$$\frac{q_{kl}(x)\, \Phi_n(x+h) - q_{nl}(x)\, \Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)} \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n-1)$$

des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (39) im Falle $|\lambda| > 1$ in dem durch die Ungleichung $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq R$ und im Falle $|\lambda| < 1$ in dem durch die Ungleichung $\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r$ definierten Bereiche meromorph sind, so folgt aus dem Bestehen der Gleichungen

$$g_{ks}(x+h) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{kl}(x)\, \Phi_n(x+h) - q_{nl}(x)\, \Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)} g_{ls}(x)$$
$$(k, s = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{39 a}$$

dass die Funktionen $g_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n-1)$ nicht nur für

$$\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r_1 |\lambda| \text{ bzw. für } \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r_1,$$

sondern sogar für

$$\left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq R |\lambda| \text{ bzw. für } \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq r$$

meromorph sind. Infolge dessen sind die Ausdrücke

$$\sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{nl}(x)\, g_{ls}(x)}{\Phi_n(x)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-1)$$

im Falle $|\lambda| > 1$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R$ und im Falle $|\lambda| < 1$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ meromorph. Da schliesslich auch die Funktion $\frac{t_n \Phi_n(x+h)}{\Phi_n(x)}$ für

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R \text{ bzw. für } \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$$

meromorph ist, so folgt aus dem Bestehen der Differenzengleichungen (69), dass die Funktionen $f_{ns}(x)$ $(s=1, 2, \ldots, n-1)$ im Falle $|\lambda| > 1$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$ und im Falle $|\lambda| < 1$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ meromorph sind.

Wir wollen nun setzen

$$f_{ks}(x) = \frac{g_{ks}(x) + f_{ns}(x)\,\Phi_k(x)}{\Phi_n(x)} \qquad (k, s = 1, 2, \ldots, n-1). \quad (70)$$

Die so definierten Funktionen $f_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n-1)$ sind dann im Falle $|\lambda| > 1$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$ und im Falle $|\lambda| < 1$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ definierten Halbebene meromorph und besitzen daselbst die Periode ω. Da dieselbe Eigenschaft auch die bereits definierten Funktionen $f_{kn}(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ besitzen, so ergibt sich, dass die Funktionen $f_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n)$, welche wir nunmehr sämtliche definiert haben, alle im Falle $|\lambda| > 1$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$ und im Falle $|\lambda| < 1$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ meromorph sind und die Periode ω besitzen. Es lässt sich endlich noch zeigen, dass die Funktionen $f_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n)$ ein Fundamentalsystem von Lösungssystemen des Systems homogener linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (33)$$

bilden.

Zunächst ist wirklich für $k, s = 1, 2, \ldots, n-1$

$$f_{ks}(x+h) = \frac{g_{ks}(x+h) + f_{ns}(x+h)\,\Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x+h)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{kl}(x)\,\Phi_n(x+h) - q_{nl}(x)\,\Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)\,\Phi_n(x+h)}\, g_{ls}(x) + \frac{t_n\,\Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x)} f_{ns}(x) +$$

$$+ \frac{\Phi_k(x+h)}{\Phi_n(x+h)} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{nl}(x)\,g_{ls}(x)}{\Phi_n(x)} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{kl}(x)}{\Phi_n(x)}\, g_{ls}(x) + \frac{f_{ns}(x)}{\Phi_n(x)} \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\,\Phi_l(x) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{kl}(x)}{\Phi_n(x)} \left[g_{ls}(x) + f_{ns}(x)\,\Phi_l(x)\right] + q_{kn}(x) f_{ns}(x) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_{ls}(x);$$

ebenso ist für $s = 1, 2, \ldots, n-1$

$$f_{ns}(x+h) = \frac{t_n\,\Phi_n(x+h)}{\Phi_n(x)} f_{ns}(x) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{nl}(x)\,g_{ls}(x)}{\Phi_n(x)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{nl}(x)}{\Phi_n(x)}\, \Phi_l(x) f_{ns}(x) + q_{nn}(x) f_{ns}(x) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{q_{nl}(x)\,g_{ls}(x)}{\Phi_n(x)} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1} q_{nl}(x) \frac{g_{ls}(x) + f_{ns}(x)\,\Phi_l(x)}{\Phi_n(x)} + q_{nn}(x) f_{ns}(x) = \sum_{l=1}^{n} q_{nl}(x) f_{ls}(x),$$

während wir von den Funktionen $f_{kn}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ bereits wissen, dass sie für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R\,|\lambda|$ bzw. für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ meromorph sind, die Periode ω besitzen und eine Lösung des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (33) darstellen.

Anderseits bilden die n Lösungssysteme $f_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n)$ wirklich ein Fundamentalsystem. Besteht nämlich ein System von Relationen von der Form

$$\sum_{s=1}^{n} \Omega_s(x) f_{ks}(x) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $\Omega_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ Funktionen von der Periode h sind, dann bestehen auch die Gleichungen

$$\sum_{s=1}^{n} \Omega_s(x) \left[f_{ks}(x)\,\Phi_n(x) - f_{ns}(x)\,\Phi_k(x)\right] = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

oder wegen (68)

$$\sum_{s=1}^{n-1} \Omega_s(x)\,[f_{ks}(x)\,\Phi_n(x) - f_{ns}(x)\,\Phi_k(x)] = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

oder endlich nach Gl. (70)

$$\sum_{s=1}^{n-1} \Omega_s(x)\,g_{ks}(x) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1);$$

da aber die Funktionen $g_{ks}(x)$ $(k, s = 1, 2, \ldots, n-1)$ ein Fundamentalsystem von Lösungssystemen des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (39) bilden sollen, so folgt $\Omega_s(x) = 0$ für $s = 1, 2, \ldots, n-1$; da anderseits die Funktionen $f_{kn}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ nicht alle identisch gleich Null sind, folgt auch das identische Bestehen der Gleichung $\Omega_n(x) = 0$.

Ein System von Relationen von der Form

$$\sum_{s=1}^{n} \Omega_s(x) f_{ks}(x) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

in dem die Funktionen $\Omega_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ die Periode h besitzen und nicht alle identisch verschwinden, besteht also nicht.

Satz 11 ist also für eine ganze Zahl n notwendig richtig, wenn seine Richtigkeit für die Zahl $n-1$ bewiesen ist. Nun gilt dieser Satz aber für $n = 1$; also gilt er allgemein.

§ 11. **Form des Fundamentalsystems, wenn die Verhältnisse der Wurzeln der charakteristischen Gleichung keine singulären Werte besitzen.** Wir setzen in diesem Paragraphen voraus, dass keine zwei Wurzeln der charakteristischen Gleichung $K(t) = 0$ (24) eine Zahl von der Form λ^α, wo α eine von Null verschiedene ganze Zahl ist, zum Quotienten haben.

Es seien dann t_σ $(\sigma = 1, 2, \ldots, j)$ die voneinander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung und U_σ die Anzahl der Elementarteiler der Matrix $\{q_{kl0} - \delta_{kl}\,t\}$, welche für $t = t_\sigma$ verschwinden. t_σ $(\sigma = 1, 2, \ldots, j)$ sei eine $\xi_{\sigma u}$-fache Nullstelle des u-ten Elementarteilers $(u = 1, 2, \ldots, U_\sigma)$. Es ist dabei $\xi_{\sigma u_2} \leqq \xi_{\sigma u_1}$, wenn $u_2 > u_1$ ist; ferner ist $\sum\limits_{\sigma=1}^{j} \sum\limits_{u=1}^{U_\sigma} \xi_{\sigma u} = n$. Nun ist es möglich, ein System von n^2 Konstanten

$$c_{\sigma u \nu}^{(k)} \; (k = 1, 2, \ldots, n;\; \sigma = 1, 2, \ldots, j;\; u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\; \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1)$$

anzugeben, welche den Gleichungen

$$t_\sigma c^{(k)}_{\sigma u 0} = \sum_{l=1}^{n} q_{kl0}\, c^{(l)}_{\sigma u 0}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma) \qquad (71\text{ a})$$

$$t_\sigma c^{(k)}_{\sigma u \nu} + \nu\, c^{(k)}_{\sigma u, \nu-1} = \sum_{l=1}^{n} q_{kl0}\, c^{(l)}_{\sigma u \nu}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 1, 2, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1) \qquad (71\text{ b})$$

genügen und so beschaffen sind, dass bei festgehaltenen σ die U_σ Konstantensysteme $c^{(k)}_{\sigma u 0}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma)$ linear unabhängig sind. Dass es ein System von Zahlen $c^{(k)}_{\sigma u 0}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma)$ gibt, welche diese letztere Eigenschaft besitzen und den Gleichungen (71 a) genügen, folgt einfach daraus, dass die Matrix $\{q_{kl0} - \delta_{kl} t_\sigma\}$ den Rang $n - U_\sigma$ hat.

Im folgenden sei also

$$c^{(k)}_{\sigma u \nu} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1)$$

ein beliebiges, aber festes System von Zahlen, welche den eben auseinandergesetzten Bedingungen genügen. Zwischen diesen Zahlen kann dann nicht nur kein System von Relationen von der Form

$$\sum_{u=1}^{U_\sigma} C_u\, c^{(k)}_{\sigma u 0} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n,\ \sigma \text{ fest}),$$

sondern überhaupt kein System von Relationen von der Form

$$\sum_{\sigma=1}^{j} \sum_{u=1}^{U_\sigma} \sum_{\nu=0}^{\xi_{\sigma u}-1} C_{\sigma u \nu}\, c^{(k)}_{\sigma u \nu} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

mit Zahlen $C_{\sigma u \nu}$ bestehen, die nicht sämtliche gleich Null sind. Im entgegengesetzten Falle könnte man ein Indextripel $\sigma = \bar{\sigma}$, $u = \bar{u}$, $\nu = \bar{\nu}$ angeben, so dass ein Gleichungssystem von der Form

$$c^{(k)}_{\bar\sigma\bar u\bar\nu} = \sum_{\sigma=1}^{\bar\sigma-1}\sum_{u=1}^{U_\sigma}\sum_{\nu=0}^{\xi_{\sigma u}-1} A_{\sigma u\nu}\, c^{(k)}_{\sigma u\nu} + \sum_{u=1}^{\bar u-1}\sum_{\nu=0}^{\xi_{\bar\sigma u}-1} A_{\bar\sigma u\nu}\, c^{(k)}_{\bar\sigma u\nu} + \sum_{\nu=0}^{\bar\nu-1} A_{\bar\sigma\bar u\nu}\, c^{(k)}_{\bar\sigma\bar u\nu}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n) \tag{72}$$

bestünde, während ein Gleichungssystem von der Form

$$\sum_{\sigma=1}^{\bar\sigma-1}\sum_{u=1}^{U_\sigma}\sum_{\nu=0}^{\xi_{\sigma u}-1} C_{\sigma u\nu}\, c^{(k)}_{\sigma u\nu} + \sum_{u=1}^{\bar u-1}\sum_{\nu=0}^{\xi_{\bar\sigma u}-1} C_{\bar\sigma u\nu}\, c^{(k)}_{\bar\sigma u\nu} + \sum_{\nu=0}^{\bar\nu-1} C_{\bar\sigma\bar u\nu}\, c^{(k)}_{\bar\sigma\bar u\nu} = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n) \tag{73}$$

mit Zahlen $C_{\sigma u\nu}$ ($\sigma = 1, 2, \ldots, \bar\sigma - 1$, $u = 1, 2, \ldots, U_\sigma$, $\nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1$; $\sigma = \bar\sigma$, $u = 1, 2, \ldots, \bar u - 1$, $\nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\bar\sigma u} - 1$; $\sigma = \bar\sigma$, $u = \bar u$, $\nu = 0, 1, \ldots, \bar\nu - 1$), die nicht sämtliche verschwinden, nicht besteht. Wir schreiben nun in (72) statt k l, multiplizieren beiderseits mit q_{kl0}, summieren über l und berücksichtigen (71). Dann folgt

$$\begin{aligned} t_{\bar\sigma}\, c^{(k)}_{\bar\sigma\bar u\bar\nu} + \bar\nu\, c^{(k)}_{\bar\sigma\bar u,\bar\nu-1} = {} & \sum_{\sigma=1}^{\bar\sigma-1}\sum_{u=1}^{U_\sigma}\sum_{\nu=0}^{\xi_{\sigma u}-1} t_\sigma A_{\sigma u\nu}\, c^{(k)}_{\sigma u\nu} + \sum_{u=1}^{\bar u-1}\sum_{\nu=0}^{\xi_{\bar\sigma u}-1} t_{\bar\sigma} A_{\bar\sigma u\nu}\, c^{(k)}_{\bar\sigma u\nu} + \\ & + \sum_{\nu=0}^{\bar\nu-1} t_{\bar\sigma} A_{\bar\sigma\bar u\nu}\, c^{(k)}_{\bar\sigma\bar u\nu} + \sum_{\sigma=1}^{\bar\sigma-1}\sum_{u=1}^{U_\sigma}\sum_{\nu=1}^{\xi_{\sigma u}-1} \nu A_{\sigma u\nu}\, c^{(k)}_{\sigma u,\nu-1} + \\ & + \sum_{u=1}^{\bar u-1}\sum_{\nu=1}^{\xi_{\bar\sigma u}-1} \nu A_{\bar\sigma u\nu}\, c^{(k)}_{\bar\sigma u,\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{\bar\nu-1} \nu A_{\bar\sigma\bar u\nu}\, c^{(k)}_{\bar\sigma\bar u,\nu-1} \end{aligned}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Multipliziert man Gl. (72) mit $t_{\bar\sigma}$ und subtrahiert diese Gleichung von der eben erhaltenen Gleichung, dann ergibt sich für $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \sum_{\sigma=1}^{\bar\sigma-1}\sum_{u=1}^{U_\sigma}\sum_{\nu=0}^{\xi_{\sigma u}-2} c^{(k)}_{\sigma u\nu}\left[(t_\sigma - t_{\bar\sigma})\, A_{\sigma u\nu} + (\nu + 1)\, A_{\sigma u,\nu+1}\right] + \\ & + \sum_{\sigma=1}^{\bar\sigma-1}\sum_{u=1}^{U_\sigma} (t_\sigma - t_{\bar\sigma})\, A_{\sigma u,\xi_{\sigma u}-1}\, c^{(k)}_{\sigma u,\xi_{\sigma u}-1} + \sum_{u=1}^{\bar u-1}\sum_{\nu=0}^{\xi_{\bar\sigma u}-2} (\nu + 1)\, A_{\bar\sigma u,\nu+1}\, c^{(k)}_{\bar\sigma u\nu} + \\ & + \sum_{\nu=0}^{\bar\nu-2} (\nu + 1)\, A_{\bar\sigma\bar u,\nu+1}\, c^{(k)}_{\bar\sigma\bar u\nu} - \bar\nu\, c^{(k)}_{\bar\sigma\bar u,\bar\nu-1}. \end{aligned}$$

Das ist aber ein Gleichungssystem von der Form (73); also müssen alle seine Koeffizienten einzeln gleich Null sein. Daraus folgt:

$$A_{\sigma u \nu} = 0 \text{ für } \sigma = 1, 2, \ldots, \bar{\sigma} - 1, \; u = 1, 2, \ldots, U_\sigma, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1;$$

$$A_{\bar{\sigma} u \nu} = 0 \text{ für } \quad u = 1, 2, \ldots, \bar{u} - 1, \; \nu = 1, 2, \ldots, \xi_{\bar{\sigma} u} - 1;$$

$$\bar{\nu} = 0.$$

Das Gleichungssystem (72) könnte daher nur die Gestalt haben

$$c^{(k)}_{\bar{\sigma} \bar{u} 0} = \sum_{u=1}^{\bar{u}-1} A_{\bar{\sigma} u 0} \, c^{(k)}_{\bar{\sigma} u 0} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Dass aber ein Gleichungssystem von dieser Gestalt nicht bestehen möge, haben wir vorausgesetzt.

Also sind die n Zahlensysteme

$c^{(k)}_{\sigma u \nu}$ ($\sigma = 1, 2, \ldots, j$; $u = 1, 2, \ldots, U_\sigma$; $\nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1$; in demselben Zahlensystem $k = 1, 2, \ldots, n$)

linear unabhängig; daraus folgt insbesondere, dass die Determinante $|c^{(k)}_{\sigma u \nu}|$ (k Zeilenindex; σ, u, ν Spaltenindices) von Null verschieden ist.

Es seien nun $\varphi_{\sigma \nu}(x)$ ($\sigma = 1, 2, \ldots, j$; $\nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma 1} - 1$) nicht identisch verschwindende, meromorphe Funktionen, welche den Differenzengleichungen

$$\varphi_{\sigma 0}(x + h) = t_\sigma \varphi_{\sigma 0}(x) \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, j), \tag{74 a}$$

$$\varphi_{\sigma \nu}(x + h) = t_\sigma \varphi_{\sigma \nu}(x) + \nu \varphi_{\sigma, \nu-1}(x) \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, j; \; \nu = 1, \ldots, \xi_{\sigma 1} - 1) \tag{74 b}$$

genügen und ω zur Periode haben. Dass es solche Funktionen $\varphi_{\sigma \nu}(x)$ gibt, folgt aus Satz 3. Wir setzen hierauf ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (33) in der Form an:

$$f^{(k)}_{\sigma u \nu}(x) = \sum_{\nu_1=0}^{\nu} \binom{\nu}{\nu_1} \varphi_{\sigma, \nu - \nu_1}(x) \, \Phi^{(k)}_{\sigma u \nu_1}(x)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n; \; \sigma = 1, 2, \ldots, j; \; u = 1, 2, \ldots, U_\sigma; \; \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1). \tag{75}$$

Durch Einsetzen in (33) erhält man

$$\sum_{\nu_1=0}^{\nu} t_\sigma \binom{\nu}{\nu_1} \varphi_{\sigma,\nu-\nu_1}(x)\, \Phi^{(k)}_{\sigma u \nu_1}(x+h) + \sum_{\nu_1=0}^{\nu-1} (\nu-\nu_1) \binom{\nu}{\nu_1} \varphi_{\sigma,\nu-\nu_1-1}(x)\, \Phi^{(k)}_{\sigma u \nu_1}(x+h) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{\nu_1=0}^{\nu} \binom{\nu}{\nu_1} \varphi_{\sigma,\nu-\nu_1}(x)\, q_{kl}(x)\, \Phi^{(l)}_{\sigma u \nu_1}(x)$$

oder

$$\sum_{\nu_1=0}^{\nu} \binom{\nu}{\nu_1} \varphi_{\sigma,\nu-\nu_1}(x) \left[t_\sigma \Phi^{(k)}_{\sigma u \nu_1}(x+h) + \nu_1 \Phi^{(k)}_{\sigma u,\nu_1-1}(x+h)\right] =$$

$$= \sum_{\nu_1=0}^{\nu} \binom{\nu}{\nu_1} \varphi_{\sigma,\nu-\nu_1}(x) \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\, \Phi^{(l)}_{\sigma u \nu_1}(x).$$

Setzt man bei festgehaltenen Indices σ und u der Reihe nach $\nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1$, dann erkennt man, dass bei Giltigkeit des Ansatzes (75) einzeln die Gleichungen bestehen müssen

$$t_\sigma \Phi^{(k)}_{\sigma u 0}(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\, \Phi^{(l)}_{\sigma u 0}(x)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots,\ U_\sigma), \tag{76 a}$$

$$t_\sigma \Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(x+h) + \nu\, \Phi^{(k)}_{\sigma u,\nu-1}(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\, \Phi^{(l)}_{\sigma u \nu}(x)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots,\ U_\sigma;\ \nu = 1, 2, \ldots,\ \xi_{\sigma u} - 1). \tag{76 b}$$

Wir wollen uns nun in den Gleichungen (76) für die Funktionen $q_{kl}(x)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ ihre Entwicklungen nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ eingesetzt denken und hierauf die Funktionen

$$\Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots,\ U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots,\ \xi_{\sigma u} - 1)$$

formal als Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ ansetzen, welche mit den Zahlen

$$c^{(k)}_{\sigma u \nu} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots,\ U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots,\ \xi_{\sigma u} - 1)$$

als konstanten Gliedern beginnen. Die Koeffizienten dieser Potenzreihen sind dann durch die Gleichungen (76) eindeutig bestimmt. Man erkennt dies, wenn man die Gleichungen (76) mit den Gleichungen (71) vergleicht und berücksichtigt, dass $K(t_\sigma \lambda^\alpha)$ für $\sigma = 1, 2, \ldots, j$ und ganzzahliges, nicht verschwindendes α

als von Null verschieden vorausgesetzt wurde. Die so definierten Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ müssen dann nach Satz 4 im Falle $|\lambda| > 1$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$ und im Falle $|\lambda| < 1$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ konvergieren und Funktionen von x darstellen, welche für

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda| \text{ bzw. für } \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$$

regulär sind und die Periode ω besitzen.

Es seien daher

$$\Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1)$$

jene Funktionen, welche durch diese Potenzreihen dargestellt werden. Aus der Art, auf welche die Funktionen

$$\Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1)$$

erhalten wurden, folgt, dass diese die Gleichungen (76) befriedigen. Man erhält dann weiter mittels der Gleichungen (75) ein System

$$f^{(k)}_{\sigma u \nu}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1)$$

von Lösungssystemen des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (33). Dieses System von Lösungssystemen ist aber ein Fundamentalsystem. Denn es ist

$$|f^{(k)}_{\sigma u \nu}(x)| = \left|\sum_{\nu_1=0}^{\nu} \binom{\nu}{\nu_1} \varphi_{\sigma, \nu-\nu_1}(x)\, \Phi^{(k)}_{\sigma u \nu_1}(x)\right| = |\varphi_{\sigma 0}(x)\, \Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(x)| =$$

$$= |\Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(x)| \prod_{\sigma=1}^{j} [\varphi_{\sigma 0}(x)]^{\sum\limits_{u=1}^{U_\sigma} \xi_{\sigma u}}.$$

Der zweite Faktor des letzten Produktes verschwindet sicher nicht identisch und der erste deshalb nicht, weil die Potenzreihen der Funktionen $\Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(x)$ in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ mit den Zahlen $c^{(k)}_{\sigma u \nu}$ beginnen, die Determinante dieser Zahlen aber von Null verschieden ist. Also ist die Determinante der Funktionen

$$f^{(k)}_{\sigma u \nu}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1)$$

in der Tat nicht identisch gleich Null. Wir haben damit den

Satz 12. *Wenn keine zwei Wurzeln der charakteristischen Gleichung $K(t)=0$ (24) eine Zahl von der Form λ^α, wo α eine von Null verschiedene ganze Zahl bedeutet, zum Quotienten haben, dann kann man ein Fundamentalsystem von Lösungssystemen des Systems homogener linearer Differenzengleichungen*

$$f_k(x+h)=\sum_{l=1}^{n} q_{kl}(x) f_l(x) \qquad (k=1,2,\ldots,n), \qquad (33)$$

dessen sämtliche Funktionen, wenn $|\lambda|>1$ ist, in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$, und wenn $|\lambda|<1$ ist, in der durch die Ungleichnng $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ definierten Halbebene meromorph sind und die Periode ω besitzen, auf folgende Weise angeben.

Es seien t_σ $(\sigma=1,2,\ldots,j)$ die voneinander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung, U_σ die Anzahl der Elementarteiler der Matrix $\{q_{kl}-\delta_{kl}t\}$, welche für $t=t_\sigma$ verschwinden, und $\xi_{\sigma u}$ die Vielfachheit, mit der der u-te Elementarteiler für $t=t_\sigma$ verschwindet.

$$\left(\xi_{\sigma u_2} \leqq \xi_{\sigma u_1}, \text{ wenn } u_2 > u_1;\ \sum_{\sigma=1}^{j}\sum_{u=1}^{U_\sigma} \xi_{\sigma u} = n.\right)$$

Dann kann man zunächst ein System von Zahlen

$$c_{\sigma u \nu}^{(k)} \quad (k=1,2,\ldots,n;\ \sigma=1,2,\ldots,j;\ u=1,2,\ldots,U_\sigma;\ \nu=0,1,\ldots,\xi_{\sigma u}-1)$$

angeben, welche den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} t_\sigma c_{\sigma u 0}^{(k)} &= \sum_{l=1}^{n} q_{kl0}\, c_{\sigma u 0}^{(l)} \\ (k=1,2,\ldots,n;\ \sigma&=1,2,\ldots,j;\ u=1,2,\ldots,U_\sigma), \\ t_\sigma c_{\sigma u \nu}^{(k)} + \nu\, c_{\sigma u, \nu-1}^{(k)} &= \sum_{l=1}^{n} q_{kl0}\, c_{\sigma u \nu}^{(l)} \\ (k=1,2,\ldots,n;\ \sigma=1,2,\ldots,j;\ u&=1,2,\ldots,U_\sigma;\ \nu=1,2,\ldots,\xi_{\sigma u}-1) \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

genügen und deren Determinante von Null verschieden ist. Dann ist weiter ein System von Funktionen

$$\Phi_{\sigma u \nu}^{(k)}(x) \quad (k=1,2,\ldots,n;\ \sigma=1,2,\ldots,j;\ u=1,2,\ldots,U_\sigma;\ \nu=0,1,\ldots,\xi_{\sigma u}-1),$$

welche sich im Falle $|\lambda| > 1$ *in der durch die Ungleichung* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$ *und im Falle* $|\lambda| < 1$ *in der durch die Ungleichung* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ *definierten Halbebene als gewöhnliche Potenzreihen in* $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ *darstellen, die mit den Zahlen*

$$c^{(k)}_{\sigma u \nu} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1)$$

als konstanten Gliedern beginnen, durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} t_\sigma \Phi^{(k)}_{\sigma u 0}(x+h) = \sum\limits_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\, \Phi^{(l)}_{\sigma u 0}(x) \\ (k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma), \\ t_\sigma \Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(x+h) + \nu\, \Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(x+h) = \sum\limits_{l=1}^{n} q_{kl}(x)\, \Phi^{(l)}_{\sigma u \nu}(x) \\ (k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 1, 2, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1) \end{array}\right\} \quad (76)$$

eindeutig bestimmt.

Sind dann weiter $\varphi_{\sigma\nu}(x)$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, j;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma 1} - 1)$ *nicht identisch verschwindende, meromorphe Funktionen, welche den Differenzengleichungen*

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_{\sigma 0}(x+h) = t_\sigma \varphi_{\sigma 0}(x) \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, j), \\ \varphi_{\sigma\nu}(x+h) = t_\sigma \varphi_{\sigma\nu}(x) + \nu\, \varphi_{\sigma,\nu-1}(x) \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, j;\ \nu = 1, 2, \ldots, \xi_{\sigma 1} - 1) \end{array}\right\} \quad (74)$$

genügen und ω *zur Periode haben, dann liefern die Gleichungen*

$$f^{(k)}_{\sigma u \nu}(x) = \sum_{\nu_1=0}^{\nu} \binom{\nu}{\nu_1} \varphi_{\sigma,\nu-\nu_1}(x)\, \Phi^{(k)}_{\sigma u \nu_1}(x)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1) \quad (75)$$

ein Fundamentalsystem

$$f^{(k)}_{\sigma u \nu}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1)$$

von Lösungssystemen des Systems homogener linearer Differenzengleichungen (33), *dessen sämtliche Funktionen in der durch die Ungleichung* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$ *bzw. in der durch* *die Ungleichung* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ *definierten Halbebene meromorph sind und die Periode* ω *besitzen.*

Anmerkung. Der hier ausgesprochene Satz 12 entspricht folgendem Satze der Theorie der linearen Differentialgleichungen.

In dem System homogener linearer Differentialgleichungen

$$f'_k(z) = \sum_{l=1}^{n} q_{kl}(z) f_l(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{a}$$

mögen die Funktionen $q_{kl}(z)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes regulär sein und im Nullpunkte selbst höchstens *einfache* Pole besitzen, so dass die Stelle $z = 0$ für das System homogener linearer Differentialgleichungen (a) höchstens eine *singuläre Stelle der Bestimmtheit* ist und die Funktionen $q_{kl}(z)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ in der Umgebung dieser Stelle folgendermassen dargestellt werden können:

$$q_{kl}(z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} q_{kl\alpha} z^{\alpha-1} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{b}$$

Wenn dann die Differenz keiner zwei verschiedenen Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung

$$|q_{kl0} - \delta_{kl} t| = 0 \tag{c}$$

eine ganze Zahl ist, dann kann man ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems homogener linearer Differentialgleichungen (a) auf folgende Weise angeben. Es seien t_σ $(\sigma = 1, 2, \ldots, j)$ die voneinander verschiedenen Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung, U_σ die Anzahl der Elementarteiler der Matrix $\{q_{kl0} - \delta_{kl} t\}$, welche für $t = t_\sigma$ verschwinden, und $\xi_{\sigma u}$ die Vielfachheit, mit der der u-te Elementarteiler für $t = t_\sigma$ verschwindet. Dann kann man zunächst ein System von Zahlen

$$c^{(k)}_{\sigma u \nu} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1)$$

angeben, welche den Gleichungen

$$t_\sigma c^{(k)}_{\sigma u 0} = \sum_{l=1}^{n} q_{k l 0}\, c^{(l)}_{\sigma u 0}, \quad t_\sigma c^{(k)}_{\sigma u \nu} + \nu\, c^{(k)}_{\sigma u, \nu-1} = \sum_{l=1}^{n} q_{k l 0}\, c^{(l)}_{\sigma u \nu}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 1, 2, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1) \qquad \text{(d)}$$

genügen und deren Determinante von Null verschieden ist.

Dann sind durch die Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dz}[\Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(z)] + \frac{t_\sigma}{z}\Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(z) + \frac{\nu}{z}\Phi^{(k)}_{\sigma u, \nu-1}(z) = \sum_{l=1}^{n} q_{k l}(z)\, \Phi^{(l)}_{\sigma u \nu}(z)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1) \qquad \text{(e)}$$

eindeutig Funktionen

$$\Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(z)\,(k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1)$$

bestimmt, welche in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes und auch im Nullpunkte selbst regulär sind und deren Entwicklungen um den Nullpunkt nach Potenzen von z mit den Zahlen $c^{(k)}_{\sigma u \nu}$ als konstanten Gliedern beginnen.

Die Gleichungen

$$f^{(k)}_{\sigma u \nu}(z) = \sum_{\nu_1=0}^{\nu} \binom{\nu}{\nu_1} z^{t_\sigma} (\log z)^{\nu-\nu_1}\, \Phi^{(k)}_{\sigma u \nu_1}(z)$$

$$(k = 1, 2, \ldots n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1) \qquad \text{(f)}$$

liefern alsdann ein Fundamentalsystem von Lösungssystemen des Systems homogener linearer Differentialgleichungen (a).

§ 12. **Zweiter Beweis des Satzes über das Verschwinden einer in einer Halbebene holomorphen Lösung, wenn die Verhältnisse der Wurzeln der charakteristischen Gleichung keine Ausnahmewerte besitzen.** Es sei keine Wurzel der charakteristischen Gleichung $K(t) = 0$ (24) von der Form λ^α, wo α eine ganze Zahl bedeutet. Wir haben unter dieser Voraussetzung in § 5 bewiesen und im Satz 5 ausgesprochen, dass $f_k(x) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ die einzige Lösung des Systems homogener linearer Differenzengleichungen

$$f_k(x+h) = \sum_{l=1}^{n} q_{k l}(x) f_l(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (33)$$

ist, deren sämtliche Funktionen im Falle $|\lambda| > 1$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$ und im Falle $|\lambda| < 1$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ definierten Halbebene regulär sind und die Periode ω besitzen. In dem Falle nun, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung auch keine Verhältnisse von der Form λ^α (α von Null verschieden und ganzzahlig) aufweisen, kann man die Richtigkeit dieses Satzes 5 auch auf Grund des eben bewiesenen Satzes 12 (bei dessen Beweise ja der Satz 5 nicht benützt wurde) nachweisen.

Es seien also die Voraussetzungen dieses und des vorigen Paragraphen über die Wurzeln der charakteristischen Gleichung erfüllt und hierauf

$$f_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

wenn $|\lambda| > 1$ ist, Funktionen von x, welche in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$, und wenn $|\lambda| < 1$ ist, Funktionen von x, welche in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ definierten Halbebene regulär sind, die Periode ω besitzen und dem System homogener linearer Differenzengleichungen (33) genügen. Weil aber die im vorigen Paragraphen definierten Funktionen

$$f^{(k)}_{\sigma u \nu}(x) \, (k = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1)$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems (33) bilden, gibt es ein und nur *ein* System von Funktionen

$$\Omega_{\sigma u \nu}(x) \, (\sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1),$$

so dass die Gleichungen

$$f_k(x) = \sum_{\sigma=1}^{j} \sum_{u=1}^{U_\sigma} \sum_{\nu=0}^{\xi_{\sigma u}-1} \Omega_{\sigma u \nu}(x) f^{(k)}_{\sigma u \nu}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{77}$$

bestehen. Diese Funktionen

$$\Omega_{\sigma u \nu}(x) \; (\sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1)$$

müssen dann die Periode h besitzen. Unter Benützung von (75) folgt aus (77)

$$f_k(x) = \sum_{\sigma=1}^{j} \sum_{u=1}^{U_\sigma} \sum_{\nu=0}^{\xi_{\sigma u}-1} \Omega_{\sigma u \nu}(x) \sum_{\nu_1=0}^{\nu} \binom{\nu}{\nu_1} \varphi_{\sigma, \nu-\nu_1}(x) \, \Phi^{(k)}_{\sigma u \nu_1}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

oder

$$f_k(x) = \sum_{\sigma=1}^{j} \sum_{u=1}^{U_\sigma} \sum_{\nu=0}^{\xi_{\sigma u}-1} \Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(x) \sum_{\nu_1=\nu}^{\xi_{\sigma u}-1} \binom{\nu}{\nu_1} \varphi_{\sigma, \nu_1-\nu}(x)\, \Omega_{\sigma u \nu_1}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Jede der Funktionen

$$\sum_{\nu_1=\nu}^{\xi_{\sigma u}-1} \binom{\nu}{\nu_1} \varphi_{\sigma, \nu_1-\nu}(x)\, \Omega_{\sigma u \nu_1}(x) \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1)$$

kann man somit als Quotienten einer Division darstellen, deren Divisor die Determinante der Funktionen $\Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(x)$ ist und deren Dividend aus dieser zuletzt genannten Determinante entsteht, indem man in der betreffenden Reihe die Funktionen $\Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ durch $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ersetzt. Der Dividend ist demnach, wenn $|\lambda| > 1$ ist, in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|$, und wenn $|\lambda| < 1$ ist, in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ definierten Halbebene regulär. Anderseits kann man aber zeigen, dass der Divisor, nämlich die Determinante $|\Phi^{(k)}_{\sigma u \nu}(x)|$ in dieser Halbebene regulär und in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r|\lambda|$ bzw. in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ definierten Halbebene auch von Null verschieden ist. Bezeichnet man nämlich diese Determinante mit $\Delta(x)$, dann folgt aus (76)

$$\Delta(x+h) = \frac{|q_{kl}(x)|}{|q_{kl0}|} \Delta(x). \tag{78}$$

Vermöge Gl. (78) und vermöge der Tatsache, dass die Entwicklung der Funktion $\Delta(x)$ nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ mit dem von Null verschiedenen Gliede $|c^{(k)}_{\sigma u \nu}|$ beginnt, lässt sich aber die Richtigkeit der eben ausgesprochenen Behauptung unschwer beweisen.

Also sind die Funktionen

$$\sum_{\nu_1=\nu}^{\xi_{\sigma u}-1} \binom{\nu_1}{\nu} \varphi_{\sigma, \nu_1-\nu}(x)\, \Omega_{\sigma u \nu_1}(x)$$

$$(\sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1)$$

für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r|\lambda|$ bzw. für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ regulär und besitzen die Periode ω. Man halte nun σ und u fest und setze dann zunächst $\nu = \xi_{\sigma u} - 1$. Dann folgt: die Funktion $\varphi_{\sigma 0}(x)\, \Omega_{\sigma u\, \xi_{\sigma u}-1}(x)$ ist für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r|\lambda|$ bzw. für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ regulär. Nun hat aber diese Funktion die Eigenschaft, bei Zunahme ihres Arguments um h sich mit t_σ zu multiplizieren, bei Zunahme des Arguments um ω aber unverändert zu bleiben. Daraus folgt, dass diese Funktion überhaupt in der ganzen Ebene holomorph sein muss. Weil aber t_σ nach Voraussetzung nicht von der Form λ^α ist, wo α eine ganze Zahl bedeutet, muss nach Satz 2 identisch

$$\varphi_{\sigma 0}(x)\, \Omega_{\sigma u,\, \xi_{\sigma u}-1}(x) = 0$$

sein. Nun verschwindet $\varphi_{\sigma 0}(x)$ nicht identisch; also muss identisch $\Omega_{\sigma u,\, \xi_{\sigma u}-1}(x) = 0$ sein.

Hat man hierauf bereits bewiesen, dass die Funktionen

$$\Omega_{\sigma u,\, \nu+1}(x),\ \Omega_{\sigma u,\, \nu+2}(x), \ldots, \Omega_{\sigma u,\, \xi_{\sigma u}-2}(x),\ \Omega_{\sigma u,\, \xi_{\sigma u}-1}(x)$$

identisch verschwinden, dann ergibt sich, dass auch die Funktion $\varphi_{\sigma 0}(x)\, \Omega_{\sigma u \nu}(x)$ für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r|\lambda|$ bzw. für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ holomorph ist, und man kann dann auf dieselbe Weise sehliessen, dass auch $\Omega_{\sigma u \nu}(x)$ identisch verschwindet.

Also ist überhaupt für

$$\sigma = 1, 2, \ldots, j;\ u = 1, 2, \ldots, U_\sigma;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_{\sigma u} - 1$$

identisch $\Omega_{\sigma u \nu}(x) = 0$. Nach Gl. (77) ist daher auch identisch $f_k(x) = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, n$, wie es Satz 5 verlangt.

Vierter Abschnitt. Lineare Differenzengleichungen beliebiger Ordnung mit einer unbekannten Funktion und Koeffizienten von gemeinsamer Periode.

§ 13. **Zurückführung auf ein System linearer Differenzengleichungen erster Ordnung.** Die Auflösung einer linearen Differenzengleichung n-ter Ordnung mit einer unbekannten Funktion $f(x)$ von der Form

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(x) f(x + l h) = A(x) \qquad (p_n(x) = 1) \tag{79}$$

kann man darauf zurückführen, dass man das System linearer Differenzengleichungen erster Ordnung in den n unbekannten Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$

$$f_1(x+h)=f_2(x),\ f_2(x+h)=f_3(x),\ldots,f_{n-1}(x+h)=f_n(x),$$

$$f_n(x+h)=-\sum_{l=1}^{n}p_{l-1}(x)f_l(x)+A(x) \qquad (80)$$

auflöst und dann $f_1(x)=f(x)$ setzt. Es kann daher aus jedem Satze über lineare Differenzengleichungen erster Ordnung von der Form

$$f_k(x+h)=\sum_{l=1}^{n}q_{kl}(x)f_l(x)+B_k(x) \qquad (k=1,2,\ldots,n) \qquad (22)$$

durch Spezialisierung ein Satz über lineare Differenzengleichungen mit einer unbekannten Funktion von der Form (79) abgeleitet werden. Im nächsten Paragraphen wollen wir die Sätze über lineare Differenzengleichungen erster Ordnung von der Form (22), die wir in den beiden vorhergegangenen Abschnitten kennen gelernt haben, auf diese Weise als Sätze über lineare Differenzengleichungen n-ter Ordnung von der Form (79) aussprechen, ohne auf die Einzelheiten der Rechnung einzugehen.

§ 14. **Wortlaut der Sätze des zweiten und dritten Abschnittes im Falle einer einzigen linearen Differenzengleichnng n-ter Ordnung mit einer unbekannten Funktion.** Wir wollen in diesem Paragraphen unter

$$p_l(x) \quad (l=0,1,2,\ldots,n-1)$$

Funktionen von x, welche sich in einer gewissen, durch eine zu ω parallele Gerade begrenzten Halbebene als gewöhnliche Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ darstellen, und unter $p_n(x)$ die Konstante Eins verstehen. Wir wollen schreiben

$$p_l(x)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}p_{l\alpha}e^{\frac{2\pi i\alpha x}{\omega}} \qquad (l=0,1,2,\ldots,n); \qquad (81)$$

hier ist $p_{n0}=1$ und $p_{n\alpha}=0$ für $\alpha=1,2,\ldots$ Die Konstante p_{00} setzen wir als von Null verschieden voraus. Ausserdem wollen wir unter R eine positive reelle Zahl von der Eigenschaft verstehen, dass für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right|\leqq R$ die Funktionen

$$p_l(x) \quad (l=0,1,2,\ldots,n)$$

regulär sind und daher die auf den rechten Seiten der Gleichungen (81) stehenden

Potenzreihen konvergieren, und ebenso unter r eine der Ungleichung $r \leqq R$ genügende positive reelle Zahl von der Eigenschaft, dass für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ auch $p_0(x) \neq 0$ ist. Schliesslich möge die algebraische Gleichung n-ten Grades in t

$$\sum_{l=0}^{n} p_{l0}\, t^l = 0 \tag{82}$$

die »charakteristische» Gleichung der linearen Differenzengleichung

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(x) f(x + l h) = A(x) \tag{79}$$

heissen. Mit diesen Voraussetzungen und Bezeichnungsweisen lautet

1. der Satz 4 über die Konvergenz der formal genügenden Entwicklung im Falle einer linearen Differenzengleichung n-ter Ordnung mit einer unbekannten Funktion folgendermassen:

Satz 13. *Es sei ϱ eine positive reelle Zahl, welche im Falle $|\lambda| > 1$ der Ungleichung $\varrho \leqq R$ und im Falle $|\lambda| < 1$ der Ungleichung $\varrho \leqq r$ genügt. Die Funktion $A(x)$ sei hierauf in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$ definierten Halbebene regulär und besitze die Periode ω. In der Laurentschen Reihe in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$, welche daher in dieser Halbebene die genannte Funktion darstellt, mögen höchstens endlich viele Gleider mit Potenzen von $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ mit negativem Exponenten vorkommen. Es besteht also eine für $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$ konvergente Entwicklung von der Gestalt*

$$A(x) = \sum_{\alpha=\mu}^{\infty} A_\alpha e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}. \tag{83}$$

Gibt es dann ein System von Zahlen a_α $(\alpha = \mu,\ \mu + 1,\ \mu + 2, \ldots)$, welche die Gleichungen

$$\sum_{\beta=\mu}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} p_{l,\alpha-\beta} \lambda^{\beta l} a_\beta = A_\alpha \quad (\alpha = \mu,\ \mu + 1,\ \mu + 2, \ldots) \tag{84}$$

befriedigen, dann konvergiert die auf der rechten Seite der Gleichung

$$f(x) = \sum_{\alpha=\mu}^{\infty} a_\alpha e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} \tag{85}$$

stehende Potenzreihe in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ *für* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho |\lambda|^n$, *wenn* $|\lambda| > 1$ *ist, und für* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$, *wenn* $|\lambda| < 1$ *ist, und stellt eine Funktion* $f(x)$ *dar, welche für*

$$\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho |\lambda|^n \text{ bzw. für } \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho$$

regulär ist, die Periode ω *besitzt und der linearen Differenzengleichung* n*-ter Ordnung*

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(x) f(x + l h) = A(x) \tag{79}$$

genügt.

2. Der Satz 5 über das Verschwinden einer in einer Halbebene holomorphen Lösung des homogenen Gleichungssystems hat hier folgenden Wortlaut.

Satz 14. *Es sei keine der* n *Wurzeln der charakteristischen Gleichung*

$$\sum_{l=0}^{n} p_{l0} t^l = 0 \tag{82}$$

von der Form λ^α, *wo* α *eine ganze Zahl bedeutet. Gibt es dann in dem Falle, dass* $|\lambda| > 1$ *ist, eine Funktion* $f(x)$, *welche für* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R |\lambda|^n$, *und in dem Falle, dass* $|\lambda| < 1$ *ist, eine Funktion* $f(x)$, *welche für* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ *regulär ist,* ω *zur Periode hat und der homogenen linearen Differenzengleichung*

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(x) f(x + l h) = 0 \tag{86}$$

genügt, dann muss identisch $f(x) = 0$ *sein.*

3. Satz 9 (§ 6) erhält folgende Gestalt.

Satz 15. *Es seien* ϱ_1 *und* ϱ_2 *positive reelle Zahlen, welche im Falle* $|\lambda| > 1$ *den Ungleichungen* $\varrho_1 \leqq r$, $\varrho_2 \leqq R$, $\varrho_1 < \varrho_2$ *und im Falle* $|\lambda| < 1$ *der Ungleichung* $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq r$ *genügen. Hierauf sei die Funktion* $A(x)$ *für* $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ *regulär* *und besitze die Periode* ω. *Es besteht also eine für* $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ *konvergente Reihenentwicklung von der Gestalt*

$$A(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} A_\alpha e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}. \tag{87}$$

Dann kann man stets in mannigfach verschiedener Weise eine Funktion $f(x)$ *angeben, welche in dem Falle, dass* $|\lambda| > 1$ *ist, in dem durch die Ungleichung* $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|^n$, *und in dem Falle, dass* $|\lambda| < 1$ *ist, in dem durch die Ungleichung* $\varrho_1 |\lambda|^n \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ *definierten Streifen meromorph ist, die Periode* ω *besitzt und der linearen Differenzengleichung*

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(x) f(x + l h) = A(x) \tag{79}$$

genügt. Wenn insbesondere keine Zahl von der Form λ^α, *wo* α *eine ganze Zahl ist, Wurzel der charakteristischen Gleichung*

$$\sum_{l=0}^{n} p_{l0}\, t^l = 0 \tag{82}$$

ist, dann gibt es eine und nur eine Funktion $f(x)$, *welche in dem genannten Streifen holomorph ist, die Periode* ω *besitzt und der Differenzengleichung* (79) *genügt. Durch die Gleichungen*

$$\sum_{\beta=\gamma}^{\alpha} \sum_{l=0}^{n} p_{l,\alpha-\beta} \lambda^{\beta l} b_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} \quad (\alpha \geqq \gamma) \tag{88}$$

ist nämlich in diesem Falle ein System von Zahlen $b_{\alpha\gamma}$ $(\alpha \geqq \gamma)$ *eindeutig bestimmt. Die Gleichung*

$$f(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}} b_{\alpha\gamma} A_\gamma \tag{89}$$

definiert dann jene Lösung der Differenzengleichung (79); *die rechtsstehende Summe ist nämlich, wenn* $|\lambda| > 1$ *ist, für* $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|^n$, *und wenn* $|\lambda| < 1$ *ist, für* $\varrho_1 |\lambda|^n \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ *absolut und gleichmässig konvergent.*

Die Gleichung (89) *liefert in dem durch diese Ungleichung definierten Streifen auch die Laurentsche Entwicklung der Funktion* $f(x)$ *nach Potenzen von* $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$:

$$f(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} a_\alpha e^{\frac{2\pi i \alpha x}{\omega}}, \tag{90}$$

wo

$$a_\alpha = \sum_{\gamma=-\infty}^{\alpha} b_{\alpha\gamma} A_\gamma \qquad (\alpha \text{ beliebig ganzzahlig}) \tag{91}$$

ist. Sie lehrt auch, dass man in diesem Streifen die Funktion $f(x)$ *mittels der Gleichung*

$$f(x) = \sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty} A_\gamma f_\gamma(x) \tag{92}$$

aus denjenigen Funktionen $f_\gamma(x)$ (γ *ganzzahlig*) *zusammensetzen kann, welche für* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R|\lambda|^n$ *bzw. für* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ *regulär sind, die Periode* ω *besitzen und den Differenzengleichungen*

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(x) f_\gamma(x + l h) = e^{\frac{2\pi i \gamma x}{\omega}} \tag{93}$$

genügen.

4. Die homogene lineare Differenzengleichung

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(x) f(x + l h) = 0 \tag{86}$$

führen wir nach § 13 auf folgendes System homogener linearer Differenzengleichungen 1. Ordnung zurück:

$$f_1(x+h) = f_2(x),\ f_2(x+h) = f_3(x), \ldots, f_{n-1}(x+h) = f_n(x),$$

$$f_n(x+h) = -\sum_{l=1}^{n} p_{l-1}(x) f_l(x). \tag{94}$$

Das zu diesem System homogener linearer Differenzengleichungen adjungierte System hat folgende Gestalt:

$$
\begin{aligned}
g_1(y-h) &= \qquad\qquad - p_0(y)\, g_n(y) \\
g_2(y-h) &= g_1(y) - p_1(y)\, g_n(y) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
g_n(y-h) &= g_{n-1}(y) - p_{n-1}(y)\, g_n(y).
\end{aligned} \tag{95}
$$

Statt dessen kann man auch schreiben

$$
\begin{aligned}
g_1(y-h) &= \qquad\qquad - p_0(y)\, g_n(y) \\
g_2(y-2h) &= g_1(y-h) - p_1(y-h)\, g_n(y-h) \\
g_3(y-3h) &= g_2(y-2h) - p_2(y-2h)\, g_n(y-2h) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
g_n(y-nh) &= g_{n-1}[y-(n-1)h] - p_{n-1}[y-(n-1)h]\, g_n[y-(n-1)h].
\end{aligned}
$$

Durch Addition aller dieser Gleichungen erhält man aber:

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(y-lh)\, g_n(y-lh) = 0.$$

Aus diesem Grunde heisst die homogene lineare Differenzengleichung

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(y-lh)\, g(y-lh) = 0 \tag{96}$$

die zu der homogenen linearen Differenzengleichung (86) adjungierte homogene lineare Differenzengleichung.

Nun möge wieder keine Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$\sum_{l=0}^{n} p_{l0}\, t^l = 0 \tag{82}$$

von der Form λ^α sein, wo α eine ganze Zahl bedeutet. Dann hat es keine Schwierigkeit, aus dem in § 7 behandelten Zusammenhang zwischen zwei adjungierten Systemen linearer Differenzengleichungen erster Ordnung den entsprechenden Zusammenhang zwischen zwei adjungierten linearen Differenzengleichungen n-ter Ordnung mit einer unbekannten Funktion abzuleiten. Die Ausführungen des § 7 übertragen sich nämlich in folgender Weise auf den Fall einer linearen Differenzengleichung n-ter Ordnung mit einer unbekannten Funktion.

Die positiven reellen Zahlen ϱ_1 und ϱ_2 mögen im Falle $|\lambda| > 1$ der Ungleichung $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq r$ und im Falle $|\lambda| < 1$ den Ungleichungen $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq R|\lambda|^{n-1}$, $\varrho_1 \leqq r$ genügen. Hierauf sei die Funktion $V(y)$ für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ regulär und besitze die Periode ω, so dass für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ eine Reihenentwicklung von der Gestalt

$$V(y) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} V_\alpha e^{-\frac{2\pi i \alpha y}{\omega}} \tag{97}$$

besteht. Dann gibt es, wenn $|\lambda| > 1$ ist, eine und nur eine Funktion $g(y)$, welche für $\frac{\varrho_1}{|\lambda|^n} \leqq \left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$, und wenn $|\lambda| < 1$ ist, eine und nur eine Funktion $g(y)$, welche für $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| \leqq \frac{\varrho_2}{|\lambda|^n}$ regulär ist, die Periode ω besitzt und der linearen Differenzengleichung

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(y - l h)\, g(y - l h) = V(y) \tag{98}$$

genügt. Diese Funktion $g(y)$ ist nämlich durch die Gleichung

$$g(y) = \sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i \gamma y}{\omega}} b_{\alpha\gamma} V_\alpha \tag{99}$$

definiert, wo $b_{\alpha\gamma}$ $(\alpha \geqq \gamma)$ die in Satz 15 definierten Zahlen sind. Die rechtsstehende Summe ist nämlich in dem durch die Ungleichung $\frac{\varrho_1}{|\lambda|^n} \leqq \left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ bzw. in dem durch die Ungleichung $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}\right| \leqq \frac{\varrho_2}{|\lambda|^n}$ definierten Streifen absolut und gleichmässig konvergent.

Die Gleichung (99) liefert in jenem Streifen auch die Laurentsche Entwicklung der Funktion $g(y)$ nach Potenzen von $e^{\frac{2\pi i y}{\omega}}$. Setzt man nämlich

$$\sum_{\alpha=\gamma}^{\infty} b_{\alpha\gamma} V_\alpha = v_\gamma, \tag{100}$$

dann ist

$$g(y) = \sum_{\gamma=-\infty}^{+\infty} v_\gamma \, e^{-\frac{2\pi i \gamma y}{\omega}}. \tag{101}$$

Die Gleichung (99) lehrt ferner, dass man die Funktion $g(y)$ mittels der Gleichung

$$g(y) = \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} V_\alpha \, g_\alpha(y) \tag{102}$$

aus denjenigen Funktionen $g_\alpha(y)$ zusammensetzen kann, welche für

$$\left| e^{\frac{2\pi i y}{\omega}} \right| \leqq r \text{ bzw. für } \left| e^{\frac{2\pi i y}{\omega}} \right| \leqq \frac{R\,|\lambda|^{n-1}}{|\lambda|^n} = \frac{R}{|\lambda|}$$

regulär sind, die Periode ω besitzen und den Differenzengleichungen

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(y - l\,h)\, g_\alpha(y - l\,h) = e^{-\frac{2\pi i \alpha y}{\omega}} \tag{103}$$

genügen.

5. Die Picardsche Abschätzung. (Spezialisierung des Satzes 10)

Satz 16. *Es sei jeder Ausdruck von der Form* $\sum_{l=0}^{n} p_{l0}\, \lambda^{l\alpha}$, *wo* α *eine ganze Zahl ist, von Null verschieden. Wenn dann* ϱ_1 *und* ϱ_2 *zwei feste positive reelle Zahlen sind, welche im Falle* $|\lambda| > 1$ *den Ungleichungen* $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq R$, $\varrho_1 \leqq r$ *und im Falle* $|\lambda| < 1$ *der Ungleichung* $\varrho_1 < \varrho_2 \leqq r$ *genügen, dann ist es möglich, eine positive reelle Zahl* $\varkappa$ *von der Beschaffenheit anzugeben, dass bei jeder Funktion* $A(x)$, *welche für* $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ *regulär ist und die Periode* ω *besitzt, die zugehörige Funktion* $f(x)$, *welche* (s. Satz 15) *in dem Falle, dass* $|\lambda| > 1$ *ist, dadurch definiert ist, dass sie für* $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|^n$, *und in dem Falle, dass* $|\lambda| < 1$ *ist, dadurch, dass sie für* $\varrho_1 |\lambda|^n \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ *regulär ist, die Periode* ω *besitzt und der linearen Differenzengleichung*

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(x)\, f(x + l\,h) = A(x) \tag{79}$$

genügt, für $\varrho_1 \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2 |\lambda|^n$ *bzw. für* $\varrho_1 |\lambda|^n \leqq \left| e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} \right| \leqq \varrho_2$ *die Ungleichung*

$$|f(x)| \leqq \varkappa\, M[A(x)] \tag{104}$$

erfüllt, wo $M[A(x)]$ *den grössten absoluten Wert bezeichnet, den die Funktion* $A(x)$ *für* $\varrho_1 \leqq \left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq \varrho_2$ *annimmt.*

6. Wir werden sagen, dass n Lösungen der homogenen linearen Differenzengleichung

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(x) f(x + l h) = 0 \tag{86}$$

ein Fundamentalsystem bilden, wenn die entsprechenden n Lösungen des Systems homogener linearer Differenzengleichungen erster Ordnung in den unbekannten Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$

$$f_1(x+h) = f_2(x),\ f_2(x+h) = f_3(x), \ldots, f_{n-1}(x+h) = f_n(x),$$
$$f_n(x+h) = -\sum_{l=1}^{n} p_{l-1}(x) f_l(x) \tag{94}$$

ein Fundamentalsystem bilden.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass (veränderte Bedeutung des Index!) die n Lösungen $f_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ der homogenen linearen Differenzengleichung (86) ein Fundamentalsystem bilden, kann man daher auf folgende drei Arten aussprechen:

1.) Es besteht keine Relation von der Form

$$\sum_{s=1}^{n} \Omega_s(x) f_s(x) = 0$$

mit Funktionen $\Omega_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, welche die Periode h besitzen und nicht alle identisch verschwinden.

2.) Die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdot & \cdot & f_n(x) \\ f_1(x+h) & f_2(x+h) & \cdot & \cdot & f_n(x+h) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1[x+(n-1)h] & f_2[x+(n-1)h] & \cdot & \cdot & f_n[x+(n-1)h] \end{vmatrix}$$

(die »Differenzendeterminante« der Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$) verschwindet nicht identisch.[1]

3.) Es gibt keine Funktionen $W_l(x)$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$, die nicht sämtliche identisch verschwinden, so dass für $s = 1, 2, \ldots, n$ die identische Gleichung

$$\sum_{l=1}^{n} W_l(x) f_s[x + (l-1)h] = 0$$

besteht.

Ferner gelten entsprechend wie bei Systemen linearer Differenzengleichungen erster Ordnung die Sätze:

1.) Bilden die n Lösungen $f_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ der homogenen linearen Differenzengleichung (86) ein Fundamentalsystem, dann ist jede Lösung auf eine und nur eine Weise in der Form

$$f(x) = \sum_{s=1}^{n} \Omega_s(x) f_s(x) \tag{105}$$

darstellbar, wo die Funktionen $\Omega_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ die Periode h besitzen.

2.) Bilden die n Lösungen $f_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ der homogenen linearen Differenzengleichung (86) ein Fundamentalsystem, und ist $f_0(x)$ eine partikuläre Lösung der nicht homogenen linearen Differenzengleichung

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(x) f(x + lh) = A(x), \tag{79}$$

dann ist jede Lösung der Differenzengleichung (79) auf eine und nur eine Weise in der Form

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{s=1}^{n} \Omega_s(x) f_s(x) \tag{106}$$

darstellbar, wo die Funktionen $\Omega_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ die Periode h besitzen.

Wir können nun den Satz 11 über die Existenz eines periodischen Fundamentalsystems für homogene lineare Differenzengleichungen n-ter Ordnung mit einer unbekannten Funktion folgendermassen aussprechen.

[1] Betrachtet man auch nicht analytische Lösungen der Differenzengleichungen (86), dann muss man auch noch über das Auftreten von singulären Stellen der Funktionen $f_s(x)$ und Nullstellen der Differenzendeterminante einschränkende Bedingungen hinzufügen.

Satz 17. *Es gibt in dem Falle, dass $|\lambda| > 1$ ist, stets ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen linearen Differenzengleichung*

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(x) f(x + l h) = 0, \tag{86}$$

dessen sämtliche Funktionen in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R\,|\lambda|^n$ und in dem Falle, dass $|\lambda| < 1$ ist, in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ definierten Halbebene meromorph sind und die Periode ω besitzen.

7. (Vergleiche § 11, Satz 12.) **Satz 18.** *Wenn keine zwei Wurzeln der charakteristischen Gleichung*

$$\sum_{l=0}^{n} p_{l0}\, t^l = 0 \tag{82}$$

eine Zahl von der Form λ^α, wo α eine von Null verschiedene ganze Zahl ist, zum Quotienten haben, dann kann man ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen linearen Differenzengleichung

$$\sum_{l=0}^{n} p_l(x) f(x + l h) = 0, \tag{86}$$

dessen sämtliche Funktionen im Falle $|\lambda| > 1$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R\,|\lambda|^n$ und im Falle $|\lambda| < 1$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ definierten Halbebene meromorph sind und die Periode ω besitzen, auf folgende Weise angeben.

Es seien t_σ $(\sigma = 1, 2, \ldots, j)$ die voneinander verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung und ξ_σ deren Vielfachheiten $\left(\sum_{\sigma=1}^{j} \xi_\sigma = n\right)$. Dann ist ein System von Funktionen $\Phi_{\sigma\nu}(x)$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, j;\ \nu = 0, 1, \ldots, \xi_\sigma - 1)$, welche sich im Falle $|\lambda| > 1$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R\,|\lambda|^n$ und im Falle $|\lambda| < 1$ in der durch die Ungleichung $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ definierten Halbebene als gewöhnliche Potenzreihen in $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ darstellen, die mit der Einheit, wenn $\nu = 0$ ist, und mit der Null, wenn $\nu > 0$ ist, als konstanten Gliedern beginnen, durch die Gleichungen

$$\sum_{\nu_1=0}^{\nu}\binom{\nu}{\nu_1}\sum_{l=\nu-\nu_1}^{n} l(l-1)\cdots(l-\nu+\nu_1+1)\, t_\sigma^{l-\nu+\nu_1}\, p_l(x)\, \Phi_{\sigma\nu_1}(x+lh)=0 \qquad (107)$$

eindeutig bestimmt.

Sind dann weiter $\varphi_{\sigma\nu}(x)$ $(\sigma=1,2,\ldots,j;\ \nu=0,1,\ldots,\xi_\sigma-1)$ *nicht identisch verschwindende, meromorphe Funktionen, welche den Differenzengleichungen*

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{\sigma 0}(x+h) &= t_\sigma \varphi_{\sigma 0}(x) \qquad (\sigma=1,2,\ldots,j) \\ \varphi_{\sigma\nu}(x+h) &= t_\sigma \varphi_{\sigma\nu}(x)+\nu\,\varphi_{\sigma,\nu-1}(x) \qquad (\sigma=1,2,\ldots,j;\ \nu=1,2,\ldots,\xi_\sigma-1)\end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

genügen und ω *zur Periode haben, dann liefern die Gleichungen*

$$f_{\sigma\nu}(x)=\sum_{\nu_1=0}^{\nu}\binom{\nu}{\nu_1}\varphi_{\sigma,\nu-\nu_1}(x)\,\Phi_{\sigma\nu_1}(x) \qquad (\sigma=1,2,\ldots,j;\ \nu=0,1,\ldots,\xi_\sigma-1) \qquad (109)$$

ein Fundamentalsystem $f_{\sigma\nu}(x)$ $(\sigma=1,2,\ldots,j;\ \nu=0,1,\ldots,\xi_\sigma-1)$ *von Lösungen der homogenen Differenzengleichungen* (86), *dessen sämtliche Funktionen wirklich für* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq R\,|\lambda|^n$ *bzw. für* $\left|e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}\right| \leqq r$ *meromorph sind und die Periode* ω *besitzen.*

Aus den Gleichungen (109) kann man darüber Aufschluss gewinnen, wie die Lösungen der homogenen linearen Differenzengleichung (86) sich verhalten, wenn der Ausdruck $e^{\frac{2\pi i x}{\omega}}$ dem Grenzwert Null zustrebt. Man beachte, dass auch der Satz von Poincaré über das Verhalten der Lösungen homogener linearer Differenzengleichungen im Unendlichen über dieses Verhalten der Lösungen der Differenzengleichung (86) Aufschlüsse gibt, welche mit den hier angedeuteten zusammenhängen.